КВАНТ
ЖУРНАЛ

1974

1 - 12

НОМЕР
1

Основан в 1970 году.
1974
1

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. Б. Мамулова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Л. Е. Садовский.* Математика для спорта и спорт для математики
9 *В. З. Кресин.* Вблизи абсолютного нуля
13 *М. Л. Гервер.* Сюрпризы
22 *А. В. Бялко.* Электролиз и закон сохранения энергии
27 *И. И. Мороз.* Электрохимическая обработка металлов

Лаборатория «Кванта»

31 *М. П. Головей, Г. Ф. Добржанский.* Игрушки из кристаллов

Математический кружок

35 *Г. А. Гуревич, Ж. М. Раббот.* О вероятностях и «хороших» числах

Задачник «Кванта»

41 Задачи М241—М245; Ф253—Ф257
44 Решения задач М200—М204; Ф211, Ф212

Практикум абитуриента

53 *Г. В. Дорофеев.* Переформулировка задачи
60 *Л. Г. Асламазов.* Свойства паров, испарение и кипение жидкостей
67 *А. И. Забоев, И. Н. Николаев, Н. В. Шолохов.* Московский инженерно-физический институт

Информация

69 *В. К. Асланян, А. П. Кирьянов, Т. А. Чугунова.* Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте
72 Вниманию семиклассников! Всесоюзная заочная математическая школа объявляет прием учащихся

Рецензии, библиография

74 *А. Ф. Хрусталев.* Старые ошибки... вторым изданием

«Квант» для младших школьников

76 Задачи
77 *А. Н. Колмогоров.* Решето Эратосфена
78 **Ответы, указания, решения**

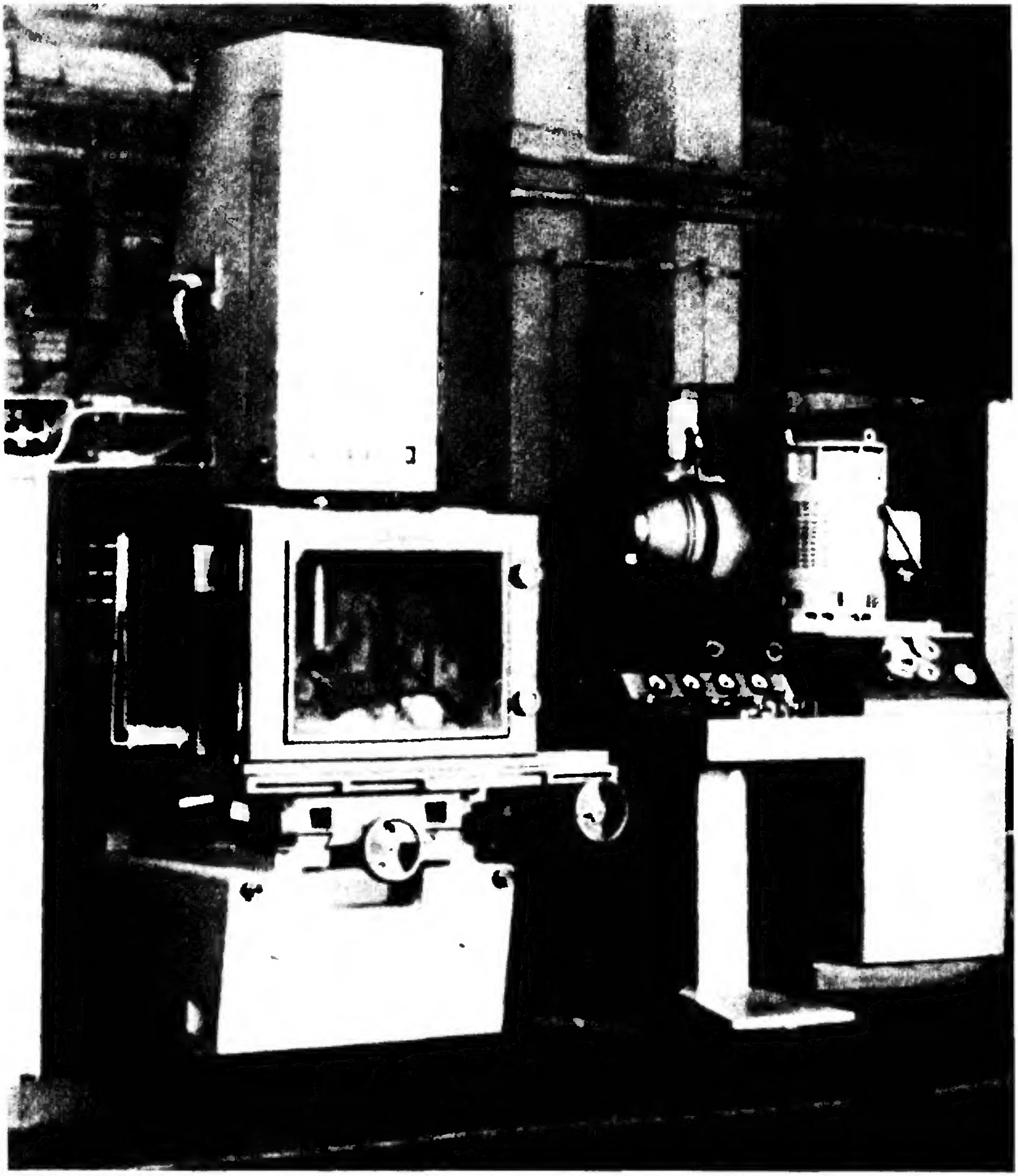
Уголок коллекционера

А. В. Алтыкис. На марках — Макс Планк *(3-я с. обложки)*

Смесь

(с. 12, 29, 33, 66, 71)

© *«Квант», 1974 год.*



О том, как сделали диковинную рыбу, фотографию которой вы видите на первой странице обложки, и сверкающую елочку (см. фото на четвертой странице обложки), вы можете прочитать в статье М. П. Головея и Г. Ф. Добржанского «Игрушки из кристаллов» *(с. 31)*.

На помещенной фотографии показан электрохимический станок модели 4423, предназначенный для обработки металлических деталей электрохимическим методом.

Во многих случаях электрохимические методы обработки оказываются надежнее и выгоднее обычных механических методов. Об этом рассказывается в статье Н. П. Мороза «Электрохимическая обработка металлов» *(с. 27)*.

Л.Е.Садовский

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПОРТА И СПОРТ ДЛЯ МАТЕМАТИКИ

В нашей стране физическому воспитанию молодежи уделяется очень много внимания. Без спорта гармоническое развитие личности невозможно. Спорт закаляет человека не только физически; он формирует и высокие духовные качества, создает хорошую работоспособность.

Редакция журнала «Квант» получает много писем, авторы которых спрашивают, можно ли совместить занятия спортом с увлеченностью физикой и математикой, насколько плодотворен такой союз. На вопросы наших читателей отвечает доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Московского института инженеров транспорта (МИИТа) Л. Е. Садовский.

Математика и спорт, физика и спорт. Многим юношам и девушкам, любящим математику и физику, занятия эти представляются несовместимыми лишь по недоразумению. Это происходит из-за отсутствия опыта или в силу того, что в ряде школ с хорошо поставленным преподаванием точных наук уроки физической культуры организованы менее удачно. Во всяком случае, среди ребят, которых мы привыкли считать способными и умными, встречается, к сожалению, этакое пренебрежительное отношение к физкультуре, спортивным играм, своеобразное бахвальство отлыниванием от них. Таким ребятам невдомек, что они сами обедняют свою жизнь, снижают свою работоспособность и лишают себя неизведанных ощущений.

В то же время многие математики и физики старшего поколения (увы, к ним принадлежу и я) с большим вниманием относятся к своим спортивным занятиям. И это несмотря на то, что в наши школьные годы спортивное воспитание находилось в стадии становления. В то время о детских спортивных школах, так же как и о школах физико-математических, кружках при университетах и вузах, математических олимпиадах и о журнале, подобном «Кванту», можно было только мечтать.

В годы учебы людей моего поколения объем знаний, сообщаемых в школе, был существенно меньше. Занятия в группах были организованы по так называемому лабораторно-бригадному методу: все учат уроки в силу своих возможностей и желания, а ответ за всю бригаду держит один — наиболее успевающий по данному предмету ученик.

Прошло несколько десятилетий, существенно изменивших условия нашей жизни; произошел качественный скачок в образовании, особенно в области точных наук. Возросший поток информации увеличил психологические нагрузки, занятия в школе стали более напряженными. Новые условия жизни и учебы потребовали от юношества (и даже от людей взрослых) определенной психологической и физической устойчивости. Я убежден на основании многолетних наблюдений и собственного опыта, что такая устойчивость особенно необходима тем, кто занимается математикой и физикой. В самом деле, и тем, кто пока еще только решает трудные задачи, и тем, кто уже размышляет над сложными проблемами, хорошо известно особое умственное напряжение, необходимое для такой деятельности. Людям, знающим специфику серьезных занятий математикой, физикой, их приложениями, известны и радость открытия (одна из удивительных радостей жизни, не всем знакомая), и напряженный труд, и горечь отказа от некоторых развлечений, и усталость, которая сопутствует периодам напряженной работы. Норберт Винер писал: «Интенсивная исследовательская работа изматывает до предела. Если ученый лишится возможности отдыхать с такой же полнотой, с которой он отдается работе, это сразу же скажется на качестве его статей»*).

У меня много друзей—математиков и физиков, и у всех я заметил стремление к разрядке «умственной напряженности». Однако разные люди эту разрядку обретают различными путями. Одни увлекаются бриджем (разве это не игра для математиков?), другие шахматами (шахматное искусство достойно мудрых!), третьи — эпизодическими прогулками. И, увы, очень немногие — физической культурой. Глубоко убежден, что ни бридж, ни шахматы, ни другие игры, хотя и вызывающие у меня симпатию, но требующие умственного напряжения, не приносят настоящего отдыха. К тому же серьезные занятия одновременно математикой и шахматами, по-видимому, невозможны. Примеров этому множество, напомню лишь об одном, наиболее ярком: Э. Ласкер, став выдающимся шахматистом и чемпионом мира, ушел из математики, в которой раньше активно работал.

Некоторые из хорошо знакомых мне математиков и физиков говорили, что крепкие табаки и напитки приносят ясность мысли и некоторый творческий подъем. Я не спорил с подобной точкой зрения, но предлагал испробовать другое средство — пробежаться, например; регулярно заниматься посильными физическими упражнениями, посещать плавательный бассейн или приобщиться к спортивным играм — теннису, баскетболу, бадминтону, волейболу или другим. Я ссылался на Винера, который говорил, что ему лучше всего писалось, когда умственная работа чередовалась с простыми неинтеллектуальными удовольствиями — прогулками, плаванием. Поклонникам игр интеллектуальных объяснял, что в спорте и спортивных играх ум, образование, расчет — вещи далеко не лишние. Ведь недаром говорят, что в теннис играют руками, а выигрывают — головой. Хороший теннисист должен обладать разнообразной и тонкой техникой ударов. Выходя на корт, теннисист встречается с соперником, который, как правило, не уступает ему в технике. И здесь уже все решает тактика, сметка, расчет и предвидение. Недаром подавляющая часть хороших теннисистов — образованные люди, недаром среди работников умственного труда теннис — широко распространенная игра. Но теннис не исключение, аналогичные соображения можно было бы высказать и относительно других спортивных игр. По мнению крупных авторитетов, современный спорт вообще становится в последние годы все более интеллектуальным. Следует также иметь в виду, что не только шашки, шахматы, карточные игры или бильярд служат источником многих интересных математических задач. Их можно встретить в спорте повсюду. Подумайте, например, сколько еще нерешенных проблем возникает при рассмотрении взаимодействия мяча с грунтом или травой. Раскройте книгу Кемени и Снелла «Конечные марковские цепи», и вы обнаружите любопытное обсуждение системы игры в теннис с позиций случайных процессов.

---

*) Винер Н. Я — математик. М., «Наука», 1967, с. 123.

Математические методы все шире используются в спорте. Так, например, методами математической статистики устанавливают перспективность спортсменов, условия, наиболее благоприятные для тренировок, их эффективность, обрабатывают показания датчиков, контролирующих нагрузки спортсмена. Теория информации позволяет оценить степень загруженности зрительного аппарата при занятиях различными видами спорта. Математика и физика помогают изыскивать наиболее удачные формы гребных судов и весел. Существует мнение, что идеи П. Л. Чебышева, касающиеся раскроя тканей, были использованы при конструировании суконной оплетки теннисного мяча*).

В то же время занятия спортом благотворно влияют на умственную деятельность и психику человека, укрепляют его волю. Этот факт бесспорен для многих ученых, занимающихся плаванием, теннисом, бегом, лыжами, альпинизмом. Их энтузиазм заразил меня. В свою очередь и мне удалось привить вкус к спорту многим друзьям.

Вспоминаю послевоенные годы, когда моя семья жила в ветхом доме в Сокольниках на Большой Оленьей. Каждое воскресенье зимой у нас был «день открытых дверей» для друзей-лыжников. Одни приезжали, другие уезжали. Порой в кладовке хранилось до двадцати пар лыж. Каждый мог получить чай, печенье, сыр. Все грелись у печи, и приятная усталость после хорошей лыжной прогулки и горячий чай располагали к беседе. В те годы в Сокольниках, в Яузском и Лосиноостровском лесничестве лыжников было немного, баз почти не было, и наша «лыжная база» пользовалась большой популярностью. Ее посещали многие друзья — математики и физики, связисты — И. И. Гроднев (ныне профессор),

---

*) Профессор нашей кафедры Е. С. Вентцель поведала мне, что, будучи студенткой математического факультета Ленинградского университета, слышала от своих учителей о лекции по раскрою одежды, объявленной П. Л. Чебышевым. Среди слушателей было много портных. Лекцию П. Л. Чебышев начал словами: «Предположим, что человек имеет форму шара» ...

И. Е. Ефимов (профессор, ныне ректор МИИСа), народная артистка РСФСР Зара Долуханова, киноактриса Элла Нечаева. Следуя нашему примеру, на лыжи встали не только все соседи, но и жильцы соседних домов.

«Вот вы ударились в частности»,— скажет критически мыслящий читатель. Да, я несколько рискую, но мне кажется, что убедительнее всего можно писать о спорте, опираясь на собственные «спортивные впечатления». Не сомневаюсь, что читатель поймет меня правильно: мне хотелось бы по просьбе редакции «Кванта» рассказать о своем подходе к спорту и о практике общения с ним. У меня нет ни малейшего сомнения в том, что то немногое, чего мне удалось достигнуть в математике и педагогической деятельности, стало возможным благодаря постоянным занятиям спортом. Как без математики, так и без спорта своей жизни я не мыслю.

Впервые теннисную ракетку я взял в руки в сорок лет и так увлекся, что через пять лет добился первого разряда. Эта увлеченность охватила почти всех детей наших домов на Б. Оленьей и моих детей также. К счастью, гостеприимные корты спортклуба «Шахтер» располагались поблизости. О, если бы все спортивные клубы, стадионы, ДСШ были такими доступными для жаждущих спорта! Тогда многие проблемы молодежного спорта оказались бы решенными без многолетних дискуссий.

Вместе со мной «врывались» в теннис профессора П. А. Киткин, В. М. Фокеев, В. А. Лурье, доцент С. В. Борискин и другие. П. А. Киткин был директором одного из институтов в Кацевели (в Крыму, близ Симеиза). Там он вместе с другими энтузиастами построил корт, обнес его рыболовной сетью и проводил тренировки. Мы были его гостями в летнее время и спали под деревьями вблизи корта.

Прошли годы. Все мы научились прилично играть в теннис, а это требует большой выносливости. Олимпийский чемпион в беге Питер Снелл писал, что, к его удивлению, нагрузка при этой игре оказалась превышающей нагрузку при беге. Что же помогло нам, уже немолодым людям, справиться с этими трудностями? Физическая подготовка и выносливость, выработанные в предшествовавшие годы ходьбой на лыжах, регулярными пробежками, и, в особенности, плаванием.

При Московском Доме ученых в послевоенные годы ряд лет работала плавательная секция. В ней занимались член-корреспондент АН СССР Л. А. Люстерник, академик С. Л. Соболев и другие. Три раза в неделю с семи утра мы в течение часа усиленно тренировались. Обновленные, полные сил отправлялись на работу. Даже много лет спустя С. Л. Соболев говорил, что это было замечательное время, когда чудесно думалось и писалось. Л. А. Люстерник с удивлением обнаружил, что забыл о насморке, но узнал о существовании такого времени суток, как шесть часов утра. П. А. Киткин и В. М. Фокеев написали в эти годы докторские диссертации, А. И. Фельзенбаум — кандидатскую. Сам я, должен признаться, ряд лет урывками искал решение некоторых проблем из общей алгебры. Надежды сменялись разочарованиями. Когда же я взялся за дело вплотную, то построил жесткий режим: первая половина дня — работа, обед, затем — трехчасовая игра в теннис летом или лыжи и пробежки зимой. И так ежедневно. Вечером — абсолютно свежая голова, ощущение полноты жизни, радостное ожидание работы, спокойствие при обдумывании путей и деталей доказательств. Мне удалось довести работу до логического конца, сохранить работоспособность и стойкость при неудачах. Как самую высокую похвалу вспоминаю слова профессора П. Г. Конторовича: «Подумайте только! И как же это удалось Л. Е. (то есть мне) в такие годы представить работу из таких новых

1

2

3

4

5

6.

7

1. Б. Н. Делоне в Карпатах.
2. А. И. Берг с дочкой (1964 г.).
3. П. С. Александров, А. И. Мальцев и С. В. Фомин в шлюпочном походе по Волге (1939 г.).
4. А. А. Красовский на кроссе в Тимирязевском цирке в Москве.
5. А. А. Красовский (слева) на Эльбрусе.
6. А. Н. Ширяев на Эльбрусе на высоте 4200 м.
7. Б. Н. Делоне в Подмосковье (1970 г.).
8. Л. Е. Садовский после заплыва (бассейн в Лужниках, 1965 г.).
9. С. М. Полоснов, А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин в Карпатах (1955 г.).

8

9

результатов? По-видимому, потому, что он сохранил свои физические силы». Оставляя за первую часть высказывания ответственным П. Г. Конторовича, осмеливаюсь считать вторую истинной. Берусь утверждать, что удивительное творческое долголетие многих наших выдающихся математиков и физиков обеспечивается их дружбой со спортом. Титул заслуженного мастера спорта по альпинизму имеет член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, мастера спорта по альпинизму — академик А. Д. Александров. Лыжниками, пловцами, туристами являются академики А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, М. А. Лаврентьев, Б. М. Понтекорво, член - корреспондент АН СССР Д. И. Блохинцев, профессор С. В. Фомин; горнолыжником — профессор Л. А. Скорняков; на девятом десятке играет в теннис член-корреспондент АН СССР Д. Е. Меньшов. Инструктором-альпинистом является профессор А. К. Кикоин. Нильс и Гаральд Боры играли в классной футбольной команде. Альберт Эйнштейн увлекался не только игрой на скрипке, но и вождением яхт. Крупнейший английский математик Г. Харди, по свидетельству Н. Винера, был великолепным спортсменом и высшим авторитетом во всех играх с мячом.

На кортах Московского Дома ученых вы увидите многих известных деятелей науки, имеющих в 50—75 лет спортивные разряды. Они бегают по корту за мячом подобно юношам, и с юношами соперничают. Среди них вы встретите лауреата Нобелевской премии в области физики академика П. А. Черенкова, члена-корреспондента АН СССР математика В. Я. Козлова, зам. министра высшего и среднего специального образования СССР, профессора аэродинамики Н. Ф. Краснова (а самого министра — члена-корреспондента В. П. Елютина — вы встретите на кортах спортклуба «Шахтер»).

Если сравнить детей, получивших физическое воспитание, с детьми, которые не увлекались спортом, то можно заметить, что первые легче преодолевают трудности в жизни, учебе, успешнее борются с болезнями.

Я соглашусь с замечанием, что о громадном положительном влиянии спорта на творческие возможности человека можно было бы написать более профессионально. Цель этой статьи — поделиться с читателем убежденностью, основанной на личном опыте. И не случайно журнал «Квант» обратился к этой теме. Существуют различные пути в любительский спорт. Этими путями никогда не поздно воспользоваться.

Очень многое дает вам школа: уроки физического воспитания, лыжные прогулки, посещение плавательных бассейнов, сдача норм на значок ГТО. Кроме того, при отделах народного образования, Дворцах пионеров, при спортивных обществах работают детские спортивные школы (ДСШ), куда особенно охотно приглашают школьников младших классов.

Если вы становитесь студентами,— к вашим услугам кафедры физического воспитания и спорта вузов. Помимо (а иногда и вместо) обязательных занятий вы можете посещать специализированные секции: плавания, борьбы, гимнастики, легкой или тяжелой атлетики, баскетбола, волейбола и другие. Многие крупные вузы имеют свои спортивные сооружения, лыжные базы. Вот, к примеру, наш МИИТ, помимо баз на Клязьме, в Алуште и Евпатории, располагает чудесным спортивным комплексом: плавательный бассейн, легкоатлетический манеж, залы для спортивных игр, гимнастики, борьбы и так далее. Если вы предполагаете работать, то помните о спортивных обществах, которые повсюду имеют свои секции.

Спорт принесет вам много здоровья, радости, уверенности в собственных силах и успехи в деле служения Родине, науке, обществу.

В. З. Кресин

Вблизи абсолютного нуля

(ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК)

«... Если бы мы смогли поместить Землю в некую весьма холодную область, то все наши реки и океаны превратились бы в горы. Воздух перестал бы быть невидимым и превратился бы в жидкость. Превращение такого рода открыло бы возможность получения новых жидкостей, о которых мы до сих пор не имеем никакого понятия». Эти слова, произнесенные в середине XVIII века, принадлежат великому французскому химику Лавуазье.

В XIX веке были сжижены многие газы, но окончательно мечта Лавуазье о получении новых жидкостей исполнилась только в 1908 году, когда в лаборатории голландского физика Камерлинг-Оннеса в Лейденском университете последний из газов — гелий был превращен в жидкость.

Несколько слов о главных достижениях на пути к абсолютному нулю.

Один из основных методов сжижения газов состоит в их сжатии. При этом молекулы сближаются, возрастает роль сил сцепления и становится возможным переход в жидкое состояние. Однако если газ находится при температуре выше критической, то никаким сжатием нельзя превратить его в жидкость. В этом случае необходимо предварительное охлаждение газа.

К семидесятым годам XIX века было произведено огромное количество опытов по сжижению газов и получено много новых жидкостей (следует особо отметить опыты Фарадея, который наряду со сжатием, применяемым раньше для сжижения газов, первым использовал охлаждение газа). Однако кислород, азот и водород не проявляли никаких признаков превращения в жидкость. Поэтому в физике стало складываться убеждение, что эти три вещества являются «постоянными газами». Лишь в 1877 году французский ученый Кальете сумел получить жидкий кислород при температуре $T = 90{,}2^\circ$ K. Через шесть лет польские физики Вроблевский и Ольшевский первыми увидели жидкий азот. Переход азота в жидкость произошел при $T = 77{,}4^\circ$ K.

Очень сложным был путь получения жидкого водорода. Он превращается в жидкость при температуре всего 20,4° K. Эта задача была решена лишь в 1898 году английским физиком Дьюаром. Дьюар использовал для хранения жидкого водорода изобретенный им вакуумный сосуд, который назван его именем и применяется по сей день. Когда Дьюар работал над проблемой получения жидкого водорода, он не сомневался в том, что его работа — последнее усилие на пути к абсолютному нулю. Но Дьюар ошибался. Еще более низкой оказалась температура кипения жидкого гелия.

Гелий был открыт в 1869 году при исследовании спектра солнечной короны. На Земле же в течение очень длительного времени никому не удавалось его найти. Только в 1895 году английский химик Рамсей обнаружил его в составе газов, выделяющихся при нагревании некоторых минералов. Лишь в самом конце XIX века стало ясно, что температура сжижения гелия лежит ниже точки кипения жидкого водорода.

В конце девяностых годов прошлого столетия Камерлинг-Оннес приступил к опытам, цель которых состояла в получении жидкого гелия. Ему-то и удалось провести эксперимент, ставший последней страницей в истории поиска «новых жидкостей».

Почему Камерлинг-Оннес заинтересовался именно физикой низких температур? Позже, в 1913 году, всемирно известный ученый при вручении ему Нобелевской премии сам дал ответ на этот вопрос: «Эта работа должна приподнять завесу, которой тепловое движение при обычных температурах закрывает от нас внутренний мир атомов и электронов».

Температура, при которой гелий переходит в жидкое состояние, составляет 4,2° К. Поэтому он и оказался последней крепостью на пути к абсолютному нулю. Дьюар в Англии, Ольшевский в Польше и другие экспериментаторы во многих лабораториях мира активно искали способы получения жидкого гелия. Но успех выпал на долю Камерлинг-Оннеса. Именно в его лаборатории 10 июля 1908 года физики из разных стран, специально приглашенные для наблюдения за историческим экспериментом, впервые увидели жидкий гелий. Эксперимент начался около 6 часов утра и продолжался более 16 часов. В течение этого времени сам Камерлинг-Оннес и все его сотрудники находились в состоянии предельного напряжения (несколько месяцев после этого Оннес из-за крайнего переутомления не мог продолжать работу в лаборатории). Во время этого эксперимента было получено около 60 *см*^{3} гелия.

Успех не был случайным. Помимо огромного таланта, фантазии, работоспособности, Камерлинг-Оннес отличался особым подходом к постановке эксперимента. Это был физик необычного склада. Личный пример Камерлинг-Оннеса и созданная им научная школа сыграли важную роль в формировании облика современного физика-экспериментатора.

Новые жидкости (кислород, азот и водород) были получены в лабораториях Парижа, Вроцлава и Лондона с помощью весьма остроумных, но достаточно скромных экспериментальных средств. Камерлинг-Оннес первым понял, что физик-экспериментатор двадцатого века должен быть еще и хорошим инженером. Ему было ясно, что получение жидкого гелия требует совершенно новых мощных технических средств. Он создал знаменитую школу стеклодувов и прибористов, сконструировал специальную холодильную машину.

В наши дни такая постановка эксперимента никого бы не удивила. Всем хорошо известно, например, что современные ускорители — это не только физические приборы, но и сложнейшие технические сооружения. То же самое можно сказать и о современных радиотелескопах, электронных микроскопах, установках высокого давления и других технических средствах современной физики. Но в начале века Камерлинг-Оннес резко выделялся на фоне многих экспериментаторов, проводивших свои исследования (главным образом качественного характера) с помощью небольших лабораторных установок.

Итак, в 1908 году было произведено сжижение последнего природного газа — гелия. В эти же годы работами Планка по тепловому излучению и Эйнштейна по фотоэффекту были заложены основы квантовой теории.

Вначале квантовая физика и физика низких температур развивались независимо друг от друга. Однако в дальнейшем обнаружилась тесная связь этих «ровесников». Большую роль в этом сыграли работы Камерлинг-Оннеса. В своей Нобелевской лекции, уже упоминавшейся выше, он говорил: «... Учение Планка о квантах выдвинуло измерения при самых низких температурах на передний план физического интереса».

Жидкий гелий часто называют «квантовой жидкостью». При первом знакомстве с квантовой физикой может создаться впечатление, что законы ее важны только для описания свойств атомов, атомных ядер, электронов и других микрочастиц. Жидкий гелий — один из самых ярких примеров того, что квантовая физика может описывать также и свойства макроскопических тел.

Перед вами — жидкость, налитая в сосуд. Вы можете наблюдать за ее поведением, переливать в другой сосуд и так далее. И вместе с тем свойства жидкого гелия совершенно необычны; он радикально отличается от всех других жидкостей. Его поведение объясняется только законами квантовой физики.

Каковы же основные особенности поведения жидкого гелия? Первая из них была обнаружена Камерлинг-Оннесом еще при проведении эксперимента, во время которого впервые был получен жидкий гелий. Оннес предпринял попытку перевести гелий в твердое состояние. Он начал уменьшать давление в сосуде, где находилась кипящая жидкость. При этом температура понижалась (ее значение стало близким к 1° К!), но никаких признаков затвердевания гелия не обнаружилось.

Камерлинг-Оннес и в дальнейшем неоднократно пытался получить твердый гелий. Последняя такая попытка была предпринята им в конце жизни в 1922 году. Откачивая пар над жидким гелием двенадцатью новыми насосами специальной конструкции (давление при этом упало до 0,013 *мм рт. ст.*!), он достиг температуры, равной всего 0,83° К. Сообщение об этом эксперименте называлось так: «О самой низкой температуре, полученной до сих пор». Но даже при этой, рекордно низкой по тому времени температуре гелий оставался жидким.

Г. Камерлинг-Оннес (1853—1926)

В настоящее время твердо установлено, что гелий — единственное в природе вещество, которое не затвердевает вплоть до абсолютного нуля (он может стать твердым лишь при дополнительном сильном сжатии). Впервые твердый гелий был получен в 1926 году Х. Кеезомом, преемником Камерлинг-Оннеса, возглавившим после него работу в Лейденской лаборатории.

С точки зрения классической физики уникальное поведение жидкого гелия совершенно непонятно. Ведь с понижением температуры тепловые колебания частиц вещества становятся все слабее и слабее. Наличие же сил межмолекулярного сцепления должно приводить в конце концов к затвердеванию вещества.

Поведение жидкого гелия не имеет ничего общего с этой картиной. Гелий оставался бы жидким и при абсолютном нуле, хотя при этом вообще бы не было никакого теплового движения.

Камерлинг-Оннеса в первом же эксперименте поразила очень малая плотность жидкого гелия. Он оказался в 8 раз легче воды! Столь малая плотность говорит о том, что легкие и инертные атомы гелия находятся к тому же на большом расстоянии друг от друга. Перевести такую жидкость в твердое состояние гораздо сложнее, чем обычные жидкости.

Гелий и остается поэтому жидким вплоть до самых низких температур. Вблизи же абсолютного нуля его затвердеванию препятствуют законы квантовой физики. Согласно этим законам обычное представление о полной остановке атомов при абсолютном нуле оказывается неправильным.

Дальнейшее развитие физики низких температур привело к обнаружению еще одного замечательного свойства жидкого гелия. При температуре $T = 2{,}18°$ K он переходит в состояние сверхтекучести, открытое и тщательно исследованное академиком П. Л. Капицей *).

Получив в 1908 году жидкий гелий и добившись рекордно низких температур, Камерлинг-Оннес резко меняет направление своих исследований. Увидев, что область температур вблизи абсолютного нуля — это целый мир особых физических явлений, он приступает к последовательному изучению различных свойств вещества при низких температурах. «Из всех областей физики,— писал Оннес,— подходят к нам толпой вопросы, ожидающие решения от измерений при гелиевых температурах».

Новые исследования привели Оннеса в 1911 году к открытию явления сверхпроводимости **).

Прошло почти полвека со времени открытия этого явления, прежде чем стала понятной его природа. Это — уникальный в наше время случай научной загадки. Однако и в наши дни, когда уже создана теория сверхпроводимости, необычность свойств сверхпроводников продолжает вызывать удивление и восхищение многих физиков.

На экзамене по астрономии

Сдавая экзамены на получение докторской степени, Макс Борн в качестве устного предмета выбрал астрономию. Принимал экзамен известный астроном - физик Шварцшильд.

«Что вы делаете, когда видите падающую звезду?» — спросил экзаменатор.

«Надо посмотреть на часы, заметить время, определить направление движения, оценить приблизительно длину светящейся траектории, определить, из какого созвездия появилась звезда; сделав все это, можно приблизительно вычислить траекторию падающей звезды» . . . — такого ответа ждал экзаменатор. Борн это понимал, но не удержался и ответил: «Загадываю желание».

Из книги «Физики шутят»

Задачи

1. Если в двухзначном числе сложить его цифры, то получится число, которое в 5 раз меньше искомого. Найти это двухзначное число.

2. Если в трехзначном числе сложить все возможные двухзначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится число, которое в два раза больше искомого. Найти это трехзначное число.

3. Если в искомом трехзначном числе сложить все возможные двухзначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится число, равное искомому. Найти все такие трехзначные числа

В. М. Розентуллер

---

*) См. статью: А. Ф. Андреев, Сверхтекучесть жидкого гелия, «Квант», 1973, № 10.

**) См. статью: В. З. Кресин, Природа сверхпроводимости, «Квант», 1973, № 11

М. Л. Гервер

Сюрпризы

Несколько слов о названии.

Сначала мы разберем задачу **М195** из «Задачника Кванта». Обнаружится, что она тесно связана с одним классическим построением в геометрии кругов. Затем вскроются и другие неожиданные связи и факты.

Самый же главный сюрприз... Но, т-с-с! Иначе какой же это будет сюрприз?!

§ 1. Задача о трех четырехугольниках

М195. *Дан △ ABC. Сколько существует таких точек D, что периметры четырехугольников $ADBC$, $ABDC$ и $ABCD$ одинаковы*)?*

Решение. Построим три окружности (α, β и γ) с центрами A, B и C, которые попарно касаются друг друга внешним образом (рис. 1).

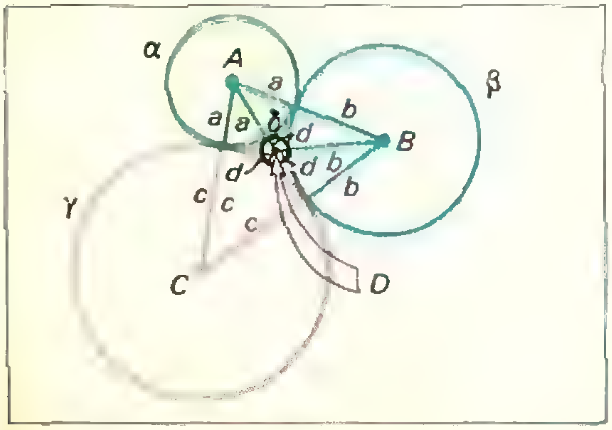


Рис. 1

Радиусы этих окружностей a, b и c определяются из системы уравнений

$$a + b = AB,\ a + c = AC,$$
$$b + c = BC.$$

Тем самым,

$$a = p - BC,\ b = p - AC, \qquad (1)$$
$$c = p - AB,$$

где p — полупериметр ΔABC.

Пусть D — центр окружности δ, которая внешним образом касается окружностей α, β и γ. Радиус δ обозначим через d.

То, что окружность δ *существует*, мы предполагаем известным. Построение такой окружности составляет содержание знаменитой задачи Аполлония*), решенной Аполлонием Пергским в III веке до н. э.

Из рисунка 1 сразу видно, что каждый из трех четырехугольников $ADBC$, $ABDC$ и $ABCD$ имеет периметр $2(p+d)=2(a+b+c+d)$. Таким образом, хоть одна искомая точка D *существует*.

Может ли таких точек быть больше одной? Переходя к решению этого вопроса, прежде всего убедимся в том, что если периметры $ADBC$, $ABDC$ и $ABCD$ равны, то точка D лежит вне окружностей α, β и γ и равноудалена от них. Положим $AD=x$, $BD=y$, $CD=z$. Тогда равенство периметров рассматриваемых четырехугольников запишется так:

$$2p - AB + x + y = 2p - AC + x + z =$$
$$= 2p - BC + y + z. \qquad (2)$$

Вычитая почленно равенства (2) из числа $p+x+y+z$, получим

$$z-(p-AB)=y-(p-AC)=$$
$$=x-(p-BC).$$

---

*) Рассматриваются только такие точки D, которые лежат в плоскости $\triangle ABC$.

*) Об этой задаче уже рассказывалось в статье Савина А. П., Инверсия и задача Аполлония. «Квант», 1971, № 8.

Используя формулы (1), находим

$$z-c=y-b=x-a. \qquad (3)$$

Согласно (3) числа $x-a$, $y-b$ и $z-c$ имеют один и тот же знак. При этом $x-a>0$, если точка D лежит вне α, и $x-a\leqslant 0$, если D лежит внутри или на α; знаки $y-b$ и $z-c$ имеют аналогичный смысл. Так как никакая точка не принадлежит сразу всем трем кругам, ограниченным окружностями α, β и γ, то случай

$$x-a=y-b=z-c\leqslant 0$$

исключается. Значит,

$$x-a=y-b=z-c>0,$$

D лежит вне α, β и γ и равноудалена от них.

Опираясь на это, докажем единственность точки D.

Пусть (для определенности) α — наименьшая из окружностей α, β и γ: $a\leqslant b$, $a\leqslant c$. Радиусами $b-a$ и $c-a$ опишем окружности β' и γ' с центрами B и C. Точка D, лежащая вне α, β и γ и равноудаленная от них, равноудалена также от точки A и окружностей β' и γ' (рис. 2). Построим еще три окружности (α'', β'' и γ'') с центрами A, B и C и радиусами AD, BD и CD. Пусть T — произвольная точка, лежащая внутри α'' или на α'' и отличная от D. Тогда (рис. 2) T лежит либо вне β'', либо вне γ'', либо вне обеих этих окружностей. Тем самым T расположена ближе к A, чем к одной из окружностей β' или γ'.

Последнее рассуждение показывает, что две различные точки D_1 и D_2 не могут быть равноудалены от A, β' и γ': предположив противное (пусть D_1 и D_2 — такие точки, причем $AD_1\geqslant AD_2$) и обозначив D_1 через D, а D_2 через T, *сразу придем к противоречию.*

Единственность точки D доказана.

§ 2. Двойственная задача

В § 1 обнаружилась тесная связь задачи о трех четырехугольниках с задачей Аполлония. В формулировке последней («Построить окружность, *касающуюся трех данных окружностей*») не указано, каким должно быть касание — внешним или внутренним. В § 1 окружность δ касалась α, β и γ внешним образом. Обозначим через ε окружность, которой все три окружности α, β и γ касаются *изнутри*; центр ее назовем E (рис. 3).

Спрашивается: а не является ли отыскание точки E решением какой-нибудь задачи, похожей на задачу о трех четырехугольниках? (Прежде чем читать дальше, попробуйте, конечно, сами придумать такую задачу.)

Положим $AE=x$, $BE=y$, $CE=z$, радиус окружности ε обозначим через e. Тогда (рис. 3) $x+a=y+b=z+c=e$. Отсюда $x+y+a+b=2e$, то есть $x+y+AB=2e$. Так же устанавливается, что $x+z+AC=y+z+BC=2e$. Величины $x+y+AB$, $x+z+AC$ и $y+z+BC$ — это периметры треугольников AEB, AEC

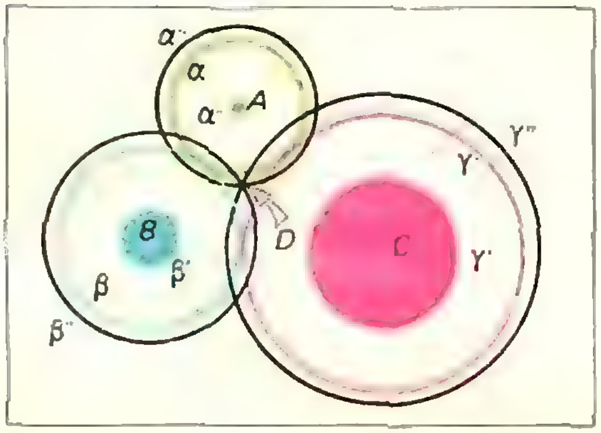


Рис. 2.

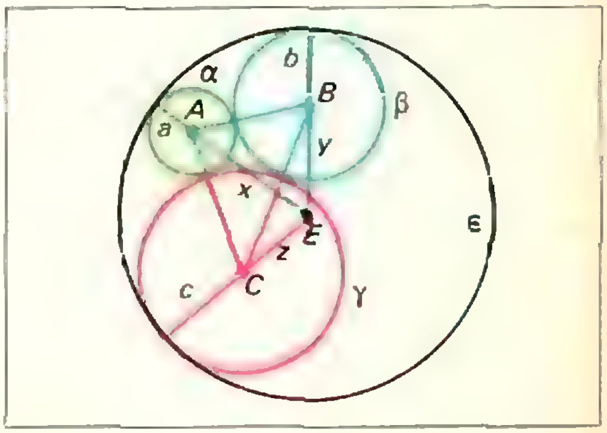


Рис.3 .

и BEC. Таким образом, центр E окружности ε оказался решением задачи «о трех треугольниках равного периметра», совершенно аналогичной исходной задаче о четырехугольниках.

Точная формулировка новой задачи:

«Дан $\triangle ABC$. Сколько существует таких точек E, что периметры треугольников AEB, AEC и BEC одинаковы)?»*

Выше мы установили, что хоть одна такая точка E существует.

Упражнения

1. Докажите, что других таких точек нет.

2. Докажите утверждение, обратное полученному выше: пусть точка E такова, что периметр каждого из треугольников AEB, AEC и BEC равен $2e$, тогда α, β и γ касаются изнутри окружности радиуса e с центром E.

В задачах о трех четырехугольниках и о трех треугольниках мы не только доказали существование и единственность точек D и E, но и нашли формулы для периметров: $2(p+d)=2(a+b+c+d)$ и $2e$. Спрашивается: а можно ли вычислить эти периметры, зная стороны $\triangle ABC$? Радиусы a, b и c вычисляются по простым формулам (1). Выражаются ли d и e через a, b и c?

Положительный ответ на этот вопрос дается в § 3.

§ 3. Формула Фредерика Содди

Мы уже отмечали, что задача Аполлония была решена в III веке до нашей эры. Казалось бы, в наши дни она уже не может таить в себе ничего нового и неожиданного. Однако сравнительно недавно была получена красивейшая формула, показывающая, как соотносятся между собой размеры окружностей в задаче Аполлония.

Эта формула производит еще большее впечатление, когда узнаешь, что ее придумал не профессиональный математик, а химик — Фредерик Содди.

Обозначим через k, l, m и n величины, обратные радиусам окружностей α, β, γ и δ из § 1:

$$k=1/a,\quad l=1/b,\quad m=1/c,\quad n=1/d.$$

Тогда

$$2\ (k^2+l^2+m^2+n^2)=(k+l+m+n)^2.$$

Это изящное соотношение и есть *формула Содди.*

Ее можно рассматривать как квадратное уравнение относительно n (числа k, l и m считаются при этом известными). Решая это уравнение, получим

$$n_{1,2}=k+l+m\pm 2\sqrt{kl+lm+mk}.$$

Положительный корень n_1 — это, разумеется, $1/d$. А что такое n_2?

Оказывается, $n_2=-1/e$, где e — радиус окружности ε из § 2.

Каков смысл знаков «плюс» и «минус»: почему $1/d$ берется с плюсом, а $1/e$ — с минусом?

Величина, обратная радиусу имеет специальное название: «кривизна». Чем больше радиус, тем более плавно «искривляется» окружность — тем меньше ее кривизна.

Прямая (предельный случай окружности — «окружность бесконечного радиуса») имеет нулевую кривизну. Знаками было бы естественно различать кривизну «выпуклых» и «вогнутых» кривых. Но что такое выпуклые и вогнутые окружности?

Все окружности, разумеется, «одинаковы». Но когда находишься *вне* окружности, то ее естественно считать выпуклой, а если находишься внутри той же окружности, то она представляется вогнутой. Тем самым, «с точки зрения окружностей α, β и γ» окружности δ и ε разумно считать «разными»: первую — *выпуклой*, вторую — *вогнутой*.

Вывод формулы Содди мы приведем в § 6.

§ 4. Главный сюрприз

У нас уже было несколько сюрпризов: в § 1 задача о четырехугольниках с равными периметрами свелась вдруг к частному случаю задачи Аполлония, в § 2 необычным оказался порядок действий — мы сначала решили, а потом уже сформулировали задачу о треугольниках с равными периметрами, в § 3 мы привели формулу, которой современный химик украсил одну из древнейших геометрических задач.

---

*) Рассматриваются только такие точки E, которые лежат в плоскости $\triangle ABC$.

Но главный сюрприз будет преподнесен сейчас.

В своих доказательствах мы пользовались следующими «очевидными» геометрическими фактами:

I. Пусть три окружности α, β и γ попарно касаются друг друга внешним образом. Тогда существует ровно одна окружность δ, касающаяся α, β и γ внешним образом, и ровно одна окружность ε, которой α, β и γ касаются изнутри.

II. Пусть три окружности α'', β'' и γ'' проходят через одну точку D. Тогда любая точка T, лежащая внутри α'', расположена либо вне β'', либо вне γ'' (либо вне обеих этих окружностей).

Оба факта... неверны. (Поэтому и решение задачи **M195** — тоже неверно.)

§ 5. Капитальный ремонт

На рисунке 4 изображены окружности α, β и γ, для которых существуют две окружности (δ_1 и δ_2), касающиеся α, β и γ внешним образом, и для которых не существует ни одной окружности ε, имеющей с α, β и γ внутреннее касание.

Рисунок 5 опровергает «факт» II.

Неверны, разумеется, и следствия, основанные на «фактах» I и II — рушится все здание, возведенное на шатком фундаменте!

К счастью, разрушения не такие уж катастрофические.

Теорема. *Пусть окружности α, β и γ попарно касаются друг друга внешним образом. Тогда возможны три (и только три) случая:*

I. *Существует ровно одна окружность δ, касающаяся α, β и γ внешним образом, и ровно одна окружность ε, которой α, β и γ касаются изнутри.*

II. *α, β и γ имеют общую касательную (причем лежат по одну сторону от нее), при этом ровно одна окружность δ касается α, β и γ внешним образом, и ни одной окружности α, β и γ не касаются изнутри.*

III. *Существуют ровно две окружности δ_1 и δ_2, каждая из которых касается α, β и γ внешним образом, и не существует ни одной окружности, которой α, β и γ касались бы изнутри.*

Несколько слов об инверсии.

При доказательстве этой теоремы воспользуемся методом *инверсии**).

Напомним определение и некоторые свойства инверсии.

Определение. Пусть Q — окружность с центром O радиуса R, лежащая в плоскости Π. Инверсией относительно окружности Q называется следующее преобразование плоскости Π: каждая точка M плоскости

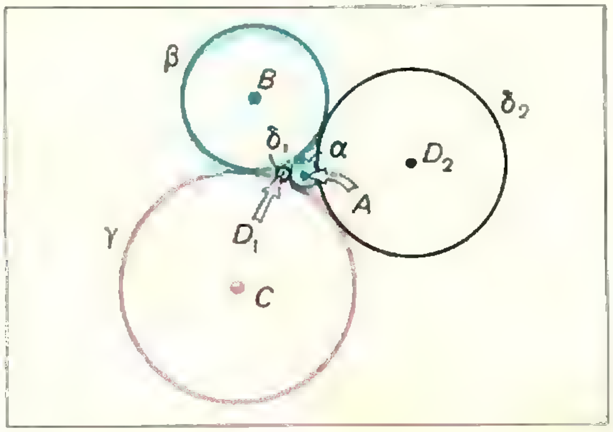


Рис. 4.

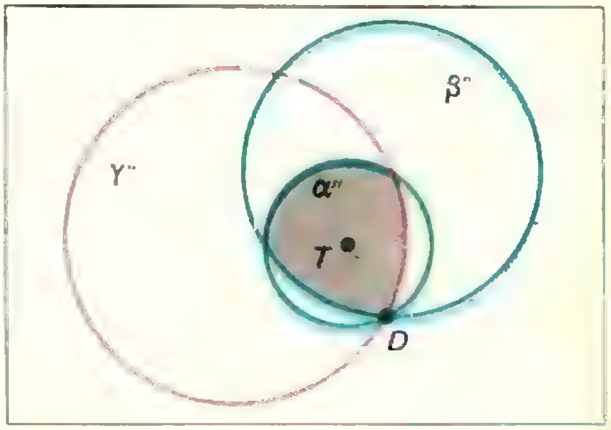


Рис. 5.

---

*) Савин А. П., Инверсия и задача Аполлония. «Квант», 1971, № 8.

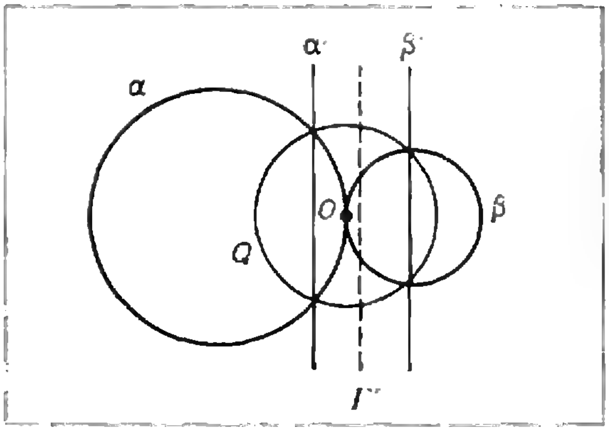


Рис. 6.

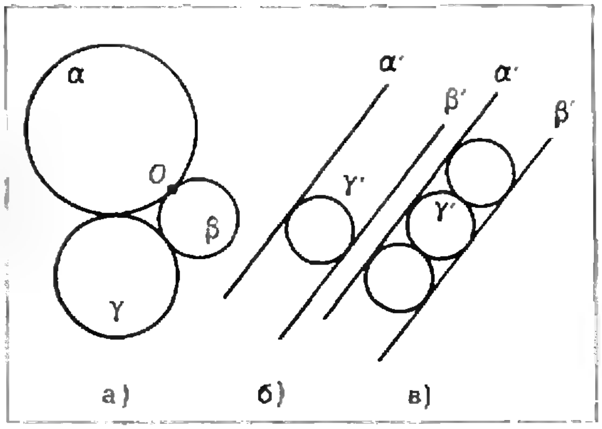


Рис. 7.

П, лежащая на положительном расстоянии r от O, переходит в точку M', лежащую на луче OM на расстоянии r' от O, такую, что $rr'=R^2$; O называется центром инверсии, R^2— коэффициентом инверсии.

Свойства. 1. Если M принадлежит Q, то $M'=M$; если M лежит внутри Q и отлична от O, то M' лежит вне Q; если M лежит вне Q, то M'— внутри Q.

2. Прямые и окружности переходят при инверсии в прямые и окружности, причем:

а) точки, лежащие на прямой, проходящей через O, переходят в точки той же прямой;

б) прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O;

в) окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через O;

г) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O; при этом O лежит либо вне обеих, либо внутри обеих этих окружностей.

3. Если две окружности (или прямая и окружность) касаются в точке M, отличной от O, то их образы*) тоже касаются в точке M'; если же точка касания совпадает с O, то эти окружности (или прямая и окружность) переходят в параллельные прямые.

Тому, кто узнал об инверсии впервые, мы рекомендуем либо доказать самостоятельно перечисленные свойства, либо прочесть упомянутую выше статью А. П. Савина.

В качестве контрольного упражнения, которое поможет вам выяснить, насколько вы владеете методом инверсии, предлагаем найти ошибку в «решении» следующей задачи.

Пусть окружности α и β касаются внешним образом в точке O (рис. 6). Найти геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей, которые касаются и α, и β.

Искомое геометрическое место точек обозначим через Γ. При инверсии с центром инверсии O окружности α и β перейдут в параллельные прямые α' и β' (рис. 6). Окружности γ, касающиеся и α и β, перейдут в окружности γ', касающиеся и α', и β'. Пунктирная прямая Γ' на рисунке 6 — это геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей γ'. Итак, кривая Γ при инверсии перешла в прямую. Значит, Γ — либо окружность, либо прямая.

Если вы нашли ошибку в приведенном «решении», пора переходить к доказательству теоремы, сформулированной в начале § 5.

Доказательство теоремы. Окружности α, β и γ по условию попарно касаются друг друга внешним образом (рис. 7, *а*). Точку касания α и β обозначим через O.

---

*) То есть то, во что они переходят после инверсии

Возьмем произвольную окружность Q с центром O и применим инверсию относительно этой окружности (рис. 6).

При инверсии окружности α и β перейдут в параллельные прямые α' и β', а окружность γ — в окружность γ', касающуюся этих прямых (рис. 7, *б*). Центр инверсии O расположен (проверьте это!) в полосе между прямыми α' и β' вне окружности γ'.

Имеются, очевидно, ровно две окружности, касающиеся и α', и β', и γ' (рис. 7, *в*). При этом возможны три случая:

I. Точка O лежит внутри одной из этих окружностей (и вне другой).

II. Точка O лежит на одной из них (и вне другой).

III. Точка O лежит вне обеих этих окружностей.

В случае I и II обозначим рассматриваемые окружности через δ' и ε' (причем через δ' — ту, вне которой лежит точка O), в случае III обозначим их через δ_1' и δ_2'.

Любая окружность или прямая, касающаяся и α, и β, и γ, перешла при инверсии в окружность, касающуюся α', β' и γ'. В случае I в окружности δ' и ε' перешли окружности — назовем их δ и ε. В случае II в δ' перешла окружность (назовем ее δ), а в ε' перешла прямая (то есть α, β и γ имеют в этом случае общую касательную, при этом α, β и γ лежат, очевидно, по одну сторону от нее). В случае III в δ_1' и δ_2' перешли окружности (назовем их δ_1 и δ_2).

Итак, окружностей, касающихся и α, и β, и γ — либо две, либо одна. В случае I точка O лежит вне δ и внутри ε, то есть δ имеет с α, β и γ внешнее, а ε — внутреннее касание. В случае II точка O лежит вне δ — снова δ имеет с α, β и γ внешнее касание. В случае III точка лежит и вне δ_1, и вне δ_2, так что обе они касаются α, β и γ внешним образом.

Теорема доказана.

Следствие 1. *В случае I и II задача о трех четырехугольниках имеет единственное решение (центр D окружности δ), в случае III — два решения (центры D_1 и D_2 окружностей δ_1 и δ_2).*

Следствие 2. *В случае I задача о трех треугольниках имеет одно решение (центр E окружности ε), в случаях II и III решений нет.*

Замечание. В § 3 мы утверждали (в соответствии с неверной теорией, развитой в §§ 1 и 2), что $n_1={}^1/d$, а $n_2=-{}^1/e$. Это действительно так в случае I. В этом случае $n_2<0$. В случае II $n_2=0$ (это соответствует тому, что прямая — общая касательная α, β и γ — имеет нулевую кривизну). В случае III $n_1={}^1/d_1$, а $n_2={}^1/d_2$, где d_1 и d_2 — радиусы окружностей δ_1 и δ_2; в этом случае $n_2>0$. В справедливости только что сделанных утверждений мы убедимся в § 6.

Зная стороны треугольника ABC, мы можем вычислить $n_{1,2}$ и установить, какой из трех случаев имеет место.

Иногда можно обойтись без таких вычислений — об этом мы расскажем в § 7.

§ 6. Вывод формулы Содди

1. Пусть U, V и W — три произвольных неотрицательных числа, сумма которых равна π. Тогда

$$\sin^2 U=\sin^2 V+\sin^2 W-$$
$$-2\sin V\sin W\cos U.$$

Доказательство. Построим треугольник с углами U, V и W. Пусть длины противолежащих сторон равны u, v и w. По теореме косинусов

$$u^2=v^2+w^2-2\,vw\cos U.$$

По теореме синусов

$$u/\sin U=v/\sin V=w/\sin W.$$

Отсюда нужная формула получается для любых ненулевых углов. Если хоть один из углов U, V и W равен 0, формула проверяется непосредственно.

2. Пусть A, B, C и D — четыре произвольные точки плоскости. Тогда

$$\left(\sin^2\frac{\sphericalangle ADB}{2}+\sin^2\frac{\sphericalangle ADC}{2}-\sin^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}\right)^2=4\sin^2\frac{\sphericalangle ADB}{2}\times\sin^2\frac{\sphericalangle ADC}{2}\cos^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}.$$

Доказательство. Возможны (рис. 8) четыре случая взаимного расположения точек A, B, C и D. В каждом из них выберем U, V и W в соответствии с таблицей, помещенной ниже. В любом случае $U\geqslant 0$, $V\geqslant 0$, $W\geqslant 0$ и $U+V+W=\pi$ так что, согласно пункту 1,

$$(\sin^2 V+\sin^2 W-\sin^2 U)^2=$$
$$=4\sin^2 V\cdot\sin^2 W\cdot\cos^2 U.$$

Остается воспользоваться тем, что в любом случае

$$\sin U=\sin\frac{\sphericalangle BDC}{2},$$
$$\sin V=\sin\frac{\sphericalangle ADC}{2},$$
$$\sin W=\sin\frac{\sphericalangle ADB}{2},$$
$$\cos^2 U=\cos^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}.$$

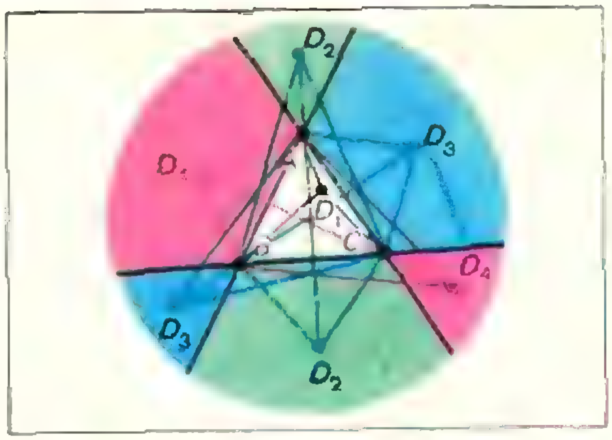


Рис. 8.

3. Пусть один из углов треугольника равен θ, противоположная сторона — u, прилежащие — v и w, полупериметр треугольника — q. Тогда

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},\quad \sin^2\frac{\theta}{2}=$$
$$=\frac{(q-v)(q-w)}{v\cdot w}.$$

Доказательство. По теореме косинусов

$$u^2=v^2+w^2-2vw\cos\theta,\quad \cos\theta=$$
$$=(v^2+w^2-u^2)/2vw.$$

Значит,

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{(v+w)^2-u^2}{4v\cdot w}=$$
$$=\frac{(v+w+u)(v+w-u)}{4v\cdot w}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},$$

№	Если	То
1	$\sphericalangle BDC+\sphericalangle ADC+\sphericalangle ADB=2\pi$	$U=\frac{\sphericalangle BDC}{2}$, $V=\frac{\sphericalangle ADC}{2}$, $W=\frac{\sphericalangle ADB}{2}$
2	$\sphericalangle BDC=\sphericalangle ADC+\sphericalangle ADB$	$U=\pi-\frac{\sphericalangle BDC}{2}$, $V=\frac{\sphericalangle ADC}{2}$, $W=\frac{\sphericalangle ADB}{2}$
3	$\sphericalangle ADC=\sphericalangle ADB+\sphericalangle BDC$	$U=\frac{\sphericalangle BDC}{2}$, $V=\pi-\frac{\sphericalangle ADC}{2}$, $W=\frac{\sphericalangle ADB}{2}$
4	$\sphericalangle ADB=\sphericalangle BDC+\sphericalangle ADC$	$U=\frac{\sphericalangle BDC}{2}$, $V=\frac{\sphericalangle ADC}{2}$, $W=\pi-\frac{\sphericalangle ADB}{2}$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{u^2-(v-w)^2}{4v\cdot w}=$$

$$=\frac{(u+v-w)(u+w-v)}{4v\cdot w}=$$

$$=\frac{(q-w)(q-v)}{v\cdot w}.$$

4. Пусть окружности α, β, γ и δ с центрами A, B, C и D и радиусами a, b, c и d попарно касаются друг друга внешним образом. Тогда

$$\cos^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}=\frac{(b+d+c)\,d}{(b+d)(d+c)},$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}=\frac{bc}{(b+d)(d+c)},$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle ADB}{2}=\frac{ab}{(a+d)(d+b)},$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle ADC}{2}=\frac{ac}{(a+d)(d+c)}.$$

Доказательство. В $\triangle BDC$ выразим стороны и полупериметр через b, d и c:

$$BC=b+c,\quad BD=b+d,\quad DC=d+c,$$

$$\frac{1}{2}(BC+BD+DC)=b+d+c$$

и воспользуемся формулами пункта 3. Другие две формулы получим аналогично из $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$.

4′. Пусть окружности α, β, γ с центрами A, B, C и радиусами a, b, c попарно касаются друг друга внешним образом и все три касаются изнутри окружности ε с центром E и радиусом e. Тогда

$$\cos^2\frac{\sphericalangle BEC}{2}=\frac{(b-e+c)(-e)}{(b-e)(-e+c)},$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle BEC}{2}=\frac{bc}{(b-e)(-e+c)},$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle AEB}{2}=\frac{ab}{(a-e)(-e+b)},$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle AEC}{2}=\frac{ac}{(a-e)(-e+c)}.$$

Доказательство — такое же, как в пункте 4.

5. В условиях пункта 4 положим

$$k=1/a,\quad l=1/b,\quad m=1/c,\quad n=1/d.$$

Тогда

$$(-k+l+m+n)^2=4\,(lm+mn+nl).$$

Доказательство. Согласно пунктам 2 и 4

$$\left[\frac{ab}{(a+d)(d+b)}+\frac{ac}{(a+d)(d+c)}-\right.$$

$$\left.-\frac{bc}{(b+d)(d+c)}\right]^2=4\,\frac{ab}{(a+d)(d+b)}\times$$

$$\times\frac{ac}{(a+d)(d+c)}\cdot\frac{(b+d+c)\,d}{(b+d)(d+c)}.$$

Умножив обе части равенства на $[(a+d)\ (b+d)\ (c+d)/abcd]^2$, получим

$$\left[\frac{c+d}{cd}+\frac{b+d}{bd}-\frac{a+d}{ad}\right]^2=4\,\frac{b+d+c}{bdc},$$

или окончательно

$$(-k+l+m+n)^2=4\,(lm+mn+nl).$$

Замечание. Формулы пункта 4′ получаются из формул пункта 4, если заменить d на $(-e)$. Поэтому доказанная в пункте 5 формула верна и в условиях пункта 4′ при $n=-{}^1/e$.

6. Кривизны k, l, m и n окружностей α, β, γ и δ, попарно касающихся друг друга внешним образом, связаны формулой Содди

$$(k+l+m+n)^2=2\,(k^2+l^2+m^2+n^2).$$

Та же формула верна, если n — кривизна окружности ε, которой α, β и γ касаются изнутри.

Доказательство. Преобразуем тождество

$$(k+l+m+n)^2=(-k+l+m+n)^2+$$
$$+4k\,(l+m+n)$$

с учетом пункта 5:

$$(k+l+m+n)^2=$$
$$=4\,(kl+km+kn+lm+ln+mn).$$

Воспользовавшись тождеством

$$(k+l+m+n)^2-(k^2+l^2+m^2+n^2)=$$
$$=2\,(kl+km+kn+lm+ln+mn),$$

получим

$$(k+l+m+n)^2=2\,[(k+l+m+n)^2-$$
$$-(k^2+l^2+m^2+n^2)].$$

Приведя подобные члены, получим формулу Содди.

7. Из утверждения, доказанного в пункте 6, сразу вытекает

Следствие 1. Положим (как в § 3)

$$n_{1,2}=k+l+m\pm 2\sqrt{kl+lm+mk}.$$

Тогда — в терминах § 5,— если имеет место случай I, то $n_2<0$, а если имеет место случай III, то $n_2>0$.

Упражнение 3. Докажите, что в случае II $n_2=0$.

Объединяя следствие 1 и упражнение, получаем

Следствие 2. Если $n_2<0$, то имеет место случай I, если $n_2=0$,— случай II, если $n_2>0$,— случай III.

§ 7. Еще одна неожиданность

В июне в «Задачнике «Кванта» была опубликована задача **M209**.

Для любого треугольника ABC можно вычислить такую сумму:

$$S=\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}.$$

Докажите, что:

а) $S<2$ для всех остроугольных и прямоугольных треугольников;

б) $S>2$ для тупоугольных треугольников с тупым углом, большим $2\,\mathrm{arc\,tg}\,{}^4/_3$;

в) для всякого φ такого, что $\frac{\pi}{2}<\varphi<2\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$, среди тупоугольных треугольников с тупым углом, равным φ, имеются и такие, что $S>2$, и такие, что $S<2$.

На первый взгляд, в задачах **M195** и **M209** говорится про совершенно разные вещи. Но, оказывается,— еще одна неожиданность — между ними существует глубокая связь.

Используя § 6 (пункты 3 и 4), легко доказать следующее

Утверждение 1. *Пусть окружности α, β, γ с центрами A, B, C и радиусами a, b, c попарно касаются друг друга внешним образом, и пусть $a+b+c=p$. Тогда*

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{bc}{ap},\quad \mathrm{tg}^2\frac{B}{2}=\frac{ac}{bp},$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{ab}{cp}.$$

Таким образом, $(a+b+c)S=\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}$. Деля обе части этого равенства на abc, получаем

$$S\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

или $S(kl+lm+mk)=k^2+l^2+m^2$. Используя тождество $k^2+l^2+m^2=(k+l+m)^2-2\,(kl+lm+mk)$, находим: $(S+2)\,(kl+lm+mk)=(k+l+m)^2$.

Итак, следующие условия попарно эквивалентны:

$S<2$ и $(k+l+m)^2<4\,(kl+lm+mk)$,
$S=2$ и $(k+l+m)^2=4\,(kl+lm+mk)$,
$S>2$ и $(k+l+m)^2>4\,(kl+lm+mk)$.

Вспоминая формулу

$$n_{1,2}=(k+l+m)\pm 2\sqrt{kl+lm+mk},$$

получаем отсюда

Утверждение 2. *Условия $S<2$, $S=2$ и $S>2$ характеризуют (соответственно) случаи I ($n_2<0$), II ($n_2=0$) и III ($n_2>0$).*

Поэтому результат задачи **M209** позволяет довольно часто прямо по виду $\triangle ABC$ сказать, какой из случаев I, II, III имеет место: если $\triangle ABC$ остроугольный или прямоугольный, то случай I (задача **M195** имеет в этом случае ровно одно решение D), если $\triangle ABC$ «очень тупоугольный» ($\varphi>2\,\mathrm{arctg}\,{}^4/_3$), то случай III (задача **M195** имеет два решения D_1 и D_2). «Водораздел» (случай II) проходит по «не слишком тупоугольным» треугольникам ($\pi/_2<\varphi<2\,\mathrm{arctg}\,{}^4/_3$). Некоторые дополнительные сведения об этом «водоразделе» вы получите, решив задачу **M209** или прочтя ее решение в «Задачнике «Кванта».

А. В. Бялко

Электролиз и закон сохранения энергии

Молекулы любого химического соединения состоят из атомов. Во взаимодействии между атомами молекул участвуют электроны. Не все электроны в атоме равноценны. Основную роль в химии играют электроны внешней оболочки. Устойчивые молекулы образуются тогда, когда энергия связанной системы атомов меньше, чем сумма энергий этих же атомов порознь.

В ряде случаев силами, связывающими отдельные части молекул, являются силы электростатического (кулоновского) притяжения. Так бывает, когда одна часть молекулы обладает избыточным числом электронов — это отрицательный ион; другой части молекулы не хватает такого же числа электронов — это положительный ион.

Между ионами вещества, помещенного в среду с большой диэлектрической проницаемостью ε кулоновские силы ослабляются в ε раз. Вследствие этого отдельные ионы приобретают способность двигаться друг относительно друга. Такие растворы называют электролитами.

Электролиты способны проводить электрический ток. Носителями заряда в электролитах являются ионы, и поэтому проводимость электролитов называют ионной. Прохождение тока через электролит сопровождается химическими реакциями на электродах, которые приводят к выделению элементов, входящих в состав электролита. Этот процесс называют электролизом. Именно при электролизе наиболее ярко проявляется электронная природа химического взаимодействия.

Впервые электролиз исследовал великий английский физик Майкл Фарадей (1791—1867). Он экспериментально доказал, что масса выделившегося при электролизе вещества пропорциональна протекающему заряду и химическому эквиваленту вещества. Открытие законов электролиза сыграло огромную роль в формировании современных представлений о строении вещества. Но теперь мы можем, наоборот, вывести законы Фарадея, исходя из этих представлений.

Этот вывод проще провести на каком-нибудь конкретном примере. Допустим, нам нужно произвести электролиз воды H_2O. Чистая вода довольно слабо диссоциирует на ионы H^+ и OH^-. Для увеличения ионной проводимости необходимо добавить в воду соль, кислоту или основание, сильно диссоциирующие на ионы, например $NaOH$. Опустим в этот электролит электроды — химически инертные проводники — и присоединим их к полюсам источника тока. При этом положительно заряженные ионы Na^+ будут двигаться к отрицательно заряженному катоду, а отрицательные ионы OH^- — к аноду. Именно поэтому положительно заряженные ионы называются катионами, а отрицательно заряженные — анионами. Достигнув электродов, ионы нейтрализуются: анионы отдают избыточные электроны аноду, а катионы при соприкосновении с катодом получают от него недостающие электроны.

Запишем химические реакции, происходящие на электродах:

на аноде —

$$4\,OH^- \to 4\,e^- + O_2 + 2\,H_2O,$$

на катоде —

$$4\,H_2O + 4\,e^- \to 2\,H_2 + 4\,OH^-$$

В конечном счете эти реакции сводятся к разложению воды:

$$2\,H_2O \to 2\,H_2 + O_2.$$

Для образования каждых двух атомов водорода и одного атома кислорода по цепи должны пройти два электрона. Измеряя ток I и время t его протекания, найдем полный протекающий заряд: $q = It$. Разделив величину этого заряда на величину e заряда электрона, найдем полное число образовавшихся атомов водорода:

$$n_H = \frac{It}{e}.$$

Число образовавшихся за это время атомов кислорода

$$n_O = \frac{It}{2e}.$$

Вообще, число атомов вещества, образующихся на электроде, равно

$$n = \frac{It}{\nu e},$$

где ν — валентность атома, то есть число электронов, необходимых для образования одного атома из иона.

Чтобы найти массу продуктов реакции, нужно умножить числа n_H и n_O на массы соответствующих атомов. Масса атома равна $\frac{A}{N}$, где A — атомная масса вещества, N — число Авогадро.

Теперь мы можем записать закон Фарадея для массы вещества, выделяющегося на электроде за время t при прохождении через электролит тока I:

$$m = \frac{ItA}{Ne\nu}.$$

Произведение $Ne = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \times \times 10^{-19} = 96\,400$ (*к/моль*) обозначают через F и называют числом Фарадея. Величину $\frac{A}{\nu}$ называют химическим эквивалентом.

Масса продуктов электролиза пропорциональна току и при заданном токе не зависит от напряжения U на электродах. Затраченная же энергия равна $E = IUt$. На что расходуется эта энергия? Часть ее переходит в тепло. Остальная энергия затрачивается на разрядку ионов на электродах и переходит в химическую энергию продуктов, полученных при электролизе. Вернемся к рассмотренной нами реакции электролиза воды и определим эту энергию.

Заставим (с помощью катализатора) прореагировать образовавшиеся водород и кислород. При этом в виде тепла выделится энергия

$$W = q_т (m_{H_2} + m_{O_2}) = q_т \frac{It}{Ne} \frac{\mu_{H_2O}}{2},$$

где $q_т$ — теплота сгорания водорода *). Это означает, что затраченная источником тока энергия, перешедшая в химическую энергию продуктов электролиза, равна W. Из закона сохранения энергии следует, что $W < E = IUt$ (разность $E - W$ ушла на нагревание электролита джоулевым теплом). Следовательно, должно выполняться неравенство

$$U > \frac{W}{It} = \frac{W}{\nu e N}.$$

Таким образом, из закона сохранения энергии следует, что при напряжении на электродах, меньшем $U_{min} = \frac{W}{\nu e N}$, электролиз вообще не может происходить!

Найдем значение этого минимального, или, как его называют, порогового напряжения для электролиза воды. Из опыта известно, что при образовании 1 моля, или 18 *г* воды (то есть при полном сгорании 1 моля, или 2 *г* водорода) выделяется энергия $W = 56{,}7$ *ккал/моль*. Следовательно, пороговое напряжение

---

*) Напомним, что теплотой сгорания топлива называется количество теплоты, выделяющееся при полном сгорании 1 *г* топлива. (Не путать обозначения: q — полный заряд, $q_т$ — теплота сгорания).

$$U_{\min} = \frac{W}{2} \cdot \frac{1}{Ne\nu} = \frac{56{,}7\ \text{ккал/моль}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ к \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1} \cdot 2} = 1{,}23в.$$

Между электродом, опущенным в электролит, и электролитом устанавливается определенная разность потенциалов. Это может происходить в результате того, что металлы обладают способностью «переходить» в раствор в виде ионов. При этом электрод заряжается отрицательно, а электролит — положительно. Вдоль поверхности электрода образуется слой положительных ионов. (Заметим, что эта разность потенциалов не вызывет тока через полуэлемент — так называют отдельный электрод с соответствующим электролитом. Ионы находятся в состоянии динамического равновесия с электродом.) Возможен и другой вариант, когда металл заряжается положительно, а электролит — отрицательно. Это происходит в тех случаях, когда опущенный в электролит электрод не «растворяется», а на его поверхности осаждаются положительные ионы электролита.

Измерить непосредственно напряжение в полуэлементе невозможно. Однако можно выбрать какой-нибудь один «постоянный» полуэлемент и, соединяя с ним различные полуэлементы, измерить разность потенциалов между электродами. «Постоянному», или, как его называют, нормальному электроду приписывают нулевой потенциал, и тогда можно считать, что второй электрод обладает вполне определенным потенциалом — нормальным потенциалом ($\varphi_{\min}$).

Таблица, приведенная ниже, составлена по результатам, полученным таким методом. В качестве нормального электрода выбирается обычно платиновая пластинка, в соответствующий электролит — однонормальный*) раствор ионов водорода. Нормальным потенциалом определяется энергия, необходимая для восстановления из ионов 1 моля данного вещества.

Поскольку обычно нас интересует не потенциал отдельного электрода, а напряжение между парой электродов, то ясно, что выбор нормального электрода может быть произвольным. Важно то, что при выбранной паре электродов для электролиза каждого вещества электролита необходима вполне определенная минимальная разность потенциалов.

Электродные потенциалы металлов в таблице выписаны в порядке их убывания. Обратите внимание, что последовательность металлов (включая водород) K, Na, Mg, Al, Zn, Fe, Pb, H, Cu, Ag, Au — не что иное, как известный из химии ряд активности металлов. В этом ряду каждый металл может вытеснить из раствора соли любой металл, стоящий от него справа. Например, возможны реакции

$$Zn + Cu^{++} \rightarrow Cu + Zn^{++},$$
$$2Na + 2H^{+} \rightarrow 2Na^{+} + H_2.$$

На этом примере видно, как физика дает количественное описание эмпирически замеченной в химии закономерности. Реакции идут в том направлении, при котором происходит выделение энергии, а значения пороговых напряжений прямо пропорциональны количеству этой энергии.

Теперь, руководствуясь таблицей, мы можем обоснованно ответить на вопрос, почему при электролизе водного раствора NaOH на катоде выделяется водород, а не натрий. Пороговое напряжение электролиза раствора NaOH равно 3,94 *в* (2,71 *в* + 1,23 *в*). Если разность потенциалов на электродах $U < 1{,}23$, электролиз вообще идти не может, если же 1,23 $в < U < 3{,}94$ *в*, то не мо-

---

*) Однонормальным называется раствор, в котором на один литр раствора приходится один грамм-атом водорода.

Реакция	φ_{min} (*в*)	Реакция	φ_{min} (*в*)
$K^+ + e^- \rightarrow K$	2,92	$H^+ + e^- \rightarrow \frac{1}{2} H_2$	0
$Na^+ + e^- \rightarrow Na$	2,71	$\frac{1}{2} Cu^{++} + e^- \rightarrow \frac{1}{2} Cu$	−0,34
$\frac{1}{2} Mg^{++} + e^- \rightarrow \frac{1}{2} Mg$	2,37	$Ag^+ + e^- \rightarrow Ag$	−0,80
$\frac{1}{3} Al^{+++} + e^- \rightarrow \frac{1}{3} Al$	1,66	$\frac{1}{3} Au^{+++} + e^- \rightarrow \frac{1}{3} Au$	−1,50
$\frac{1}{2} Zn^{++} + e^- \rightarrow \frac{1}{2} Zn$	0,76	$Br^- \rightarrow \frac{1}{2} Br_2 + e^-$	1,06
$\frac{1}{2} Fe^{++} + e^- \rightarrow \frac{1}{2} Fe$	0,44	$OH^- \rightarrow \frac{1}{2} H_2O + \frac{1}{4} O_2 + e^-$	1,23
$\frac{1}{2} Pb^{++} + e^- \rightarrow \frac{1}{2} Pb$	0,13	$Cl^- \rightarrow \frac{1}{2} Cl_2 + e^-$	1,36

жет образоваться металлический натрий. Если $U>3{,}94$ *в*, то частично натрий получиться может, но образовавшись, он быстро прореагирует с водой.

Тот факт, что для разных металлов различаются пороговые напряжения электролиза, используется для разделения металлов. Представьте себе, что у вас есть соль меди с малыми примесями серебра и золота. Как извлечь благородные металлы? Проведем электролиз соли меди $CuSO_4$, использовав эту неочищенную медь в качестве анода. При этом на аноде возможны реакции: выделения кислорода, растворения (то есть образования ионов) меди и растворения серебра и золота. На катоде же будет осаждаться металлическая медь. Если разность потенциалов электродов взять достаточно малой (меньшей 0,80*в*—0,34*в* = 0,46*в*), чтобы не могли идти реакции растворения серебра и золота и электролиз воды, то анод разрушается, ионы меди Cu^{++} переходят в раствор, осаждаясь на катоде, а нерастворимые при этой разности потенциалов серебро и золото остаются на аноде.

Посмотрим теперь, какова вольт-амперная характеристика электролитов. Ситуация здесь различна для разных видов реакций, например, для реакций, проходящих в аккумуляторах, и для реакции электролиза воды.

В аккумуляторе химическая реакция подбирается так, чтобы вещества, образующиеся при разряде аккумулятора во время его эксплуатации, оставались в растворе или

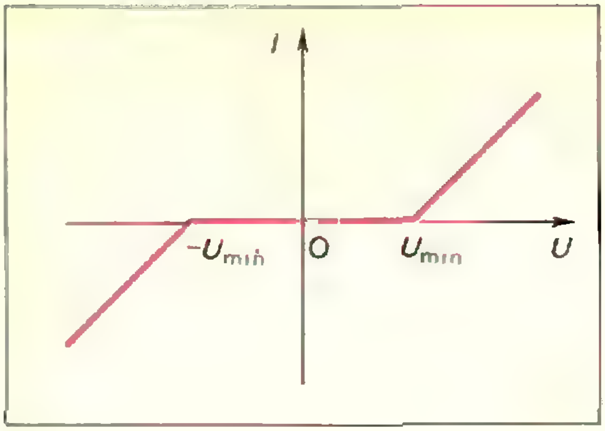


Рис. 1.

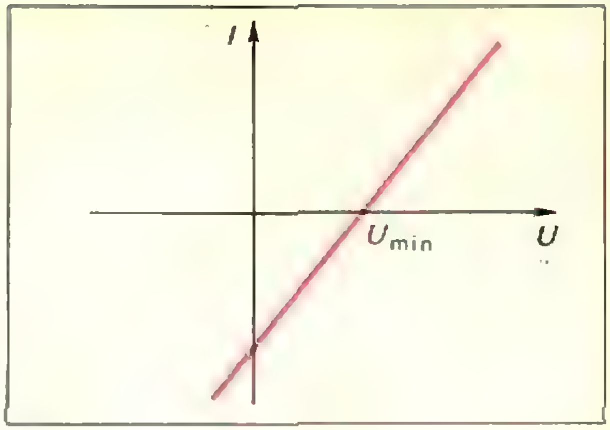


Рис. 2.

осаждались на электродах. Тогда при зарядке аккумулятора реакция пойдет в обратную сторону, а это приведет к восстановлению его первоначального состояния.

При электролизе может происходить выделение водорода или других газов, может восстанавливаться металл в растворе и выпадать в осадок. Тогда реакцию уже нельзя провести в другую сторону.

Во втором случае ток при напряжении, меньшем порогового, вообще не идет, сопротивление электролита практически бесконечное. Когда разность потенциалов становится отрицательной, анод и катод меняются местами, и, начиная с напряжения $-U_{min}$, опять возникает проводимость. Поэтому вольт-амперная характеристика имеет вид, показанный на рисунке 1.

Если при реакции первого типа на электродах уже выделилось вещество, то электролит вместе с электродами сам становится источником тока с электродвижущей силой, в точности равной пороговому напряжению. Поэтому его вольт-амперная характеристика отвечает обычному закону Ома для полной цепи, у которой сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника, но смещенному из начала координат на величину порогового напряжения (рис. 2). При приложенном напряжении, равном нулю, — это обычный источник тока, конечно, только до тех пор, пока все активное вещество на электродах не окажется израсходованным. Тангенс угла наклона прямых на рисунках 1 и 2 характеризует проводимость электролита и в случае плоских электродов прямо пропорционален сечению электродов и концентрации ионов и обратно пропорционален расстоянию между электродами. Следует отметить, что графики имеют такой вид при не слишком больших плотностях тока.

В заключение еще раз подчеркнем, что существование порогового напряжения является следствием законов Фарадея и закона сохранения энергии. Это явление демонстрирует взаимосвязь химического и электрического видов энергии.

Упражнение

Электролиз 1 *л* водного раствора $AgNO_3$ ведется при напряжении 1 *в*. Выделилось $m_{Ag}=1$ *г*. На сколько поднялась температура раствора? Тепловые потери не учитывать.

Электрохимическая обработка металлов

И. И. Мороз

В последние годы все более широкое применение находят электрохимические методы обработки металлов. Что это за методы, в чем их преимущества перед другими методами обработки металлов, рассказывается в этой статье.

В 1834 году Майкл Фарадей сформулировал основные законы электролиза.

Согласно закону Фарадея, количество вещества m, выделенного или растворенного на электродах за время t, прямо пропорционально количеству электричества q, прошедшего через электролит:

$$m = kq = kIt = \frac{ItA}{Ne\nu},$$

где I — сила тока, A — атомная масса, ν — валентность вещества, N — число Авогадро, e — заряд электрона.

Известно, что $I = jS$ (j — плотность тока, S — площадь электрода).

Почти через сто лет после открытия законов электролиза, в 1928 году, советские инженеры В. Н. Гусев и Л. П. Рожков предложили использовать электролиз для обработки металлов вместо обычных механических способов (точения, фрезерования, резания, шлифования).

Это предложение на первый взгляд кажется необычным. Действительно, весь опыт человечества, казалось бы, учит, что инструмент должен быть тверже обрабатываемого материала. Еще пещерный человек использовал камень в качестве обрабатывающего инструмента. Потом были созданы инструменты железные, стальные и, наконец, из твердых и сверхтвердых сплавов. Но по мере развития техники, особенно специальных отраслей машиностроения (авиамоторостроения, ракетостроения и некоторых других), появились новые материалы, обработка которых механическими методами сопряжена с большими трудностями, а в некоторых случаях — просто невозможна. Так, например, есть такие твердые и хрупкие сплавы, которые разрушаются *при механической обработке.* Возникла необходимость создания новых методов обработки металлов. Вот тут-то и пригодилось предложение Гусева и Рожкова.

При электролизе металлические электроды погружаются в раствор электролита, на них подается электрическое *напряжение,* и через раствор электролита идет ток (рис. 1). Обычно на металлическом катоде выделяется водород, а на аноде происходит растворение металла, которое часто сопровождается выделением кислорода.

В производственной практике давно уже широко используются процессы электрохимического травления и электролитического полирования металла. Первый — для очистки поверхности металла от окисных пленок, второй — для улучшения качества поверхности, придания ей зеркального блеска. Оба эти процесса основаны на том, что при электролизе на аноде растворяется металл.

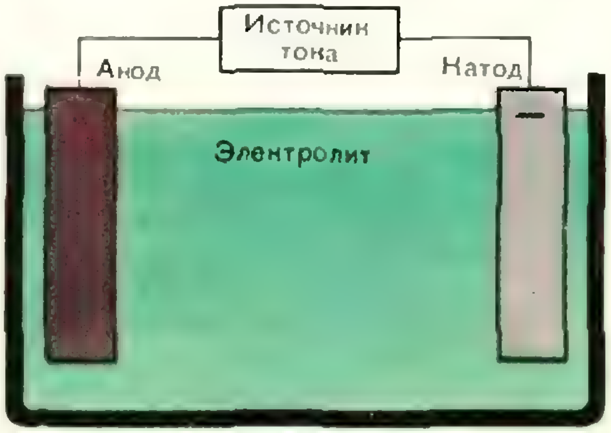


Рис. 1.

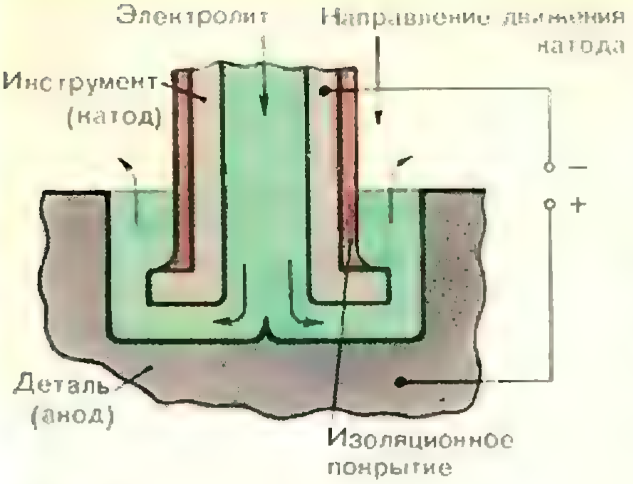


Рис. 2.

Как при травлении, так и при полировании с поверхности удаляется ничтожное количество металла и геометрические размеры обрабатываемой детали практически не изменяются. Это объясняется тем, что при плотностях тока, применяемых в таких процессах, скорость растворения металла очень мала. Если же плотность тока увеличить в сотни раз, то увеличится и скорость анодного растворения металла. Тогда количество удаляемого металла может быть соизмеримо с количеством металла, удаляемого при резании. Это и позволяет использовать электролиз для обработки металлов.

На рисунке 2 представлена общая схема электрохимической обработки металлов. Так же как при травлении и полировании, обрабатываемую деталь присоединяют к положительному полюсу источника тока, а электрод-инструмент — к отрицательному. Но, в отличие от обычных электролитических ванн, где расстояние между электродами составляет 150÷200 *мм*, здесь это расстояние уменьшено до 0,05÷0,5 *мм*, и через этот узкий промежуток между электродами насосом непрерывно прокачивается раствор электролита. Нерабочие поверхности катода покрывают изоляционным материалом.

Благодаря тому, что зазор между электродами очень мал, напряженность электрического поля чрезвычайно велика и плотность тока достигает весьма значительных величин (до 250 $a/см^2$). Металл анода растворяется с большой скоростью одновременно под всей рабочей поверхностью катода и с обрабатываемой детали удаляется слой толщиной от 0,5 до 6 *мм* в минуту. При этом на аноде воспроизводится форма и размеры катода, с тем большей точностью, чем меньше расстояние между электродами. Чтобы сохранить постоянным расстояние между электродами, по мере растворения металла с поверхности анода катод постепенно передвигают по направлению к аноду.

В качестве электролитов обычно используют водные растворы неорганических солей (например, хлористого или азотнокислого натрия).

Что же происходит в межэлектродном промежутке? Схематически эти процессы можно представить следующим образом (рис. 3).

В качестве примера возьмем железный анод в водном растворе хлористого натрия.

В ходе электролитической диссоциации вода разлагается на катионы водорода и анионы гидроксила; на катоде выделяется водород:

$$4H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^- + 2H_2\uparrow.$$

На аноде растворяется металл. Ионы железа взаимодействуют с ионами гидроксила и образуют нераство-

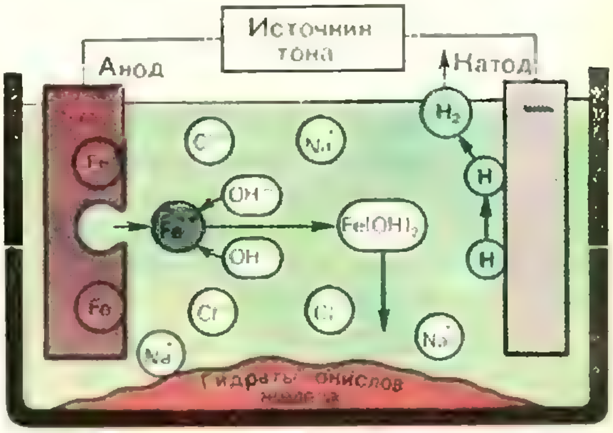


Рис. 3.

римые в воде гидраты окислов железа:

$$Fe^{++} + 2OH^- \rightarrow Fe(OH)_2\downarrow.$$

Гидраты окислов металла заполняют межэлектронное пространство и нарушают нормальный ход электролиза. Поэтому-то и необходимо непрерывно прокачивать раствор электролита в межэлектронном промежутке. Поток электролита обеспечивает отвод тепла, подвод реагентов к электродам и отвод продуктов реакции.

Таким образом, при электрохимической обработке разрушение металла происходит за счет его анодного растворения, а вместо стружки, удаляемой при обработке резанием, образуются гидраты окислов металла, которые удаляются из рабочей зоны потоком электролита.

Электрохимическая обработка металлов имеет целый ряд преимуществ по сравнению с другими методами.

Во-первых, она позволяет обрабатывать любые металлы и сплавы независимо от их химического состава и механических свойств. Обычные стали, твердые, жаропрочные и другие специальные сплавы обрабатываются с одинаковой скоростью. Чем труднее обрабатывается деталь резанием, тем выгоднее применение электрохимической обработки.

Во-вторых, инструмент-катод при этом не изнашивается. С помощью одного инструмента можно обработать огромное количество деталей.

В-третьих, обработка не влечет за собой изменений структуры металла, образования заусенцев, трещин и других дефектов, возникающих при механической обработке.

Кроме того, полость сложной формы или фигурное отверстие можно получить при одном лишь поступательном движении катода соответствующей конфигурации. Это значительно упрощает технологию обработки.

Электрохимическая обработка в настоящее время применяется в промышленных масштабах при изготовлении различных деталей.

Головоломки

Вот несколько представлений числа 1973. Обратите внимание, что в левой части встречаются все цифры этого числа по порядку. Попробуйте придумать подобные представления для числа 1974.

1. $1^7(9^4 - 7^4 - 3^7) = 1973$:
2. $(1 + 9^2 \cdot 7^2 + 3) - [(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] = 1973$.
3. $(19^2 + 7^4 - 3^6) - (1 \cdot 9 \cdot 7 - 3) = 1973$.
4. $(-1^2 - 9^3 + 7^4 + 3^5) - (1 - 9 \cdot 7 + 3) = 1973$.
5. $[1^4 + (9 - 7)^{11} - 3^4] - [1 - (9 - 7)3] = 1973$.
6. $[(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] + [(1 - 9 + 7)\,3^3] = 1973$.
7. $[(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] - [1^3 - (9 + 7)^0 + 3^3] = 1973$.

В. Я. Герасимов

Предлагаем теперь несколько головоломок с числом 1973.

1. Сохраняя последовательность цифр

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1973,
9 8 7 6 5 4 3 2 1 = 1973,

восстановить указанные равенства, использовав все заданные цифры.

Вот одно из возможных решений:

$$(-1 + 2) \cdot 34 \cdot 56 + 78 - 9 = 9 + 8 - 7 + 654 \cdot 3 + 2 - 1 = 1973.$$

А еще найдете?

2. Представьте 1973 суммой или разностью двух чисел так, чтобы были использованы все цифры от 1 до 9 по одному разу.

Возможны, например, такие решения:

$$1973 = 1978^2/_4 - 5^3/_6 = 1967^2/_8 + 5^3/_4.$$

3. Представьте 1973 выражением, содержащим только одну цифру. Вот пример:

$$1973 = 3 \cdot 3^{3!} - 3!^3 + 3! : 3.$$

Б. А. Кордемский
М. И. Нестеренко

ЛАБОРАТОРИЯ
«КВАНТА»

Раздел «Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести какой-либо поучительный эксперимент, не требующий специального оборудования, так сказать, с подручными средствами, которые имеются практически в любом доме. Эти простые по исполнению эксперименты помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают сообразительность и наблюдательность.

Многие законы и явления природы в основе своей не так-то уж и сложны, а их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям.

Из писем наших читателей мы видим, что многие из них охотно проделывают предлагаемые нами эксперименты и даже стремятся творчески видоизменить их (варьировать условия — менять температуру, напряжение или другие участвующие в опыте физические величины, подбирать другие вещества и материалы и т. п.).

При воспроизведении описываемых нами опытов необходимо обращать особое внимание на технику безопасности и строго выполнять рекомендуемые в статьях меры предосторожности.

Мы надеемся, что раздел «Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям лучше разобраться в своих способностях, развить в себе навыки будущих серьезных исследователей природы.

Игрушки из кристаллов

М. П. Головей,
Г. Ф. Добржанский

Кристаллы издавна используются для изготовления украшений и ювелирных изделий. Они привлекают наше внимание причудливыми формами, сверкающими гранями, переливами цветов и богатством оттенков. На страницах «Кванта» уже рассказывалось о том, как вырастить достаточно крупный однородный монокристалл *). Мы хотим научить читателей изготовлять оригинальные и красивые изделия из поликристаллов, вырастить которые не представляет большого труда. При некотором навыке и аккуратности можно стать, например, обладателем удивительной веточки некоего экзотического дерева, состоящей из сверкающих и переливающихся зеленоватым светом небольших кристалликов, или зеленой новогодней елочки, опушенной, как снегом, шапкой белых кристаллов. Познакомившись с методикой и приобретя некоторый опыт, вы и сами сможете придумать и изготовить различные украшения и сувениры из поликристаллов.

Метод получения таких изделий основан на широко используемом способе получения монокристаллов — кристаллизации из водных растворов. При охлаждении насыщенного раствора, а также при испарении растворителя и в других условиях, когда создается пересыщение раствора, растворенное в нем вещество начинает выпадать в осадок. Если в сосуд с раствором (кристаллизатор) поместить маленькие кристаллики исходного вещества (затравки) или какие-нибудь посторонние нерастворимые частички, структура которых близка к структуре кристалликов, то при достаточно медленном снижении температуры мы можем добиться того, чтобы вещество осаждалось преимущественно на затравках.

Получение достаточно крупных (размером в несколько сантиметров и более) однородных искусственных монокристаллов требует сложной аппаратуры с точным автоматическим управлением температурой, перемешиванием растворов, регулированием химического состава среды и так далее. Маленькие кристаллики и их сростки (поликристаллы) можно легко получить и не прибегая к сложным конструкциям и автоматике.

Если в кристаллизатор опустить какой-нибудь предмет, на котором находится большое число затравок, то, используя метод снижения температуры или испарения растворителя, можно обрастить его кристалликами с четко выраженной огранкой. При этом нет никакой необходимости перемешивать раствор или точно регулировать скорость изменения температуры. Кристаллики и без этого вырастают достаточно красиво ограненными. Чтобы получить большое число затравок на заращиваемом предмете, нужно предварительно обмотать его обычными хлопчатобумажными нитками № 10 (не обязательно плотно, виток к витку, можно и с интервалом 1—3 *мм*), окунуть в раствор, тут же вынуть и как следует просушить при комнатной температуре. Так как нитки пропитываются раствором, то при высыхании на них образуются мельчайшие кристаллики, которые и будут в дальнейшем служить затравками.

При желании кристаллами можно легко обрастить любой нерастворимый предмет. Попробуйте, например, изготовить такую веточку, как на рисунке. Для этого необходимо из медной или алюминиевой проволоки диаметром 1—2 *мм* или из какого-нибудь синтетического материала изготовить ее каркас. Провод необходимо обмотать нитками (если взять провод в хлопчатобумажной изоляции, то никакой дополнительной обмотки не требуется). Для изготовления «заснеженной» елочки, можно также сделать ее каркас из проволоки, но гораздо лучше использовать купленную в магазине разборную, синтетическую. У синтетической елочки обматывать нитками нужно только ствол и ветки, а иглы не надо.

---

*) См. статью: Варламов А. А., Казаковцев Д. В. Выращивание кристаллов. «Квант», 1973, № 6.

Количество раствора в кристаллизаторе и его начальную температуру выбирают с учетом размеров каркаса и массы вещества, которую нужно на нем осадить. На маленькую елочку достаточно осадить 100—200 *г* вещества. Масса осадка в данном растворе существенным образом зависит от растворимости выбранного вещества. Мы рекомендуем использовать алюмо-калиевые квасцы (скорее всего, они есть в стандартном школьном наборе химических реактивов в вашем химическом кабинете в школе; их можно также купить в аптеке). Их растворимость при 20° С около 6%, при 50° С — приблизительно 19%. Это означает, что в 1000 *г* насыщенного раствора квасцов при температуре 20° С на 940 *г* воды приходится 60 *г* квасцов, а при 50° С — на 810 *г* воды 190 *г* квасцов. Следовательно, при остывании 1000 *г* насыщенного раствора от 50° С до 20° С в осадок выпадает 130 *г* квасцов. Из сказанного ясно, что для заращивания елочки кристаллами квасцов вполне достаточно 1,5—2 *кг* раствора. Не следует брать раствор с очень высокой температурой, так как в этом случае изделие после сушки будет покрыто мелкой кристаллической пылью, что существенно ухудшит его внешний вид. В качестве кристаллизатора можно взять любой стеклянный сосуд с прозрачными стенками.

Горячий раствор отфильтровывается через ватку. Чтобы синтетическая елочка не всплывала, в ее круглое основание с помощью пластилина надо вмонтировать металлический грузик, например, железную гайку или кусочек свинца. К вершине привязывается нитка, за которую изделие вынимается из кристаллизатора. Уровень раствора в кристаллизаторе должен быть по крайней мере на несколько миллиметров выше каркаса. Сверху кристаллизатор закройте крышкой из картона или полиэтиленовой пленкой. Выпадение осадка протекает сравнительно медленно, поэтому каркас необходимо держать в растворе 10—30 часов.

Приведем для сведения характеристики еще нескольких веществ, которые можно использовать для изготовления сувениров из кристаллов. Показанная на рисунке веточка заращивалась сине-зелеными кристаллами никель-аммония сернокислого; растворимость в воде при 20° С — 5,6%, при 50° С — 12,6%.

Готовая веточка была укреплена в подставке из куска толстой круглой свечки, покрытой лаком. Такая подставка может имитировать бочонок с землей или цветочный горшок. Можно использовать также сернокислый никель (сульфат никеля); его кристаллы темно-изумрудного цвета; растворимость при 20° С — 27%, при 45° С — 32%.

Очень красивую елочку можно получить, если заращивать каркас кристаллами дигидрофосфата калия KH_2PO_4 (так была изготовлена елочка, показанная на фотографии на 4 странице обложки журнала) или дигидрофосфата аммония $(NH_4)H_2PO_4$. Кристаллики этих соединений растут в виде прозрачных сильно удлиненных призм и внешне напоминают ледяные сосульки. Растворимости: KH_2PO_4 при 20° С — 18%, при 50° С — 29%; $(NH_4)H_2PO_4$ при 20° С — 27%, при 50° С — 40%. Готовую елочку можно обложить снизу сростками кристаллов, образовавшихся на дне сосуда, или кусочками белого пенопласта, вырезанными в виде белых снежных сугробов.

Рыбу, фотография которой на обложке нашего журнала, изготовили в одной из лабораторий Института кристаллографии АН СССР в качестве подарка к восьмидесятилетию академика А. В. Шубникова. Сборка каркаса такой рыбы и заращивание его кристаллами потребовали известного мастерства и знаний. Авторы удачно подобрали не только цвет, но и форму кристалликов (дигидрофосфата аммония). На месте глаз у рыбы — маленькие неоновые лампочки марки ТН-0,3, при зажигании которых глаза оживают, начинают мигать розоватым светом, а находящиеся внутри лампочек трубочки создают имитацию зрачков. Если вы будете заращивать кристаллами макет какого-нибудь животного или насекомого, рекомендуем также воспользоваться такими лампочками. Это очень оживит изделие.

ВЗМШ — 10 лет

В этом году Всесоюзная заочная математическая школа будет отмечать свое десятилетие. Созданная в мае 1964 года, она очень быстро завоевала популярность среди юных любителей математики, получила поддержку учителей и ученых. За 10 лет в школе обучались десятки тысяч ребят, и сегодня можно с гордостью отметить, что многие из выпускников ВЗМШ работают инженерами, математиками, экономистами, педагогами, физиками в разных краях нашей Родины.

Основная цель ВЗМШ — помочь школьникам развить свои способности, научить работать, удовлетворить их стремление расширить свои знания. Учебная работа в ВЗМШ проходит в форме переписки учащегося с преподавателями, параллельно с обучением в средней школе. Поэтому занятия в заочной школе особенно полезны прежде всего тем ребятам, которые проживают в маленьких городах, рабочих поселках, деревнях и селах, — ведь у них нет возможности посещать математические кружки при институтах или специализированные физико-математические школы.

Систематическое и квалифицированное руководство со стороны ВЗМШ внеклассными занятиями математикой оказывает большую помощь и учителям математики средних школ, особенно сельских. Не случайно, что появляется все больше и больше «коллективных учеников» — целых групп учащихся одной или нескольких школ, изучающих под руководством своего учителя на факультативных занятиях программу ВЗМШ.

(Продолжение см. на с. 66)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Математикой можно заниматься по-разному. Можно взять толстую книгу и читать ее подряд: определения, теоремы, доказательства. А можно действовать более активно: прочитать определения и формулировки теорем, отложить книгу в сторону и придумать доказательства самому. Первый способ поначалу дает возможность двигаться быстрее. Но только второй способ позволяет прочувствовать математическую теорию, надолго ее запомнить и научиться применять.

Только решая уже известные задачи — открывая новое для себя, — можно подойти к новому для других.

Именно на такую активную работу читателей рассчитаны заметки, которые публикуются в разделе «Математический кружок». Обычно эти заметки построены как занятия математического кружка: читателю предлагается несколько тесно связанных друг с другом задач. Некоторые из них решены в тексте, а другие—и легкие, и более трудные—оставлены для самостоятельного решения.

Как правило, наш математический кружок доступен школьникам 8—9, а часто и 7 классов.

Г. А. Гуревич,
Ж. М. Раббот

О вероятностях и «хороших» числах

В «Кванте» публикуется много различных задач по математике. В письмах, приходящих в редакцию, часто задается вопрос: «Как придумывают задачи?» Наша заметка адресована прежде всего тем читателям, которых волнует этот вопрос.

Несмотря на кажущийся «элементарный» характер многих интересных задач, большинство из них — переформулировки содержательных математических фактов. К сожалению, многие школьники часто, даже решив ту или иную задачу, и не подозревают об идеях, из которых она возникла.

Цель этой заметки — рассказать немного о теории вероятностей, с которой связана задача М204 «Задачника „Кванта“», и дать простое решение этой задачи.

Сначала мы напомним условие задачи М204.

Назовем натуральное число «хорошим», если в его десятичной записи встречаются подряд цифры 1, 9, 7, 3, и «плохим» в противном случае. Докажите, что существует такое натуральное число n, что среди всех n-значных чисел больше «хороших», чем «плохих».

Несколько примеров

Мы начнем с рассмотрения нескольких примеров, которые на первый взгляд никак не связаны с нашей задачей.

Пример 1. Предположим, что мы подбросили монету. Если она без изъянов, то мы с одинаковой уверенностью можем ожидать как то, что она упадет вверх «орлом», так и то, что сверху окажется «решка». Кроме того, интуиция нам подсказывает, что если мы подбросим монету два раза, то наша уверенность в том, что хотя бы один из этих двух раз выпадет «орел», будет гораздо больше, чем в том, что оба раза выпадет «решка». И уж, наверное, все согласятся с тем, что если подбросить монету 100 раз, то почти наверняка хотя бы один раз выпадет «орел», или, другими словами, маловероятно, что все 100 раз выпадет «решка».

Пример 2. В ящик поместили 10 красных и 2 черных шара. Если наугад вынуть какой-нибудь шар из ящика, то им почти наверняка окажется красный, так как красных шаров намного больше, чем черных. Но если многократно (скажем, сто раз) повторить этот опыт, каждый раз восстанавливая «исходное положение», то есть возвращая вынутый шар на место и тщательно перемешивая содержимое ящика, то можно с уверенностью сказать, что рано или поздно мы вытащим черный шар.

Пример 3. Возьмем 10 000 карточек и выпишем на них все натуральные числа от 0 до 9999 (на каждой карточке одно число). Если на карточке написано однозначное, двузначное или трехзначное число, то мы припишем к нему слева соответственно три, два или один нуль. Таким образом, все выписанные на карточках числа станут четырехзначными. Сложим все карточки в пачку и тщательно перемешаем. Будем теперь производить следующий опыт.

Вынем наугад одну карточку из пачки, посмотрим, какое на ней написано число, положим карточку на место и тщательно перемешаем пачку. Проделав этот опыт достаточно много раз (скажем, миллион), мы почти наверняка вытащим хотя бы один раз число 1973.

Идея решения задачи М204

В последней фразе предыдущего абзаца заключено, по существу, решение задачи М204. Действительно, пусть в первый раз мы вытащили карточку с числом 1375, во второй — с числом 0021, в третий — 1131 и так далее. Записав все эти числа подряд, мы получим число 137500211131... Проделав серию из k опытов и вытащив при этом последовательно числа *) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_k$, мы поставим в соответствие этой серии $4k$-значное натуральное число $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_k}$. Ясно, что если в нашей серии опытов встретилось хотя бы один раз число 1973, то получившееся в результате $4k$-значное число будет «хорошим». Поскольку почти во всех сериях (при достаточно большом числе k опытов) встречается карточка с числом 1973, то почти все $4k$-значные числа — «хорошие». Это утверждение даже сильнее утверждения задачи М204 (мы не учитываем «хороших» чисел вида 01973000... и т. п.).

Все сказанное выше — лишь наводящие соображения. Чтобы получить аккуратное решение задачи, надо, прежде всего придать точный смысл словам «достаточно много», «с уверенностью сказать», «почти наверняка» и им подобным. Этим мы сейчас и займемся.

Событие, вероятность события

Прежде чем дать точное определение указанным в подзаголовке понятиям, выясним, что общего в рассмотренных нами примерах.

Во-первых, мы везде проводили некоторый опыт, причем заранее не был известен его результат. В первом примере это было бросание монеты, во втором — извлечение шара из ящика, в третьем — операции с карточками.

Во-вторых, в каждом опыте было конечное число возможных его исходов: в первом — два (выпадение «орла» или «решки»), во втором — двенадцать (извлечение любого из шаров), в третьем — десять тысяч.

В-третьих, если опыт повторялся, то результат последующего опыта никак не зависел от исхода предыдущего.

В-четвертых, наконец, ни один из возможных исходов в этих опытах не обладал никакими преимуществами перед другими. Мы с одинаковой уверенностью могли ожидать реализации любого из них, или, как говорят, все они были равновероятны.

Рассмотрим теперь опыт с n возможными равновероятными исходами $e_1, e_2, \ldots e_n$, причем мы будем предполагать, что в результате опыта наступает один и только один из этих n исходов. «Один и только один» означает следующее:

а) *в результате опыта наступает один из исходов*;

б) *никакие два из исходов не могут наступать одновременно.*

Такие исходы мы будем называть *элементарными событиями*. Все элементарные события образуют множество, которое так и называется: *множество элементарных событий.*

Произвольное подмножество множества элементарных событий называется *событием.*

В примере 1 выпадение «орла» или выпадение «решки» — элементарные события.

В примере 2 извлечение из ящика какого-либо конкретного шара (шары мы считаем пронумерованными) — элементарное событие. Извлечение черного шара — событие (не элементарное), оно состоит из двух элементарных: «извлечение черного шара № 1» и «извлечение черного шара № 2».

---

*) Запись a обозначает последовательность цифр числа a.

В примере 3 извлечение какой-то карточки — элементарное событие. Всего здесь элементарных событий — 10 000. А вот извлечение карточки, на которой написано «истинно» четырехзначное число (то есть число, у которого первая цифра слева — не нуль) — событие, состоящее из 9000 элементарных: «извлечение карточки с числом 1000», «извлечение карточки с числом 1001», «извлечение карточки с числом 1002», ..., «извлечение карточки с числом 9999».

Каждому из элементарных событий $e_1, e_2, \ldots, e_n$ мы припишем (поставим в соответствие) число $\frac{1}{n}$, которое назовем *вероятностью* этого элементарного события.

Отметим, что мы каждому из элементарных событий приписали по определению одинаковую вероятность. Это и служит выражением того, что все они «равноправны».

Элементарные события, из которых складывается данное событие A, называются *исходами, благоприятствующими этому событию.* Вероятность $p(A)$ события A, состоящего из m элементарных событий, определяется так:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятствующих событию A исходов, n — общее число исходов.

Упражнения

1. При бросании игральной кости выпадения 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков равновероятны. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает:

а) четное число очков;
б) нечетное число очков;
в) 3 или 5 очков;
г) простое число очков?

2. Какова вероятность того, что число, написанное на выбранной карточке в примере 3, обладает следующими свойствами:

а) четырехзначное;
б) делится на 5;
в) есть полный квадрат;
г) не есть четырехзначное число?

Очевидно, что при данном определении вероятность любого события заключена между 0 и 1: $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Событие, вероятность которого равна 1, назовем *достоверным*. Ему благоприятствуют все исходы без исключения.

Событие, которому благоприятствует пустое множество элементарных событий (другими словами, то, которое никогда не произойдет), по данному определению имеет вероятность 0 и называется *невозможным*.

Операции над событиями

Пусть A — событие. Обозначим через $\overline{A}$ событие, *противоположное* A, то есть событие, которому благоприятствуют все те элементарные исходы, которые не входят в A.

Пусть A и B — два события. Через $A+B$ обозначим событие, состоящее из исходов, благоприятствующих хотя бы одному из исходов A и B.

Через $A \cdot B$ обозначим событие, состоящее из исходов, благоприятствующих как событию A, так и событию B.

Наконец, через $A \setminus B$ обозначим событие, состоящее из исходов, благоприятствующих A, но не благоприятствующих B *).

Упражнения

3. Докажите, что: а) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$; б) $p(A+B) \leqslant p(A) + p(B)$; в) $p(A \cdot \overline{A}) = 0$; г) $p(A + \overline{A}) = 1$; д) $p\left(\overline{(\overline{A})}\right) = p(A)$; е) $p((A \setminus B) + (A \cdot B)) = p(A)$; ж) $p((A \setminus B) \cdot B) = 0$.

4. Пусть событие A — извлечение на карточке в примере 3 четырехзначного числа, событие B — извлечение числа, делящегося на 5. Сформулируйте, что означает каждое из

---

*) Те, кто читал статью: Гиндикин С. Г., Сколько существует операций над множествами? «Квант», 1973, № 7, безусловно, заметили, что операции над событиями определяются точно так же, как операции над множествами (только вместо $A \cap B$, $A \cup B$ обозначаются как AB, $A + B$).

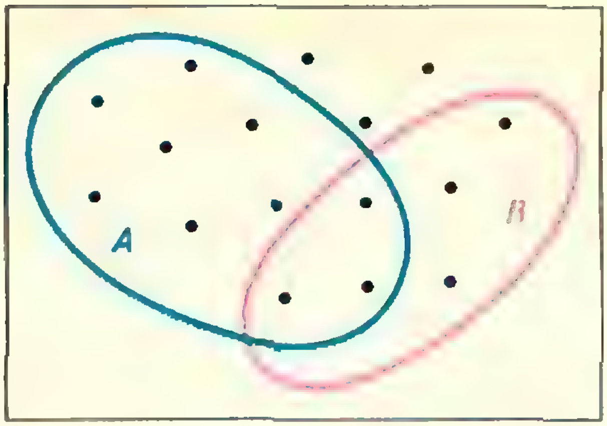


Рис. 1.

событий, стоящих в скобках ниже, и найдите: а) $p(\overline{A})$; б) $p(\overline{B})$; в) $p(A+B)$; г) $p(A\cdot B)$; д) $p(A+\overline{B})$; е) $p(A\cdot\overline{B})$; ж) $p(A\setminus B)$; з) $p(B\setminus A)$.

5. Докажите, что для любых двух событий A и B выполняется равенство

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B).$$

В частности, на рисунке 1 множество элементарных событий состоит из 16 элементов, изображенных черными точками. При этом $p(A)=5/8$, $p(B)=3/8$, $p(A\cdot B)=3/16$, $p(A+B)=13/16$.

Серии независимых испытаний

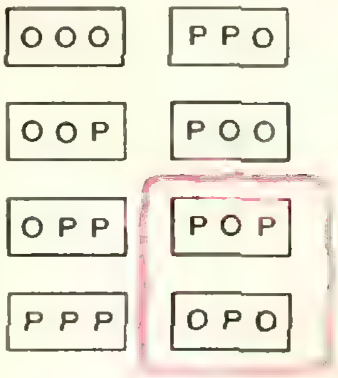
В наших примерах речь шла не только об одиночных испытаниях (бросании монеты, вытаскивании шара или карточки), но и о сериях из нескольких таких испытаний. Как вычислять вероятности в таких случаях? Здесь мы сталкиваемся с комбинаторными задачами. Схема действий такова: сначала надо найти множество элементарных событий и определить число N его элементов, затем определить число M исходов, благоприятствующих A, и по формуле $p(A)=\frac{M}{N}$ найти ответ.

Решим, например, такую задачу. *Пусть мы три раза подряд бросили монету. Какова вероятность, что выпадения «орла» и «решки» будут чередоваться?*

Рассмотрим сначала опыт, состоящий из двух последовательных бросаний монеты. Исходами этого опыта являются следующие четыре пары: (О;О), (О;Р), (Р;О), (Р;Р) (здесь О — «орел», Р — «решка»). Поскольку результат второго бросания не зависит от результата первого (испытания независимы), то все эти четыре исхода равновероятны.

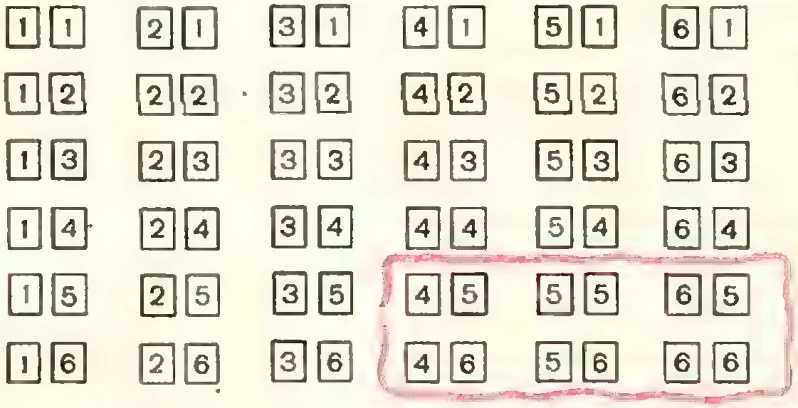
Аналогично, если мы будем бросать монету три раза, то исходами этого опыта будут всевозможные тройки из О и Р. Каждому исходу мы приписываем одинаковую вероятность, равную $^1/_8$, а интересующее нас событие «выпадения О и Р чередуются» состоит из двух элементарных событий; его вероятность равна $2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ (рис. 2).

В общем случае, если однократный опыт *допускает n элементарных* исходов, то число всевозможных элементарных исходов двукратного опыта равно, очевидно, n^2 (к любому из n исходов первого опыта можно неза-



О О О	Р Р О
О О Р	Р О О
О Р Р	Р О Р
Р Р Р	О Р О

Рис. 2.



1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Рис. 3.

висимо добавить любой из n исходов второго), для трехкратного повторения число исходов равно n^3 и так далее. Каждый исход серии из k независимых испытаний можно записать строчкой $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, где a_i — один из n исходов простого опыта, общее число исходов равно n^k.

Нетрудно подсчитать вероятность события A такого типа: «при первом опыте произошло событие A_1, при втором — A_2, при третьем — $A_3, \ldots$, при k-м — A_k»*).

Докажем, что для такого события A

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_k).$$

Например, на рисунке 3 приведено множество исходов при двукратном бросании игрального кубика и выделен красный прямоугольник, содержащий $3 \cdot 2 = 6$ элементарных исходов, благоприятствующих такому событию A: «при первом бросании выпало не менее 4 очков, при втором — не менее 5 очков». Ясно, что вероятность выпадения не менее 4 очков (при однократном бросании) равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, вероятность выпадения не менее 5 очков равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, а вероятность события A равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

В общем случае пусть событию A_i благоприятствует m_i исходов однократного опыта: $p(A_i) = \frac{m_i}{n}$. Событию A благоприятствуют все возможные исходы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, где a_i — исход, благоприятствующий A_i. Таких строчек

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

существует всего $m_1 m_2 \ldots m_k$ — к любому из m_1 исходов A_1 можно независимо добавить любой из m_2 исходов A_2, затем к полученному — любой из исходов A_3 и так далее. Поэтому

$$p(A) = \frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{n^k} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n} \cdot \ldots \times$$

$$\times \frac{m_k}{n} = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_k).$$

Заметим, что в наших рассуждениях несущественно то, что испытания проводятся последовательно одно за другим. Мы можем одновременно бросать несколько монет или вытаскивать шары из нескольких одинаковых ящиков. Важно лишь, что испытания никак не зависят одно от другого.

Упражнения

6. Какова вероятность того, что при первом бросании кубика выпадет 3 очка, а при втором — четное число очков?

7. Пусть мы трижды провели опыт с шарами в примере 2, каждый раз возвращая шар на место. Какова вероятность, что

а) все три раза мы вытащили красный шар;

б) цвета шаров чередовались;

в) хотя бы раз был вытащен черный шар;

г) ровно один раз появился черный шар?

Решение задачи М204

Теперь мы в состоянии дать строгое решение задачи М204. Рассмотрим серию k последовательных опытов из примера 3. Найдем вероятность того, что хотя бы один раз при этом мы вытащим карточку с числом 1973.

Вероятность того, что за одну операцию мы вытащим эту карточку, равна $\frac{1}{10000}$. Тогда, очевидно, вероятность того, что мы за один раз не вытащим эту карточку, равна $\frac{9999}{10000}$ (см. задачу 3а). Теперь легко найти вероятность того, что мы за k испытаний не вытащим карточку с числом 1973: эта вероятность равна $\left(\frac{9999}{10000}\right)^k$. Но это событие как раз противоположно тому, вероятность которого мы ищем. Поэтому (опять см. задачу 3а) вероятность того, что мы за k операций вытащим хотя бы один раз карточку с числом 1973, равна $1 - \left(\frac{9999}{10000}\right)^k$.

---

*) Как и выше, мы считаем события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ независимыми.

Общий член геометрической прогрессии $\left(\frac{9999}{10000}\right)^k$ со знаменателем $\frac{9999}{10000}$, меньшим, чем 1, при неограниченном возрастании k стремится к нулю. Поэтому найдется такое k_0, начиная с которого $\left(\frac{9\,999}{10\,000}\right)^{k_0} < \frac{1}{2}$, то есть $1-\left(\frac{9\,999}{10\,000}\right)^{k_0} > \frac{1}{2}$.

При $k > k_0$ среди $4k$-значных чисел «хороших» будет больше, чем «плохих».

Из нашего решения получается следующая оценка для минимального $n=n_0$, начиная с которого среди n-значных чисел больше хороших, чем плохих: $n_0 > 4\lg 2/\lg\left(\frac{10\,000}{9\,999}\right) \approx 30\,000$. Эта оценка, конечно, довольно грубая.

Следует отметить ряд писем (*Н. Щербины*, Днепропетровск; *А. Курляндчика*, Ленинград; *А. Григоряна*, Баку), в которых найдена более точная оценка. Наиболее интересный путь здесь таков. Пусть $G(n)$ — количество хороших n-значных чисел: $G(1)=G(2)=G(3)=0$, $G(4)=1$, $G(5)=19$, $G(6)=280,\ldots$

Докажем, что при $n>5$

$$G(n) = 9\cdot 10^{n-5} + 10G(n-1) - G(n-4). \qquad (*)$$

Действительно, n-значных чисел, оканчивающихся на 1973, существует $9\cdot 10^{n-5}$; хороших, которые остаются хорошими после вычеркивания последней цифры — $10G(n-1)$, а чисел, принадлежащих обоим этим множествам, очевидно, $G(n-4)$.

Из рекуррентного соотношения (*) легко вывести, что минимальное n_0 заключено между 5000 и 10 000. А если использовать ЭВМ (как поступил брат нашего читателя *Л. Курляндчика*), то можно быстро найти и точное значение n_0: оно равно 6933.

Основная ошибка, которую допустило большинство читателей, состояла в следующем. Вместо того, чтобы оценивать сверху количество плохих чисел, как это делалось в нашем решении, подсчитывалось количество хороших чисел: сначала — таких, у которых 1973 стоит в первых четырех разрядах, затем — со 2-го по 5-й разряд, затем — с 3-го по 6-й и т. д., и все полученные числа складывались. При таком подсчете числа, в которые 1973 входит дважды, трижды и т. д., считаются два, три и т. д. раз (например, число 1973561973 считается один раз среди чисел, начинающихся на 1973, и еще раз — среди чисел, оканчивающихся на 1973). Поэтому найденное таким образом число намного превышает действительное количество хороших чисел.

Упражнения

8. Докажите, что найдется такое число n, что среди всех n-значных чисел больше половины таких, в десятичной записи которых дважды встречается число 1973.

9. Каких десятичных n-значных чисел больше: тех, в записи которых встречается цифра 4, или тех, где эта цифра не встречается?

10. Рассмотрим опыт, состоящий из n ($n \geq 3$) бросаний монеты. Докажите, что вероятность того, что в первых трех бросаниях выпадет «орел», не зависит от n.

11. Пусть при повторных опытах с карточками из примера 3 мы вытащенную карточку не возвращаем на место. Найдите вероятность того, что в результате трех испытаний мы хотя бы один раз вытащим карточку с числом 1973.

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. Элементарное введение в теорию вероятностей, М., «Наука», 1970.

2. Д. Кемени, Д. Снелл, Д. Томпсон. Введение в конечную математику», М., «Мир», 1964.

3. Ф. Мостеллер. Пятьдесят занимательных вероятностных задач, М., «Наука», 1971.

4. А. М. Яглом, И. М. Яглом. Вероятность и информация. М., «Наука», 1973.

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Наряду с относительно легкими задачами здесь встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам — математикам и физикам. Самые трудные задачи помечены звездочкой. Если не сумеете быстро справиться с задачей,—не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней еще раз — через день, через неделю. Если задача вас заинтересовала, то не откладывайте ее даже после того как решение найдено,— подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как можно обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат, какие близкие задачи она позволяет исследовать.

Во второй части раздела «Задачник „Кванта"» мы помещаем решения задач (примерно через полгода после публикации условий) с учетом присланных читателями писем. По существу, решение каждой задачи — это небольшая заметка, и мы советуем познакомиться с ними и тем, кто не получал в прошлом году «Квант» или не решал задач. В нечетных номерах «Кванта» (№№ 1, 3, ...) мы приводим фамилии читателей, приславших нам правильные решения задач. Школьники, которые в течение года регулярно присылают интересные и полные решения, получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады по математике или физике наравне с победителями районных олимпиад. Кроме того, для победителей нашего постоянного конкурса по решению задач редакция устанавливает несколько специальных премий (о них мы сообщим позднее).

Разумеется, не все наши задачи публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам задачу. Придумать новую оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие», пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую. Если вам это удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Напишите, как возникла у вас задача: встречали ли вы похожие задачи или идеи решения, с какими общими явлениями или математическими теоремами связан ваш новый результат. Наиболее красивые и интересные задачи мы опубликуем в «Задачнике» или других разделах «Кванта».

Наш адрес: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант» На конверте после адреса напишите, решения каких задач вы посылаете (например: «задачи М242, М245» или «Ф257» или «новая задача по математике (по физике)»). Решения задач по каждому предмету (по математике, и по физике), а также новые задачи по каждому предмету присылайте в отдельных конвертах. Формулировки новых задач (как и любые другие материалы, предназначенные для публикации в журнале) нужно присылать в двух экземплярах. Мы получаем очень много писем от читателей и стараемся отвечать всем нашим постоянным корреспондентам. Очень просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантам раздела «Задачник „Кванта"». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь (и ваш «номер», если вы — ученик ВЗМШ). В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (для ответа после проверки решений). Письма от читателей мы сможем учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке и присланы не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера.

Крайний срок присылки ответов на задачи этого номера — 1 марта 1974 года.

Задачи

М241—М245; Ф2 53—Ф257

М241. Докажите, что

$$3^{1974}+5^{1974}$$

делится на 13.

С. И. Мейзус

М242. Пусть A_iH_i — высота и A_iM_i — медиана, проведенные из вершины A_i остроугольного треугольника $A_1A_2A_3$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. Докажите, что одно из трех произведений

$$|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|,\quad |H_2M_2|\cdot|A_3A_1|,\quad |H_3M_3|\cdot|A_1A_2|$$

равно сумме двух других *). Верно ли это утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольника?

С. Сальников, ученик 10 класса (г. Мары)

М243. n отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n (рис. 1) расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых, оканчивается на другой прямой, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) — центр тяжести единичных масс, помещенных в точках A_1, A_2, ..., A_n. Докажите, что

$$\frac{A_1G}{GB_1}+\frac{A_2G}{GB_2}+\ldots+\frac{A_nG}{GB_n}=n\,.$$

А. М. Лопшиц

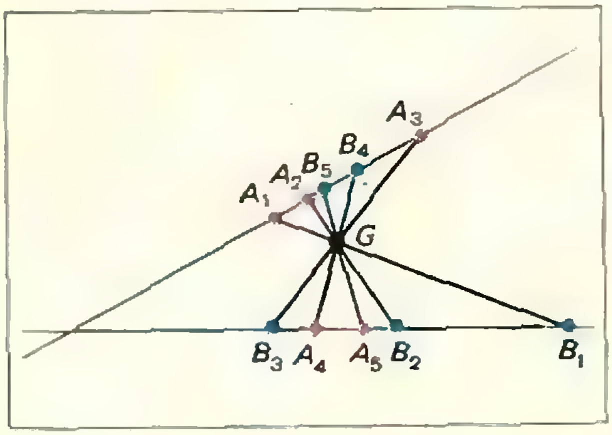


Рис. 1.

М244. Даны два набора из n вещественных чисел:
$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ и $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$.
Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) из $a_i<a_j$ следует, что $b_i\leqslant b_j$;

б)* из $a_i<a<a_j$, где $a=\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$, следует, что $b_i\leqslant b_j$;

то верно неравенство

$$n\,(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

А. Григорян, ученик 10 класса (Баку)

М245. Предлагается построить N точек на плоскости так, чтобы все попарные расстояния между ними равнялись заранее заданным числам: для каждых двух точек M_i, M_j известно, чему должно равняться расстояние $|M_iM_j|=r_{ij}$ (i и j — любые числа от 1 до N).

а) Можно ли произвести построение, если расстояния r_{ij} заданы так, что всякие 5 из N точек построить можно?

б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из N точек?

в)* Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее K, для которого возможность построения любых K из данных N точек обеспечивает построение и всех N точек?

М. Л. Гервер

---

*) Через $|KL|$ обозначается длина отрезка с концами K и L.

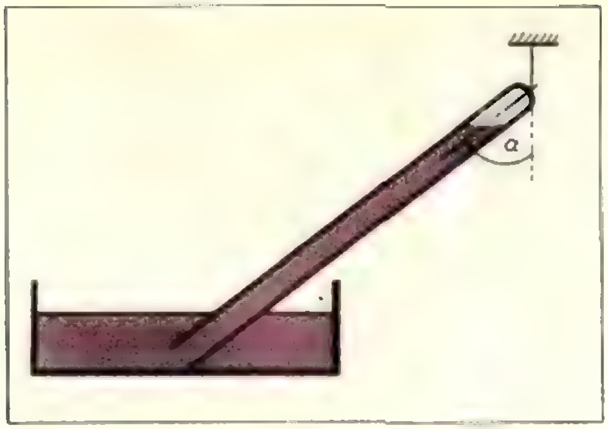


Рис. 2.

Ф253. Шар, изготовленный из твердого диэлектрика, поместили в однородное электрическое поле с напряженностью E. При этом диэлектрик оказался полностью поляризованным. Воспользовавшись принципом суперпозиции, найти напряженность электрического поля в центре шара и в точках на расстоянии r от центра шара (r меньше радиуса шара).

Молекулы диэлектрика можно представить как гантельки длины l с зарядами $+q$ и $-q$ на концах. Число молекул в единице объема равно n.

Ф254. Тонкостенная трубка ртутного барометра открытым концом опирается на дно чашки со ртутью. Закрытый конец удерживается вертикальной нитью, так что трубка составляет угол α с вертикалью, (рис. 2). Длина трубки l, масса m, плотность ртути ρ, атмосферное давление h *мм рт. ст.* Найти силу натяжения нити. Размером погруженной в ртуть части трубки пренебречь. Площадь сечения трубки S.

Ф255. При фотографировании Луны с Земли фотоаппаратом, объектив у которого имеет фокусное расстояние F, на фотопластинке получено размытое изображение Луны в виде диска радиуса R. Затем с помощью того же аппарата получают резкое изображение Луны. Оно имеет радиус R_1. На какое расстояние сместили при втором фотографировании Луны объектив фотоаппарата относительно фотопластинки?

Диаметр объектива D. (Дифракцию не учитывать.)

Ф256. В центр квадратной свободно подвешенной доски попадает пуля. Если скорость пули $v > v_0$, то она пробивает доску насквозь. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость пули будет равна $2v_0$? nv_0? При какой скорости пули скорость доски будет максимальной?

Масса пули m, масса доски M, сопротивление считать независящим от скорости.

Задача из статьи Л. Эйлера
«Об ударе пуль при стрельбе
по доске», 1770 г.

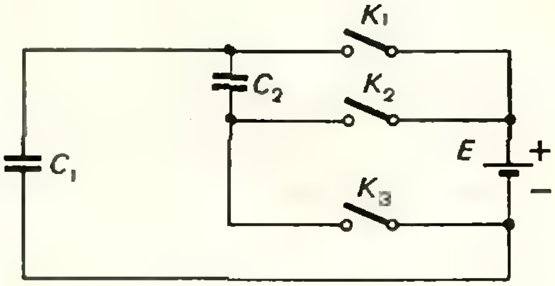


Рис. 3.

Ф257. В схеме, изображенной на рисунке 3, вначале все ключи разомкнуты. Конденсаторы C_1 и C_2 разряжены. Э. д. с. батареи E. Затем ключи K_1 и K_3 замыкают и через некоторое время их размыкают. После этого замыкают ключ K_2. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе C_1 после замыкания ключа K_2?

Решения задач

М200—М204; Ф211, Ф212

М200. *а) На рисунке 1 изображено шесть точек, которые лежат по три на четырех прямых. Докажите, что можно 24 способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отображались в три точки, также лежащие на одной прямой.*

б) На рисунке 2 девять точек лежат по три на девяти прямых, причем через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отображалась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображенной на рисунке 3.

а) Всего имеется $6! = 720$ способов отобразить множество из шести точек на самого себя. Но не все эти отображения удовлетворяют условиям задачи. Удобнее начать с отображения прямых нашей конфигурации. Если для каждой из наших четырех прямых будет указано, на какую прямую она отображается, то тем самым определится и образ каждой точки (каждая точка нашей конфигурации является точкой пересечения определенных двух входящих в конфигурацию прямых). Множество из четырех прямых можно отобразить на себя $4! = 24$ способами.

б) Отметим одну из прямых конфигурации l. Обозначим три лежащие на ней точки конфигурации A, B и C. Через эти точки проходят еще шесть прямых конфигурации. Остаются еще $9 - 1 - 6 = 2$ прямых, которые не проходят ни через одну из точек A, B и C. Обозначим их p и q (рис. 4).

Отобразите прямую l на какую-либо из девяти прямых конфигурации — на прямую l_1. Это можно сделать девятью различными способами. Точки A, B и C придется отобразить на точки A_1, B_1, C_1, лежащие на прямой l_1. Это можно сделать $3! = 6$ способами. Прямые p и q должны отобразиться на две прямые p_1 и q_1 не проходящие через точки A_1, B_1, C_1. Это можно сделать двумя способами. После этого образы остальных точек и прямых конфигурации будут однозначно определены (докажите!).

Всего, таким образом, получится

$$9 \cdot 6 \cdot 2 = 108$$

отображений.

в) Выберем одну из десяти прямых l. На ней расположены три точки A, B, C. Отличные от l прямые нашей конфигурации, проходящие через точки A и B, пересекаются попарно еще в двух точках конфигурации X и Y (рис. 5). Отображение конфигурации на себя полностью определится, если задать образ l_1 прямой l, образы A_1, B_1, C_1 точек A, B, C, лежащие на прямой l_1 и образы X_1

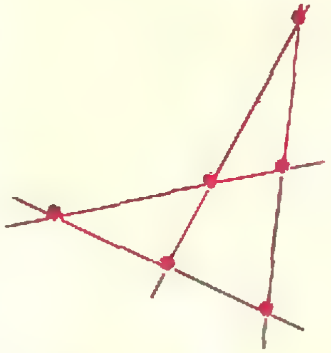


Рис. 1.

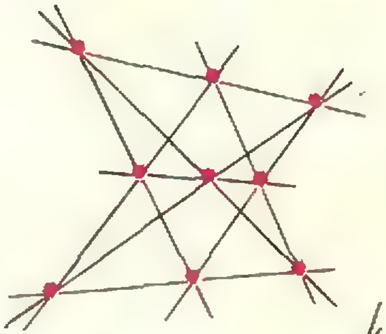


Рис. 2.

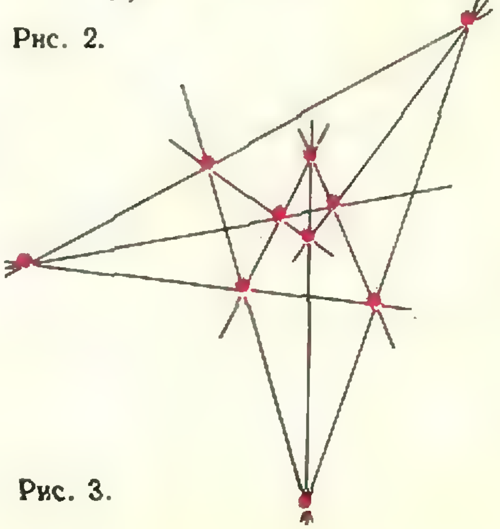


Рис. 3.

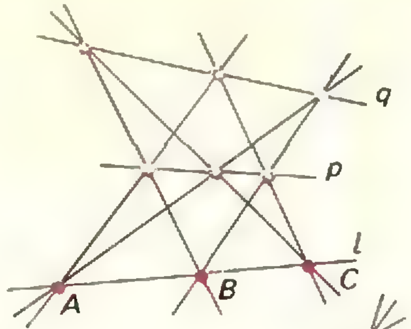


Рис. 4

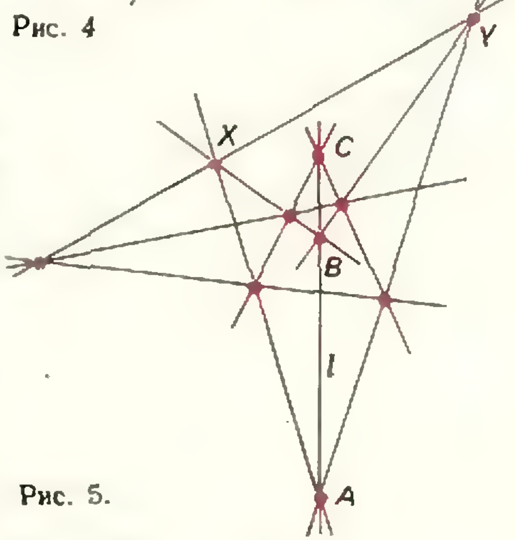


Рис. 5.

и Y_1 точек X и Y, которые должны быть точками попарного пересечения отличных от l_1 прямых конфигурации, проходящих через точки A_1 и B_1 (докажите!). Всего получается

$$10\cdot 6\cdot 2=120$$

интересующих нас отображений.

Примечание. Заметим, что за словами «докажите» скрывается еще довольно большая часть решения. В следующих номерах мы обсудим другие подходы к решению задачи М 200.

А. Н. Колмогоров

М201. *Прямая l_1 пересекает стороны a, b и c треугольника или их продолжение в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно; прямая l_2 пересекает их в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что если точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины стороны a, а точки B_1 и B_2 симметричны относительно середины стороны b, то точки C_1 и C_2 симметричны относительно середины стороны c.*

Мы решим задачу с помощью векторов. Этот путь (так же как решение методом координат) хорош тем, что позволяет одним рассуждением охватить все случаи и не заботиться о том, как расположены прямые l_1 и l_2 относительно данного треугольника.

Пусть A, B, C — вершины треугольника, противоположные стороны a, b, c. Мы должны доказать, что если точки A_1, B_1, C_1 (лежащие на прямых a, b, c соответственно) принадлежат одной прямой, то и симметричные им относительно середины соответствующих сторон точки A_2, B_2, C_2 принадлежат одной прямой (рис. 6).

Для частного случая, когда l_1 проходит через одну из вершин A, B или C, это очевидно, и в дальнейшем мы будем считать, что точки A_1, B_1 и C_1 не лежат в вершинах.

Воспользуемся теоремой Менелая: точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}=1 \tag{1}$$

(здесь $A_1\in(BC)$, $B_1\in(CA)$, $C_1\in(AB)$).

Для точек A_2, B_2 и C_2 аналогичное условие запишется так:

$$\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}=1\,. \tag{2}$$

Но поскольку при симметрии относительно середины стороны AB точка A переходит в B, B в A, а C_1 — в C_2, то

$$\overrightarrow{AC_1}=-\overrightarrow{BC_2}\ \text{и}\ \overrightarrow{BC_1}=-\overrightarrow{AC_2}.$$

Поэтому $\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}=\dfrac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{AC_2}}$. Точно так же равны отношения векторов для двух других сторон. Таким образом, (2) сразу следует из (1). Задача М201 решена. Остается только доказать теорему Менелая.

Для этого спроектируем все отношения на одну прямую AB. Проведем прямые, параллельные A_1C_1, через точки C и B_1. Пусть C' и B_1' — точки их пересечения с пря-

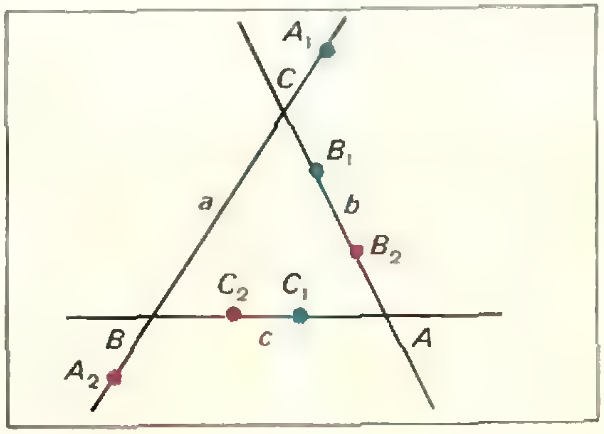


Рис. 6.

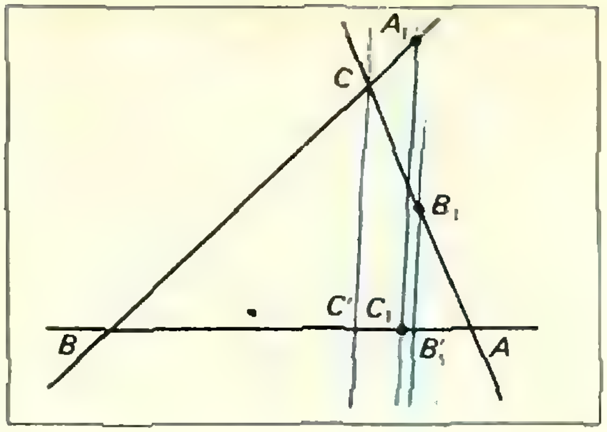


Рис. 7.

мой AB (рис. 7). Мы должны найти условие, при котором B_1' совпадает с C_1, то есть $\overrightarrow{AB_1'}=\overrightarrow{AC_1}$ или, что то же самое,

$$\frac{\overrightarrow{AB_1'}}{\overrightarrow{C'B_1'}}=\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C'C_1}} \tag{3}$$

(отношением $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{C'M}}=k$ однозначно определяется положение точки $M\in(AB)$, поскольку из $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{AM}}=k$ следует, что $\overrightarrow{AM}=$ $=\dfrac{k}{1-k}\cdot\overrightarrow{C'A}$).

Равенство (3) эквивалентно таким:

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C'C_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{C'B_1'}}{\overrightarrow{AB_1'}}=1,$$

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C'C_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{C'B_1'}}{\overrightarrow{AB_1'}}=1,$$

а это эквивалентно (1).

М202. *Докажите, что из последовательности $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$, являющейся бесконечной арифметической прогрессией ($d\neq 0$), тогда и только тогда можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, когда отношение a/d рационально.*

Пусть a/d рационально; очевидно, можно считать, что a и d одного знака. Тогда

$$\frac{a}{d}=\frac{s}{r},$$

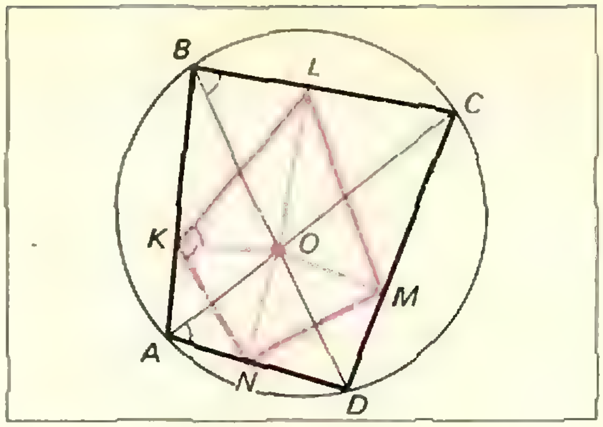


Рис. 8.

где s и r—натуральные числа. Тогда при при любом целом неотрицательном m число $(1+r)^m-1$ делится на $(1+r)-1=r$, поэтому число

$$n_m=\frac{a(1+r)^m-a}{d}=$$
$$=s\,\frac{a(1+r)^m-a}{sd}=s\,\frac{(1+r)^m-1}{r}$$

—целое и неотрицательное; следовательно, каждый член геометрической прогрессии $a(1+r)^m$, $(m=0,1,2,\ldots)$ имеет вид

$$a\,(1+r)^m=a+n_m d,$$

то есть принадлежит арифметической прогрессии.

Пример. Арифметическая прогрессия $\frac{1}{5}+\frac{3}{7}n\,(n=0, 1, 2, \ldots)$, где $\frac{a}{d}=\frac{1\cdot 7}{5\cdot 3}=$ $=\frac{7}{15}$, *содержит подпоследовательность* $\frac{1}{5}\cdot(15+1)^m=\frac{16^m}{5}$ (m — любое целое неотрицательное число).

Обратно, пусть арифметическая прогрессия $a+nd$ ($d\neq 0$) содержит хотя бы три последовательных члена геометрической прогрессии. Пусть это будут ее члены

$$a+kd,\ a+ld,\ a+md\quad(k<l<m).$$

Тогда $(a+ld)^2=(a+kd)\,(a+md)$, откуда

$$a\,(2l-k-m)=d\,(km-l^2).$$

Здесь $2l-k-m\neq 0$. Действительно, если $2l-k-m=0$, то $km-l^2=0$. Но тогда $(k-m)^2=(k+m)^2-4km=4l^2-4l^2=0$ и, следовательно, $k=m$, что противоречит предположению $k<l<m$.

Поэтому отношение $\dfrac{a}{d}=\dfrac{km-l^2}{2l-k-m}$ рационально.

М203. *а) Докажите, что если проекции точки пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ на прямые*

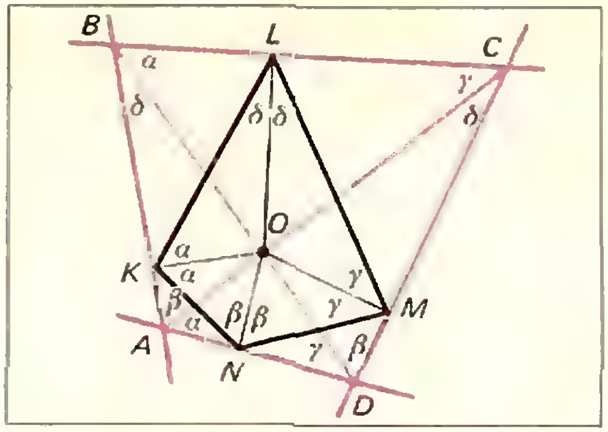


Рис. 9.

AB, BC, CD и DA соединить последовательно четырьмя прямыми (рис. 8), то эти прямые будут касаться одной окружности.

б) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

Решая задачу а), мы докажем, что центром окружности, вписанной в четырехугольник $KLMN$ (OK, OL, OM, ON — перпендикуляры, опущенные из точки O пересечения диагоналей AC и BD на стороны AB, BC, CD, DA), является точка O.

Для того, чтобы это доказать, достаточно доказать, что все четыре биссектрисы углов четырехугольника $KLMN$ проходят через O. Докажем это для точки K (поскольку все четыре вершины входят в условие совершенно симметрично, этого достаточно).

Так как четырехугольники $AKON$ и $BLOK$ вписаны в окружности (с диаметрами AO и BO соответственно) и $ABCD$ — тоже вписанный (по условию), то

$$\sphericalangle NKO = \sphericalangle NAO = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle OBL = \sphericalangle OKL.$$

Итак, мы доказали, что OK — биссектриса угла K.

Аналогично доказывается утверждение задачи и в том случае, когда проекции попадают на продолжение стороны, но окружность тогда может касаться продолжений сторон четырехугольника $KLMN$.

Что касается задачи б), то ее решение оказывается неоднозначным. Дело тут связано вот с чем.

Обратной к теореме «если P, то Q» (здесь P и Q — какие-то утверждения) мы считаем теорему «если Q, то P». Но большинство содержательных теорем имеют более сложную структуру, включают целый ряд отдельных требований в «условии» и «заключении»; например, «если P_1, P_2 и P_3, то Q_1 и Q_2». В такой ситуации часто не просто переворачивают теорему — скажем, «если Q_1 и Q_2, то P_1, P_2 и P_3», но составляют и другие комбинации:

«Если P_1, P_2, Q_1 и Q_2, то P_3», «Если P_1, P_3 и Q_1, то P_2 и Q_2», и т. п. И все они могут быть названы теоремами «обратными» к первоначальной.

Мы не будем заниматься детальным логическим анализом нашей задачи, «расчленением» ее на отдельные высказывания, а просто приведем формулировки различных обратных теорем, присланных читателями.

1. Если точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ одинаково удалена от четырех прямых, соединяющих ее проекции на соседние стороны четырехугольника, то четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

2. Если через вершины K, L, M, N четырехугольника, описанного около окружности с центром O, провести перпендикуляры к отрезкам OK, OL, OM, ON соответственно, то четыре полученные прямые образуют вписанный четырехугольник, и его диагонали проходят через точку O.

3. Пусть K, L, M и N — проекции точки P пересечения диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ на его стороны AB, BC, CD, DA. Если четырехугольник $KLMN$ описан около окружности с центром O, то $ABCD$ можно вписать в окружность, а центр окружности совпадает с P.

Некоторые читатели формулируют более сильную теорему — 2 или 3, а доказывают более слабую — 1 (то есть молчаливо предполагают, что центр O и точка пересечения диагоналей AC и BD должны совпадать). Мы докажем 2 и 3.

2. Обозначим через A, B, C, D точки пересечения соседних перпендикуляров к биссектрисам OK, OL, OM, ON (рис. 9) и соединим эти точки с O. Пользуясь тем, что четырехугольники $AKON$, $BLOK$, $CMOL$, $DNOM$ вписанные, легко доказать, что каждые четыре угла, обозначенные на рисунке четырьмя одинаковыми буквами α, β, γ, δ, равны. После этого будет ясно, что

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC.$$

Поэтому $ABCD$ — вписанный. Далее,

$$\sphericalangle AOC = \left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\pi,$$

поэтому прямая AC (и аналогично — BD) проходит через центр O.

3. Здесь почти все доказательства, присланные читателями, опираются не на равенства, а на некоторые неравенства между углами. Предположим противное: пусть $ABCD$ не вписан в окружность. Пусть, например, $\sphericalangle A + \sphericalangle C > \sphericalangle D + \sphericalangle B$. Докажем тогда, что $KLMN$ — не описанный, то есть что биссектрисы углов K, L, M, N не пересекаются в одной точке. А именно, мы докажем, что биссектрисы углов K и N пересекаются внутри $AKPN$ (аналогично, биссектрисы углов L и M — внутри $CMPL$).

Точка A лежит внутри окружности BCD (поскольку $\angle A > \angle B + \angle D - \angle C$). Поэтому $\angle NKP = \angle NAP = \angle DAC > \angle DBC = \angle PBL = \angle PKL$, поэтому биссектриса угла NKL лежит внутри угла NKP. Точно так же биссектриса угла MNK лежит внутри угла PNK. Следовательно, точка пересечения этих биссектрис расположена внутри четырехугольника $AKPN$. Остальное ясно (то, что если $ABCD$ вписанный, то O совпадает с точкой P пересечения диагоналей, уже доказано в прямой теореме).

Подумайте, как изменить обратные теоремы 2 и 3, чтобы учесть случай, когда четырехугольник $KLMN$ невыпуклый.

Решению задачи **М204** посвящена отдельная заметка на с. 35—40.

Большинству читателей, приславших нам в 1972 году решения задач «Задачника „Кванта"», мы направили ответы, в которых указано, какие задачи решены, где допущены ошибки. В этом номере мы приводим список тех, кто прислал в редакцию верные решения задач **М200 — М205**. Задача **М200** верно решалась целым рядом школьников, но во всех работах были приведены недостаточно полные и четкие доказательства. Правильные решения остальных задач прислали (*жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи*): *П. Агаронов* (Баку) **2**; *С. Агеев* (Воронеж) **2**; *С. Актерешев* (Магнитогорск) **4**; *П. Баньковский* (Уральск) **2**; *А. Бараов* (с. Старый Урух КБАССР) **4**; *А. Берлин* (Бобруйск) **1, 2**; *А. Блох* (Харьков) **1, 2, 4**; *А. Валовой* (Москва) **2**; *А. Вальков* (Ташкент) **2**; *А. Векслер* (Ташкент) **2**; *А. Войновский* (Баку) **2**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **1**; *А. Григорян* (Баку) **2, 4, 5**; *К. Данильченко* (Волгоград) **2**; *П. Дедик* (Москва) **2**; *А. Еременко* (Харьков) **1, 2**; *А. Журавлев* (Москва) **2**; *В. Зарубин* (п. Летний Отдых Московской обл.) **2**; *И. Кирова* (Болгария) **1**; *М. Кобозев* (Киев) **2**; *А. Колодин* (Коломыя Ивано-Франковской обл.) **1**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **2**; *А. Котанов* (п. Цалка ГССР) **1**; *А. Кукуш* (Киев) **1, 2**; *Р. Купиец* (Польша) **2**; *А. Куряндчик* (Ленинград) **2, 4**; *М. Левин* (Витебск) **2**; *Е. Мазур* (Дербент) **1**; *А. Макаричев* (Львов) **1, 2**; *С. Малинский* (Полтава) **2**; *С. Мельник* (Харьков) **1**; *А. Мехович* (Владивосток) **1**; *В. Мильман* (Минск) **1, 2**; *В. Нападов* (Харьков) **2, 3**; *А. Народницкий* (Рига) **3**; *Ю. Неретин* (Москва) **1, 2**; *А. Николаев* (Москва) **1, 2**; *С. Нужный* (Куйбышев) **2**; *В. Паньков* (Минск) **1, 2**; *П. Парамонов* (Москва) **2, 3**; *Е. Пасик* (Харьков) **2**; *А. Резников* (Киев) **1, 2**; *В. Рыжик* (Ленинград) **2**; *А. Рязанов* (Новокузнецк) **1**; *Г. Скляр* (Харьков) **2—5**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **2**; *А. Слинкин* (Москва) **2**; *П. Сухов* (Саратов) **2**; *А. Сыровежкин* (с. Гуляй-Борисовка Ростовской обл.) **2**; *С. Табачников* (Москва) **2, 4**; *А. Ткач* (Каменец-Подольский) **2**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **2, 3, 5**; *А. Тяпин* (Москва) **1**; *С. Фомин* (Ленинград) **2**; *М. Хорошин* (Чернигов) **2**; *И. Цукерман* (Ленинград) **2**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **1, 2, 4**; *И. Юнусов* (Харьков) **2, 5**; *Б. Юсин* (Москва) **2**.

Ф211. *С идеальным одноатомным газом проводят замкнутый процесс (цикл), показанный на рисунке* 11. *В точке C газ имел объем* V_C *и давление* p_C, *а в точке B — объем* $V_B = {}^1/_2 V_C$ *и давление* $p_B = 2p_C$. *Найдите к. п. д. этого цикла и сравните его с максимальным теоретическим к. п. д. цикла, у которого температуры нагревателя и холодильника равны соответственно максимальной и минимальной температурам рассматриваемого цикла.*

По определению к. п. д. цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где A — работа, совершаемая за цикл, а Q_1 — количество теплоты, полученной газом извне. Работа, совершаемая за цикл, численно равна площади, ограниченной контуром цикла на диаграмме (p, V). В данном случае это площадь треугольника ABC (рис. 11):

$$A = \frac{1}{2}(p_B - p_C)(V_C - V_B) = \frac{1}{4} p_C V_C.$$

Теперь найдем количество теплоты, полученной газом при нагревании. Согласно первому закону термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа, A — совершенная газом работа. Если $Q > 0$, то газ получает теплоту, если $Q < 0$ — он отдает ее. Внутренняя энергия

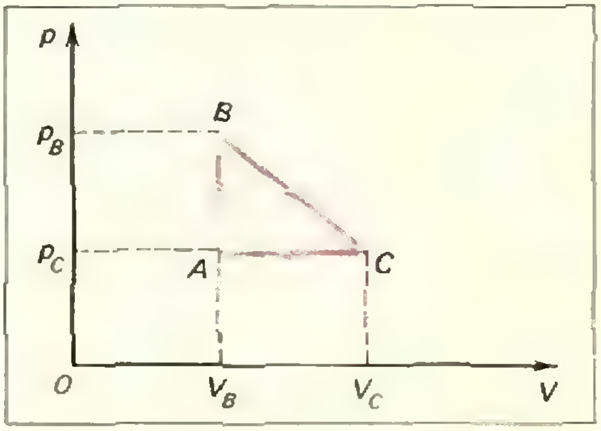


Рис. 11.

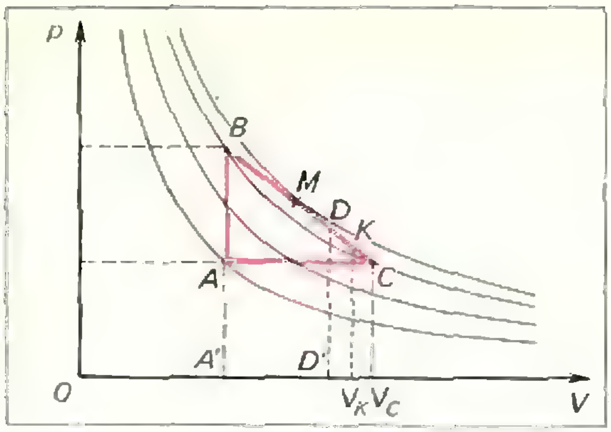


Рис. 12.

одноатомного газа пропорциональна его температуре и равна

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

Нанесем на (p, V)-диаграмму процесса сетку изотерм — гипербол $pV = \mathrm{const}$ (рис. 12). Чем выше температура T, тем дальше находится вершина гиперболы от точки O. Поэтому ясно, что газ получал теплоту от источника при изохорическом нагревании — на участке AB; количество полученной теплоты равно изменению внутренней энергии газа:

$$Q'_1 = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_B - \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_A.$$

Так как согласно уравнению Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

то

$$U = \frac{3}{2}pV$$

и

$$Q'_1 = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(p_BV_B - p_AV_A) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(2p_C\cdot\frac{1}{2}V_C - p_C\cdot\frac{1}{2}V_C\right) =$$

$$= \frac{3}{4}p_CV_C.$$

На участке CA изобарического сжатия газ отдавал теплоту: его внутренняя энергия уменьшалась ($\Delta U < 0$) и работа совершалась над газом ($A < 0$).

Рассмотрим теперь процесс расширения на участке BC. Из условий задачи следует, что точки B и C лежат на одной изотерме, то есть температуры $T_B = T_C$. Из рисунка видно, что в процессе расширения на участке BC точка, изображающая состояние газа, сначала удаляется от изотермы (температура газа увеличивается), а затем приближается к ней (температура газа уменьшается до первоначальной температуры T_B). В процессе расширения газ совершает работу над внешними телами ($A > 0$). Но в начале процесса $B \to C$ газ нагревается, его внутренняя энергия растет ($\Delta U > 0$). В этом случае $Q > 0$, то есть газ получает теплоту извне. В конце процесса $B \to C$ газ охлаждается, его внутренняя энергия убывает, то есть $\Delta U < 0$. В этом случае газ может отдавать некоторое количество теплоты внешней среде ($Q < 0$, если $|\Delta U| > A$).

Найдем ту точку K диаграммы, до которой расширение газа сопровождается получением теплоты извне, и теплоту, полученную при процессе $B \to K$. Для этого найдем, как зависит количество теплоты Q, полученной газом, от объема газа.

При расширении от объема V_B до некоторого объема V_D газ совершит работу, численно равную площади трапеции $A'BDD'$ (см. рис. 12):

$$A = \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)(p_D + 2p_C).$$

При этом, так как газ одноатомный и идеальный, его внутренняя энергия изменится на величину

$$\Delta U = \frac{3}{2}p_DV_D - \frac{3}{2}p_BV_B =$$

$$= \frac{3}{2}(p_DV_D - p_CV_C)$$

и

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}(p_DV_D - p_CV_C) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)(p_D + 2p_C).$$

В последнюю формулу входят параметры p_D и V_D. Исключим один из них. Для этого найдем зависимость давления p от объема V на участке BC. Так как график процесса—прямая, то

$$p = p_0 + \alpha V,$$

где p_0 и α—коэффициенты, которые нужно определить. При $p = p_B = 2p_C$ $V = V_B = = \frac{1}{2}V_C$, а при $p = p_C$ $V = V_C$. Это означает, что

$$2p_C = p_0 + \frac{1}{2}\alpha V_C, \quad p_C = p_0 + \alpha V_C.$$

Решая два последних уравнения совместно, найдем

$$p_0 = 3p_C, \quad \alpha = -2\frac{p_C}{V_C}.$$

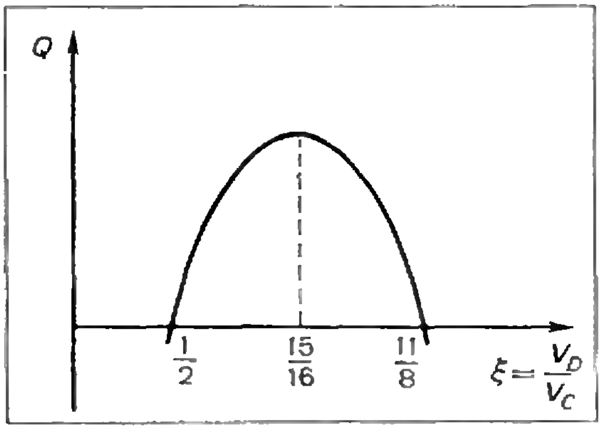


Рис. 13.

Таким образом,

$$p_D = 3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V_D$$

и

$$Q = \frac{3}{2}\left[\left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V_D - p_C\right)V_C\right] + \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)\left(5p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V_D\right) =$$

$$= p_CV_C\left(\frac{9}{2}\frac{V_D}{V_C} - 3\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{5}{2}\frac{V_D}{V_C} - \frac{3}{2} - \frac{5}{4} - \frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{1}{2}\frac{V_D}{V_C}\right) =$$

$$= p_CV_C\left(-4\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{15}{2}\frac{V_D}{V_C} - \frac{11}{4}\right).$$

Введем обозначение $\xi = \frac{V_D}{V_C}$. Тогда

$$Q = -\left(4\xi^2 - \frac{15}{2}\xi + \frac{11}{4}\right)p_CV_C.$$

График зависимости Q от ξ — парабола (рис. 13), пересекающая ось ξ в точках $\xi_1 = \frac{1}{2}$ и $\xi_2 = \frac{11}{8}$ (это корни квадратного трехчлена $4\xi^2 - \frac{15}{2}\xi + \frac{11}{4}$) и с вершиной в точке $\xi = \frac{15}{16}$. В этой точке величина Q максимальна и равна

$$Q_1'' = \frac{49}{64}p_CV_C.$$

Следовательно, при переходе $B \to C$ на участке BK, то есть до состояния, которому соответствует точка K с координатой $V_K = \frac{15}{16}V_C$, газ получает теплоту извне. При дальнейшем расширении (на участке KC) газ отдает теплоту.

Таким образом, количество теплоты, полученной газом за цикл, равно

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' = \frac{3}{4}p_CV_C + \frac{49}{64}p_CV_C = \frac{97}{64}p_CV_C.$$

Теперь можно найти к. п. д. цикла:

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}p_CV_C}{\frac{97}{64}p_CV_C} \approx 0{,}165, \quad \eta = 16{,}5\%.$$

Максимальный же теоретический к. п. д. цикла равен

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1—максимальная, а T_2—минимальная температура газа.

Из рисунка 12 видно, что температура газа минимальна в точке A, то есть

$$T_2 = T_A = \frac{\mu p_AV_A}{mR} = \frac{\mu p_CV_C}{2mR}.$$

Состоянию газа, в котором его температура максимальна, соответствует точка M на отрезке BC, в которой изотерма касается отрезка BC. Из симметрии графика цикла следует, что эта точка находится на середине отрезка BC, так что $V_M = \frac{3}{4}V_C$ *).

При этом $pV = (pV)_{\max} = \frac{9}{8}p_CV_C$. Температура газа в точке M равна

$$T_1 = \frac{9\mu}{8mR}p_CV_C.$$

Подставив найденные выражения для T_1

---

*) Это можно показать непосредственно, рассмотрев, при каком значении произведение $pV = \left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V\right)V$ для точек, лежащих на BC, максимально. Для тех, кто знаком с дифференцированием, ясно, что в точке M производная функции $T(V) = \frac{\mu}{mR}\left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V\right)V$ равна нулю, то есть $\left(\frac{dT(V)}{dV} = \frac{\mu}{mR}\,3p_C - 4\frac{p_C}{V_C}V\right) = 0.$

Отсюда $V_M = \frac{3}{4}V_C$.

и T_2 в формулу для η_{max}, найдем

$$\eta_{max} = 0{,}556 = 55{,}6\%.$$

Сравним η и η_{max}:

$$\frac{\eta_{max}}{\eta} = 3{,}36,$$

то есть максимальный теоретический к. п. д. в 3,36 раза больше к. п. д. рассматриваемого цикла.

М. Е. Маринчук

Ф212. *От сползающего в океан по крутому склону ледника на глубине 1 км откалывается глыба льда — айсберг (его высота меньше 1 км). Какая часть айсберга может расплавиться при всплывании? Температуры льда и воды равны 0° С.*

Сначала найдем, какое количество теплоты выделится при всплывании айсберга. Оно равно изменению потенциальной энергии системы льдина — вода.

При всплывании льдины потенциальная энергия увеличивается на величину

$$\rho_л V_л g h$$

($\rho_л$ — плотность льда, $V_л$ — объем льдины, h — высота поднятия льдины; изменением объема льда за счет таяния пренебрегаем) и уменьшается одновременно на величину

$$\rho_в V_л g h$$

($\rho_в$ — плотность воды), так как при всплывании льдины соответствующий объем воды опускается с поверхности вниз. Изменение энергии системы равно выделившейся теплоте:

$$Q = V_л (\rho_в - \rho_л) g h.$$

Будем считать, что вся эта теплота пошла на таяние льда (мы пренебрегаем теплопроводностью воды и движением ее слоев, то есть ее кинетической энергией, при подъеме льда):

$$Q = \Delta m_л \lambda$$

(λ — удельная теплота плавления льда); отсюда

$$\Delta m_л = \frac{V_л(\rho_в - \rho_л) g h}{\lambda}$$

или

$$\frac{\Delta m_л}{M_л} = \frac{\Delta m_л}{V_л \rho_л} = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л} \frac{gh}{\lambda}.$$

Подставляя сюда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ *кг/м³*, $\rho_в = 10^3$ *кг/м³*, $g = 10$ *м/с²*, $h = 10^3$ *м* и $\lambda = 334000$ *дж/кг*, найдем

$$\frac{\Delta m_л}{M_л} \approx \frac{1}{300}.$$

И. Ш. Слободецкий

В этом номере нашего журнала мы помещаем список читателей, приславших правильные решения задач **Ф211** и **Ф212**.

Задачу **Ф211** правильно решили: *С. Актершев* (Магнитогорск), *А. Бараов* (с. Старый Урух Кабардино-Балкарской АССР), *Ю. Визгин* (Ленинград), *В. Маркин* (Толочин Витебской обл.), *А. Сергеев* (Подольск Московской обл.), *Ю. Смоленцев* (Ессентуки), *В. Терехов* (Сокольники Тульской обл.), *И. Уразгильдин* (Москва), *Е. Федоров* (Магнитогорск).

Задачу **Ф212** правильно решили: *С. Алехин* (Липецк), *А. Амиров* (Оренбург), *В. Бакиров* (Куйбышев), *В. Бенхан* (Калинин), *Л. Брагинский* (Фрунзе), *М. Васнецов* (Киев), *А. Волков* (Челябинск), *Д. Габриэлян* (Белая Калитва Ростовской обл.), *В. Грязев* (Кокчетав Каз. ССР), *А. Гуревич* (Минск), *Ю. Докучаев* (Ленинград), *В. Дунцов* (Душанбе), *Р. Залавуждинов* (Канаш Чувашской АССР), *А. Ивлев* (пос. Стройкерамики Куйбышевской обл.), *А. Калошин* (Москва), *С. Карпенко* (Киев), *Е. Кириллова* (Альметьевск), *В. Ковалевский* (Витебск), *Ю. Кастрылин* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.), *А. Креницкий* (Энгельс), *И. Куцык* (Ярославль), *А. Мамян* (пос. Ноемберян Арм. ССР), *О. Марин* (Пермь), *С. Мельник* (Харьков), *Н. Миронов* (Выкса), *А. Молотков* (Кубинка Московской обл.), *Ю. Муринец* (Магнитогорск), *С. Нужный* (Куйбышев), *С. Пак* (Ташкент), *А. Паровичников* (Обнинск), *А. Парфентьев* (с. Миасское Челябинской обл.), *А. Полянский* (Челябинск), *А. Пономарев* (Киев), *Н. Попов* (Ленинград), *А. Ремеев* (Ташкент), *В. Решетняк* (Киев), *В. Розенбаум* (Харьков), *Р. Сирота* (Харьков), *А. Смолич* (Калинин), *В. Спиридонов* (ст. Мартыновка Николаевской обл.), *Ч. Таривердиев* (Сназан Азерб. ССР), *И. Усвят* (Ташкент), *Ю. Филимонов* (Химки Московской обл.), *В. Хацимовский* (Красноярск), *В. Черкашин* (Ташкент), *Е. Шафирович* (Ногинск Московской обл.), *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.).

Р. Г. Минц

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

В текущем году редакция продолжит публикацию материалов в традиционном разделе «Практикум абитуриента». Статьи по отдельным теоретическим вопросам школьных курсов математики и физики, разбор конкурсных задач и анализ типичных ошибок абитуриентов, варианты вступительных экзаменов в различные университеты и институты страны, разнообразная информация — все это, мы надеемся, будет интересно и полезно читателям журнала, готовящимся к поступлению в вузы.

В редакционной почте немало писем, авторы которых просят указать опубликованные в прошлые годы статьи, с которыми в первую очередь следовало бы познакомиться при подготовке к вступительным экзаменам. В этом номере мы выполняем эту просьбу. Для краткости мы не приводим названия статей, а, условно разбив их по темам, указываем лишь год, номер журнала и страницу, с которой статья начинается.

Математика

Арифметика: 1972, № 6, с. 30; 1973, № 4, с. 71.

Алгебраические преобразования: 1970, № 11, с. 11.

Модуль (абсолютная величина) действительного числа: 1970, № 3, с. 53; 1972, № 9, с. 45.

Функции и графики: 1970, № 1, с. 27; 1970, № 2, с. 3; 1970, № 4, с. 41; 1971, № 9, с. 41; 1973, № 5, с. 38.

Задачи на составление уравнений: 1971, № 11, с. 48; 1973, № 1, с. 35.

Решение уравнений, систем уравнений и неравенств: 1970, № 5, с. 48; 1970, № 9, с. 19; 1970, № 10, с. 53; 1970, № 12, с. 46; 1971, № 1, с. 41; 1971, № 5, с. 40; 1971, № 10, с. 45; 1972, № 1, с. 46; 1972, № 12, с. 49; 1973, № 9, с. 63.

Логарифмы, показательные и логарифмические уравнения: 1971, № 3, с. 40; 1971, № 6, с. 46; 1972, № 3, с. 50.

Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: 1971, № 4, с. 43; 1972, № 5, с. 36; 1973, № 2, с. 58.

Прогрессии: 1971, № 2, с. 37; 1973, № 4, с. 57.

Комплексные числа: 1973, № 6, с. 54.

Планиметрия: 1970, № 2, с. 23; 1971, № 1, с. 28; 1971, № 6, с. 52; 1971, № 12, с. 41; 1972, № 2, с. 36; 1973, № 11, с. 52.

Стереометрия: 1970, № 11, с. 54, 1972, № 2, с. 60; 1972, № 4, с. 54; 1972, № 11, с. 52; 1973, № 10, с. 56.

Применение тригонометрии при решении геометрических задач: 1972, № 7, с. 29, с. 40; 1973; № 12, с. 39.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970, № 12, с. 2; 1972, № 6, с. 44; 1972, № 10, с. 47; 1973, № 3, с. 44; 1973, № 4, с. 12; 1973, № 8, с. 71; 1973, № 12, с. 39.

Физика

Механика: 1970, № 1, с. 37; 1970, № 5, с. 18; 1970, № 6, с. 39; 1971, № 1, с. 1; 1971, № 2, с. 44; 1971, № 5, с. 8; 1971, № 5, с. 50; 1971, № 9, с. 47; 1971, № 11, с. 16; 1971, № 11, с. 54; 1972, № 3, с. 58; 1972, № 6, с. 20; 1972, № 9, с. 51; 1972, № 10, с. 52; 1972, № 12, с. 16; 1973, № 9, с. 68; 1973, № 11, с. 57.

Жидкости и газы: 1972, № 12, с. 53.

Тепловые явления: 1971, № 2, с. 11.

Молекулярная физика: 1970, № 10, с. 22; 1972, № 5, с. 45; 1973, № 1 с. 43; 1973, № 7, с. 11.

Основы электродинамики: 1970, № 6, с. 11; 1970, № 11, с. 2, 1971, № 3, с. 10; 1971, № 4, с. 8; 1971, № 6, с. 8; 1972, № 2, с. 54; 1972, № 4, с. 62; 1972, № 6, с. 55; 1972, № 6, с. 59; 1972, № 7, с. 48; 1972, № 7, с. 51; 1972, № 10, с. 10; 1973, № 3, с. 50; 1973, № 7, с. 35.

Колебания и волны: 1971, № 9, с. 15.

Оптика: 1970, № 9, с. 41; 1971, № 2, с. 1; 1971, № 7, с. 41; 1972, № 4, с. 10; 1972, № 7, с. 6.

Элементы теории относительности: 1970, № 3, с. 34.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970, № 12, с. 50; 1972, № 6, с. 62; 1973, № 4, с. 52; 1973, № 5, с. 43; 1973, № 7, с. 30.

Г. В. Дорофеев

Переформулировка задачи

Одним из существенных недостатков в математической подготовке школьников, который очень часто и весьма ярко проявляется на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения, является чрезмерная прямолинейность в подходе к решению задач. Абитуриенты в большинстве случаев настолько привязаны к данному условию, к данной формулировке задачи, что не догадываются взглянуть на задачу чуть-чуть иначе, с другой стороны, попытаться сформулировать ее условие в других терминах, короче говоря, найти метод решения, не лежащий на поверхности.

Между тем именно переформулировка задачи, постановка ее по-новому часто проливает свет на ее подлинный смысл и является прямым путем к решению. Более того, способность абитуриента рассматривать задачу с разных сторон, в различных интерпретациях является одним из важнейших признаков его математического (а зачастую и общего) развития и одним из условий его дальнейшего обучения в вузе. Нельзя не подчеркнуть, что сказанное касается не только математики.

Разумеется, основными, точнее сказать, наиболее естественными приемами переформулировки задач школьники в должной мере владеют, поскольку эти приемы входят в обычную школьную практику. Так, большинство абитуриентов вполне справляются с решением так называемых «текстовых» задач, а ведь основа решения такой задачи — типичная переформулировка: задача дается в виде некоторой совокупности условий, записанных на обычном, «житейском» языке, а решающий, как правило, составляет некоторые уравнения, иногда неравенства, то есть переводит эти условия на математический язык, после чего задача решается чисто математическими приемами. Вспомните, для сравнения, что в младших классах такие задачи решаются непосредственно, довольно хитрыми рассуждениями, но без всяких алгебраических соотношений, а такое решение придумать значительно сложнее.

Другой пример — решение геометрических задач. Если задача может быть переведена на язык уравнений, если легко выписываются соотношения между данными и неизвестными элементами геометрической конфигурации, то, как правило, задача решается без труда. Наоборот, если этот подход к задаче неприменим, то она представляет значительно бо́льшие трудности — требуется придумывать чисто геометрические идеи, а это уже совсем другое дело — вместо техники вычислений здесь нужна хорошая геометрическая интуиция, геометрическое чутье, более активные геометрические знания.

Что значит переформулировать задачу? Ясно, что дать точный ответ на этот вопрос, строго говоря, невозможно. Но суть дела состоит в том, что условие задачи формулируется на другом языке, в других, более или менее близких терминах. Приемы переформулировки настолько разнообразны, что перечислить, описать их разумным образом практически невозможно, и овладеть ими можно только на практике, решая достаточное количество примеров.

Один из важнейших приемов переформулировки задач, в применении которого, грубо говоря, и заключается практическая, прикладная сторона математики — это «перевод» реальной, жизненной ситуации на формальный язык, на язык точных математических утверждений. В школьной математической практике, в практике вступительных экзаменов также часто приходится «переводить» слова в формулы и наоборот.

Так, для доказательства утверждения «функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$» его следует переформулировать в виде «Дано: $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$; доказать, что $\cos x_1 > \cos x_2$». А словесное определение «логарифмом числа N по основанию a называется такое число α, что $a^\alpha = N$» переформулируется в виде «$a^{\log_a N} = N$», так что основное логарифмическое тождество является просто формальной записью определения логарифма. И если все это хорошо понимать, то никогда не представят затруднений «заковыристые» вопросы типа «Почему $(\sqrt{a})^2 = a$?», «Почему $\sin(\arcsin x) = x$?» и т. п.

С другой стороны, важное значение имеет и «обратный перевод» — умение увидеть в некотором подлежащем доказательству формальном равенстве его словесное выражение. Например, прочтя формулу $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ как утверждение «$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ есть корень степени n из a^m» мы сразу, пользуясь определением корня, получаем путь доказательства этой формулы:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m.$$

Точно так же можно доказать и основные формулы логарифмирования. Вообще, всевозможные свойства обратных функций — корней, логарифмов, обратных тригонометрических функций — доказываются именно переводом на язык соответствующих «прямых» функций.

Разберем несколько примеров, показывающих эффективность переформулировки — иногда напрашивающейся, иногда неожиданной.

Для начала — несколько задач, связанных с квадратным трехчленом.

Задача 1. *При каких a корни уравнения $x^2 + ax + a = 0$ больше* 1?

Большинство абитуриентов для решения этой задачи добросовестно находят корни

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$

и решают систему неравенств — иногда двух ($D \geqslant 0$, $x_2 > 1$), если догадываются, что x_2 — меньший корень, и достаточно, чтобы он был больше 1, а чаще трех неравенств $D \geqslant 0$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

При наличии хорошей техники решения иррациональных неравенств этот путь, конечно, приводит к цели. Однако стоит немного отойти в сторону, применить теорему Виета, и сразу станет ясно, что требуемых значений a не существует: произведение a таких корней должно быть больше 1, а их сумма $(-a)$ тогда будет также положительной.

Интересно отметить, что если в этой задаче спросить: *при каких a оба корня положительны*, то уже многие догадаются применить теорему Виета — ведь это ее *стандартное* применение!

Задача 2. *При каких a из неравенства $1 < x \leqslant 2$ следует неравенство $x^2 - 2ax + a < 0$?*

Условие задачи означает, очевидно, что трехчлен $f(x) = x^2 - 2ax + a$ отрицателен на отрезке $1 < x \leqslant 2$, а это равносильно условию, что отрезок $1 < x \leqslant 2$ лежит между корнями данного трехчлена (поскольку коэффициент при x^2 положителен). Но последнее условие равносильно тому, что концы отрезка лежат между корнями, и остается, наконец, сообразить, что это условие равносильно системе неравенств $f(1) \leqslant 0$, $f(2) < 0$, или

$$\begin{cases} 1 - a \leqslant 0, \\ 4 - 3a < 0, \end{cases}$$

откуда $a > 4/3$.

Задача 3. *Доказать, что уравнение $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b) \times (x-c) = 0$ при любых a, b, c имеет действительные корни.*

Нетрудно представить, что «прямое» решение этой задачи — раскрыть скобки и доказать, что дискриминант полученного квадратного трехчлена положителен — связано с большими вычислительными трудностями, и мы воспользуемся тем фактом, что квадратный трехчлен (с положительным старшим коэффициентом) имеет действительные корни в том и только в том случае, когда хотя бы в одной точке он принимает отрицательное или нулевое значение. Естественно посмотреть его значения в точках a, b, c — тогда из трех слагаемых остается только одно.

Имеем

$$f(c) = (c-a)(c-b);$$

знак полученного произведения зависит от взаимного расположения точек a, b, c на числовой оси, причем это произведение отрицательно, если c лежит между a и b. Но одно из этих трех чисел лежит между двумя другими, и мы получаем решение: пусть, для определенности, $a \leqslant b \leqslant c$; тогда $f(b) = (b-a)(b-c) \leqslant 0$, и следовательно, трехчлен принимает в точке b отрицательное или нулевое значение, а значит, имеет действительные корни.

В рассмотренных трех примерах условие задачи явно содержало квадратный трехчлен, и поэтому переформулировка задачи не слишком далека от ее условия. Рассмотрим несколько иные примеры.

Задача 4 (МГУ, ф-т психологии, 1969). *Доказать, что $x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz > 0$, если $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.*

Попытка группировки наугад, без определенной идеи вряд ли может привести здесь к успеху, однако достаточно увидеть в левой части квадратный трехчлен относительно x (с «параметрами» y и z), как становится совершенно ясным и способ группировки — выделение полного квадрата. Если при этом еще заметить, что после этого преобразования «свободный член» будет представлять собой квадратный трехчлен относительно y (с «параметром» z), то задачу можно считать фактически решенной.

Итак, левая часть уравнения может быть переписана в виде

$$(x-4y-2z)^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4yz =$$

$$= (x-4y-2z)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2,$$

и следовательно, неотрицательна при всех значениях x, y, z.

Может ли она равняться нулю? Это будет, очевидно, только тогда, когда все три слагаемых равны 0, то есть при одновременном выполнении равенств

$$x-4y-2z = 0, \quad y - \frac{2}{3}z = 0, \quad z = 0.$$

Но из этих равенств сразу следует, что $x = y = z = 0$, что противоречит условию $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Тем самым утверждение полностью доказано.

Задача 5 (МГУ, филологич. ф-т, 1972). *При каком действительном x величина*

$$t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{3} - \frac{x}{5} \qquad (1)$$

принимает наименьшее значение?

В задачах такого рода, как правило, легче сначала найти наименьшее значение заданного выражения, заданной функции, и лишь потом — значение аргумента, при котором оно достигается. А найти наименьшее значение иногда удается, решив более общую задачу — найти всю область значений функции и взять в ней наименьшее число.

Найти наименьшее значение функции можно, если задачу переформулировать. Тот факт, что число A принадлежит области значений функции $y = f(x)$, в терминах уравнений означает, что уравнение $f(x) = A$ имеет по крайней мере одно решение.

В данной задаче заметим прежде всего, что функция $t = t(x)$, заданная формулой (1), принимает свое наименьшее значение при том же значении аргумента, что и функция $s = 15\ t\ (x)$, и для упрощения выкладок мы будем рассматривать именно функцию

$$s = 5\sqrt{x^2+16} - 3x.$$

Уравнение

$$5\sqrt{x^2+16} - 3x = A$$

или

$$5\sqrt{x^2+16} = 3x + A \qquad (2)$$

после возведения обеих частей в квадрат переходит в уравнение

$$16\ x^2 - 6\ Ax + 400 - A^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) имеет решение в том и только в том случае, когда уравнение (3) имеет корень x, удовлетворяющий условию $3\ x + A \geqslant 0$. Но это эквивалентно тому, что дискриминант уравнения (3) неотрицателен и *больший* корень уравнения (3) больше или равен $-A/3$. Тем самым мы приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 25A^2 - 6400 \geqslant 0 \\ \dfrac{3A + \sqrt{25A^2 - 6400}}{16} \geqslant -\dfrac{A}{3}. \end{cases}$$

Эту систему можно решить обычным образом, в результате получится $A \geqslant 16$. Поэтому наименьшее значение A равно 16, и при этом значении уравнение (3) имеет единственный корень $x = 3$, который является корнем уравнения (2). Таким образом, выражение (1) принимает свое наименьшее значение при $x = 3$.

Отметим дополнительно, что решение полученной системы неравенств можно несколько упростить, если сразу сообразить, что функция $s = s(x)$ при любом x положительна:

$$5\sqrt{x^2+16} > 5\sqrt{x^2} = 5|x| \geqslant 3|x| \geqslant 3x.$$

Следовательно, можно считать, что $A \geqslant 0$, а тогда иррациональное неравенство, входящее в систему, автоматически выполняется.

Задача 6. *Найти наименьшее значение функции*

$$y = (x-1)\ (x-5)\ (x-6)\ (x-2).$$

Перемножив первый двучлен с третьим, а второй с четвертым, мы приведем функцию к виду

$$y = (x^2 - 7\ x + 6)\ (x^2 - 7\ x + 10).$$

Теперь видно, что y является квадратным трехчленом от переменного $z = x^2 - 7\ x$, которое само является трехчленом относительно x.

В результате мы получаем следующую задачу: *найти наименьшее значение квадратного трехчлена* $y = (z+6)\ (z+10)$, *но не на всем множестве действительных чисел* z, *а лишь на области значений трехчлена* $z = x^2 - 7\ x$. Эта область легко находится: она представляет собой бесконечный интервал $z \geqslant -\frac{49}{4}$, так что мы должны найти наименьшее значение трехчлена $y = z^2 + 16\ z + 60$ на множестве чисел $z \geqslant -\frac{49}{4}$.

Для нахождения этого наименьшего значения заметим, что значение $z_0 = -8$, в котором y, как функция от z, имеет абсолютный минимум, лежит в области $z \geqslant -\frac{49}{4}$, и следовательно, наименьшее значение y в этой области совпадает с абсолютным минимумом y и достигается в точке $z_0 = -8$.

Таким образом, наименьшее значение y равно -4 и достигается при $x^2 - 7x = -8$, то есть в двух точках:

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{17}}{2};\quad x_2 = \frac{7-\sqrt{17}}{2}.$$

Задача 7 (МГУ, экон. ф-т, 1973). *График функции* $y = \frac{2+x}{x}$ *пересекается в двух точках с прямой, образующей угол* α *с осью абсцисс. Найти среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось* Ox.

В этой задаче самое главное — точно понять ее условие и выразить его на языке формул.

График функции $y = 1 + 2/x$ — гипербола (изобразите ее!). Поэтому прямая, о которой идет речь в условии задачи, является *наклонной* (то есть $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq 0$) ни с вертикальной, ни с горизонтальной прямой данная гипербола не может пересекаться в двух точках. Иными словами, уравнение прямой имеет вид

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + b,$$

$\operatorname{tg} \alpha \neq 0$. Тот факт, что гипербола и прямая пересекаются в двух точках, означает, что уравнение

$$\frac{2+x}{x} = x \operatorname{tg} \alpha + b,$$

или, что то же самое, *уравнение*

$$x^2 + x(b-1)\operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}\alpha = 0 \quad (4)$$

имеет два различных действительных корня (поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (4)). В условии задачи *дано*, что этот факт имеет место.

Если корни уравнения (4) обозначить через x_1 и x_2, то длины отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения прямой и гиперболы на ось Ox, равны соответственно $|x_1|$ и $|x_2|$. Следовательно, *требуется вычислить* величину

$$\sqrt{|x_1| \cdot |x_2|} = \sqrt{|x_1 x_2|},$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения (4). А это легко сделать, используя теорему Виета:

$$\sqrt{|x_1 x_2|} = \sqrt{2|\operatorname{ctg}\alpha|}.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров, не связанных с квадратным трехчленом.

В ряде примеров, связанных с модулем действительных и комплексных чисел, значительную помощь оказывает геометрическая интерпретация модуля: $|x - y|$ есть расстояние между точками, и ображающими комплексные, и в частности, действительные числа x и y.

Задача 8. *Решить уравнение* $|x + 2| + |x - 3| = 5$ (x — *действительное число*).

На геометрическом языке данная задача может быть сформулирована следующим образом: найти все точки числовой оси, для которых сумма расстояний до точек -2 и 3 равна 5. Этот перевод мгновенно решает задачу: в самом деле, любая точка отрезка $-2 \leqslant x \leqslant 3$ обладает этим свойством, а для любой точки вне отрезка сумма расстояний больше 5.

Таким образом, решениями данного уравнения являются все x из отрезка $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

Задача 9. *Решить неравенство* $\left|\frac{2x-3}{2x+5}\right| > 1$.

Воспользовавшись свойством модуля $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, перепишем данное неравенство в виде $|2x - 3| > |2x + 5|$, $2x + 5 \neq 0$, и сформулируем задачу следующим образом: *найти точки* x, *для которых* $2x$ *находится ближе к* -5, *чем к* 3, *причем* $x \neq -2{,}5$. Это условие равносильно тому, что $2x < -1$, $x \neq -2{,}5$, то есть $x < -2{,}5$; $-2{,}5 < x < 0{,}5$. Это и есть решение данного неравенства.

Задача 10. *Где на комплексной плоскости лежат точки, изображающие комплексные числа* z, *для которых* $|z - 1|^2 + |z - i|^2 = 2$?

Переформулируем задачу так: где на плоскости лежат точки M, для которых сумма квадратов расстояний до данных точек $A = (1, 0)$ и $B = (0, 1)$ равна 2? Достроив треугольник AMB до параллелограмма $AMBN$, применим известное соотношение, связывающее длины сторон и диагоналей параллелограмма:

$$AB^2 + MN^2 = 2\,AM^2 + 2MB^2 = 4.$$

Отсюда $MN^2 = 4 - AB^2$, и поскольку в нашем случае $AB^2 = 2$, то $MN = \sqrt{2}$, и следовательно, искомые точки M лежат на окружности радиуса $\frac{1}{2} MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в середине отрезка AB.

В заключение рассмотрим несколько примеров, в решение которых важную роль играет переформулировка.

Задача 11 (МГУ, ф-т психологии, 1971). *Найти все такие значения x, что*

$$\min\{2x - x^2,\ x - 1\} > -\frac{1}{2}.$$

Употребленное в формулировке задачи выражение $A = \min\{2x - x^2, x - 1\}$, как известно, понимается в следующем смысле: *при любом фиксированном $x = x_0$ A означает меньшее из двух чисел $2x_0 - x_0^2$ и $x_0 - 1$.*

«Прямое» решение этой задачи требует рассмотрения двух случаев: $2x - x^2 \leqslant x - 1$ и $x - 1 < 2x - x^2$. В каждом из этих случаев надо будет решить квадратное неравенство и отобрать его решения, удовлетворяющие условию $2x - x^2 > -1/2$ и $x - 1 > -1/2$ соответственно.

Между тем нетрудно сообразить, что минимум из двух выражений больше $-1/2$ в том случае, когда оба эти выражения больше $-1/2$, и таким образом, условие задачи равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - x^2 > -\dfrac{1}{2}, \\ x - 1 > -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

решение которой не представляет никакого труда. В результате получится ответ: $\frac{1}{2} < x < \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$.

Задача 12 (МГУ, ф-т психологии, 1972). *Найти все целые решения неравенства*

$$x - 1 < \log_6 (x + 3).$$

В ОДЗ неравенства входят только $x > -3$, и легко проверить непосредственно, что числа -2, -1, 0 и 1 являются его решениями. Подставляя следующие целые значения x, мы видим, что они не являются решениями, и при этом нетрудно заметить, что «чем дальше — тем хуже» — при увеличении x разность между левой и правой частями увеличивается. Поэтому остается лишь доказать это утверждение строго.

Иными словами, мы получили следующую задачу: *доказать, что функция*

$$f(x) = x - \log_6 (x + 3)$$

— возрастающая. Задача эта, однако, довольно трудная, но ведь нас интересуют только целые значения аргумента, так что нам достаточно убедиться, что эта функция возрастает при увеличении на 1. Имеем

$$f(x+1) - f(x) = (x+1) - \log_6(x+4) - {}$$
$$- x + \log_6(x+3) = \log_6 \frac{x+3}{x+4} + 1,$$

так что неравенство $f(x+1) - f(x) > 0$ равносильно неравенству $\frac{x+3}{x+4} > \frac{1}{6}$, которое, как легко убедиться, при положительных x заведомо выполняется.

Следовательно, наше неравенство не выполняется ни при каких целых x, бо́льших 1, и полученные выше значения и являются решениями задачи.

Задача 13. *Найти сумму коэффициентов многочлена*

$$(x^3 + 2\ \ x - 8)^{73}\ \ (x^2 - 4\ \ x + 3)^{37},$$

получающихся после раскрытия скобок.

Здесь совершенно ясно, что подсчитывать сумму коэффициентов «в лоб» — дело безнадежное, и имеется единственная возможность — сообразить, что сумма коэффициентов многочлена может быть получена, если в многочлен вместо x подставить 1. А это можно сделать, и не раскрывая в данном многочлене скобок: при $x=1$ мы получаем 0, так что сумма коэффициентов данного многочлена равна 0.

Задача 14. *Доказать равенство*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=$$
$$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

Не слишком трудно сообразить, что число 200 не является настолько «выдающимся», чтобы для него одного имело место такое изящное равенство, и поэтому можно заподозрить, что это равенство имеет более универсальный характер. Таким образом, можно сделать гипотезу, что при любом четном $n=2k$ справедливо равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-$$
$$-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2k}.$$

И действительно, это равенство справедливо, и его нетрудно доказать по индукции.

Упражнения

1. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2-2ax-a=0$ больше 1, а другой меньше 1?

2. Доказать, что если ровно одно из чисел c, d лежит между числами a, b, то уравнение $(x-a)(x-b)+\alpha(x-c)(x-d)=0$ при любом α имеет действительные корни.

3. Пусть уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней и $a+b+c<0$. Найти знак числа c.

4. Пересекает ли прямая $y=2$ график функции $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+3}$?

5. Найти область значений функции $y=\dfrac{2x-3}{x^2+2x+2}$.

6. Доказать, что если выражение $\dfrac{4}{x^2+ax-3a+1}$ ни при каком значении x не равно -2, то $a>-13$ (x, a — действительные числа).

7. При каких a параболы $y=x^2+ax-a$ и $y=2x^2-x+a$ не имеют общих точек?

8. (МГУ, ф-т психологии, 1969). Доказать, что $2x^2+5y^2+3z^2-6xy-2xz+5yz>0$, если $x^2+y^2+z^2>0$.

9. (УДН, 1973). Найти все действительные значения x, y, z, удовлетворяющие уравнению $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2xz-2x-2z+1=0$.

10 (МГУ, экон. ф-т, 1969). При каком действительном x выражение $\dfrac{2x-1}{2x-x^2-4}$ принимает наименьшее значение?

11 (МГУ, филологич. ф-т, 1972). При каких положительных x выражение $2x+\dfrac{3\frac{1}{8}}{x+1}$ принимает минимальное значение?

12 (МГУ, экон. ф-т, 1973). График функции $y=2x^2-x$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси y с ординатой b. Найти среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось абсцисс.

13 (МГУ, экон. ф-т, 1973). График функции $y=\dfrac{1}{1-x}$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси x с абсциссой a. Вычислить абсциссу середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x.

14 (МГУ, мехмат, 1963). Решить уравнение $|x^2-4|+|x^2-9|=5$.

15 (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1970). Решить уравнение $|4+\log_{1/7}x|=2+|2+\log_{1/7}x|$.

16 (МГУ, ф-т психологии, 1971). Найти все значения x, для которых $\min\left\{1-x^2, \dfrac{1-x}{2}\right\}>\dfrac{1}{2}$.

17. (МГУ, ф-т психологии, 1972). Найти все целые решения неравенства

$$2x+1<2\log_2(x+3).$$

18. Доказать неравенство

$$1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot1973<987^{1973}.$$

19. По жесткому графику функции $y=\log_2 x$ катится шарик. Задержится ли он между жесткой осью ординат и данным графиком или будет падать до бесконечности? Тот же вопрос для функций $y=\log_2(x-0{,}01)$ и $y=\log_2(x+0{,}01)$.

Л. Г. Асламазов

Свойства паров, испарение и кипение жидкостей

Уравнение состояния пара

В обычных условиях плотность паров невелика, и взаимодействием между молекулами пара можно пренебречь. Такие пары, так же как идеальный газ, описываются уравнением Менделеева — Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где p, V и T — соответственно давление, объем и температура пара, m — его масса, μ — молекулярная масса, R — универсальная газовая постоянная *).

Задача 1. *Найти отношение плотностей насыщенного водяного пара и воды при* $t = 100°$ С. *Давление насыщенного пара воды при этой температуре* $p_н = 10^5$ *н/м²*.

Плотность пара $\rho = m/V$, где m — масса, V — объем пара. Из уравнения Менделеева—Клапейрона имеем

$$\rho = \frac{p_н \mu}{RT} = \frac{10^5 \cdot 18}{8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 373} = 0{,}57 (кг/м^3)$$

Отношение этой плотности к плотности воды $\rho_в = 10^3$ *кг/м³* очень мало:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = 5{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

Пользуясь уравнением Менделеева — Клапейрона при решении задач на свойства паров, следует помнить, что масса пара m, находящегося в закрытом сосуде, может меняться при изменении параметров p, V и T. Масса пара уменьшается в результате его конденсации и, наоборот, увеличивается при испарении жидкости в сосуде. Например, при изотермическом сжатии пар при некотором объеме V_0 становится насыщенным; при дальнейшем уменьшении объема V масса пара m также уменьшается пропорционально объему, так что давление пара $p_0 = \frac{RT}{\mu} \frac{m}{V}$ остается постоянным (см. рис. 1, *а* и *б*).

Задача 2. *В откачанный сосуд объемом* $V = 5 \cdot 10^{-3}$ *м³ наливают* $m_в = 10^{-3}$ *кг воды. Определить давление паров в сосуде при температуре* $t_1 = 20°$ С. *Каким станет это давление, если:*

а) увеличить температуру до $t_2 = 100°$ С;

б) соединить сосуд с другим откачанным сосудом того же объема и той же температуры (рис. 2).

Давление насыщенных водяных паров при температуре 20° С *равно* $2{,}3 \cdot 10^3$ *н/м², а при* 100° С — 10^5 *н/м²*.

Прежде всего найдем, какое минимальное количество воды необходимо для насыщения объема V. Из уравнения Менделеева—Клапейрона имеем

$$m = \frac{p_н V \mu}{RT},$$

где $p_н$ — давление насыщенного пара. Соответственно для температур $T_1 = 293°$ К и $T_2 = 373°$ К получаем

---

*) Говоря точнее, это уравнение справедливо, когда температура и давление пара значительно меньше, чем в критической точке.

$$m_1 = 9\cdot 10^{-5}\ \textit{кг} \text{ и } m_2 = 3\cdot 10^{-3}\ \textit{кг}.$$

Масса налитой воды $m_{\text{в}} = 10^{-3}$ *кг* меньше, чем m_2, но больше, чем m_1. Поэтому при температуре $t_1 = 20°$ C пар в сосуде будет насыщенным, и его давление

$$p_1 = 2{,}3\cdot 10^3\ \textit{н/м}^2.$$

Давление ненасыщенного пара при температуре $t_2 = 100°$ C находится по его массе из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p_2 = \frac{m_{\text{в}} R T_2}{\mu V} = \frac{10^{-3}\cdot 8{,}3\cdot 10^3\cdot 373}{18\cdot 5\cdot 10^{-3}} = 3{,}4\cdot 10^4\ (\textit{н/м}^2).$$

При подсоединении второго сосуда объем, занимаемый паром, увеличится вдвое. Следовательно, вдвое увеличится и минимальная масса воды, необходимой для насыщения этого объема. Однако она по-прежнему меньше массы налитой воды. Поэтому пар будет насыщенным, и его давление

$$p_3 = 2{,}3\cdot 10^3\ \textit{н/м}^2.$$

Заметим, что при решении задачи не учитывался объем, занимаемый водой в сосуде. Это можно делать, так как объем воды мал по сравнению с объемом сосуда.

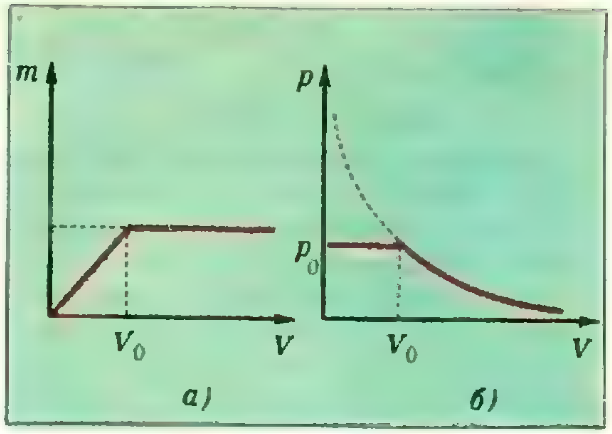


Рис. 1.

Влажность воздуха

Наличие в воздухе водяных паров можно описать количественно с помощью двух характеристик — абсолютной и относительной влажности воздуха.

Абсолютной влажностью воздуха, как известно, называют плотность водяных паров $\rho = m/V$, а относительной влажностью — выраженное в процентах отношение плотности водяного пара к плотности насыщенного пара при той же температуре, то есть $f = \frac{\rho}{\rho_{\text{н}}}\cdot 100\%$. Относительную влажность воздуха можно также определить как отношение давления водяного пара к давлению насыщенного пара при той же температуре. Действительно, при постоянной температуре плотность пара пропорциональна давлению, поэтому

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{н}}} = \frac{p}{p_{\text{н}}}.$$

Например, в задаче 2 абсолютная влажность воздуха в сосуде при 20° C $\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{9\cdot 10^{-5}}{5\cdot 10^{-3}} = 1{,}8\cdot 10^{-2}\ (\textit{кг/м}^3)$, относительная влажность $f_1 = 100\%$. При температуре 100° C в том же сосуде абсолютная влажность $\rho_2 = \frac{m_{\text{п}}}{V} = \frac{10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}} = 0{,}2\ (\textit{кг/м}^3)$, относительная

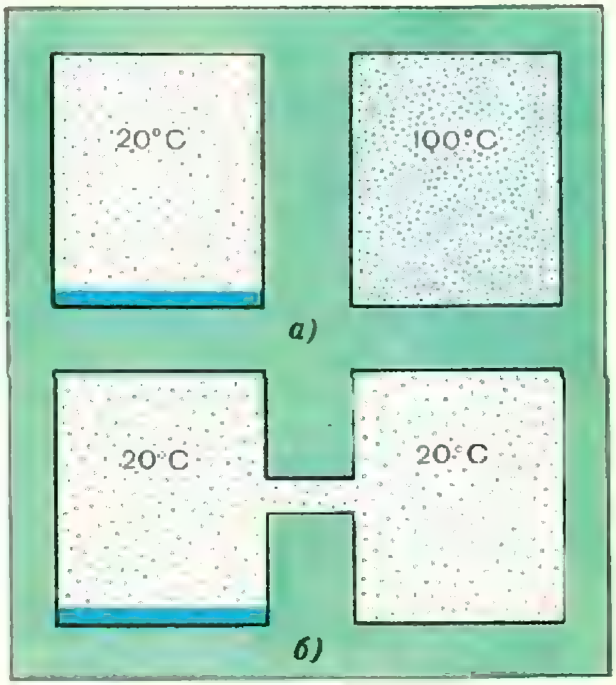


Рис. 2.

влажность $f_2 = \frac{p_2}{p_н} \cdot 100\% = \frac{3{,}4 \cdot 10^4}{10^5} \cdot 100\% = 34\%$.

При изменении температуры, даже при постоянной абсолютной влажности, относительная влажность меняется. Так, по мере охлаждения влажного воздуха при некоторой температуре $T_р$ его относительная влажность достигает 100%, а пар, содержащийся в воздухе, становится насыщенным. При дальнейшем охлаждении пар будет конденсироваться. Температура $T_р$ называется точкой росы (при этой температуре выпадает роса).

Задача 3. *При какой максимальной относительной влажности воздуха f_0 в комнате бутылка молока, вынутая из холодильника, не будет запотевать? Температура в холодильнике $t_1 = 5°$ С, а в комнате $t_2 = 25°$ С. Давление насыщенных паров воды при 5° С $p_1 = 866$ н/м², а при 25° С $p_2 = 3192$ н/м².*

Возле бутылки температура влажного воздуха становится равной $t_1 = 5°$ С. Бутылка не запотевает, если относительная влажность воздуха при этой температуре не превышает 100%:

$$f = \frac{\rho}{\rho_1} \cdot 100\% \leqslant 100\%,$$

где $\rho_1 = \frac{p_1 \mu}{RT_1}$ — плотность насыщенного водяного пара при $T_1 = 278°$ К, ρ — абсолютная влажность воздуха в комнате, не зависящая от температуры. Поэтому максимальная абсолютная влажность воздуха, при которой бутылка еще не запотевает, $\rho_0 = \rho_1 = \frac{p_1 \mu}{RT_1}$. Соответствующая относительная влажность воздуха при температуре $T_2 = 298°$ К будет

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\rho_2} \cdot 100\% = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \cdot 100\% = \frac{866 \cdot 298}{3192 \cdot 278} \cdot 100\% \approx 30\%.$$

Задача 4. *Кондиционер пропускает через комнату ежесекундно $V = 3$ м³ воздуха. Воздух забирается с улицы, где температура $t_1 = 40°$ С и влажность $f_1 = 80\%$, затем охлаждается в кондиционере до температуры $t_2 = 5°$С, а в комнате нагревается до температуры $t_3 = 25°$С. Какая масса воды m ежесекундно конденсируется в кондиционере при таком режиме его работы? Какая влажность воздуха f установится в помещении? Давление насыщенных паров воды при 40° С $p_1 = 7{,}4 \cdot 10^3$ н/м², при 5° С $p_2 = 866$ н/м², а при 25° С $p_3 = 3192$ н/м².*

В объеме наружного воздуха V содержится

$$m_1 = \frac{f_1 \rho_1 V}{100\%} = \frac{f_1 p_1 \mu V}{RT_1 \cdot 100\%} = \frac{80 \cdot 7{,}4 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 3}{8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 313 \cdot 100} = 0{,}12 \ (кг)$$

воды ($\rho_1 = \frac{p_1 \mu}{RT_1}$ — плотность насыщенного пара воды при температуре T_1). Эта масса больше массы m_2 насыщенного водяного пара в том же объеме при температуре $T_2 = 278°$ К:

$$m_2 = \rho_2 V = \frac{p_2 \mu V}{RT_2} = \frac{866 \cdot 18 \cdot 3}{8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 278} \approx 0{,}02 \ (кг).$$

Поэтому в кондиционере ежесекундно конденсируется масса воды

$$m = m_1 - m_2 \approx 0{,}1 \ кг.$$

Так как предполагается, что в помещении в воздух дополнительно вода не испаряется, абсолютная влажность воздуха в помещении установится такой же, какая она у воздуха, поступающего из кондиционера: $\rho = \rho_2 = \frac{p_2 \mu}{RT_2}$. Соответствующая относительная влажность при комнатной температуре $T_3 = 298°$ К будет

$$f = \frac{\rho}{\rho_3} \cdot 100\% = \frac{p_2 T_3}{p_3 T_2} \cdot 100\% = \frac{866 \cdot 298}{3192 \cdot 278} \cdot 100\% \approx 30\%.$$

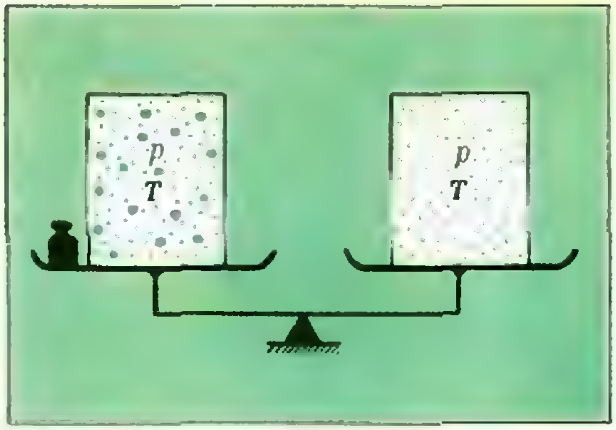


Рис. 3.

Задача 5. *В комнате объемом* $V = 50$ *м³ влажность воздуха* $f = 60\%$ *при температуре* $t = 20^\circ$ C *и давлении* $p = 10^5$ *н/м². Чему равна масса* m *влажного воздуха в комнате? Как изменится эта масса при увеличении влажности на* $\Delta f = 10\%$ *при неизменных температуре и давлении? Изменится ли при этом общее число молекул влажного воздуха в комнате? Давление насыщенного пара при* $t = 20^\circ$C $p_н = 2{,}3 \cdot 10^3$ *н/м².*

Масса влажного воздуха m складывается из массы сухого воздуха m_1 и массы водяного пара m_2:

$$m = m_1 + m_2.$$

Из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$m_1 = \frac{p_1 V \mu_1}{RT} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{p_2 V \mu_2}{RT},$$

где $\mu_1 = 29$ *кг/кмоль* и $\mu_2 = 18$ *кг/кмоль* — молекулярные массы воздуха и водяного пара, p_1 и p_2 — соответствующие парциальные давления. По условию задачи $p_2 = \frac{f}{100\%} p_н$, а согласно закону Дальтона $p_1 = p - p_2 = p - \frac{f}{100\%} p_н$.

Тогда окончательно получим

$$m = m_1 + m_2 = \frac{V}{RT}\left[p\mu_1 - \frac{f}{100\%} p_н (\mu_1 - \mu_2)\right] = \frac{50}{8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 293} \times \left[10^5 \cdot 29 - \frac{60}{100} \cdot 2{,}3 \cdot 10^3 (29 - 18)\right] = 58\ (кг).$$

Как видно из последней формулы, при увеличении влажности f при неизменных p и T масса влажного воздуха в комнате m уменьшается ($\mu_1 - \mu_2 > 0$). Изменение массы при увеличении влажности на Δf будет равно

$$\Delta m = \frac{p_н V}{RT} (\mu_1 - \mu_2) \frac{\Delta f}{100\%} = \frac{2{,}3 \cdot 10^3 \cdot 50}{8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 293} (29 - 18) \frac{10}{100} = 0{,}05 (кг).$$

Уменьшение массы влажного воздуха в комнате при увеличении влажности можно понять с помощью закона Авогадро: в одинаковых объемах при одинаковых давлениях и температурах содержится одинаковое число молекул любого газа. При увеличении влажности воздуха общее число молекул влажного воздуха в комнате не меняется, а происходит лишь замещение части молекул воздуха на молекулы воды (см. рис. 3): увеличивается число молекул водяного пара и уменьшается число молекул сухого воздуха. Так как $\mu_2 < \mu_1$, масса влажного воздуха уменьшается.

Теплота парообразования. Кипение

Превращение жидкости в пар, как известно, требует подвода энергии. Количество теплоты, которое необходимо подвести для того, чтобы испарить единицу массы жидкости при неизменной температуре (изотермически) и внешнем давлении, равном давлению ее насыщенных паров, называется удельной теплотой парообразования. Можно также сказать, что удельная теплота парообразования L — это то количество теплоты, которое надо затратить, чтобы перевести в пар единицу массы жидкости при ее кипении. Часть этой энергии идет на увеличение потенциальной энергии молекул (на работу

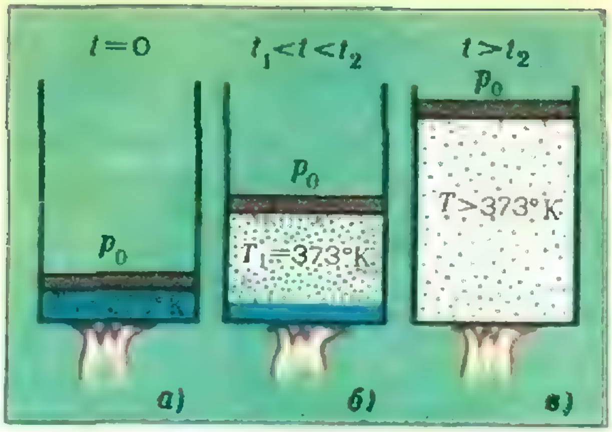


Рис. 4.

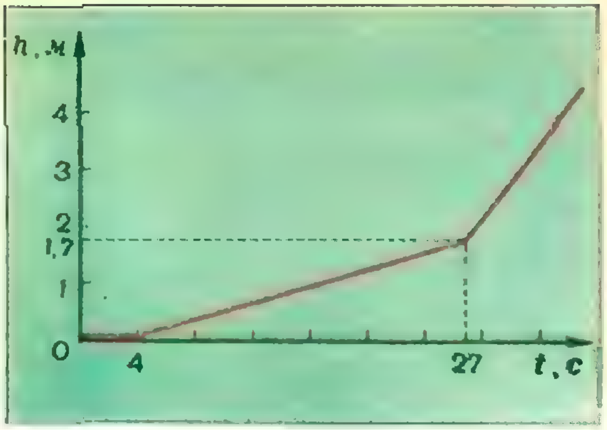


Рис. 5.

против сил молекулярного притяжения), а часть — на работу по расширению против сил внешнего давления (так как удельный объем*) пара больше удельного объема жидкости).

Задача 6. *Определить, какая часть удельной теплоты парообразования воды идет на увеличение внутренней энергии системы при $T = 373°$ К. $L = 2{,}3\cdot10^6$ дж/кг.*

Из закона сохранения энергии имеем

$$L = \Delta w + A,$$

где Δw — изменение внутренней энергии при испарении 1 *кг* жидкости, A — работа по расширению. Так как расширение происходит изобарически, то

$$A = p_н (v_н - v_0),$$

где $v_н = \frac{RT}{p_н\mu}$ — удельный объем насыщенного пара, а v_0 — удельный объем воды, которым по сравнению с $v_н$ можно пренебречь (см. задачу 1). Таким образом

$$\frac{\Delta w}{L} = \frac{L-A}{L} = 1 - \frac{RT}{\mu L} = 1 - \frac{8{,}3\cdot10^3\cdot373}{18\cdot2\cdot10^6} \approx 0{,}9.$$

То есть на преодоление сил взаимодействия молекул при испарении воды при 373° К тратится 90% подводимой теплоты.

Задача 7. *В длинном цилиндрическом сосуде с невесомым поршнем площадью $S = 0{,}01$ м² находится $m_в = 0{,}01$ кг воды при температуре $T_0 = 273°$ К. Поршень плотно прилегает к стенкам сосуда, но ходит без трения и в начальный момент находится у поверхности воды (рис. 4, а). Воду нагревают, причем мощность нагревателя $N = 1$ квт постоянна, а теплоотводом через стенки сосуда и поршень можно пренебречь. Нарисуйте график зависимости высоты поднятия поршня h от времени t. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ н/м².*

Пока давление насыщенных паров воды не станет равным нормальному атмосферному давлению (это произойдет при температуре $T_1 = 373°$ К), поршень будет находиться у поверхности воды, поднимаясь только за счет ее теплового расширения. Время работы нагревателя t_1, необходимое для нагрева воды до температуры T_1, легко находится:

$$t_1 = \frac{c m_в (T_1 - T_0)}{N} = \frac{4\cdot10^3\cdot0{,}01\cdot100}{10^3} = 4\ (с)$$

(здесь $c = 4\cdot10^3$ *дж/кг·град* — удельная теплоемкость воды). Соответствующий участок на графике (см. рис. 5) изображен прямой без наклона:

$$h = 0 \quad при \quad 0 < t < t_1,$$

так как коэффициент теплового расширения воды пренебрежимо мал.

---

*) Напомним, что удельный объем — это величина, обратная плотности, то есть объем единичной массы вещества.

При температуре $T_1 = 373°$ К давление насыщенного пара становится равным внешнему давлению, и поршень начинает подниматься над поверхностью воды (см. рис. 4, б) (под поршнем образуется насыщенный водяной пар). Так как мощность нагревателя постоянна, масса пара $m = \frac{N(t-t_1)}{L}$ (где $L = 2{,}3\cdot10^6$ *дж/кг* — удельная теплота парообразования воды) пропорциональна времени работы нагревателя после достижения температуры T_1. Из уравнения Менделеева-Клапейрона объем пара $V = \frac{RT_1 m}{p_0\mu} = \frac{RT_1N}{p_0\mu L}(t-t_1)$ тоже пропорционален этому времени (поскольку T_1 и p_0 постоянны). Для высоты поднятия поршня h окончательно имеем

$$h = \frac{V}{S} = \frac{RT_1N}{p_0\mu LS}(t-t_1) \quad \text{при } t_1<t<t_2,$$

где $t_2 = t_1 + \frac{m_в L}{N} =$

$$= 4 + \frac{0{,}01\cdot2{,}3\cdot10^6}{10^3} = 27 (с)$$

— момент времени, когда вся вода в сосуде испарится. На графике этот участок изображен прямой с углом наклона α, причем

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{RT_1N}{p_0\mu LS} = \frac{8{,}3\cdot10^3\cdot373\cdot10^3}{10^5\cdot18\cdot2\cdot10^6\cdot0{,}01} \approx 0{,}08\ (м/с).$$

После этого температура пара будет расти, и он перестанет быть насыщенным. Изменение температуры пара происходит по закону: $\Delta T = \frac{N(t-t_2)}{c_p m}$, где $c_p = 2\cdot10^3\ \frac{дж}{кг\cdot град}$ — удельная теплоемкость водяного пара при изобарическом нагревании. Соответствующее изменение объема находится из уравнения Менделеева—Клапейрона: $\Delta V = \frac{mR\Delta T}{\mu p_0} = \frac{NR(t-t_2)}{\mu c_p p_0}$.

Для высоты поднятия поршня имеем

$$h = h_1 + \frac{NR}{\mu c_p p_0 S}(t-t_2) \quad \text{при } t>t_2,$$

где $h_1 = \frac{m_в RT_1}{\mu p_0 S} = \frac{0{,}01\cdot8{,}3\cdot10^3\cdot373}{18\cdot10^5\cdot0{,}01} \approx$ $\approx 1{,}7$ (*м*) — высота поднятия поршня в момент окончания испарения воды. На графике этот участок изображен прямой с углом наклона β, причем

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{NR}{\mu c_p p_0 S} = \frac{10^3\cdot8{,}3\cdot10^3}{18\cdot2\cdot10^3\cdot10^5\cdot0{,}01} \approx 0{,}2\ (м/с).$$

При решении последней задачи встает вопрос: будет ли кипеть вода в сосуде при $T_1 = 373°$ К? Как известно, для кипения необходимо, чтобы пузырьки газа на дне сосуда начали расти за счет испарения жидкости внутрь их. Строго говоря, это происходит, когда давление насыщенного пара несколько превосходит внешнее атмосферное давление, а именно, на сумму величин избыточного давления $p_1 = \frac{2\sigma}{r}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а r — радиус пузырька, и гидростатического давления $p_2 = \rho gh$, где ρ — плотность, а h — высота жидкости в сосуде. Поэтому кипение жидкости при нормальном внешнем давлении начинается при несколько более высокой температуре, чем 373° К[*]), и в рассматриваемой задаче жидкость кипеть не будет. Обычно, правда, заметного перегрева жидкости не происходит, так как дополнительное давление ма́ло по сравнению с внешним давлением. Для того чтобы перегреть жидкость, ее и стенки сосуда необходимо тщательно очистить от газов.

Задача 8. *Определить наибольший допустимый радиус пузырьков воздуха, при котором происходит перегрев воды на 0,1°. Нор-*

---

[*]) В таком случае говорят, что жидкость перегрета.

мальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ н/м². Коэффициент поверхностного натяжения воды при $T = 373°$ К $\sigma = 0,06$ н/м, а изменение давления насыщенного пара воды вблизи $T = 373°$ К можно считать пропорциональным изменению температуры с коэффициентом пропорциональности $k = 3\cdot 10^3$ н/м²·град.

При перегреве на величину $\Delta T = T_1 - T = 0,1°$ давление насыщенного пара увеличивается на $\Delta p = k\Delta T = 3\cdot 10^2$ н/м². Приравнивая Δp избыточному давлению $\frac{2\sigma}{r}$ получаем, что радиус пузырька

$$r = \frac{2\sigma}{\Delta p} = \frac{2\cdot 0,06}{3\cdot 10^2} = 4\cdot 10^{-4}\ (м).$$

Оцените самостоятельно влияние гидростатического давления на температуру кипения.

Упражнения

1. В широкие сообщающиеся сосуды налита вода при температуре $T = 293°$ К. Один из сосудов плотно закрывают. Определить разность уровней воды в сосудах, если давление насыщенного пара при этой температуре $p = 2\cdot 10^3$ н/м². Давлением паров воды в открытом сосуде можно пренебречь.

2. Тяжелая кастрюля, перевернутая вверх дном, плавает в воде. При температуре воды $T_1 = 293°$ К воздух занимает всего 1/15 часть объема кастрюли, а при нагреве воды до $T_2 = 373°$ К заполняет 2/3 ее объема. Определить массу кастрюли m, считая ее тонкостенным цилиндром с площадью дна $S = 10^{-2}$ м². Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ н/м². Давлением насыщенных паров воды при начальной температуре пренебречь. Температуру воздуха в кастрюле считать равной температуре воды.

3. В широком сосуде находится $m = 0,5$ кг воды при температуре $T = 273°$ К. Воздух из сосуда быстро откачали. При этом часть воды замерзла вследствие интенсивного испарения. Определить массу замерзшей воды, считая, что система теплоизолирована. Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3\cdot 10^6$ дж/кг, а удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3\cdot 10^5$ дж/кг.

4. Под стеклянный колпак поместили два сосуда с водой. Уровни воды в сосудах разные. Объясните, как будет меняться высота уровней со временем.

5. Объясните, почему сырая вода закипает быстрее, чем кипяченая. Закипит ли сырая вода в кастрюле, плавающей в кипящей кипяченой воде?

ВЗМШ — 10 лет

(начало см. на с. 33)

Программа ВЗМШ составлена с таким расчетом, чтобы раскрыть глубину и красоту математики на материале обычного школьного курса и на вопросах, органически к нему примыкающих, показать взаимопроникновение различных разделов «школьной» математики, познакомить с ее приложениями и связями с «большой» математикой, давать простым и привычным (иногда, быть может, даже надоевшим) вопросам неожиданное освещение, новое, более глубокое толкование. В качестве примера достаточно привести уже первую тему — «Метод координат»: она начинается с вопросов, изучаемых в шестом классе (числовая ось, абсолютная величина числа), а кончается знакомством с геометрией четырехмерного пространства.

ВЗМШ — это не клуб и не общество любителей математики, куда можно прийти просто послушать что-нибудь любопытное. Это именно школа, и она требует от своих учеников изучения определенного материала, самостоятельных размышлений, выполнения контрольных работ в установленные сроки. Учащийся может ошибаться — и преподаватели школы будут поправлять его, он может чего-то не понять — и ему будут еще и еще раз объяснять непонятное, но ученик ВЗМШ должен настойчиво и систематически работать. Так что учиться в заочной математической школе интересно, но не просто.

О структуре и методах работы ВЗМШ рассказано в брошюре: Н. Х. Розов, Е. Г. Глаголева, Ж. М. Раббот «Заочная математическая школа при МГУ», изд-во «Знание», М., 1973.

Н. Х. Розов

Московский инженерно-физический институт

Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физический институт организован в 1942 г. Сначала он назывался Московский механический институт (ММИ), а в 1953 г. был переименован в Московский инженерно-физический институт.

МИФИ готовит инженеров-исследователей широкого профиля по ряду новейших направлений науки. Срок обучения в МИФИ 5 лет и 6 месяцев.

В составе МИФИ пять факультетов, один филиал, факультет повышения квалификации и ряд учебных подразделений.

Факультет экспериментальной и теоретической физики и физико-энергетический факультет готовят инженеров-физиков для исследовательской работы в области теоретической и экспериментальной физики, конструирования и эксплуатации современных физических установок, аппаратов и приборов.

Факультет автоматики и электроники выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области создания и эксплуатации электронных устройств современных физических установок, разработки и эксплуатации систем автоматического управления технологическими и физическими процессами производства.

Факультет кибернетики готовит инженеров-электриков и инженеров-математиков по разработке и математическому обеспечению современных быстродействующих электронных вычислительных машин и автоматизированных систем управления.

Специальный факультет физики (СФФ) организован при МИФИ и ордена Ленина Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР в феврале 1972 г. Он готовит инженеров-физиков по новейшим направлениям физики. На факультет зачисляются студенты из немосковских высших учебных заведений, имеющие образование в объеме двух с половиной курсов физических и физико-технических факультетов и проявившие склонность к научной работе. Обучение на СФФ производится по индивидуальным планам. В настоящее время на СФФ занимаются студенты из пятнадцати университетов Советского Союза.

Филиал МИФИ в г. Обнинске готовит инженеров-электриков и инженеров-математиков по разработке и математическому обеспечению автоматизированных систем управления.

Подготовительное отделение работает на правах факультета и совместно с учебным управлением и приемной комиссией института проводит комплекс мероприятий по подготовке молодежи для поступления в МИФИ.

В МИФИ существует несколько форм подготовки абитуриентов. Основной формой подготовки рабочей и сельской молодежи является дневное подготовительное отделение с отрывом от производства, организованное в МИФИ в 1970 г. Рабочие, колхозники и демобилизованные воины за время обучения приобретают знания по математике, физике, русскому языку и литературе и получают стипендию на правах студентов младших курсов. После успешно сданных выпускных экзаменов слушатели этого отделения зачисляются на первый курс МИФИ без дополнительных вступительных экзаменов.

Ниже приводятся некоторые варианты письменного вступительного экзамена по математике и билеты устного экзамена по физике в 1973 году.

Математика

Вариант 1

1. Произведение натурального двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Найти это число.

2. Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды равен α.

3. При каких значениях p уравнение

$$\lg (x^2 + 2px) - \lg (8x - 6p - 3) = 0$$

имеет единственный корень? Найти этот корень.

4. Решить уравнение:

$$2\sin^2 x + 2\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 2\sqrt{2}\sin x + 3 = 0.$$

Вариант 2

1. Некоторые числа встречаются в обеих арифметических прогрессиях 17, 21, ... и 16, 21, ... Найти сумму первых ста чисел, встречающихся в обеих прогрессиях.

2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно l, а угол при вершине между противоположными ребрами равен 2α. Через вершину A основания $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD и проходящая через центр

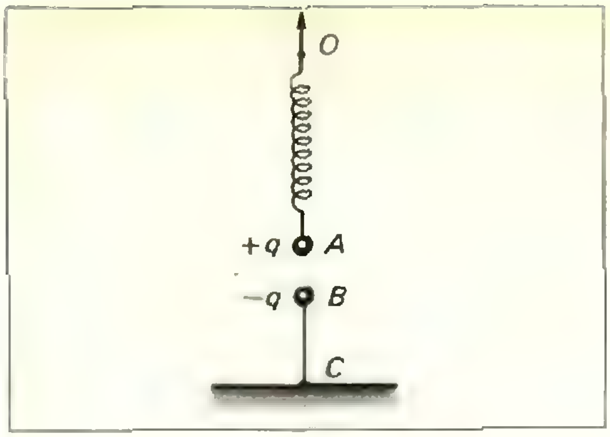


Рис. 1.

описанного около пирамиды шара. Найти площадь сечения пирамиды.

3. Решить неравенство:

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)(3 - x)}{\log_2 |x - 1|} > 0.$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} 2y, \\ 2 \sin x \cos (x - y) = \sin y. \end{cases}$$

Физика

Билет 1

1. Сложение сил. Разложение силы на две составляющие. Сложение параллельных сил. Условие равновесия тела на наклонной плоскости.

2. Источники тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи.

3. Два небольших шарика A и B, каждый массой $m = 0{,}1$ *кг*, имеют одинаковые по модулю и противоположные по знаку заряды $q = 10^{-6}$ *к*. Шарик A подвешен на изолирующей пружинке с жесткостью $k = 9{,}8$ *н/м* над шариком B, как показано на рисунке 1. В начальном положении сила кулоновского взаимодействия между шариками равна $4\ mg$. Верхний конец пружинки начали медленно поднимать. На сколько сантиметров надо переместить точку O, чтобы натяжение изолирующей и нерастяжимой нити BC обратилось в нуль?

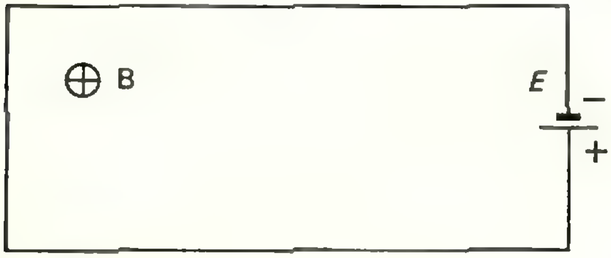


Рис. 2.

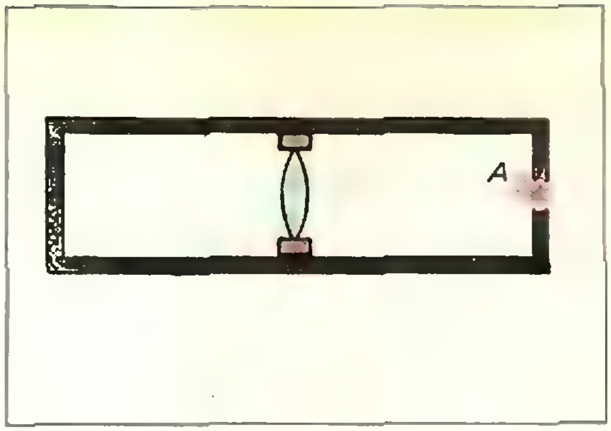


Рис. 3.

Билет 2

1. Понятие о волновой и квантовой природе света. Фотоэффект.

2. Первый и второй законы Ньютона. Единицы массы и силы. Вес тела.

3. В однородном магнитном поле, индукция которого за время $\tau = 0{,}2$ *с* увеличилась с постоянной скоростью от 0 до $B = 2$ *тл*, находится контур площадью $S = 200$ *см*^{2} с источником э. д. с. $E = 1$ *в* (рис. 2). Вектор **B** перпендикулярен к плоскости контура. Полное сопротивление контура $R = 4$ *ом*. Найти количество тепла, которое выделится в контуре за это время.

Билет 3.

1. Явление самоиндукции. Индуктивность. Единица индуктивности.

2. Кинетическая и потенциальная энергия. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике.

3. В трубке длиной $l = 80$ *см*, закрытой с обеих сторон, находится поршень с собирающей линзой, фокусное расстояние которой $F = 19$ *см* (рис. 3). Когда трубка горизонтальна и неподвижна, поршень стоит в середине ее, и давление газа в обеих частях равно $p_0 = 1{,}5$ *мм рт. ст*. С каким ускорением надо двигать трубку в горизонтальном направлении, чтобы изображение источника света A оказалось на заднем торце трубки? Масса поршня с линзой $m = 30$ *г*, площадь сечения трубки $S = 25$ *см*^{2}; трение отсутствует; поршень газа не пропускает. Температура системы постоянна.

А. И. Забоев,
И. Н. Николаев,
Н. В. Шолохов

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте

Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте объявляет набор учащихся на 1974—75 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся средних школ, расположенных в основном на территории РСФСР, в самостоятельных занятиях физикой и математикой на повышенном уровне.

Школа набирает в 8, 9 и 10-й классы учащихся, прежде всего из сельской и отдаленной местности. Учащиеся Москвы в ЗФТШ не принимаются. Для них организуются очные занятия.

Прием в школу ограничен, но на местах могут работать физико-технические кружки по программе ЗФТШ. В них зачисляются школьники, которые не приняты в ЗФТШ по недостатку мест.

Кроме того, по «Положению» о ЗФТШ, кружки могут организовываться на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок считается организованным, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии его руководителей и поименный список членов кружка.

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемое ЗФТШ решение заданий. Работы учащихся школы проверяют и оценивают в ЗФТШ, а членов кружка — его руководители.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учеников 7-х классов, задачи 2—8 для учеников 8-х классов и задачи 3—11 для учеников 9-х классов. Во вступительном задании по математике: 1—5 для седьмых классов, 4—10 для восьмых классов, 7—13 для девятых классов.

Вступительное задание ученик выполняет самостоятельно. Коллективные решения не допускаются и рассматриваться не будут.

Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите простой бандеролью. Вместе с решением вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без справки решения не рассматриваются. На внешнюю сторону наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Куйбышевская обл. (Алтайский край, Марийская АССР)*
2. Фамилия, имя, отчество	*Воронин Анатолий Дмитриевич*
3. Класс, в котором Вы учитесь	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*школа № 7, ул. Советская, д. 5.*
5. Национальность	*русский*
6. Профессия родителей и занимаемая должность	
Отец	*слесарь, бригадир*
Мать	*швея-мотористка*
7. Подробный домашний адрес	*327840, г. Чапаевск, ул. Калинина, д. 38, кв. 6.*

Срок отправления решения не позднее 10 марта 1974 года (по почтовому штемпелю места отправления).

Решения, отправленные позже этого срока, рассматриваться не будут. Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Свое решение приемная комиссия сообщит не позднее 1 августа 1974 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской, Эстонской и Белорусской ССР присылают работы по адресу: 197228, Ленинград, ул. Савушкина, 61. Специнтернат 45, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Камчатской, Иркутской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки присылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, 7. Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Вступительное задание по физике

1. Предлагается измерить среднюю плотность вещества, из которого состоят песчинки обычного речного песка. Подробно опишите способ и результаты своих измерений.

2. Конькобежец, бежавший дистанцию 500 *м*, первые 100 *м* пробежал со скоростью 10 *м/с*, следующие 300 *м* со скоростью 11 *м/с* и последние 100 *м* со скоростью 13 *м/с*. С какой средней скоростью конькобежец пробежал всю дистанцию?

3. В сосуд U-образной формы в некотором количестве налиты вода, оливковое масло и керосин так, что свободные поверхности в обоих коленах сосуда находятся на одинаковом уровне, как это показано на рисунке 1. Правильно ли выполнен рисунок? Учесть, что плотности воды, масла и керосина равны соответственно 1,0 *г/см*^{3}, 0,90 *г/см*^{3} и 0,80 *г/см*^{3}. Ответ обосновать.

4. На горелках, дающих в равные промежутки времени одинаковое количество теплоты, нагревались одинаковые массы воды и скипидара. Результаты измерений для каждого из этих веществ в виде графика изменения температуры ΔT в ° С от времени t в минутах представлены на рисунке 2. На основании этих данных определить удельную теплоемкость скипидара, приняв во внимание значение удельной теплоемкости воды, равное $4{,}2 \cdot 10^3$ *дж/кг·град*.

5. В качестве примера твердого тела можно назвать олово или лед, жидкостью можно назвать ртуть или воду, а газообразным телом — кислород или пары воды. Правильны ли эти утверждения? Ответ обосновать.

6. Гимнаст в цирке прыгает с подкидного трамплина и через время $t = 1{,}2$ *с* приземляется на расстоянии $l = 6$ *м* от трамплина. Определить его скорость в момент прыжка.

7. Имеются три электронагревателя, рассчитанные на работу при напряжении 110 *в* и имеющие мощности 500, 500 и 1000 *вт*. Как следует включить эти приборы в сеть с напряжением 220 *в*, чтобы каждый из них потреблял указанную мощность?

8. Небольшой массивный грузик, подвешенный на длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия, называют математическим маятником. Колебания являются малыми, если наибольшее отклонение нити маятника от вертикали не превышает 10—15°. Время одного колебания, то есть время, за которое маятник возвращается в исходное отклоненное положение, называют периодом T.

Предлагается исследовать на опыте зависимость периода математического маятника T от длины его нити l и массы m. В отчете детально опишите используемую установку с объяснением назначения каждого ее элемента, способа измерения периода колебаний T, длины нити l и массы грузика m. Рекомендуем результаты измерений представить в виде таблиц и графиков зависимости периода T и его квадрата T^2 от длины нити маятника l и его массы m. Объясните полученные зависимости и обсудите источники ошибок.

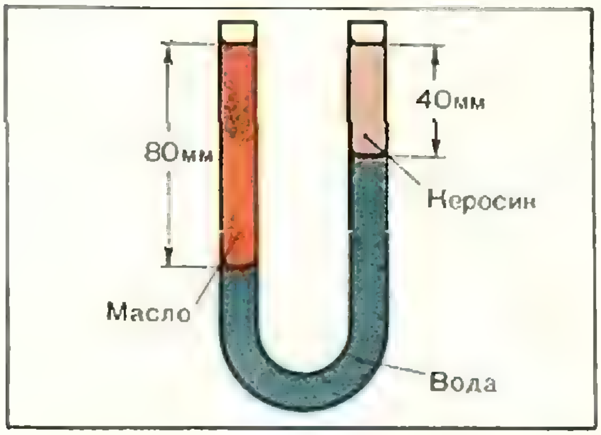


Рис. 1.

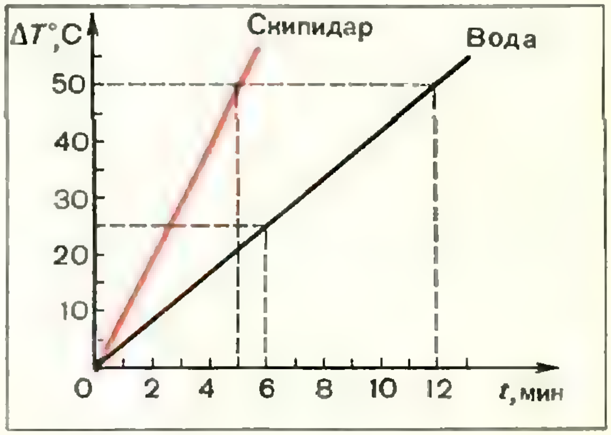


Рис. 2.

9. Цилиндрический сосуд объемом 45 *л* разделен тонкой перегородкой, которая может перемещаться без трения, на две части. В левую часть поместили по 1/2 моля кислорода и водорода, а в правую часть 1 моль азота при температуре 0° С. Каков будет объем каждой части, если известно, что водород с течением времени диффундирует через материал подвижной перегородки?

10. Фен, то есть вентилятор для сушки волос, укрепили на нижнем конце троса так, что струя вытекающего воздуха плотности ρ составляет с ним прямой угол. С какой скоростью v вытекает струя воздуха из отверстия сечением S, если угол отклонения троса составляет $\varphi = 30°$, а массы троса и фена равны соответственно M и m?

11. Известно, что теплый воздух поднимается вверх. Однако в тропосфере, то есть в слоях атмосферы, непосредственно прилегающих к поверхности Земли, температура воздуха с ростом высоты падает. Почему?

Вступительное задание по математике

1. Вычислить

$$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}003}{\left[\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4\right]:\frac{1}{5}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:62\frac{1}{20}+$$

$$+17{,}81:0{,}0137.$$

2. В урне 68 шаров (25 красных, 20 зеленых, 15 желтых, 8 черных). Какое наименьшее число шаров надо вытащить, чтобы из них 10 были обязательно одного цвета.

3. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и высоте h, опущенной на гипотенузу (с помощью циркуля и линейки).

4. Чтобы пронумеровать страницы книги, понадобилось 1974 цифры. Сколько в этой книге страниц?

5. Какие две цифры нужно поставить на место звездочек, чтобы полученное число 665^{**} делилось и на 7, и на 8, и на 9?

6. Что больше: 100^{20} или 9000^{10}?

7. В трапеции, основания которой a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям Найти ее длину.

8. Пассажир метро спускается вниз по эскалатору за 24 *с*. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 *с*. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

9. Найти площадь треугольника, вписанного в окружность радиуса R, если перпендикуляры из двух его вершин на касательную к окружности в третьей вершине треугольника равны p и q.

10. Имеется 80 монет. Среди них есть одна фальшивая, более легкая, чем все остальные, имеющие одинаковый вес. Как с помощью только четырех взвешиваний монет на чашечных весах без разновесов выделить фальшивую монету?

11 Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной точке.

12. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

13. Доказать, что многочлен

$$x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 24x + 15$$

ни при каких действительных значениях x не принимает значение нуль.

В. К. Асланян,
А. П. Кирьянов,
Т. А. Чугунова

Каждому свое

— Взгляни на этого математика, — сказал логик. — Он замечает, что первые девяносто девять чисел меньше сотни, и отсюда с помощью того, что он называет индукцией, заключает, что любые числа меньше сотни.

— Физик верит, — сказал математик, — что 60 делится на все числа. Он замечает, что 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Он проверяет несколько других чисел, например, 10, 20 и 30, взятых, как он говорит, наугад. Так как 60 делится на них, то он считает экспериментальные данные достаточными.

— Да, но взгляни на инженера, — возразил физик. — Инженер подозревает, что все нечетные числа простые. Во всяком случае, 1 можно рассматривать как простое число, доказывает он. Затем идут 3, 5 и 7, все, несомненно, простые. Затем идет 9 — досадный случай; по-видимому, 9 не является простым числом, но 11 и 13, конечно, простые. Возвратимся к 9, — говорит он, — я заключаю, что 9 должно быть ошибкой эксперимента.

Из книги Д. Пойа. «Математика и правдоподобные рассуждения». ИЛ, 1957.

Вниманию семиклассников!

Всесоюзная заочная математическая школа объявляет прием учащихся

Во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ВЗМШ не принимаются.

Занятия начнутся с 1-го сентября. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно (примерно раз в месяц) получать задания, которые содержат объяснения теоретических вопросов и задачи для решения.

Во Всесоюзной заочной математической школе три курса обучения.

Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения задач не позднее 20 марта 1974 года. После проверки работы (примерно в июле 1974 года) будет сообщено, приняты ли вы в ВЗМШ. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14 × 6 *см* с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область	*Вологодская*
Фамилия, имя...............	*Иванов Петр*
Год рождения	*1960 г.*
Класс............................	*7-й класс*
Школа (полное название).	*Школа № 2 г. Тотьмы*
Фамилия, имя, отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3* *Мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес....	*г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 23.*

Результаты проверки

(заполняется проверяющим)

1	2	3	4	5	6	7а	7б	8	9а	9б	10	11а	11б

Школьники, проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны присылать работы по адресу: *Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ. Заочная математическая школа. На конкурс.*

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, должны высылать работы по адресу: *г. Воронеж, Университет, ФЗМШ. На конкурс.*

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: *117234, Москва, В-234, МГУ, мех-мат., ВЗМШ. На конкурс.*

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1974 году

1. Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли друг с другом одинаковое количество партий. Потом стали решать, кто победитель. Первый сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всех очков набрал третий (Выигрыш — 1 очко; ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0.) Могло ли так быть? Если нет — докажите, если да — приведите пример.

2. Существуют ли три положительных целых числа a, b, c таких, что a меньше 1974, b на 1575 меньше c и $a^2 + b^2 = c^2$?

3. На дороге, соединяющей аулы A и B, нет ровных участков. Автобус в гору идет всегда со скоростью 15 *км/час*, под гору — 30 *км/час*. Найдите расстояние между A и B, если из A в B и обратно автобус идет 4 часа (без остановок).

4. Основания трапеции равны 15 *см* и 11 *см*, боковые стороны — 6 *см* и 9 *см*. Постройте такую трапецию и докажите, что ее можно разрезать на три конгруэнтные трапеции.

5. Дама сдает в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Чемодан весит больше, чем рюкзак. Саквояж и рюкзак вместе весят больше, чем две остальные вещи: корзина и чемодан, а корзина и саквояж вместе весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Какая из вещей самая тяжелая и какая — самая легкая?

6. Точка D лежит на биссектрисе угла ACB. На луче AC выбрали точки A_1 и A_2, а на луче CB — точки B_1 и B_2 так, что четыре точки A_1, C, B_1, D лежат на одной окружности и четыре точки A_2, C, B_2, D тоже лежат на одной окружности. Докажите, что $A_1A_2 = B_1B_2$.

7. Подряд в строчку выписаны 1974 цифры. Каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они написаны), делится на 17 или на 23.

а) Последняя цифра 1. Какова первая?

б) Первая цифра 9. Какова последняя?

8. Периметр выпуклого четырехугольника $ABCD$ равен 10, его стороны AB и CD параллельны. Найдите длины всех сторон, если известно, что биссектрисы углов A и B четырехугольника делят сторону CD на три равные части, а биссектрисы углов C и D делят сторону AB на три равные части.

9. а) Перечислите все возможные прямоугольники, у которых длины сторон больше 10 и которые можно разрезать на 28 прямоугольников размером 3×5.

б) Можно ли 28 брусками размером $3 \times 5 \times 10$ заполнить какую-нибудь прямоугольную коробку $a \times b \times c$, где $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 10$?

10. Существует ли девятизначное число, записываемое цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, у которого нельзя вычеркнуть пять цифр так, чтобы оставшиеся четыре шли в порядке возрастания или в порядке убывания?

11. Можно ли указать внутри треугольника со сторонами 3, 4, 5 точку, расстояния от которой до каждой из сторон треугольника

а) меньше 2;

б) меньше 1?

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Старые ошибки... вторым изданием

Потребность абитуриентов в специальной литературе для повторения школьного курса математики очень велика. Различия в степени подготовленности читателей и разный уровень требований при поступлении в разные вузы обусловливают появление пособий по математике, отличающихся как методическими установками, так и глубиной изложения материала.

Однако при всех этих отличиях каждое пособие должно обладать оригинальностью в трактовке преподносимого материала и, конечно, быть безупречным с точки зрения математической грамотности. Ведь каждая ошибка автора — это тысячи ошибок введенных в заблуждение поступающих.

Наш журнал уже неоднократно писал о недопустимо низком уровне ряда пособий по математике для абитуриентов (см. «Квант», № 11, 1970 г.; № 10, 1971 г.; № 6, 1972 г.; № 2, 1973 г.). К сожалению, к этому вопросу приходится возвращаться вновь.

Уже довольно богатая коллекция литературы для абитуриентов пополнилась новым (вторым) изданием книги по математике *). В нем достаточно полно по объему представлен теоретический материал курса элементарной математики.

Автор поставил своей задачей написать книгу по образцу программированного учебника и в определенной степени справился с этой сложной задачей.

Следует приветствовать попытку автора применить в рамках нынешней программы некоторые современные научно-методические идеи.

Уже с самого начала книги используются понятия множества, элемента множества и другие, что позволяет изложить с единой точки зрения ряд принципиальных вопросов курса; разграничиваются понятия системы и совокупности уравнений и неравенств; в геометрии пускаются в обиход знаки включения и принадлежности. В пособии развивается функциональный подход к теории уравнений и неравенств, широко используются графические методы исследования и решения задач. Подробно разъясняются способы выполнения чертежей пространственных конфигураций. Отдельные приводимые доказательства удачнее и проще, чем предлагаемые в школьных учебниках.

Таким образом, книга содержит ряд интересных находок автора. Однако пособие по математике может достичь своей цели только при условии, что удачный отбор материала сочетается с необходимой строгостью его изложения, четкостью и правильностью методических рекомендаций, даваемых читателю. К сожалению, в рассматриваемой книге имеется весьма значительное число недочетов и даже ошибок.

Пособие перегружено определениями и формулировками, в которых далеко не всегда есть достаточная ясность. Кроме того, отдельные определения в дальнейшем изложении «не работают» или неявно подменяются другими.

Так, не ясными остаются определения «Числа со знаком — (минус) называются отрицательными» (с. 12), «Равенство двух функций от одних и тех же аргументов называется уравнением» (с. 103); определение «Действие, заключающееся в нахождении суммы двух данных чисел, называется сложением» (с. 13), очевидно, является псевдоопределением, и т. д.

Автор приводит (с. 276) фактически два определения показательного уравнения, но они не эквивалентны между собой (то же замечание относится и к определениям логарифмического уравнения, с. 282). В решении примера на с. 257 для знаменателя геометрической прогрессии значение $q = 0$ исключается, тогда как в определении геометрической прогрессии такое ограничение опущено (с. 249, 253). В определении логарифма (с. 264—265) необходимо оговаривать, что основание не только положительно, но и отлично от единицы. В книге не определяется радикал с дробным показателем, однако в примере на с. 296 такое выражение употребляется.

Серьезные нарекания вызывает трактовка автором ряда теоретических вопросов, где допускаются непоследовательность и неточности.

В разделе о корне (радикале) приводятся (с. 25) равенства $\sqrt{9} = \pm 3$ и $\sqrt{9} = 3$, и перед корнями из чисел, не имеющих рационального значения, ставятся оба знака: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{0,3}$ (с. 456). Тем самым точный смысл символа $\sqrt{\ }$ остается неясным. На с. 588 выписано неверное соотношение $\sqrt{(x-4)^2} = \pm(x-4)$. Не разъясняется смысл двойного знака ± перед корнем, встречающегося в тригонометрических формулах (с. 174, 205, 535—536). Это также приводит к прямым ошибкам (см. решение упражнения 188 а)).

---

*) Метельский Н. В., Математика. Курс средней школы для поступающих в вузы и техникумы. Издание 2-е, стереотипное. Изд-во «Вышэйшая школа», Минск, 1973, 688 стр., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 15 коп.

Один из центральных пунктов программы вступительных экзаменов по математике — теория уравнений и неравенств. Однако в пособии этот вопрос изложен не лучшим образом. Например, указание при решении линейного уравнения «сделать все коэффициенты . . . целыми, умножив все члены обеих его частей на наименьшее общее кратное всех знаменателей» (с. 108) не выполнимо, если коэффициенты — иррациональные числа. Нельзя согласиться с утверждением автора о том, что если в приведенном квадратном уравнении «свободный член положительный, то оба корня положительные или оба отрицательные» (с. 494). Неудачен используемый в книге способ решения биквадратных уравнений — как известно, при отыскании корней таких уравнений всегда можно избежать извлечения корней из мнимых чисел.

Рекомендации автора, касающиеся решения уравнений и неравенств (потеря и приобретение корней, использование ОДЗ, смысл проверки и так далее), разбросаны по всей книге, отрывочны, сформулированы путано. На с. 290 читаем: «если корень . . . принадлежит уточненной ОДЗ, он не посторонний», но четкого определения «уточненной ОДЗ» в книге нет. Неточное выписывание ОДЗ и необходимых ограничений на параметры уравнения приводит к тому, что автор в одних случаях включает в ответ посторонние решения (упражнения 108 г; 229 г), а в других, наоборот, корни теряет (упражнения 88 и, 108 в).

В отличие от обычно принимаемой трактовки автор при выяснении равносильности уравнений учитывает корни с их кратностями (то есть считает, что, скажем, уравнения $x^2 = 0$ и $2x = 0$ неравносильны, с. 494—495). Такой подход весьма неудобен, поскольку, если следовать ему пунктуально, переход от уравнения $\sin^2 x = 0$ к уравнению $\sin x = 0$ (или $\cos 2x = 1$) есть переход к неэквивалентному уравнению. Между тем автор допускает подобные переходы без всяких оговорок.

Важным элементом подготовки поступающего является его логическая культура. Однако и в этом отношении к рассматриваемой книге можно предъявить существенные претензии.

Так, используемый метод доказательства тригонометрических тождеств недостаточно логически обоснован: он применим лишь в случае, когда в процессе преобразований область допустимых значений аргументов не сужается. Но автор необходимой проверки нигде не делает, а при рассмотрении конкретных формул и тождеств не указывает области допустимых значений аргументов.

Неверно утверждение, что сделать обе части уравнения $15^x = 2^{3x}$ степенями одного и того же числа невозможно (с. 280), так как, например, $15 = 2^{\log_2 15}$. При доказательстве теорем о боковой поверхности и объеме призмы (с. 403, 418) рассуждения автора неявно используют предположение о том, что для любой призмы существует перпендикулярное сечение, пересекающее все боковые ребра; в общем случае это неверно. Обоснование утверждения «иррациональных чисел значительно больше, чем рациональных» (с. 460) содержит логическую ошибку, состоящую в неправомерном перенесении некоторых понятий и свойств конечных множеств на множества бесконечные. Исследование разрешимости геометрических задач ошибочно сводится к простому анализу области определения получающейся в ответе формулы (с. 411, 429). Остается лишь сожалеть, что методу математической индукции должного внимания не уделено и он вынесен в упражнения.

Общим недостатком книги следует признать отсутствие должных разъяснений логического характера при рассмотрении многих принципиальных моментов. Например, при преобразовании выражения $\sin(\arccos x)$ автор приводит лишь формальные выкладки (с. 224—225), не делая никаких пояснений. Однако, если даже подобные весьма принципиальные комментарии читателю представляется давать самому, то многочисленные длинные и вполне элементарные вычисления подробно воспроизводятся (что, кстати, привело к необоснованно раздутому объему пособия).

Отметим также, что в пособии имеется ряд недостатков и ошибок в решении упражнений (194, л — указаны лишние решения; 219, в — неверно описана область определения функции; 302 — приведено неполное решение; 376 — ответ неверен и т. п.).

Сказанное выше свидетельствует о том, что рассматриваемая книга, несмотря на отдельные достоинства, не удовлетворяет требованиям, которые должны предъявляться к пособиям по математике для поступающих. Казалось бы, что во втором издании автор обязан был исправить многочисленные дефекты, тщательно доработать книгу. К сожалению, этого не случилось, а издательство, не проявив понимания своей ответственности перед юными читателями, выпустило пособие новым изданием со старыми ошибками.

А. Ф. Хрусталев

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. У ювелира во время шлифовки раскололся бриллиант в результате стоимость его снизилась на 32%.

Какая часть бриллианта откололась, если стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его веса?

2. Почему набегающие на берег волны «скручиваются»?

3. Найдите, сколько вулканов насчитывается на планете, если в искомом числе десятков на 3 больше, чем сотен, а единиц на 4 меньше десятков, причем полусумма всех цифр числа равна цифре десятков.

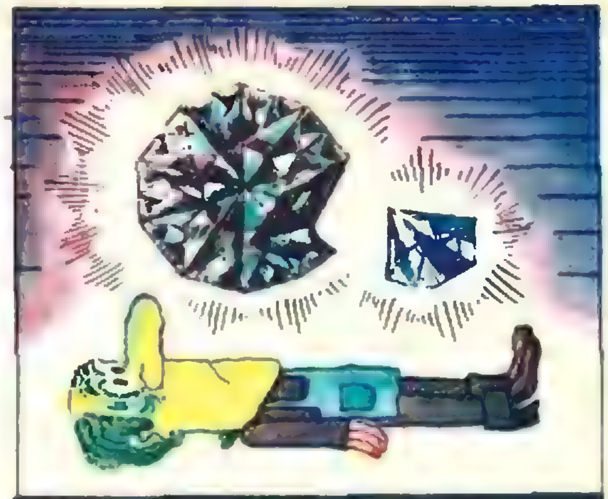
4. В стакан с сахаром и в стакан без сахара налили чай из одного чайника. В каком стакане чай холоднее?

5. В равенстве

$$(р+о+м+а)^4=\overline{рома}.$$

определить число *рома*.

6. Металлический стержень уравновешен в горизонтальном положении на узкой опоре. Опора находится на середине стержня. Сохранится ли равновесие, если одну половину согнуть пополам?



Художник Э. Назаров

Решето Эратосфена

Эта красивая форма решета Эратосфена *) заимствована из книги М. Гарднера *«Математические досуги»* (изд-во «Мир», 1972). Все не перечеркнутые (красным или синим) числа — простые, кроме числа 121. Объясните, почему!

Задача 1. *Чтобы получить список простых чисел, меньших 1000, надо «отсеять» числа, которые делятся на 2, 3, 5, 7, 11 ... На каком простом числе можно при этом остановиться?*

Как изменится ответ для случая составления таблицы простых чисел, меньших 10 000?

Восклицательным знаком отмечены в таблице пары простых чисел «близнецов» **). В нашей таблице их девять.

Известно, что простых чисел бесконечно много. Но никто не знает, конечно или бесконечно множество пар близнецов.

Задача 2. *Первые две пары близнецов (3, 5) и (5,7) имеют общий элемент (5). «Расстояние» между второй и третьей парой близнецов (11, 13) равно*

$$11 - 7 = 4.$$

Расстояние между третьей и четвертой (17, 19)

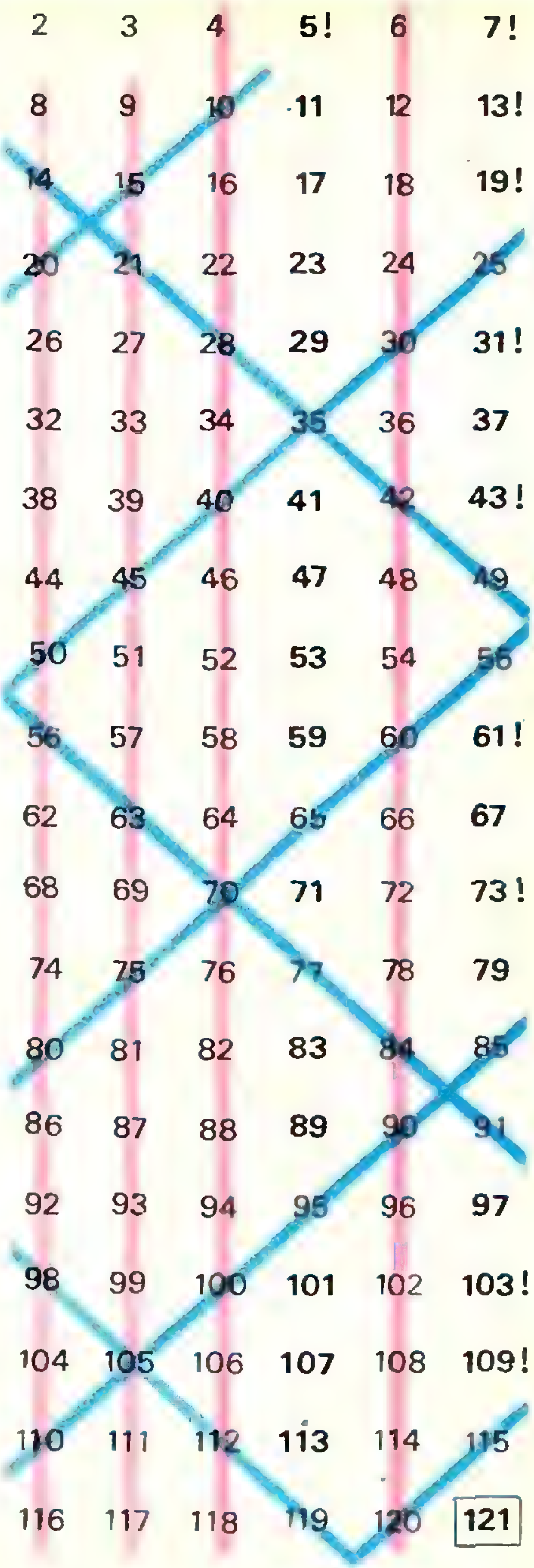
$$17 - 13 = 4,$$

между четвертой и пятой (29, 31)

$$29 - 19 = 10.$$

Докажите, что далее расстояние между соседними парами близнецов никогда не будет меньше четырех.

А. Н. Колмогоров



2	3	4	5!	6	7!
8	9	10	11	12	13!
14	15	16	17	18	19!
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31!
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43!
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61!
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73!
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103!
104	105	106	107	108	109!
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	121

---

*) См. «Квант», 1973, № 4, с. 71.

**) См. «Квант», 1973, № 5, с. 56.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Сюрпризы»

3. Указание. Воспользуйтесь двумя обстоятельствами:

1) случай II «неустойчив»: сколь угодно мало изменив радиусы a, b и c, можно перевести его и в случай I, и в случай III (пусть, *например,* α, β *и* γ *расположены так,* как показано на рисунке 1, тогда чуть увеличив радиус a, получаем случай I, а чуть уменьшив a — случай III);

2) условие $n_2 \neq 0$, напротив, «устойчиво»: при очень малом изменении чисел k, l и m знак n_2 не меняется.

К статье «Электролиз и закон сохранения энергии»

$\Delta t = 0{,}1$ *град*

К статье «Переформулировка задачи»

1. $a > {}^1/_3$. Указание. Вопрос задачи равносилен следующему: *при каких* a *число* 1 *лежит между корнями трехчлена* $f(x) = x^2 - 2ax - a$. Это будет в том и только в том случае, когда $f(1) = 1 - 3a < 0$.

3. $c < 0$. Указание. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$; *тогда* $c = f(0)$.

4. Нет.

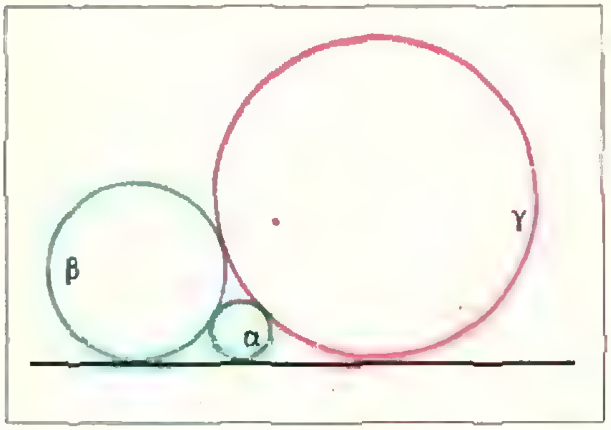


Рис. 1.

5. $-(\sqrt{29} + 5)/2 \leqslant y \leqslant (\sqrt{29} - 5)/2$.

7. $3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2}$.

Указание. Условие задачи означает, что уравнение $x^2 + ax - a = 2x^2 - x + a$ или $x^2 - (a + 1)x + 2a = 0$ не имеет действительных корней.

9. $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 0$.
10. $x = (1 + \sqrt{13})/2$.
11. $x = {}^1/_4$.
12. $\sqrt{|b|/2}$.
13. $(a + 1)/2$.
14. $-3 \leqslant x \leqslant -2, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3$.
15. $0 < x \leqslant 49$.
16. $-\sqrt{2}/2 < x < 0$.
17. $x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1$.

19. Если диаметр шарика d, то, поскольку функция $y = \log_2 x$ определена, в частности, при $x = d$, через точку с абсциссой d и ординатой $\log_2 d$ шарик пройти не может. Функция $y = \log_2(x - 0{,}01)$ определена лишь для $x > 0{,}01$, так что шарик диаметра $d < 0{,}01$ будет падать до бесконечности. Что касается функции $y = \log_2(x + 0{,}01)$, то шарик задержится, если его поставить на часть ее графика, соответствующую $x > 0$; в противном случае, разумеется, он задержаться не может.

К статье «Свойства паров, *испарение и* кипение жидкостей»

$$1.\ \Delta h = \frac{p}{\rho g} = \frac{2 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10} = 0{,}2\ (\text{м}).$$

$$2.\ m = \frac{p_0 S T_2}{g(10T_1 - T_2)} \approx 14\ (\text{кг}).$$

$$3.\ m_{\text{л}} = \frac{m}{1 + \dfrac{\lambda}{L}} \approx 0{,}4\ (\text{кг}).$$

4. Давления пара у поверхностей воды в сосудах разные. Они отличаются на величину $\Delta p = \rho g \Delta h$, где Δh — разность уровней воды в сосудах, ρ — плотность водяного пара. Поэтому когда у поверхности с более низким уровнем пар станет насыщенным, у поверхности с более высоким уровнем пар не будет насыщенным. Вода, испаряясь с *этой поверхности, конденсируется на поверхности* с более низким уровнем. Так будет продолжаться до тех пор, пока уровни воды в сосудах не сравняются, и пар не станет насыщенным у обеих поверхностей.

5. В кипяченой воде содержится меньше растворенных газов, поэтому ее температура *кипения более высокая.*

Сырая вода закипит, так как тепло, необходимое для кипения, будет подводиться от кипящей кипяченой воды, имеющей несколько более высокую температуру.

К статье «Московский инженерно-физический институт»

Математика

Вариант 1

1. Пусть x — число единиц, а y — число десятков искомого числа, тогда из условий задачи имеем: $(10y+x)(10x+y)=2430$. Отсюда $x=5$, а y может принимать следующие целочисленные значения: 2, 4, 6, 8.

Ответ: 45 или 54.

2. $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{3}}$.

3. ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+2px>0, \\ 8x-6p-3>0. \end{cases}$$

В ОДЗ исходное уравнение равносильно следующему:
$x^2+2(p-4)x+6p+3=0$, откуда

$$x_1=-p+4+\sqrt{p^2-14p+13},$$
$$x_2=-p+4-\sqrt{p^2-14p+13}.$$

Решения существуют при $p\leqslant 1$ и при $p\geqslant 13$. Осталось учесть ОДЗ: $8x-6p-3>0$, то есть

$$-14p+29\pm 8\sqrt{p^2-14p+13}>0.$$

Легко проверяется, что при $p\geqslant 13$ решений нет вообще, при $p=1$ есть одно решение, а при $p<1$ значение x_1 — всегда решение, а значение x_2 — решение при $p<-\frac{1}{2}$ и при $p>\frac{-3}{22}$.

Итак, одно решение будет при $p=1$ и при $-\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant\frac{-3}{22}$.

4. Преобразуем исходное уравнение к виду $(\sqrt{2}\sin x-1)^2+2(\operatorname{tg}x-1)^2=0$. В ОДЗ $(\cos x\neq 0)$ уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x-1=0, \\ \operatorname{tg}x-1=0, \end{cases}$$

которая в свою очередь эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+n\pi, & n=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, & k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots \end{cases}$$

Последняя система, а следовательно, и исходное уравнение, имеет следующие решения:

$$x=\frac{\pi}{4}+2m\pi,\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$$

Вариант 2

1. Сумма первых ста чисел, встречающихся в обеих прогрессиях, равна 101 100.

2. $S=\dfrac{l^2\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin3\alpha}$.

3. $0<x<\frac{1}{2}$, $2<x<3$.

4. $x=n\pi$, $y=m\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, $m=0,\pm1,\pm2,\dots$

Физика

Билет 1

На нижний шарик действуют три силы (рис. 2,*а*): сила тяжести mg, кулоновская сила $F_к=\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ и сила натяжения нити F. В начальный момент $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=4mg$ по условию, а в конечный $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}=mg$ (так как натяжение нити BC обратилось в нуль). Отсюда можно найти, насколько надо поднять точку A над точкой B:

$$\Delta r=r_2-r_1=\frac{q}{4\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg}}\approx 0{,}5\ (м).$$

Теперь рассмотрим верхний шарик. На него действуют три силы (рис. 2, *б*): сила тяжести mg, кулоновская сила $F_к$ и сила натяжения пружины $F_н$. И в начальный, и в конечный моменты эти силы уравновешены (считаем, что перемещение верхнего шарика происходит равномерно):

$$F_{н_1}=F_{к_1}+mg \quad и \quad F_{н_2}=F_{к_2}+mg,$$

или

$$kx_1=4mg+mg \text{ и } kx_2=mg+mg$$

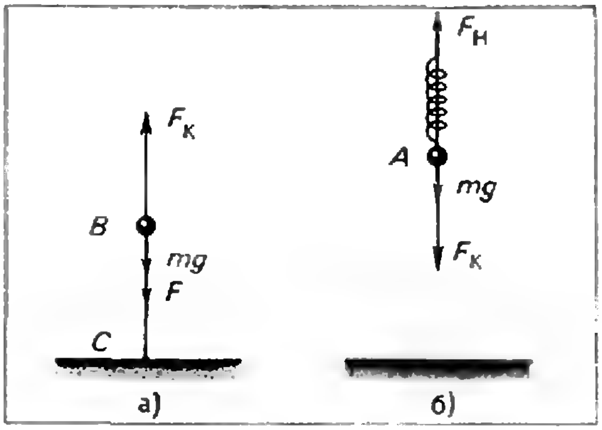


Рис. 2.

(x_1 и x_2 — удлинения пружины в начальный и конечный моменты), откуда уменьшение длины пружины

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{3mg}{k} = \frac{3\cdot 0{,}1\cdot 9{,}8}{9{,}8} = 0{,}3\ (\text{м}).$$

Следовательно, точку O надо переместить вверх на

$$h = \Delta r - \Delta x \approx 0{,}2\ (\text{м}) = 20\ \text{см}.$$

Билет 2

Ток, протекающий по контуру, равен

$$I = \frac{E - |E_{\text{инд}}|}{R},$$

где $E_{\text{инд}} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} S = -\frac{BS}{\tau}$.

В течение времени τ в контуре выделяется тепло

$$Q = I^2 R\tau = \frac{\tau}{R}\left(E - \frac{BS}{\tau}\right)^2 = 0{,}032\ \text{дж}.$$

Билет 3

Начиная с некоторого момента, поршень будет двигаться с таким же ускорением, как и трубка. Это ускорение поршню сообщает результирующая сила давления со стороны газа:

$$ma = (p_1 - p_2) S,$$

где p_1, p_2 — давление газа по разные стороны поршня. Если изображение получается при этом на заднем торце трубки, то значит (рис. 3)

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Учитывая, что $d + f = l$ и $d > f$, имеем

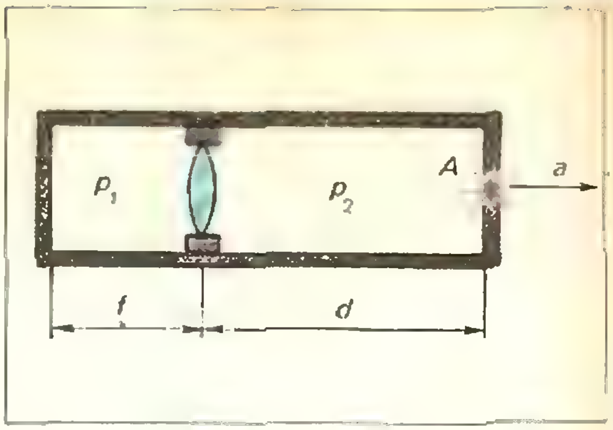


Рис. 3.

$$d = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lF}}{2}, \quad f = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lF}}{2}.$$

Согласно закону Бойля—Мариотта

$$p_0 \frac{l}{2} S = p_2 dS = p_1 fS,$$

откуда

$$p_1 = \frac{p_0 l}{2f}, \quad p_2 = \frac{p_0 l}{2d}.$$

Таким образом,

$$a = \frac{(p_1 - p_2) S}{m} = \frac{p_0 lS}{2m} \frac{d - f}{df} =$$

$$= \frac{p_0 S}{2mF} \sqrt{l^2 - 4lF} \approx 7{,}7\ \text{м/с}^2.$$

К задачам

(*см. с. 12*)

1. 45.
2. 198.
3. 132, 264, 396.

Корректор Н. Б. Румянцева

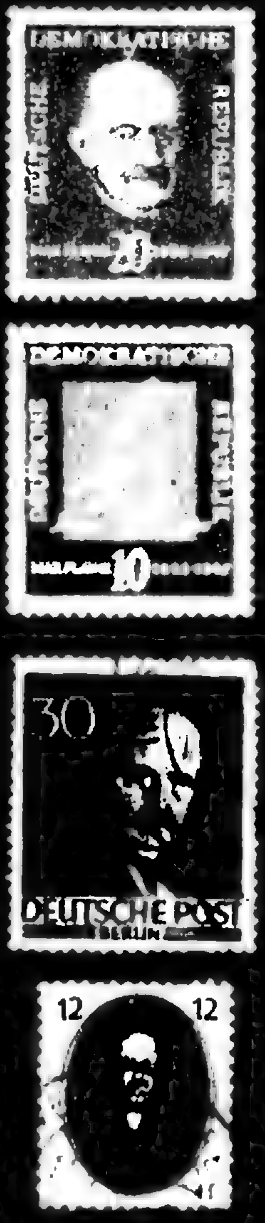
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант 10», тел. 234-08-11. Сдано в набор 4/X 1973 г.
Подписано в печать 11/XII 1973 г.
Бумага 70×100 1/16 Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,22 Тираж 377 945 экз.
Т-16997 Цена 30 коп. Заказ 2079

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

На марках — Макс Планк

Уголок коллекционера



Наш журнал назван «Квант», и на первой странице обложки приведен символ постоянной, введенной в физику создателем квантовой теории — выдающимся немецким физиком-теоретиком — Максом Планком (1858—1947). Эту постоянную называют «постоянной Планка».

Наиболее важные работы Планка относятся к теории теплового излучения. В 1900 году в работе «К теории закона распределения энергии в нормальном спектре» им была установлена формула — распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела. Эта формула была найдена Планком полуэмпирическим путем. В дальнейшем, пытаясь теоретически обосновать эту формулу, Планк впервые в физике ввел представление о дискретном характере обмена энергией в процессе излучения и установил основы теории квантов. Он показал, что величина кванта энергии пропорциональна частоте испускаемой электромагнитной волны. Коэффициент пропорциональности h был назван Планком «квантом действия». Теперь эту постоянную называют постоянной Планка, а квантом действия чаще всего называют величину

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Теория Планка противоречила законам классической физики и вызвала очень много возражений, однако она хорошо подтверждалась — экспериментально. В наши дни квантовая механика, выросшая из открытия Планка, стала одним из важнейших разделов физики. За открытие законов излучения света Планку была присуждена в 1918 году Нобелевская премия.

Максу Планку посвящено несколько почтовых марок (они приведены на фото). Первая из них с портретом Планка выпущена в 1950 году в Германской Демократической республике в серии, посвященной 250-летию Берлинской Академии наук. Затем марку, посвященную Планку, — выпустило — в 1953 году почтовое ведомство Западного Берлина.

Отмечая 100-летие со дня рождения выдающегося физика, Германская Демократическая республика выпустила 23 апреля 1958 года две почтовые марки. На одной из них портрет Макса Планка, а на другой символ «постоянной Планка» $\hbar$ и факсимиле ученого.

Л. В. Ланкис

НОМЕР
2

Основан в 1970 году.

Квант

1974
2

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
И. Б. Мамулова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ

2 *А. А. Бельский, Л. Е. Садовский.* Кольца
8 *А. Б. Шварцбург.* Магнитное поле Земли
13 *И. М. Яглом.* Заплаты на кафтане
22 *И. И. Воробьев.* Необычное путешествие

Математический кружок

26 *О. Т. Долгов.* Игра в 15

Задачник «Кванта»

34 Задачи М246—М250; Ф258—Ф262
36 Решения задач М205—М207; Ф213—Ф217

Практикум абитуриента

46 *И. А. Кушнир.* Метод вспомогательного элемента
52 Новосибирский государственный университет

Рецензии, библиография

56 *И. Зорич.* Беседы старого учителя

«Квант» для младших школьников

57 Задачи
58 *Б. А. Кордемский.* Топологические опыты своими руками
61 **Ответы, указания, решения**

Уголок коллекционера

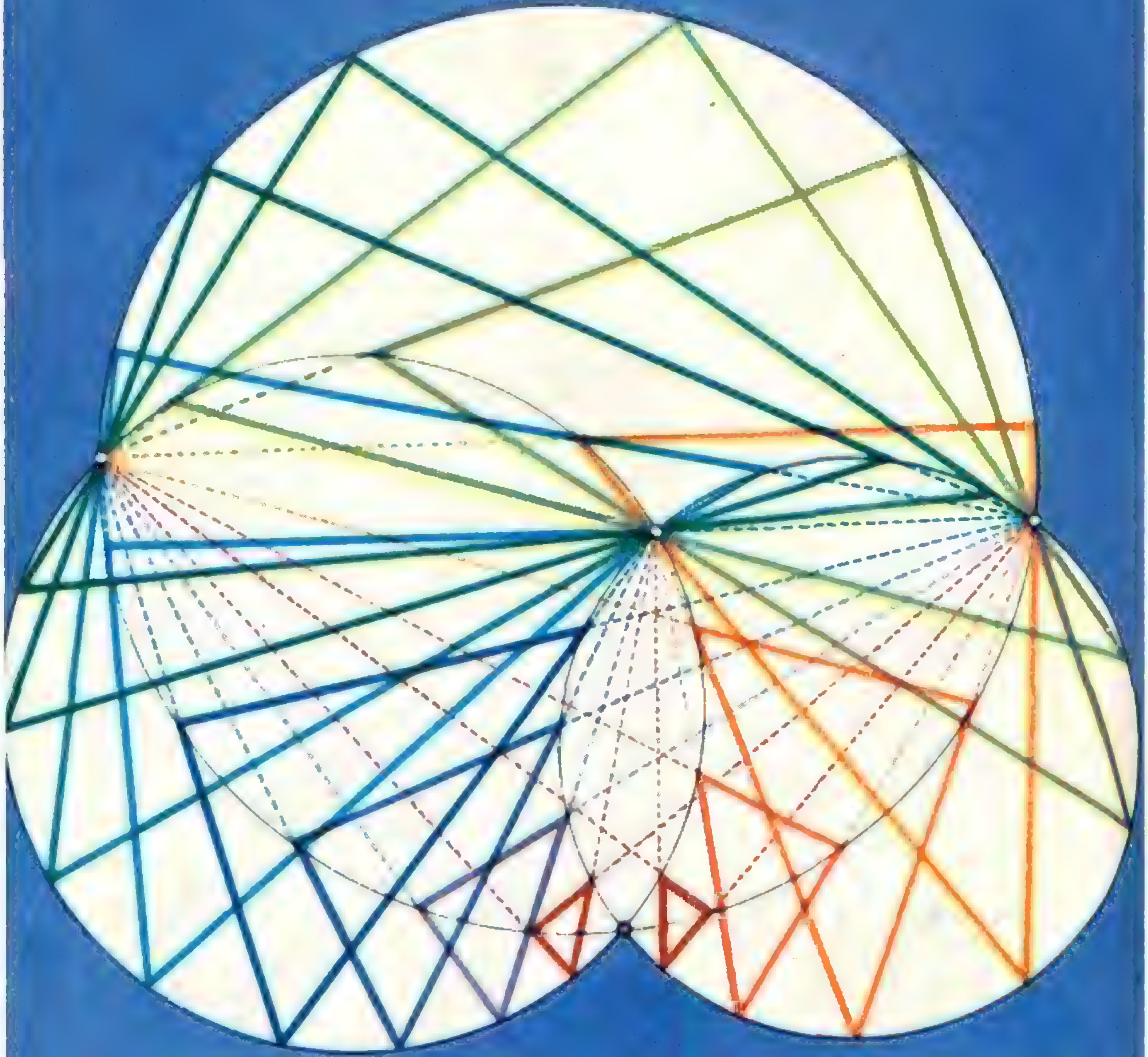
В. А. Лешковцев. Первый полет к Венере (*3-я с. обложки*)

Смесь (*с. 12, 60*)

На первой странице обложки вы видите старинный морской компас. Этот компас с позолоченной короной сделан, как предполагается, в 1790 году и, возможно, находился в капитанской каюте корабля Британского королевского флота. Компас подвешивали на цепи и двумя перекрещенными кольцами прикрепляли к потолку каюты. Это обеспечивало горизонтальное положение магнитной стрелки при любой качке. Смотреть на компас нужно было снизу. Сейчас этот компас хранится в Национальном морском музее в Гринвиче (Великобритания).

О том, почему магнитная стрелка показывает направление север—юг, всегда ли она устанавливается в этом направлении, когда и почему стрелка отклоняется, вы можете прочитать в статье А. Б. Шварцбурга «Магнитное поле Земли», помещенной в этом номере нашего журнала

© «Квант», 1974 год



На этом рисунке вы видите семейство подобных треугольников; стороны (или продолжения сторон) всех этих треугольников проходят соответственно через три фиксированные точки. Понятно, почему вершины этих треугольников лежат на окружностях,— они являются вершинами равных углов, опирающихся на фиксироранный отрезок.

Судя по рисунку, площади треугольников сначала увеличиваются, когда треугольники удаляются от красной точки по ходу часовой стрелки (их цвет при этом меняется почти как в радуге — от синего до красного), а потом уменьшаются.

Где же находится треугольник наибольшей площади? Прочтите решение задачи М207, помещенное на с. 38—42, и вы узнаете ответ на этот вопрос.

А. А. БЕЛЬСКИЙ,
Л. Е. САДОВСКИЙ

КОЛЬЦА

$a(b+c)=ab+ac$
$(b+c)a=ba+ca$

С понятием кольца сталкиваются еще в средней школе: впервые — овладевая действиями сложения и умножения чисел, затем — обучаясь действиям с многочленами (полиномами). И в том и в другом случае общими оказываются определенные правила (аксиомы), которым подчиняются эти операции. Ради изучения именно этих общих свойств операций сложения и умножения (чисел, полиномов или, как мы увидим далее, объектов иной природы) как таковых, в их внутренней связи между собой, безотносительно к природе элементов, над которыми они производятся, и было введено в алгебре понятие кольца.

Что же такое кольцо? Точное определение этого объекта связано с понятием *операции*. С него мы и начнем.

Рассмотрим произвольное множество M. Будем говорить, что на нем определена *операция*, если установлено правило, по которому любым двум элементам a и b из M ставится в соответствие третий элемент c того же множества. Так, например, если M — множество всех целых чисел (для него принято стандартное обозначение Z), то сложение $c = a + b$ и умножение $c = ab$ являются двумя различными операциями на этом множестве. Если, скажем, M — это множество из двух различных элементов a и b (общепринятое обозначение $M_2 = \{a, b\}$), то все возможные операции на нем можно полностью описать. Для этого сначала нужно перечислить всевозможные пары элементов из M_2. Вот они: (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) *); затем следует решить, какой элемент из M_2 отнести той или иной паре.

Удобнее всего конкретную операцию на множестве, состоящем из конечного числа элементов, описывать таблицей (такой способ предложил английский математик А. Кэли (1821—1895), по имени которого такие таблицы теперь и называются таблицами Кэли).

В левом столбце и в верхней строке записываются элементы множества M так, как это указано в таблице 1; на пересечении строки, которая начинается с элемента a, и столбца, который начинается с элемента b, указывается тот элемент, который сопоставляется рассматриваемой операцией паре (a, b). Например, если паре (a, b) сопоставляется элемент a, то это обстоятельство записывается так, как в таблице 1′. Далее, если паре (b, a) ставится в соответствие элемент b, то получается таблица 1″.

	a	b
a		
b		

Табл. 1

	a	b
a		a
b		

Табл. 1′

---

*) Таким образом, мы различаем пары (a, b) и (b, a), то есть рассматриваем так называемые «упорядоченные пары».

Заполненная таблица полностью определяет операцию. В таблицах 2—5 приведены примеры разных операций на множестве из двух элементов. Читателю будет полезно описать таблицами все остальные операции на этом множестве (всего их 16; советуем их найти).

В таблице 6 приведен пример операции на множестве $M_3 = \{a, b, c\}$ из трех элементов. Подсчитайте, сколько операций существует на M_3.

В известных нам из арифметики случаях операциям присвоены названия: скажем, сложение, вычитание, умножение. В общем случае, о котором только что шла речь, операции специальных названий не имеют. Лишь для удобства ту или иную операцию иногда называют умножением, еще реже — сложением, хотя вполне можно было бы воспользоваться любым другим, специально выдуманным, названием. То же самое относится и к символам, которыми обозначаются результаты применения операций. Например, если a и b — числа, то, складывая их, мы получаем число $a + b$ (используется символ «$+$»), вычитая — получаем число $a - b$ (символ «$-$») и т. д. В общем случае таких «связывающих» символов у нас нет, но их можно придумать. Например, будем обозначать через $a * b$ результат применения той или иной определенной операции к паре (a, b). Если a и b — числа, а рассматриваемая операция — сложение, то символ «$*$» становится символом «$+$». Например, операцию, описанную таблицей 3, можно описать и так:

$$a * a = a,$$
$$a * b = a,$$
$$b * a = b,$$
$$b * b = b.$$

	a	b
a		a
b	b	

Табл. 1

	a	b
a	a	b
b	b	a

Талб. 2

	a	b
a	a	a
b	b	b

Табл. 3

	a	b
a	b	a
b	b	b

Табл. 4

	a	b
a	a	b
b	a	a

Табл. 5

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Табл. 6

Если при данной операции парам (a, b) и (b, a) сопоставляется один и тот же элемент, то есть $a * b = b * a$, то говорят, что элементы a и b *коммутируют* относительно данной операции или являются *перестановочными* (относительно данной операции). Так, например, относительно операции, описанной в таблице 2, элементы a и b коммутируют, а относительно операции, описанной в таблице 3, эти же элементы не коммутируют. Если операция такова, что относительно нее коммутируют все пары, то говорят, что она *коммутативна*. Конечно, сложение и умножение целых чисел — коммутативные операции, таблицы 2 и 6 тоже задают коммутативные операции.

Докажите, что таблица Кэли коммутативной операции симметрична относительно главной диагонали (так называют линию, идущую из левого верхнего угла таблицы в правый нижний угол).

Сформулируем теперь в общем виде еще одно свойство, которым может обладать (или не обладать) операция. Пусть a, b и c — три (не обязательно различных) элемента множества M. Если $a * (b * c) = (a * b) * c$ для этих элементов, то их называют *ассоциирующими*.

Подчеркнем, что в обеих частях последнего равенства элементы a, b, c, независимо от расстановки скобок, выписываются в одном и том же порядке. В этом смысле тройка элементов a, b, c является упорядоченной.

Так, например, элементы b, a, b из M_2 относительно операции, описанной в таблице 3, — ассоциирующие, а относительно операции из таблицы 5 не являются ассоциирующими (проверьте это!). Операция, относительно которой все тройки элементов множества M являются ассоциирующими, называется *ассоциативной*. Сложение и умножение целых чисел — операции не только коммутативные, но и ассоциативные. Читателю будет полезно придумать пример такой операции, которая была бы коммутативной, но не ассоциативной.

Теперь мы готовы дать определение кольца. *Кольцо* — это множество M с двумя специфическими операциями. Одну из них принято называть *сложением* и обозначать элемент, сопоставляемый ею паре (a, b), через $a + b$, а другую принято называть *умножением* и обозначать элемент, сопоставляемый паре (a, b), через ab. Специфика этих операций заключена в следующих пяти требованиях, которые к ним предъявляются:

сложение должно быть коммутативным и ассоциативным, то есть для всех пар (a, b) и для всех троек (a, b, c) элементов из M должны иметь место равенства:

1) $a + b = b + a$;

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3) *в множестве M должен существовать такой элемент 0, что $a + 0 = a$ при всех a из M; этот элемент 0 принято называть нулем;*

4) *для каждого a из M должен существовать такой элемент c из M, что $a + c = 0$; элемент c называют противоположным элементу a и часто обозначают через $-a$* (так что в данном случае $c = -a$);

5) *от умножения требуется лишь одно: оно должно быть дистрибутивно связано со сложением, то есть для любых a, b, c из M должны иметь место равенства*

$$a(b + c) = ab + ac;$$
$$(b + c)a = ba + ca$$

(различать эти два равенства надо потому, что умножение не предполагается коммутативным). Часто указанное свойство называют «распределительностью умножения относительно сложения».

Вот что такое кольцо. Очень важно иметь в виду, что из требований 1) — 4) следует «единственность» нуля и «единственность противоположного элемента». Означает это следующее: а) если 0_1 и 0_2 — два элемента кольца M, удовлетворяющие требованию 3), то $0_1 = 0_2$; б) если $a + c_1 = a + c_2 = 0$, то $c_1 = c_2$. Иными словами: в кольце только один нуль, и каждый элемент кольца имеет лишь один противоположный элемент. В самом деле, ведь в силу 1) и 3)

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Этим доказано а). Далее, если к обеим частям равенства

$$a + c_1 = a + c_2$$

прибавить, скажем, c_1, то получится

$$c_1 + (a + c_1) = c_1 + (a + c_2),$$

или, в силу 2),

$$(c_1 + a) + c_1 = (c_1 + a) + c_2,$$

или, ввиду того что $a + c_1 = c_1 + a = 0$, получаем

$$0 + c_1 = 0 + c_2,$$

или $c_1 = c_2$, чем и доказывается б).

Примерами колец могут служить известные нам уже множество всех целых чисел, множество всех рациональных чисел, множество всех полиномов с вещественными коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения. Если внимательно присмотреться, то станет ясно следующее обстоятельство:

в названных примерах колец умножение подчинено нескольким требованиям, помимо требования 5). Перечислим их, продолжая нумерацию:

6) *умножение коммутативно, то есть* $ab = ba$ *при всех* a *и* b;

7) *умножение ассоциативно, то есть* $(ab)\,c = a\,(bc)$ *при всех* a, b *и* c;

8) *в кольце существует такой элемент* e, *что* $ae = a$ *для всех* a.

Если кольцо M удовлетворяет условию 6), то его называют *коммутативным*; если оно удовлетворяет условию 7), то его называют *ассоциативным*; наконец, если M удовлетворяет условию 8), то говорят, что M *обладает единицей* и обозначают элемент e символом 1.

Следовательно, примеры колец, о которых говорилось выше, — это примеры колец коммутативных, ассоциативных и обладающих единицей. Именно о таких кольцах мы будем говорить ниже. Но сразу отметим, что в теории колец значительное место занимают разделы о кольцах, не подчиненных тем или иным требованиям из числа 6) — 8) (например, о некоммутативных или о неассоциативных кольцах).

Сейчас мы построим еще один пример кольца.

Напомним, что для любых двух целых чисел a и b, где $b \neq 0$, существуют такие целые числа q и r, что

$$a = bq + r \qquad (1)$$

и одновременно

$$0 \leqslant r < |b|. \qquad (2)$$

Число q называют *частным*, а число r — *остатком* от деления a на b. Советуем читателю, повторяя эту тему школьной арифметики, доказать, что числа q и r, упомянутые выше, единственны, то есть если

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2,$$

где $0 \leqslant r_1,\ r_2 < |b|$, то $r_1 = r_2$ и $q_1 = q_2$.

Рассмотрим множество всевозможных остатков от деления целых чисел на фиксированное число n. Легко сообразить, что это множество состоит из чисел $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим его через Z_n. Введем на Z_n две операции: сложение и умножение. Конечно, обычное сложение или обычное умножение целых чисел не являются операциями на Z_n: ведь числовая сумма или числовое произведение остатков от деления на n может быть больше, чем n, и не принадлежать Z_n. Поэтому, определяя операции на Z_n, нужно элементы этого множества рассматривать не как числа, а как-то иначе. Условимся под символом $\overline{k}$, где k — число из Z, понимать остаток от деления на n числа k. В частности, если $0 \leqslant k < n$, то символ $\overline{k}$ означает то же самое число k, но рассматриваемое как остаток из Z_n.

Назовем *суммой* двух остатков $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из Z_n остаток $\overline{a+b}$:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}. \qquad (3)$$

Конечно, такое определение было бы совершенно безукоризненным, если бы было сказано, что a и b — остатки отделения на n: тогда $\overline{a+b}$ — остаток от деления на n вполне определенного целого числа — числа $a+b$. Но по причинам, которые будут ясны ниже, мы не требуем неравенств $0 \leqslant a,\ b < n$ — числа a и b предполагаются любыми. В этом случае естественно высказать следующее сомнение: допустим, a_1, a_2, b_1, b_2 — разные целые числа, но $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ и $\overline{b_1} = \overline{b_2}$; тогда, согласно сказанному, сумма остатков $\overline{a_1}$ и $\overline{b_1}$ — это, с одной стороны, остаток $\overline{a_1 + b_1}$, а с другой — остаток $\overline{a_2 + b_2}$. Действие можно считать определенным только в том случае, если $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, а это равенство нужно доказывать.

Вот его доказательство. Пусть, в соответствии с (1), $a_i = nq_i' + r'$, $i = 1, 2$, и $b_j = nq_j'' + r''$, $j = 1, 2$, где r' и r'' — остатки. Тогда $a_1 + b_1 = n\,(q_1' + q_1'') + r' + r''$ и $\overline{a_1 + b_1} = \overline{r' + r''}$. С другой сторо-

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Табл. 7. Сложение в Z_3

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Табл. 8. Сложение в Z_4

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Табл. 9. Умножение в Z_3

ны, $a_2 + b_2 = n(q_2' + q_2'') + r' + r''$, и снова

$$\overline{a_2 + b_2} = \overline{r' + r''}.$$

Следовательно, $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$, что и требовалось доказать.

Итак, одна операция на Z_n определена. Она называется *сложением*, а результат ее применения к двум остаткам из Z_n, как уже говорилось, называется суммой.

Предложение 1. *Сложение на Z_n удовлетворяет требованиям* 1) — 4), *перечисленным в определении кольца.*

Доказательство. Благодаря равенству (3), которое подробно обсуждалось выше, коммутативность и ассоциативность введенного сложения непосредственно следуют из коммутативности и ассоциативности сложения целых чисел. Аксиома 3) о существовании нуля выполняется благодаря существованию остатка $\bar{0}$ (его дают числа, кратные n): $\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$. Наконец, противоположным остатку $\bar{a}$ служит, очевидно, остаток $\overline{-a}$, так что $-\bar{a} = \overline{-a}$, и аксиома 4) также выполняется.

Вот несколько таблиц сложения в Z_n (см. табл. 7—8).

Введем теперь в Z_n умножение. Положим для $\bar{a}$, $\bar{b}$ из Z_n

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} \qquad (4)$$

и назовем $\overline{ab}$ *произведением* $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а само действие — *умножением*. Конечно, и в этом случае нужно доказать, что определение корректно, то есть нужно убедиться в следующем:

если $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ *и* $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$, *то* $\overline{a_1 b_1} = \overline{a_2 b_2}$.

Пусть, в самом деле, $a_i = q_i' n + r'$, $i = 1, 2$, и $b_j = q_j'' n + r''$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\overline{a_1 b_1} = \overline{(q_1' n + r')(q_1'' n + r'')} = \overline{n(nq_1' q_1'' + r' q_1'' + r'' q_1') + r'r''} = \overline{r'r''}$$

и

$$\overline{a_2 b_2} = \overline{n(nq_2' q_2'' + r' q_2'' + r'' q_2') + r'r''} = \overline{r'r''}.$$

Предложение 2. *Умножение на Z_n удовлетворяет аксиомам* 5) — 8), *перечисленным в определении кольца.*

Доказательство. Дистрибутивная связь со сложением, а также коммутативность и ассоциативность умножения следуют, благодаря (4), из аналогичных свойств умножения целых чисел. Роль единицы для умножения играет остаток $\bar{1}$.

Итак, Z_n — кольцо коммутативное, ассоциативное и обладающее единицей.

Умножение в каком бы то ни было кольце R существенно характеризуется тем, в каких случаях оказывается выполненным равенство

$$ab = 0. \qquad (5)$$

Так, например, в кольце Z целых

	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$
$\bar 1$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$
$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 2$
$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

Табл. 10. Умножение в Z_4

чисел равенство (5) выполняется лишь тогда, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$. Аналогичное утверждение справедливо и для Z_3 (см. табл. 9). Но в кольце Z_6, например, равенство (5) справедливо при $a = \bar 2$ и $b = \bar 3$, то есть произведение ненулевых сомножителей оказывается здесь равным нулю. Принято говорить, что элемент a кольца R является *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и если существует такой элемент $b \neq 0$ в R, что $ab = 0$. Таким образом, остаток $\bar 2$ в Z_6 является делителем нуля; с другой стороны, в рассмотренных выше кольцах Z и Z_3 делителей нуля нет совсем.

Наряду с равенством (5) умножение в кольце характеризуется и тем, какие его элементы удовлетворяют равенству

$$xy = 1. \qquad (6)$$

Такие элементы называют *обратимыми*. В кольце Z множество обратимых элементов состоит всего лишь из 1 и -1; в кольце Z_3 обратимы все элементы, кроме 0, а в кольце Z_6 обратимы только остатки $\bar 1$ и $\bar 5$, потому что $\bar 5 \cdot \bar 5 = \bar 1$. (Советуем читателю проверить, что в Z_6 все остальные элементы x не являются обратимыми.)

	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$
$\bar 1$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$
$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$
$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$
$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 2$
$\bar 5$	$\bar 0$	$\bar 5$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

Табл. 11. Умножение в Z_6

Мы познакомились, таким образом, с понятием кольца, рассмотрели простейшие примеры и первые структурные характеристики этого нового объекта: делители нуля и обратимые элементы. Теперь можно приступить к изучению таких важных вопросов, как, например, вопрос о простых элементах кольца и разложении на простые множители. Этой цели мы сейчас перед собой не ставим: ей естественно посвятить отдельный разговор.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

1. Докажите, что множество полиномов с действительными коэффициентами с обычными сложением и умножением является кольцом без делителей нуля. Каково множество обратимых элементов этого кольца?
2. Составьте таблицы сложения и умножения в Z_5 и Z_7 и докажите, что в этих кольцах не только нет делителей нуля, но и что каждый ненулевой элемент в них обратим.
3. Докажите, что свойствами, о которых говорится в предыдущей задаче, обладает любое кольцо Z_p при простом числе p.
4. Докажите, что в кольце Z_n каждый ненулевой элемент либо обратим, либо является делителем нуля.
5. Докажите утверждение 4 для любого кольца, обладающего единицей, состоящего из конечного числа элементов и ассоциативного.

А.Б.ШВАРЦБУРГ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Магнитная стрелка, помещенная в сосуд с водой, служила путешественникам для ориентации в море еще в средние века. Долгое время считалось, что стрелка указывает на север, точнее — на Полярную звезду. Однако наблюдения при дальних морских путешествиях и на суше показали, что это неверно. Поэтому мореплавателям особенно важно было знать:

Куда указывает стрелка компаса?

Христофор Колумб по пути в Новый Свет обратил внимание на важное свойство магнитной стрелки. Вскоре после отплытия (в сентябре 1492 года), продвигаясь на запад от берегов Пиренейского полуострова, он заметил, что магнитная стрелка все больше отклоняется от направления север — юг. Наблюдения по Солнцу показали, что за четыре дня конец стрелки сместился на целое деление (шкала компаса состояла из 32 делений, так что каждое соответствовало углу в $11^1/_4{}^\circ$). Многие моряки восприняли это неожиданное и непонятное явление как плохое предзнаменование. Рассказывают даже, что капитану, во избежание волнений на борту, пришлось заявить команде, что сместилась Полярная звезда, вызвав этим смещение стрелки. Однако по мере приближения к Америке смещение стало уменьшаться, и постепенно стрелка приблизилась к привычному положению.

Таким образом было установлено два важных факта: 1) магнитная стрелка может отклоняться от направления север — юг; 2) величина отклонения изменяется в зависимости от места наблюдения.

Величину угла между географическим меридианом и направлением стрелки (в горизонтальной плоскости) называют склонением.

Представлению о том, что магнитная стрелка направлена строго на север, был нанесен еще один удар: ученые обнаружили, что стрелка не устанавливается горизонтально; точнее, было замечено, что в северном полушарии ее северный конец отклоняется вниз. Наименьший угол между направлением стрелки и горизонтальной плоскостью назвали наклонением. Наклонение в разных местах также оказалось различным, причем распределение величин склонения и наклонения по поверхности Земли выглядело чрезвычайно сложно. После этого возникло естественное предположение, что причина отклонения стрелки как-то связана с Землей. Такое предположение получило развитие в знаменитой книге английского естествоиспытателя Гильберта «О магните, магнитных телах и великом магните Земли», которая увидела свет еще в 1600 году. Чтобы объяснить поведение магнитной стрелки, автор уподобляет земной шар стержнеобразному магниту, уже знакомому ученым в то время. Подобная модель во многом сохранила свое значение и сегодня. С помощью такой модели можно приближенно описать магнитное поле Земли, однако это довольно грубое описание. На поверхности Земли магнитное поле обнаруживает отступления от этой модели, а далеко от Земли, в космосе, такая модель хорошо описывает магнитное поле Земли.

Магнитный диполь

Электрическое поле двух зарядов, раздвинутых на расстояние l, носит название поля электрического диполя. Хотя в природе нет магнитных зарядов, существуют магнитные поля, картина силовых линий которых подобна картине силовых линий электрического поля диполя. Таково, например, поле намагниченного стержня на достаточно больших расстояниях от него. По аналогии с электрическим такое поле называют полем магнитного диполя. При описании такого поля можно считать (хотя на самом деле это не так), что оно создается двумя «магнитными массами», помещенными на концах намагниченного стержня (см. рисунок). В течение многих лет ученые так и рассуждали, уподобляя магнитные массы электрическим зарядам.

Найдем сначала индукцию в «далекой» точке A на оси диполя такой, что расстояние $OA = L \gg DC$. В этой точке вектор магнитной индукции **B** направлен по прямой DC, то есть по оси диполя. Численное значение **B** можно найти по аналогии с законом Кулона, поскольку мы пользуемся аналогией с электрическими зарядами. Значение индукции поля «магнитной массы» — M в точке A составляет

$$B_1 = -\frac{kM}{(L+a)^2}.$$

Для поля электрического заряда было бы $E = \frac{k'Q}{(L+a)^2}$. Здесь k и k' — коэффициенты, зависящие от выбора системы единиц. В этой же точке индукция поля «магнитной массы» M равна

$$B_2 = \frac{kM}{(L-a)^2}.$$

Используя принцип суперпозиции, найдем результирующее значение индукции в точке A:

$$B_{\parallel} = B_1 + B_2 = 4\frac{kMaL}{(L^2-a^2)^2}.$$

Так как $L \gg a$, можно считать, что

$$B_{\parallel} = 4\frac{kaM}{L^3}.$$

Величина $2kMa$ носит специальное название — магнитный момент диполя; обозначим эту важную величину через p, тогда

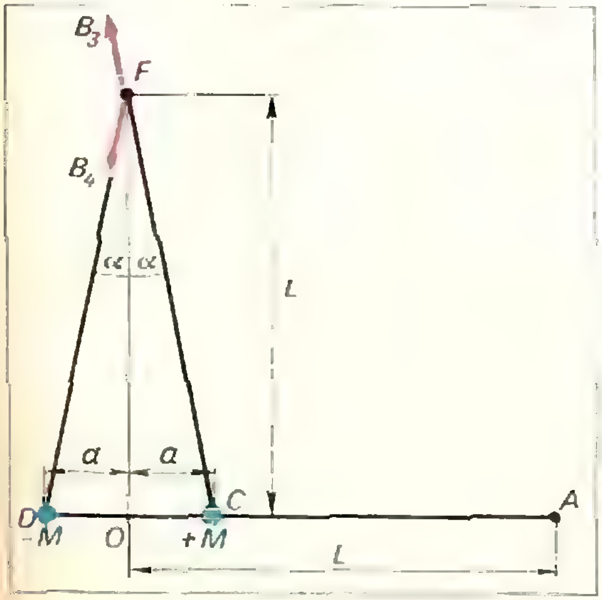
$$B = \frac{2p}{L^3}. \qquad (1)$$

Найдем теперь индукцию в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Индукция поля, созданного «магнитной массой» M в точке F (см. рисунок), направлена по прямой FC и составляет

$$B_3 = \frac{kM}{(FC)^2}.$$

Индукция B_4 в этой же точке, созданная полюсом $-M$, численно равна B_3, а направлена по прямой DF. Проектируя векторы индукции B_3 и B_4 на оси OF и CD, увидим, что сумма проекций на ось FO равна 0. Результирующая проекция на ось CD составит

$$B_{\perp} = 2B_3 \sin\alpha = 2\frac{kaM}{(FC)^2 FC}.$$



Используя определение момента диполя $p = 2kMa$ и замечая, что при больших расстояниях FC ($FC \gg 2a$) можно приближенно положить $FC = L$, запишем формулу для величины магнитной индукции в плоскости, перпендикулярной оси диполя:

$$B_{\perp} = \frac{p}{L^3}. \qquad (2)$$

Сравнение формул (1) и (2) показывает, что поле диполя сложнее поля точечного заряда: величина индукции зависит не только от расстояния до источника поля, но и от угла радиуса-вектора точки, в которой измеряется индукция с осью диполя. При изменении этого угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$ индукция поля (на том же расстоянии L) уменьшается вдвое.

Теперь применим модель магнитного диполя к описанию магнитного поля Земли. Представим себе, что внутри земного шара находятся две «магнитные массы», образующие диполь. Ось диполя продолжена так, что пересекает поверхность Земли. Точки пересечения называются магнитными полюсами. Величина индукции магнитного поля вблизи полюсов вдвое больше, чем на магнитном экваторе. Непосредственные измерения показывают, что вблизи магнитных полюсов $B = 0{,}7 \cdot 10^{-4}$ *тл*, а вблизи экватора $B = 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ *тл*. Если не интересоваться специально областями вблизи полюса или экватора, то для оценки принимают среднее значение $B = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ *тл*.

С помощью формул (1) или (2) можно узнать дипольный момент, соответствующий определенным значениям индукции. Считая, что радиус Земли равен $R_0 = 6400$ *км*, получим, что величина магнитного момента Земли составляет

$$p = 8 \cdot 10^{15} \quad тл \cdot м^3.$$

Вариации и аномалии магнитного поля

Одним из первых пунктов, где систематически начали измерять величину магнитного склонения, был Лондон. Вот значения склонения по годам: в 1540 году — 7,2°; в 1560 — 9,6°; в 1580 — 10,9°. Оказывается, склонение меняется со временем, причем скорость этого изменения не постоянна. После 1580 года начинается уменьшение склонения. Около 1660 года значение этой величины перешло через нуль и стало отрицательным, то есть стрелка стала отклоняться не к востоку, а к западу. Угол отклонения возрастал и в 1820 году составил около 24°. Потом западное склонение стало уменьшаться и сейчас составляет около 16°.

Сейчас значения склонения измеряются на Земле в нескольких десятках тысяч пунктов. Результаты измерений наносят на так называемые магнитные карты. На этих картах проведены линии, соединяющие пункты с одинаковым значением склонения (так же как на географических картах — точки, лежащие на одинаковой высоте над уровнем моря).

Таким образом, из-за изменения склонения с течением времени — так называемых вариаций — магнитные карты теряют ценность, и через несколько лет их нужно составлять заново. Склонение магнитной стрелки нельзя объяснить с помощью представлений о постоянном магнитном диполе, расположенном в центре Земли. Такие представления описывают лишь усредненное поведение магнитного поля. На Земле существует немало магнитных аномалий, характеризующихся значительным отступлением величины и направления магнитного поля от дипольной модели. Так, в южной оконечности Южной Америки индукция магнитного поля падает до $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ *тл* — меньше, чем на магнитном экваторе. Некоторые аномалии связаны с залеганием магнитных материалов. Такова, например, знаменитая Курская магнитная аномалия, где индукция магнитного поля превышает величину $2 \cdot 10^{-4}$ *тл*. Это больше значения индукции вблизи магнитных полюсов Земли.

Магнитосфера Земли и солнечный ветер

До сих пор речь шла о магнитном поле на поверхности Земли. Однако магнитное поле Земли играет важную роль в физических процессах, протекающих на больших высотах, там, где «дует» солнечный ветер. Солнечным ветром называют поток газа, радиально удаляющийся по всем направлениям от Солнца. Газ солнечного ветра полностью ионизирован и состоит из протонов и электронов. В таком состоянии он хорошо проводит электрический ток.

Солнечный ветер не достигает Земли, этому препятствует создаваемое Землей магнитное поле. Поток идущих от Солнца частиц отклоняется и обтекает Землю в области, называемой магнитосферой. Магнитосфера расположена на большом расстоянии от земной поверхности, намного большем, чем радиус Земли. Поэтому магнитное поле здесь значительно слабее, чем на поверхности Земли. Тем не менее магнитосфера все же играет роль своеобразного «щита», прикрывающего Землю от проникновения частиц из космоса. Расчет показывает, что поток частиц, распространяющихся в плоскости магнитного экватора, затормозится далеко от поверхности Земли, на расстоянии примерно в 8—9 земных радиусов.

С другой стороны, поток солнечного ветра, движущийся вдоль магнитной оси Земли в направлении вблизи магнитного полюса, встречает на своем пути лишь очень слабую, стремящуюся к 0, горизонтальную составляющую магнитного поля Земли. Поэтому такие потоки частиц подходят гораздо ближе к поверхности Земли и вызывают сильные возмущения в ионосфере Земли.

Геомагнитное динамо

В последнее время благодаря успехам космонавтики появилась возможность непосредственно измерить магнитное поле на поверхности ближайших к нам планет Солнечной системы. Оказалось, что на Луне или совсем нет собственного магнитного поля, или его индукция, во всяком случае, меньше одной десятитысячной индукции магнитного поля Земли *). После этого вопрос о причинах существования магнитного поля Земли и о его изменениях приобрел особую остроту. Магнитное поле Земли можно приближенно описать, если предположить, что оно индуцируется некоторым электрическим током, текущим глубоко в недрах Земли. Действительно, картина силовых линий электрического поля кольца с током подобна картине магнитных силовых линий поля намагниченного стержня, которым мы заменяли магнитное поле Земли. Физические причины, приводящие к существованию такого тока, пока еще не установлены окончательно. Существует несколько теорий, пытающихся объяснить происхождение этого тока. В последнее время среди геофизиков пользуется популярностью так называемая «теория геомагнитного динамо» или, короче, «динамо-теория». Расскажем вкратце, в чем состоят физические основы этой теории.

Результаты геологических исследований позволяют считать, что в центре Земли находится жидкое электропроводящее ядро. Радиус ядра составляет около 3900 *км*. Согласно «динамо-теории», токи в ядре образуются за счет электромагнитной индукции при вращательном движении проводящего ядра в магнитном поле. Магнитное поле создается этими же токами. Таким образом, магнитное поле само себя поддерживает, подобно тому, как это происходит в динамо-машине (отсюда и пошло название теории). Однако еще до начала работы такой машины должно существовать некоторое «затравочное» поле.

---

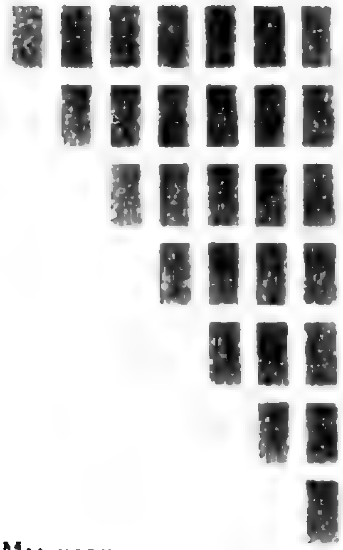
*) Подробнее о магнитном поле Луны см. статью: Гинцбург М. А. Измерение магнитных полей на Луне. «Квант», 1973, № 11.

«Затравочное» поле, необходимое для «запуска динамо» могло быть создано различными физическими механизмами. Одно из наиболее простых объяснений связано с тем, что небольшое намагничивание присуще любому вращающемуся телу. Предположение о существовании такого намагничивания высказывал еще П. Н. Лебедев. В его опытах делалась попытка обнаружить намагничивание, создаваемое вращающимся диском. Хотя техника эксперимента того времени и не позволила надежно зафиксировать возникновение намагничивания, впоследствии опыты были повторены другими учеными на более совершенных установках. В частности, было экспериментально измерено намагничивание стержня, возникающее при вращении этого стержня вокруг продольной оси. Оценки показывают, что индукция поля, возникающая при вращении Земли, составляет ничтожно малую величину, порядка 10^{-11} индукции поля Земли. Однако столь малое поле, возникнув, могло усиливаться за счет действия «геомагнитного динамо», как описано выше. Источником энергии, необходимой для создания поля, могло служить вращение Земли.

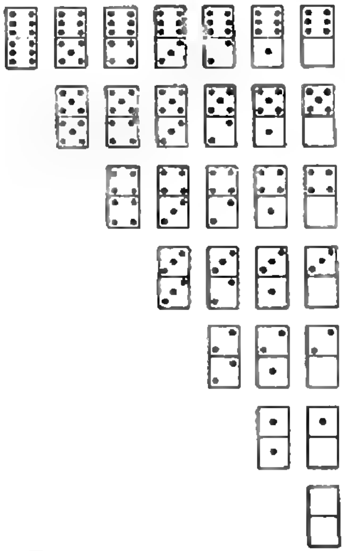
Эту теорию нельзя считать окончательной, и вопрос происхождения магнитного поля Земли во многом остается открытым. Поскольку эта проблема связана с особенностями состояния вещества вблизи центра Земли, объяснение магнетизма Земли было бы важным результатом и для геологии, и для астрономии. Решение этой проблемы, вероятно, помогло бы связать факт отсутствия дипольного магнитного поля на Луне с внутренним строением этой планеты.

Задача-пасьянс

Тщательно перемешаем кости домино и разложим их лицевой стороной вниз в виде треугольника



Мы хотим разместить их в таком виде·



Для этого откроем нижнюю кость и поместим ее на предназначенное ей место. Кость, которая занимала это место, открываем и помещаем на соответствующее ей место, и так далее.

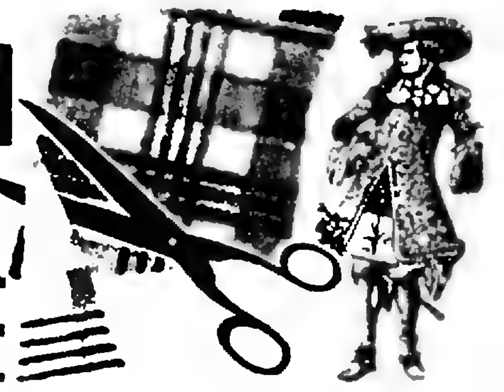
Пасьянс считается удавшимся, если такими действиями нам удастся перевернуть все кости (то есть если место нижней кости будет занято лишь на последнем ходу)

Какова вероятность такого исхода? (Или в какой части случаев пасьянс удастся?)

Е и Э Парилис

И.М.ЯГЛОМ

ЗАПЛАТЫ НА КАФТАНЕ



В № 1 журнала «Квант» за этот год была опубликована следующая задача Е. Б. Дынкина:

M185 *. *На кафтане площадью* 1 *помещается* 5 *заплат, площадь каждой из которых не меньше* $^1/_2$. *Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше* $^1/_5$.

Мы разберем решение этой задачи и обсудим некоторые ее обобщения и варианты *). Наше изложение будет сопровождаться задачами, в которые, в частности, будут отнесены отдельные детали проводимых доказательств; номера наиболее трудных задач помечены звездочкой.

Мы будем обозначать как сам кафтан, так и его площадь (по условию равную 1) буквой M; заплаты на кафтане (и площади этих заплат) мы обозначим через M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5, а, скажем, общую часть заплат M_1 и M_2 (и площадь этой общей части) — через M_{12}; аналогично этому общую часть заплат M_1, M_2 и M_3 (и ее площадь) мы обозначим через M_{123} и т. д. То обстоятельство, что, например, через M_1 мы обозначаем как заплату (геометрическую фигуру!), так и площадь этой заплаты (число!), не должно нас смущать — из текста каждый раз будет понятно, в каком смысле мы употребляем запись M_1.

Начинаем решать задачу

Из того, что общая площадь всех заплат

$$M_1+M_2+M_3+M_4+M_5 \geqslant \frac{5}{2}$$

больше площади $M=1$ кафтана, вытекает, что наши заплаты *перекрываются* — и задача состоит в том, чтобы оценить площади их общих частей (точнее — оценить *наибольшее* из чисел $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_{45}$).

Мы утверждаем, что

$$M-(M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)+ \\ +(M_{12}+M_{13}+M_{14}+\ldots \\ \ldots+M_{45}) \geqslant 0. \quad (1)$$

В самом деле, если бы заплаты *не перекрывались*, то была бы неотрицательная разность $M-(M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)$, *равная площади части кафтана, вовсе не покрытой заплатами*. Но на самом деле наши заплаты пересекаются — и сумма $M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$ оказывается гораздо больше общей площади S покрытой заплатами части кафтана (где, разумеется, $S \leqslant M=1$): часть M_{12} кафтана учитывается в сумме $M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$ дважды, поскольку она входит и в слагаемое M_1 и в слагаемое M_2, часть M_{123} — трижды и т. д. Попробуйте теперь доказать, что

$$S \geqslant \sum M_i - \sum M_{ij}\ ^{*)}. \quad (1')$$

---

*) Краткое решение этой задачи приведено в «Кванте» № 10, 1973.

*) В этой формуле $\Sigma M_i = M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$, $\Sigma M_{ij} = M_{12}+M_{13}+\ldots+M_{45}$ — это суммы площадей соответствующих частей кафтана. Такие же обозначения применены и в других формулах

Если вам не удастся этого сделать, прочтите следующий раздел статьи, а потом вернитесь к этому неравенству.

Из (1′), поскольку $M \geqslant S$, вытекает неравенство (1).

Неравенство (1) уже позволяет оценить попарные пересечения $M_{12}, M_{13}, \ldots$ заплат. В самом деле, из него следует, что

$$(M_{12}+M_{13}+\ldots+M_{45}) \geqslant$$
$$\geqslant (M_1+M_2+M_3+M_4+M_5)-M \geqslant$$
$$\geqslant \frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}.$$

А так как общее число попарных пересечений заплат M_{ij} равно $C_5^2=10$, то наибольшее из чисел $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_{45}$ не меньше чем

$$\frac{3}{2}:10=\frac{3}{20}.$$

Полученная нами оценка, однако, хуже требуемой оценки $\frac{1}{5}\left(=\frac{4}{20}\right)$.

Упражнение

1. На кафтане площади 1 имеется 9 заплат площади $^1/_5$. Докажите, что найдутся такие две заплаты, площадь общей части которых не меньше $^1/_{45}$.

Формула включений и исключений

Наша оценка (1′) для площади S *всей покрытой заплатами части кафтана* не точна. Постараемся точнее определить эту площадь. В правую часть формулы (1′) не войдет площадь никакой части кафтана, покрытой сразу тремя заплатами: например, M_{123} войдет в имеющие знак «плюс» члены M_1, M_2, M_3 и в имеющие знак «минус» члены M_{12}, M_{13}, M_{23} — то есть полностью *выпадет* из формулы (1′). Поэтому лучшей оценкой для S может служить выражение

$$\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}.$$

Однако и эта величина еще не равна S, поскольку каждая часть кафтана M, покрытая сразу *четырьмя* заплатами, учитывается в ней *дважды*: в самом деле, скажем, величина M_{1234} учитывается в 8 членах M_1, M_2, M_3, M_4; $M_{123}, M_{124}, M_{134}, M_{234}$ последнего выражения, входящих в него со знаком «плюс», и лишь в 6 членах $M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}$ и M_{34}, входящих в это выражение со знаком «минус». Поэтому следующим приближением к истинной величине S явится выражение

$$\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}-$$
$$-\sum M_{ijkl},$$

которое уже «почти равно» S — в нем точно учитываются все участки кафтана M, покрытые заплатами не более чем четырехкратно. Однако участок M_{12345} кафтана, покрытый всеми пятью заплатами, из последнего выражения *выпадает*: в самом деле, он входит во все члены этого выражения, то есть как в 15 членов M_1, M_2, M_3, M_4, M_5; $M_{123}, M_{124}, \ldots, M_{345}$, имеющих перед собой знак «плюс», так и в 15 членов $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_{45}$; $M_{1234}, M_{1235}, M_{1245}, M_{1345}$ и M_{2345}, имеющих перед собой знак «минус». Поэтому для того, чтобы получить точное выражение для S, мы должны член M_{12345} к последней сумме прибавить. Вот точное равенство:

$$S=\sum M_i-\sum M_{ij}+\sum M_{ijk}-$$
$$-\sum M_{ijkl}+M_{12345} \quad (2)$$

(здесь $i, j, k, l=1, 2, 3, 4$ или 5). Но площадь σ части кафтана, *не покрытой ни одной заплатой*, равна $M-S$; так как $\sigma \geqslant 0$, то имеем

$$\sigma=M-\sum M_i+\sum M_{ij}-$$
$$-\sum M_{ijk}+\sum M_{ijkl}-M_{12345} \geqslant 0. \quad (3)$$

Формула (3) получается последовательным исключением покрытых заплатами участков кафтана M и включением тех из них, которые оказываются исключенными двукратно; ее иногда называют *формулой включений и исключений*. Эта формула используется во многих комбинаторных рассмотрениях.

Формула включений и исключений справедлива и для отличного от пяти числа заплат. В общем случае n заплат формула включений и исключений принимает внешне несколько пугающей своей сложностью, но по существу — вполне прозрачный вид:

$$\sigma = M - \sum M_{i_1} + \sum M_{i_1 i_2} - \sum M_{i_1 i_2 i_3} + \sum M_{i_1 i_2 i_3 i_4} - \ldots + (-1)^{n-1} \sum M_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_{n-1}} + (-1)^n M_{123\ldots n} \geqslant 0 \quad (4)$$

(здесь все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ могут принимать любые из значений $1, 2, 3, \ldots, n$, причем для пересечения $M_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ заплат $M_{i_1} M_{i_2} \ldots M_{i_k}$ все значения $i_1, i_2, \ldots, i_k$ обязательно различны).

Упражнения

2. Докажите формулу (4) при $n = 6$.
3*. Докажите формулу (4).
4. Дом пионеров регулярно посещают 220 школьников. При доме пионеров имеется шесть спортивных секций: легкоатлетическая (л), волейбольная (в), баскетбольная (б), футбольная (ф), секция самбо (с) и шахматная секция (ш). Число участников этих секций таково: (л) — 30 человек, (в) — 26 человек, (б) — 32 человека, (ф) — 31 человек, (с) — 28 человек и (ш) — 36 человек. Несколько секций посещают 53 школьника; из них 24 школьника посещают три или больше секций, 9 школьников — не меньше четырех секций и 3 школьника — даже пять секций (в последнюю тройку школьников входит и один чудак, который посещает все шесть спортивных секций). Сколько из посещающих дом пионеров школьников не участвуют ни в одной спортивной секции?

Решение задачи M185

Мы видели, что «сокращенная» формула включений и исключений

$$M - \sum M_i + \sum M_{ij} \geqslant 0 \quad (1)$$

не дает точной оценки интересующей нас величины $\max M_{ij}$ (наибольшей из величин M_{ij}); поэтому нам придется привлечь «полную» формулу

$$M - \sum M_i + \sum M_{ij} - \sum M_{ijk} + \sum M_{ijkl} - M_{12345} \geqslant 0. \quad (3')$$

Применим теперь формулу включений и исключений (4)(где мы считаем теперь, что $n = 4$) к части M_1 кафтана M, покрытой своими заплатами M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15}. Мы получаем

$$\sigma_1 = M_1 - \sum M_{1i} + \sum M_{1ij} - \sum M_{1ijk} + M_{12345} \geqslant 0,$$

где σ_1 — часть заплаты M_1, не покрытая другими заплатами, и номера (или индексы) i, j, k пробегают всевозможные значения 2, 3, 4 или 5. Аналогичные неравенства можно выписать и для участков M_2, M_3, M_4 и M_5 кафтана:

$$\sigma_2 = M_2 - \sum M_{2i} + \sum M_{2ij} - \sum M_{2ijk} + M_{12345} \geqslant 0,$$

. . . .

$$\sigma_5 = M_5 - \sum M_{5i} + \sum M_{5ij} - \sum M_{5ijk} + M_{12345} \geqslant 0.$$

Сложив полученные таким путем 5 неравенств, отвечающих участкам M_1, $M_2, \ldots, M_5$ кафтана, получаем (проверьте это):

$$\sum M_i - 2\sum M_{ij} + 3\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 5M_{12345} \geqslant 0. \quad (5)$$

Найдем теперь такую комбинацию неравенств (3′) и (5), в которой *вовсе отсутствует сумма* $\sum M_{ijk}$ «тройных перекрытий заплат». Очевидно, для этого достаточно прибавить к (3′) умноженное на $^1/_3$ неравенство (5). Мы получим такое неравенство

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} - \frac{1}{3}\sum M_{ijkl} + \frac{2}{3}M_{12345} \geqslant 0. \quad (6)$$

Из него следует также, что

$$M - \frac{2}{3}\sum M_i + \frac{1}{3}\sum M_{ij} \geqslant 0. \quad (7)$$

Действительно, часть M_{12345} кафтана входит в каждую из его частей M_{ijkl}, в силу чего $\sum M_{ijkl} > 5M_{12345}$, и по-

12	13	14	15	23
24	25	34	35	45
123	124	125	134	135
145	234	235	245	345

Рис. 1.

этому

$$-\frac{1}{3}\sum M_{ijkl}+\frac{2}{3}M_{12345}\leqslant 0.$$

Теперь уже легко получить требуемый ответ. Из (7) следует, что

$$\sum M_{ij}\geqslant 2\sum M_i-3M\geqslant$$
$$\geqslant 2\left(5\cdot\frac{1}{2}\right)-3=2.$$

Но так как общее число «попарных пересечений заплат» M_{ij} равно 10, то хоть одно из них не меньше чем

$$2:10=\frac{1}{5},$$

что и требовалось доказать!

Нетрудно видеть, что равенство здесь будет иметь место лишь тогда, когда $S=M$, то есть когда кафтан весь покрыт заплатами, когда все $M_i={}^1/_2$, все M_{ij} одинаковы (и равны ${}^1/_5$) и когда все $M_{ijkl}=0$. На рисунке 1 приведена схема покрытия кафтана заплатами, где прямоугольник M — это кафтан и цифры на отдельных квадратиках указывают, какими заплатами покрыты соответствующие участки кафтана. Эта схема показывает, что ${}^1/_5$ — точная оценка. То, что на ней заплаты состоят из отдельных кусков, не должно вас смущать — в задаче М185 важна только площадь заплаты, а не ее форма.

Теперь мы можем сформулировать общую задачу, частным случаем которой является задача М185:

Формулировка общей задачи; случай двух заплат

На кафтане M площади 1 имеется n заплат $M_1, M_2, \ldots, M_n$, площадь каждой из которых не меньше известного нам числа α; требуется оценить площадь наибольшего из пересечений M_{ij} заплат.

Другими словами, для каждой конфигурации из n заплат на кафтане мы находим максимальное по площади пересечение M_{ij}, а потом отыскиваем минимум этого максимума M_{ij} по всем возможным конфигурациям заплат*). Такого рода «минимаксные» (то есть связанные с нахождением минимума некоторых максимумов) задачи играют в современной математике очень большую роль.

Искомое число $\min\max M_{ij}$ зависит, разумеется, от заданного числа α, то есть является функцией от α; так как оно зависит также и от числа n заплат, то мы обозначим эту функцию через $f_n(\alpha)$ (где, очевидно, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, а $n\geqslant 2$). Решение задачи М185 сводится к доказательству равенства

$$f_5\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5};$$

общая задача требует указать формулу, выражающую $f_n(\alpha)$ через α и n.

Для того чтобы понять, какого ответа можно ожидать в этой общей задаче, мы начнем с (совсем простого!) случая $n=2$. Итак, мы считаем, что на кафтане M площади 1 имеются две заплаты M_1 и M_2, площадь каждой из которых не меньше α; нам надо указать наименьшую возможную площадь $f_2(\alpha)$ пересечения M_{12} этих двух заплат.

Ясно, что если $\alpha\leqslant{}^1/_2$, то заплаты могут вовсе не пересечься (рис. 2, *а*); если же $\alpha\geqslant{}^1/_2$, то наименьшая возможная площадь $f_2(\alpha)$ пересечения

---

*) Мы предполагаем, что такой минимум существует, хотя это далеко не очевидно.

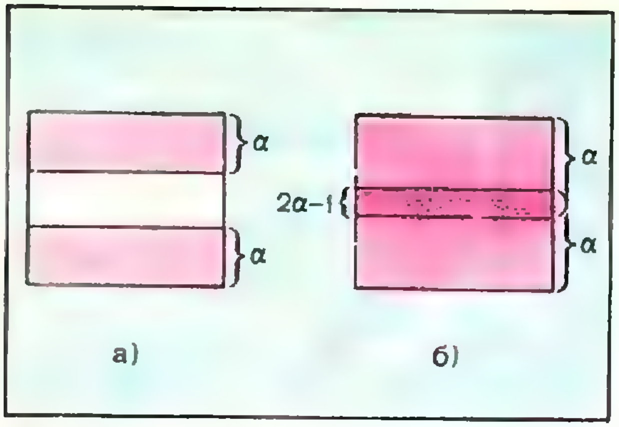


Рис. 2.

M_{12} заплат равна $2\alpha - 1$ (рис. 2, *б*). Таким образом,

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2, \\ 2\alpha - 1 \text{ при } 1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1, \end{cases} \tag{8}$$

— то есть график функции $y = f_2(\alpha)$ представляет собой ломаную линию (рис. 3). Это обстоятельство наводит на мысль, что и в общем случае график искомой функции $f_n(\alpha)$ окажется ломаной линией.

Упражнение

5. Опишите функцию $y = f_3(\alpha)$.

Указание: рассмотрите три сектора M_1, M_2 и M_3 круга M, оси симметрии l_1, l_2 и l_3 которых попарно образуют углы в 120°, а центральные углы (измеряемые в долях полного угла!) равны α; начните с небольших значений α (рис. 4) и выясните, что произойдет при росте α вплоть до $\alpha = 1$.

Случай пяти заплат

Обратимся теперь к исходному случаю 5 заплат M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 на кафтане M, про которые мы теперь будем считать, что площадь каждой заплаты не менее α. Наша задача состоит в том, чтобы определить функцию $f_5(\alpha)$.

Прежде всего ясно, что $f_5(\alpha) \geqslant 0$ — график функции $y = f_5(\alpha)$ лежит не ниже оси $y = 0$ (рис. 5). Для того чтобы наш график совпал с осью, то есть чтобы было возможно обращение всех M_{ij} в 0, очевидно, необходимо (и достаточно), чтобы общая площадь всех заплат (по условию задачи не меньшая 5α) не превосходила площади 1 кафтана:

$$f_5(\alpha) = 0 \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1/5.$$

Далее воспользуемся неравенством (1) (с. 13). Из него следует, что

$$\sum M_{ij} \geqslant \sum M_i - M \geqslant 5\alpha - 1.$$

Поэтому, так как общее число «парных пересечений» заплат равно 10,

$$f_5(\alpha) \geqslant \frac{1}{10}(5\alpha - 1) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}. \tag{9}$$

Неравенство (9) выполняется при всех α; таким образом, график функции $y = f_5(\alpha)$ лежит не ниже прямой $y = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ (рис. 6). Однако для того, чтобы (9) обращалось в равенство, необходимо, чтобы $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ было больше 0; кроме того, для этого неравенство (1) должно обращаться в равенство—и, значит, все M_{ijk} должны

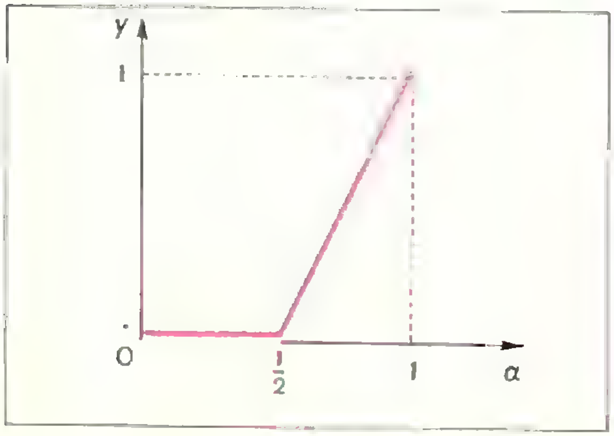


Рис. 3.

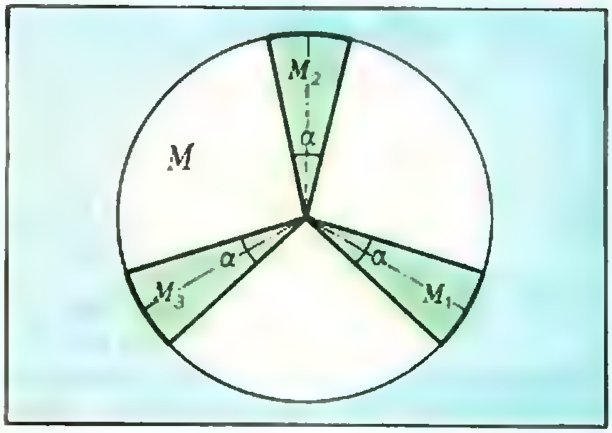


Рис. 4.

быть равны 0, и все M_{ij} должны иметь одну и ту же величину $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$. Но если все $M_{ijk} = 0$, то каждую заплату площади α (например, заплату M_1) «заплаты на заплате» M_{12}, M_{13}, M_{14} и M_{15} площади $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10}$ должны покрывать уже без перекрытий, что возможно только, если $4\left(^1/_2\alpha - ^1/_{10}\right) \leqslant \alpha$ и, значит, $\alpha \leqslant ^2/_5$ (ср. с разбором выше случая обращения функции $f_5(\alpha)$ в 0).

Таким образом, нам удалось продолжить график функции $y = f_5(\alpha)$:

$$f_5(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{10} \text{ при } \frac{1}{5} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{5}.$$

Далее нам придется обратиться к неравенству (7) (с. 15), явившемуся основным инструментом решения задачи M185. Из этого неравенства вытекает, что

$$\sum M_{ij} \geqslant 2\sum M_i - 3M \geqslant$$
$$\geqslant 2(5\alpha) - 3 = 10\alpha - 3,$$

откуда

$$f_5(\alpha) \geqslant \frac{1}{10}(10\alpha - 3) = \alpha - \frac{3}{10}. \quad (10)$$

Неравенство (10) выполняется при всех α (т. е. график функции $y = f_5(\alpha)$ целиком лежит над прямой $y = \alpha - \frac{3}{10}$; рис. 7); однако в равенство оно обращается лишь при $^2/_5 \leqslant \alpha \leqslant ^3/_5$ (см. упражнение 6,а).

Далее нам придется применить формулу включений и исключений уже не только к областям M_i кафтана, но и к областям M_{ij} и M_{ijk}. Так, применяя эту формулу к кафтану M_{12}, покрытому тремя заплатами M_{123}, M_{124} и M_{125}, получаем

$$\sigma_{12} = M_{12} - \sum M_{12i} + \sum M_{12ij} - M_{12345} \geqslant 0.$$

Выписывая 10 подобных неравенств, отвечающих 10 пересечениям M_{ij} заплат, и затем складывая их все, получаем (проверьте это!), что

$$\sum M_{ij} - 3\sum M_{ijk} + 6\sum M_{ijkl} - 10M_{12345} \geqslant 0. \quad (11)$$

Аналогично, применив формулу включений и исключений к кафтану M_{123}, покрытому двумя заплатами M_{1234} и M_{1235}, мы получим, что

$$M_{123} - \sum M_{123i} + M_{12345} \geqslant 0.$$

Складывая 10 таких неравенств, отвечающих десяти «тройным пересечениям заплат» M_{ijk}, получаем, наконец, такое неравенство:

$$\sum M_{ijk} - 4\sum M_{ijkl} + 10M_{12345} \geqslant 0. \quad (12)$$

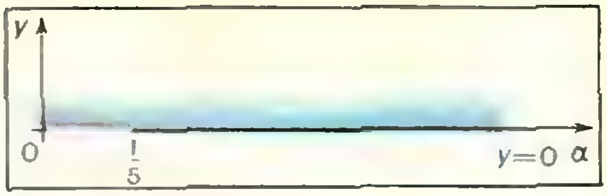


Рис. 5.

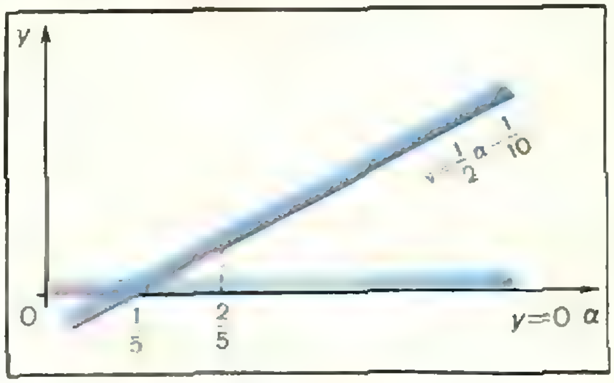


Рис. 6.

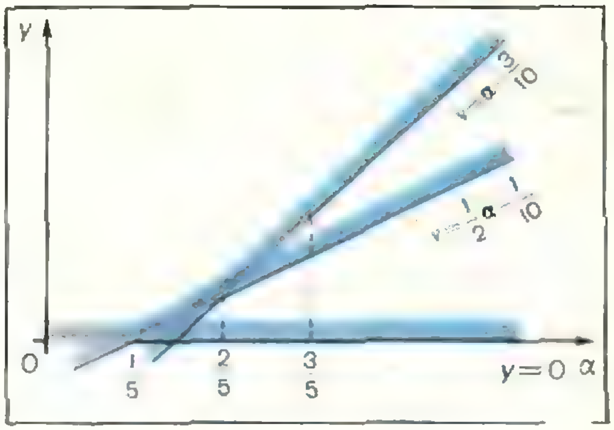


Рис. 7.

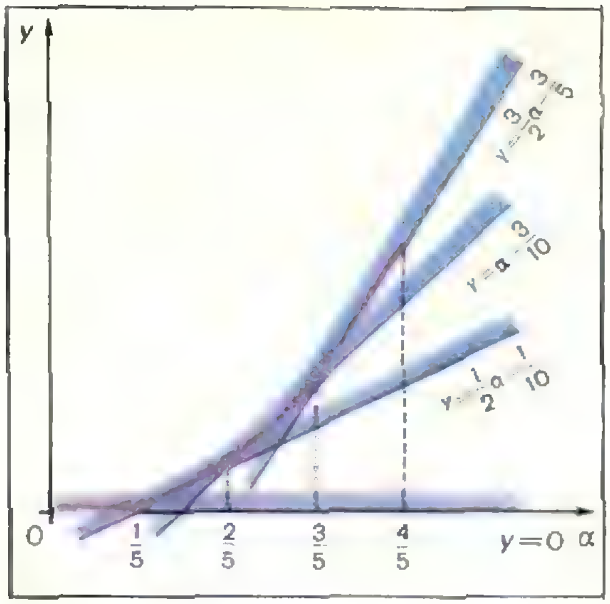


Рис. 8.

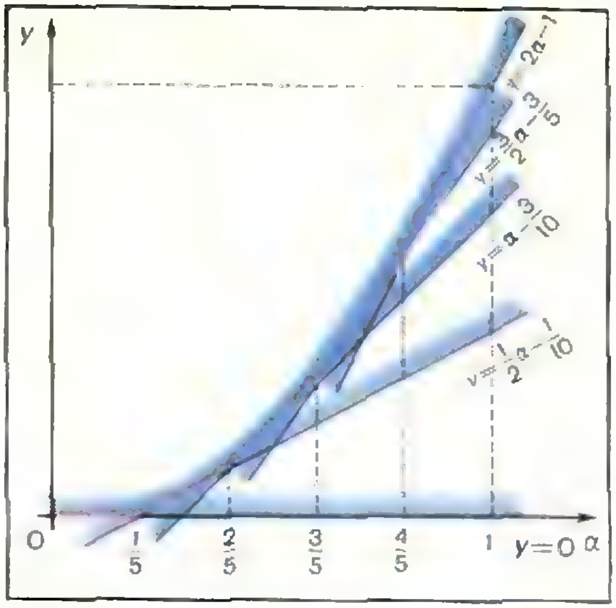


Рис. 9.

Теперь мы имеем четыре неравенства (3′), (5), (11) и (12), связывающие одни и те же величины M, $\sum M_i$, $\sum M_{ij}$, $\sum M_{ijk}$, $\sum M_{ijkl}$ и M_{12345}. Сложив неравенства (3′); (5), умноженное на $^1/_2$; (11), умноженное на $^1/_6$, мы придем к неравенству

$$M-\frac{1}{2}\sum M_i+\frac{1}{6}\sum M_{ij}-\frac{1}{6}M_{12345}\geqslant 0, \quad (13)$$

из которого выпали как член $\sum M_{ijk}$, так и член $\sum M_{ijkl}$. Из (13), очевидно, следует, что тем более

$$M-\frac{1}{2}\sum M_i+\frac{1}{6}\sum M_{ij}\geqslant 0$$

и, значит,

$$\sum M_{ij}\geqslant 3\sum M_i-6M\geqslant 3(5\alpha)-6,$$

откуда

$$f_5(\alpha)\geqslant\frac{1}{10}(15\alpha-6)=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{5}. \quad (14)$$

Таким образом, график функции $y=f_5(\alpha)$ лежит не ниже прямой $y=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{5}$ (рис. 8).

Аналогично, складывая неравенства (3′); (5), умноженное на $^3/_5$; (11), умноженное на $^3/_{10}$; (12), умноженное на $^1/_{10}$, мы получим неравенство

$$M-\frac{2}{5}\sum M_i+\frac{1}{10}\sum M_{ij}\geqslant 0, \quad (15)$$

из которого выпали все члены, кроме M, $\sum M_i$ и $\sum M_{ij}$. Из (15), очевидно, следует, что

$$\sum M_{ij}\geqslant 4\sum M_i-10M\geqslant 4(5\alpha)-10=20\alpha-10$$

и, значит,

$$f_5(\alpha)\geqslant\frac{1}{10}(20\alpha-10)=2\alpha-1.$$

Таким образом, график функции $y=f_5(\alpha)$ лежит не ниже прямой $y=2\alpha-1$, то есть не ниже изображенной на рисунке 9 ломаной; нетрудно убедиться, что он совпадает с этой ломаной.

Упражнения

6. Докажите, что

а) $f_5(\alpha)=\alpha-\frac{3}{10}$ *при* $2/5\leqslant\alpha\leqslant 3/5$;

б) $f_5(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{5}$ *при* $3/5\leqslant\alpha\leqslant 4/5$;

в) $f_5(\alpha)=2\alpha-1$ *при* $4/5\leqslant\alpha\leqslant 1$.

7. Опишите функцию

а) $f_4(\alpha)$; б) $f_6(\alpha)$.

Случай n заплат

Этот случай рассматривается аналогично случаю $n=5$; изложим коротко соответствующие рассуждения.

Прежде всего ясно, что для того, чтобы n заплат $M_1, M_2, \ldots, M_n$, площадь каждой из которых не меньше α, не перекрывались, надо, чтобы их общая площадь $\sum M_i \geqslant n\alpha$ не превосходила площади $M=1$ кафтана; поэтому

$$f_n(\alpha)=0 \text{ при } 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{n}.$$

Далее рассмотрим основное неравенство (4) (формулу включений и исключений, с. 15). Из этого неравенства следует, что

$$M-\sum M_i+\sum M_{ij}\geqslant 0 \qquad (16)$$

(почему?); и, значит,

$$\sum M_{ij}\geqslant\sum M_i-M\geqslant n\alpha-1.$$

А так как общее число «попарных пересечений заплат» M_{ij} в общем случае равно числу $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ сочетаний из n по 2, то

$$f_n(\alpha)\geqslant\frac{1}{n(n-1)/2}(n\alpha-1)=$$
$$=\frac{2}{n-1}\alpha-\frac{2}{n(n-1)}. \qquad (17)$$

При этом неравенство (17) может обращаться в равенство, только если обращается в равенство (16), то есть если в формуле включений и исключений (4) обращаются в 0 все следующие за $\sum M_{ij}$ члены (и если, кроме того, все заплаты M_i имеют площадь α и полностью покрывают кафтан M). Но в этом случае $n-1$ «попарных пересечений заплат» $M_{12}, M_{13}, \ldots$ $\ldots M_{1n}$ покрывают заплату M_1 без перекрытий (ибо все $M_{ijk}=0$). А так как в этом случае все

$$M_{1i}=\frac{2}{n-1}\alpha-\frac{2}{n(n-1)},$$

то

$$(n-1)\left[\frac{2}{n-1}\alpha-\frac{2}{n(n-1)}\right]\leqslant\alpha,$$

и, значит, $\alpha\leqslant{}^2/_n$ (и, разумеется, $\alpha\geqslant{}^1/_n$).

Далее нам придется применять формулу включений и исключений уже к заплатам M_i (вместо всего кафтана M), к их пересечениям M_{ij}, M_{ijk} и т. д. Применим, например, эту формулу к заплате M_1, покрытой «заплатами второго порядка» M_{12}, $M_{13}, \ldots, M_{1n}$:

$$M_1-\sum M_{1i_1}+\sum M_{1i_1i_2}-$$
$$-\sum M_{1i_1i_2i_3}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-2}\sum M_{1i_1i_2\cdots i_{n-2}}+$$
$$+(-1)^{n-1}M_{123\ldots n}\geqslant 0$$

(где $i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}=2, 3, \ldots, n$).

Складывая n таких неравенств, отвечающих заплатам $M_1, M_2, \ldots, M_n$, получаем неравенство

$$\sum M_i-2\sum M_{i_1i_2}+3\sum M_{i_1i_2i_3}-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-2}(n-1)\sum M_{i_1i_2\ldots i_{n-1}}+$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot nM_{123\ldots n}\geqslant 0 \quad (18)$$

(ср. с неравенством (5) на с. 15). Из неравенства (4) и (18) нетрудно исключить член $\sum M_{i_1i_2i_3}$ — для этого достаточно сложить (4) с умноженным на 1/3 неравенством (18):

$$M-\frac{2}{3}\sum M_{i_1}+\frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2}-$$
$$-\frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2i_3i_4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n-3}{3}\times$$
$$\times M_{123\cdots n}\geqslant 0. \quad (19)$$

Из (19) следует, что

$$M-\frac{2}{3}\sum M_{i_1}+\frac{1}{3}\sum M_{i_1i_2}\geqslant 0 \quad (19\text{a})$$

и, значит,

$$\sum M_{i_1i_2}\geqslant 2\sum M_{i_1}-3M\geqslant 2(n\alpha)-3=$$
$$=2n\alpha-3.$$

Таким образом,

$$f_n(\alpha)\geqslant\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}(2n\alpha-3)=$$

$$=\frac{4}{n-1}\alpha-\frac{6}{n(n-1)}, \quad (20)$$

причем в равенство (20) обращается лишь при $\frac{2}{n}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{n}$ (см. упр. 8).

Продолжая поступать так же, как выше, окончательно найдем

$$f_n(\alpha)=2\frac{r-1}{n-1}\alpha-\frac{r(r-1)}{n(n-1)} \quad (21)$$

при $\frac{r-1}{n}\leqslant\alpha\leqslant\frac{r}{n}$, $r=1, 2, \ldots, n$.

Упражнения

8. Докажите, что (20) обращается в равенство лишь при $\frac{2}{n}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{n}$.

9*. Докажите, что $f_n(\alpha)=\frac{6}{n-1}\alpha-\frac{12}{n(n-1)}$ при $\frac{3}{n}\leqslant\alpha\leqslant\frac{4}{n}$.

10*. Докажите равенство (21).

Дополнительные замечания

1. Конечно, даже «общие» формулы (21) далеко не исчерпывают тематику этой заметки, ее можно продолжать довольно далеко.

2°. Метод «выравнивания заплат». Задача М185 получила в письмах читателей «Кванта» довольно много решений; некоторые читатели формулировали и общую задачу о n заплатах площади, не меньшей α на кафтане площади 1. Однако лишь В. Хонину из г. Первоуральска в его очень интересном письме удалось решить до конца эту «общую» задачу и найти формулы, по существу, равносильные формулам (21). При этом путь, которым шел В. Хонин, в корне отличен от развитого в настоящей заметке. Хонин исходит, по существу, из рисунка 1, изображающего «оптимальное» покрытие кафтана пятью заплатами: из этого рисунка видно, что в самой выгодной ситуации все части кафтана покрыты либо двумя, либо тремя заплатами, причем все пересечения M_{ij} заплат (где i и $j = 1, 2, \ldots, 5$) и все пересечения M_{ijk} равны между собой. Исходя из этого, Хонин разрабатывает своеобразную процедуру «перекройки» заплат с целью выравнивания их площадей и площадей их пересечений, при которой искомая величина max M_{ij} все время не увеличивается; таким путем он доказывает, что и в общем случае «оптимальное» их расположение (к которому мы приходим в процессе постепенного «выравнивания» заплат) будет близко к рисунку 1, что позволяет ему найти формулы (21). При этом предложенный В. Хониным метод решения задачи является весьма перспективным и в случае более сложных задач.

Во время подготовки статьи к публикации в редакцию пришла заметка ученика 9 класса из г. Львова А. Макаревича, в которой развит подход к решению задачи М185 и ее обобщений, аналогичный предложенному В. Хониным. К сожалению, из-за недостатка места мы не можем опубликовать эту интересную заметку.

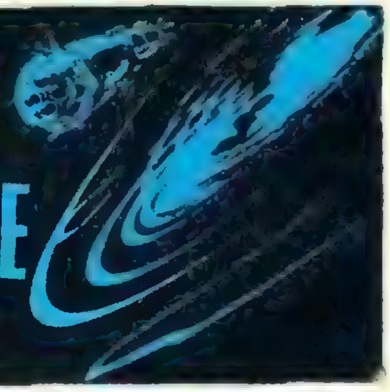
3°. О методах «линейного программирования». Рисунок 9 показывает, что решение «общей» задачи сводится к решению системы линейных неравенств, связывающих величину y $(=f_n(\alpha))$ с числом α. Вопросы, сводящиеся к решению систем линейных неравенств, играют большую роль в современных применениях математических методов к экономическим задачам; для их решения выработаны специальные методы — так называемые «методы линейного программирования» *). В 1968 году методы линейного программирования применил для решения «общей» задачи студент Московского университета Сергей Пирогов, при этом ему удалось не только доказать формулу (21), но и решить более общие задачи.

---

*) См., например, популярную книгу: С. Гасс, Путешествие в страну линейного программирования, М., «Мир», 1973; см. также гл. 13 превосходной книги: А. Кофман, Р. Фор, Займемся исследованием операций, М., «Мир», 1966.

И. И. ВОРОБЬЕВ

НЕОБЫЧНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ



Почему-то все думают, что гравитацию ослабить нельзя. Оказывается, сделать это очень просто. Представьте себе, что два одинаковых массивных шара насажены на легкий длинный жесткий стержень. Когда шары сведены вместе и находятся на расстоянии R от центра Земли, они притягиваются к Земле с силой F. Раздвинем шары, сохраняя расстояние от них до центра Земли прежним; на каждый шар теперь действует сила, равная $\frac{F}{2}$ (рис. 1). Но направлены эти силы к центру Земли, то есть под некоторым углом α друг к другу! А значит, результирующая сила $F_p = F\cos\frac{\alpha}{2}$. Гантель притягивается слабее, чем материальная точка той же массы.

Конечно, никакого ослабления гравитационных сил не происходит. Дело же в том, что равнодействующая гравитационных сил, приложенных к составляющим тело частицам, не равна арифметической сумме этих сил. Тело массы m в поле тяготения можно считать материальной точкой той же массы только в том случае, если оно однородно и имеет форму шара. Тогда сила, действующая на материальную точку, помещенную в центре такого шара, равна силе, действующей на тело. Тем не менее, изучая движение тела в гравитационном поле, обычно рассматривают силы, действующие на материальную точку. Это можно делать, когда размеры тела малы по сравнению с расстоянием до Земли. В нашем примере это условие не выполняется, но для заметного ослабления притяжения длина стержня должна быть достаточно велика. При этом силы притяжения шаров Землей приводят к внутренним упругим напряжениям в стержне.

Нельзя ли воспользоваться таким «ослаблением гравитации» для каких-нибудь практических целей, скажем, для космических путешествий? Да, этот эффект можно приспособить для ухода с орбиты. Это показали советские ученые В. В. Белецкий и М. Е. Гиверц.

Конструкция «гравилета» — корабля, работающего на принципе «ослабления гравитации», отличается от обычной. Главное отличие в том, что он состоит из двух массивных частей, расстояние между которыми можно менять. Корабль похож на очень длинную раздвижную гантель.

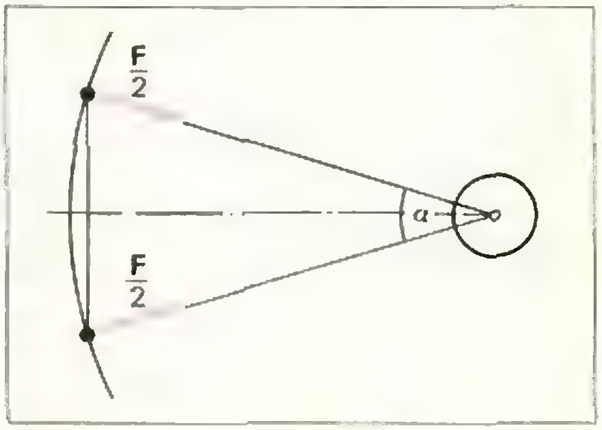


Рис. 1.

Пусть при движении по орбите вокруг Земли части корабля раздвигаются и сдвигаются так, что угол α удерживается постоянным (рис. 2). (Чтобы удерживать заданный угол α, надо специально управлять ориентацией корабля, а не только сдвижением и раздвижением его частей.) Тогда сила, действующая на гантель по всей орбите, отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы, постоянным множителем $\cos\frac{\alpha}{2}$. Иными словами, для гантели сила притяжения к Земле равна не $\gamma\frac{mM}{R^2}$, а $\gamma'\frac{mM}{R^2}$, где $\gamma'=\gamma\cos\frac{\alpha}{2}$. Здесь γ — гравитационная постоянная, m — масса гантели, M — масса Земли, R — расстояние до центра Земли.

Размеры корабля все-таки невелики по сравнению с расстоянием R, поэтому угол α довольно мал, то есть величина $\cos\frac{\alpha}{2}$ близка к единице. Все физические законы, справедливые для материальной точки в поле тяжести Земли, справедливы и для нашего корабля, нужно только гравитационную постоянную γ всюду заменять на γ'. Так, потенциальная энергия гантели в поле тяжести Земли будет равна $\gamma'\frac{mM}{R}$.

Выполняются в нашем случае и все законы Кеплера. В частности, орбита корабля должна быть эллипсом, в одном из фокусов которого находится Земля.

Пусть наш корабль движется по орбите с прижатыми друг к другу шарами. Что произойдет, если быстро раздвинуть шары на угол α в перигее *)? Гравитационная постоянная изменится в $\cos\frac{\alpha}{2}$ раз, уменьшится и потенциальная энергия корабля. Значит, его кинетическая энергия увеличится. Корабль пойдет по новой орбите, тоже по эллипсу, но немного большему. Так как γ' все же крайне мало отличается от γ, то в апогее он удалится от Земли тоже крайне незначительно, а в перигее вернется в ту же точку.

Чтобы выбрать правильную тактику ухода с орбиты, разберемся, как меняется скорость при движении по орбите. На первой половине эллипса, от перигея до апогея (рис. 3), сила притяжения направлена под тупым углом к скорости, поэтому скорость уменьшается по величине. От апогея до перигея скорость все время увеличивается, потому что сила притяжения направлена под острым углом к скорости. На одной половине эллипса сила тяготения тормозит корабль, на другой — его разгоняет, причем работы по разгону и торможению равны по величине.

---

*) Перигей — точка орбиты, ближайшая к Земле. Апогей — самая удаленная от Земли точка орбиты.

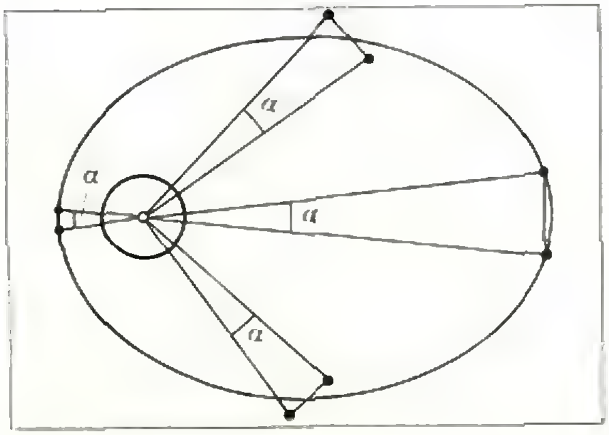


Рис. 2.

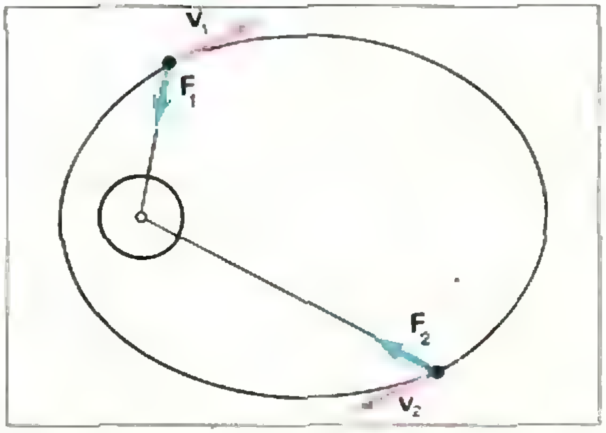


Рис. 3.

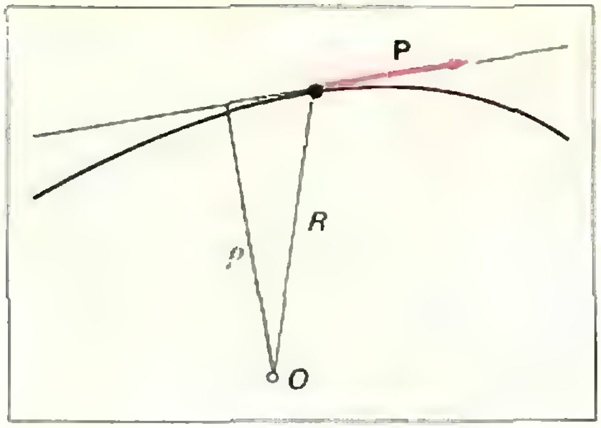


Рис. 4.

Теперь становится ясно: нужно ослабить силу притяжения в то время, когда она тормозит корабль, и вернуть ей прежнее значение, когда она корабль разгоняет! Для этого в перигее нужно быстро развести шары на угол α и удерживать этот угол до апогея, а в апогее свести шары вместе, в перигее снова их раздвинуть и так далее. Работы по разгону и торможению перестанут компенсироваться, раз за разом энергия гантели будет увеличиваться, и корабль сможет уйти от Земли.

Прежде чем приступать к детальному расчету, опишем траекторию нашего «пульсирующего» корабля. Она состоит из половинок эллипсов, у которых расстояния в апогее увеличиваются, а в перигее уменьшаются. (Как именно, будет ясно из дальнейшего.) По мере уменьшения перигейного расстояния скорость в перигее растет, ибо момент импульса гантели все время остается постоянным. При увеличении скорости сил притяжения может уже не хватить, чтобы завернуть траекторию, и корабль уйдет от Земли по параболической *или гиперболической траектории*.

Если частица с массой m движется в поле тяжести Земли (точка O на рисунке 4) со скоростью v, то ее импульс $\mathbf{p}$ равен mv и направлен по касательной к траектории. Опустим из центра Земли перпендикуляр на прямую, определяемую импульсом. Длину этого перпендикуляра ρ называют прицельным параметром. Моментом импульса L называется произведение $mv\rho$. Так как момент силы тяжести относительно центра Земли равен нулю, момент импульса частицы не изменяется при движении. Величина $\nu = v\rho$ называется моментом скорости. В двух точках орбиты — в апогее и в перигее — прицельный параметр совпадает с расстоянием до центра Земли *).

Начнем последовательно вычислять скорости и расстояния в перигеях и апогеях. Момент импульса остается неизменным, а изменение кинетической энергии на каждой половине эллипса равно работе в поле тяжести Земли. Только при движении от перигея к апогею нужно в формуле для работы использовать γ', а при движении от апогея к перигею — γ. Обозначим последовательно перигеи и апогеи буквами Π_0, A_0, Π_1, A_1 и т. п. Скорости и расстояния до центра Земли в перигее обозначим v_0, r_0; v_1, r_1, а в апогее — V_0, R_0; V_1, R_1 и т.д.

Запишем закон сохранения момента импульса:

$$L = mv_0 r_0 = mV_0 R_0 = mv_1 r_1 = mV_1 R_1.$$

Введем момент скорости $\nu = \dfrac{L}{m}$ и выразим расстояния через скорости:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{v_0}{\nu}, \quad \frac{1}{R_0} = \frac{V_0}{\nu}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{v_1}{\nu} \text{ и т. д.}$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{\gamma' mM}{r_0} - \frac{\gamma' mM}{R_0}.$$

Сокращая на массу m и выражая расстояния через скорости, получим

$$v_0^2 - V_0^2 = \frac{2\gamma' M}{\nu}(v_0 - V_0).$$

---

*) Закон сохранения момента импульса эквивалентен закону площадей Кеплера. (Смородинский Я. А. Движение планет. «Квант», 1971, № 1)

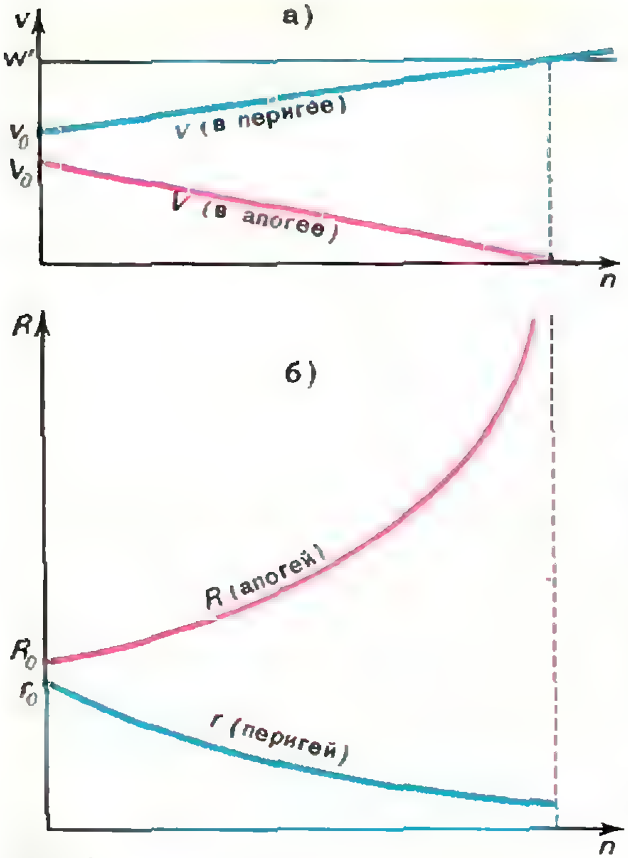


Рис. 5.

Отсюда

$$v_0 + V_0 = \frac{2\gamma' M}{\nu}.$$

Обозначим $2\frac{\gamma' M}{\nu}$ через w', тогда

$$v_0 + V_0 = w'. \qquad (1)$$

Совершенно аналогично при переходе от апогея A_0 к перигею Π_1 получим

$$V_0 + v_1 = w, \qquad (2)$$

где $w = \frac{2\gamma M}{\nu}$. Из равенств (1) и (2) следует, что

$$v_1 - v_0 = w - w'.$$

Это означает, что за один оборот вокруг Земли скорость возрастает на постоянную величину $w - w'$.

Теперь нетрудно построить графики зависимости скоростей и расстояний в перигее и апогее от числа оборотов n (рис. 5, *а*, *б*).

После n оборотов

$$v = v_0 + n(w - w'),$$
$$V = V_0 - n(w - w'),$$

$$r = \frac{\nu}{v_0 + n(w - w')},$$
$$R = \frac{\nu}{V_0 - n(w - w')}.$$

Из анализа этих зависимостей видно, что в тот момент, когда скорость в перигее превзойдет w', наш корабль уже не вернется к Земле.

Что это за скорость $v = w'$? В перигее $w' = 2\gamma'\frac{M}{\nu}$. Подставим $\nu = rv$. Получим $v = 2\gamma'\frac{M}{rv}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2\gamma' M}{r}}$. Значит, $v = w'$ — это вторая космическая скорость на расстоянии r от центра Земли. Теперь стал ясен смысл w и w' — это вторые космические скорости для γ и γ' при заданном моменте импульса $L = m\nu$.

А теперь давайте обсудим, насколько реален такой космический корабль. Если он имеет длину l на орбите радиуса R, то $\alpha \approx \frac{l}{R}$.

Тогда, так как для малого α $\cos\frac{\alpha}{2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, получим относительное отличие сил притяжения $\frac{\gamma - \gamma'}{\gamma} \approx \frac{l^2}{8R^2}$. Для корабля длиной около 20 *м* на орбите радиуса примерно 10 000 *км* относительное ослабление гравитации всего $0{,}5 \cdot 10^{-12}$. Но для корабля длиной около 200 *км* эффект уже значителен — $0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Такому кораблю для того, чтобы уйти от Земли, нужно немного больше года.

Интересно, что чем меньше радиус начальной орбиты, тем быстрее корабль покинет Землю. Ведь за то же время он успеет совершить большее число оборотов, причем начиная с большей скорости. Чем сильнее корабль притягивают, тем быстрее он уходит. По расчетам В. В. Белецкого, с расстояния двадцать тысяч километров от центра сверхплотной звезды Сириус В космический корабль длиной 200 *км* смог бы уйти всего за полтора часа.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Игра в 15

О. Т. Долгов

> *— Так это же известная задача!*
> *— А как она решается?*
> *— Да нет! Условие известное, а решения я не знаю...*
>
> *Милг.* Диалоги

1. Слово Сэму Лойду

В «Кванте» уже рассказывалось о книге Мартина Гарднера «Математические досуги» («Квант», 1973, № 6). 33-я глава «Досугов» называется «Игра в 15 и другие головоломки».

В плоской квадратной коробочке лежат 15 шашек с номерами. «Нормальное» расположение шашек показано на рисунке 1. На рисунке 2 показано другое расположение: шашки с номерами 14 и 15 переставлены. Нужно, передвигая по очереди по одной шашке, перевести это расположение в «нормальное». Шашки передвигают на свободное соседнее место, вынимать их из коробочки не разрешается.

Игру в 15 изобрел в семидесятых годах прошлого века Сэм Лойд. Повальное увлечение ею быстро охватило Англию, а потом перекинулось и через Ла-Манш. Свой рассказ об этом Гарднер иллюстрирует цитатой из самого Лойда:

«Люди буквально помешались на этой головоломке. Из уст в уста передавались рассказы о лавочнике, забывшем открыть свою лавку, о священнике, простоявшем под уличным фонарем долгую зимнюю ночь в надежде припомнить, как ему удалось решить задачу...

Один известный редактор из Балтимора рассказывает, что как-то раз он ушел в полдень на ленч и лишь поздней ночью был обнаружен вконец отчаявшимися сотрудниками газеты сидящим за столом и гоняющим взад — вперед по тарелке маленькие кусочки пирога!»

В 1879 году была опубликована математическая теория игры в 15, после чего игра быстро вышла из моды.

Математическую теорию, подорвавшую интерес к головоломке Лойда, Гарднер в своей книге не изла-

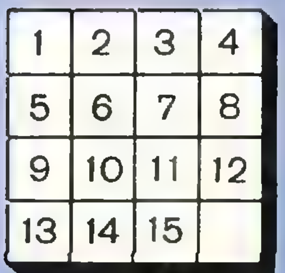


Рис. 1.

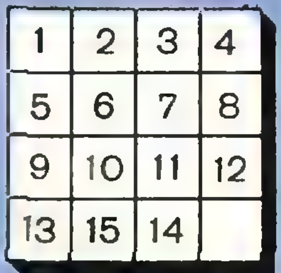


Рис. 2.

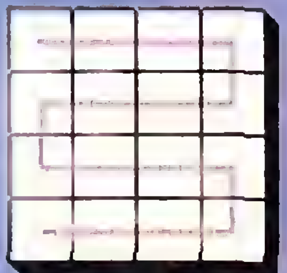


Рис. 3.

гает. Между тем теория эта проста и поучительна.

2. Четные и нечетные перестановки

Расположим числа 1, . . . , 15 в произвольном порядке. Например, так:

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11,
12, 15, 14, 13, (1)

или так:

1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11,
12, 14, 15, 13. (2)

Каждое из подобных расположений называется *перестановкой*.

Будем говорить, что в данной перестановке числа i и j образуют *беспорядок*, если $i > j$, но i стоит в этой перестановке левее j.

Пример. Числа 8 и 6 в перестановке (1).

Назовем перестановку *четной* (*нечетной*), если в ней четное (нечетное) число беспорядков.

Примеры. В перестановке (1) — девять, а в перестановке (2) — восемь беспорядков, так что (1) — нечетная, а (2) — четная перестановка.

3. Перестановки и игра в 15

Начертим на коробочке для игры в 15 такую ломаную, как на рисунке 3. Пройдем по этой ломаной из левого верхнего угла коробочки и выпишем номера шашек, которые мы будем последовательно проходить.

Примеры. Если шашки расположены так, как на рисунке 1, то мы получим перестановку (1); для расположения на рисунке 2 получится перестановка (2).

Проходя через пустую клетку, мы не пишем никакого номера. Поэтому одна и та же перестановка соответствует шестнадцати различным расположениям шашек в коробочке. Например, перестановка

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, 13, 14, 15

соответствует любому из расположений на рисунке 4.

При игре в 15 шашки можно передвигать по горизонталям и вертикалям, занимая соседнюю пустую клетку. Если шашка передвигается по горизонтали, то и старому, и новому расположению соответствует, очевидно, одна и та же перестановка (рис. 4, *а*, *б*). Если шашку передвигают по вертикали, то может случиться, что перестановка не меняется (рис. 4, *б*, *в*), но обычно старому и новому расположению соответствуют разные перестановки (рис. 5).

Однако эти перестановки всегда имеют, оказывается, *одинаковую четность* (либо обе четные, либо обе нечетные).

Проверим это сначала в случае, изображенном на рисунке 5. Расположению на рисунке 5, *а* соответствует перестановка

. . . , 6, 5, 11, 9, 10, . . . , (а)

расположению на рисунке 5, *б* — перестановка

. . . , 10, 6, 5, 11, 9, . . . (б)

(многоточия заменяют совпадающие в

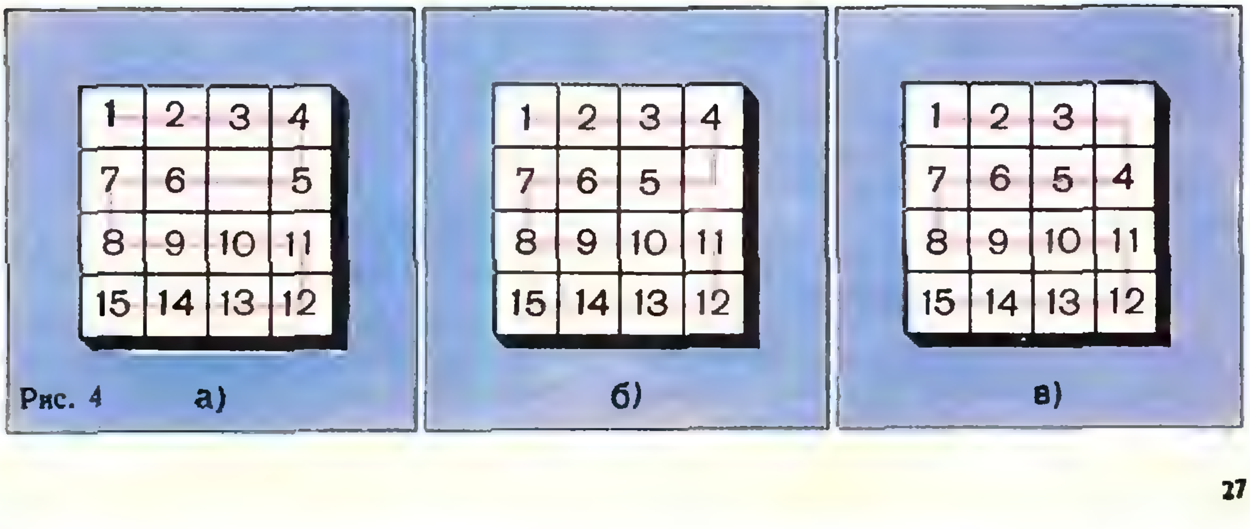


Рис. 4 а) б) в)

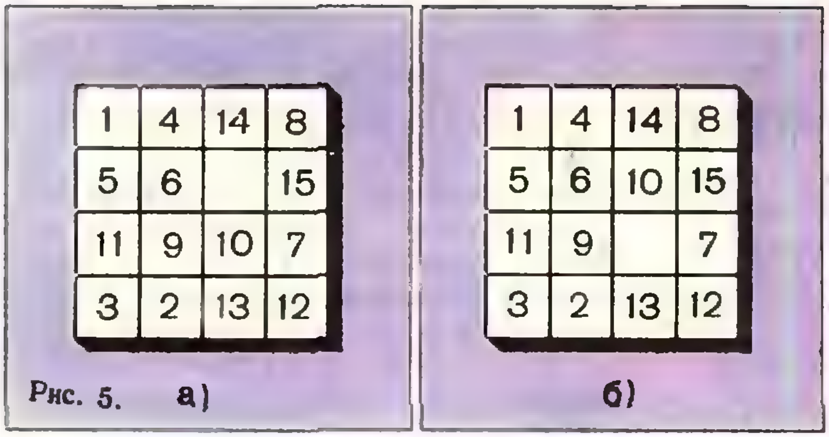


Рис. 5. а) б)

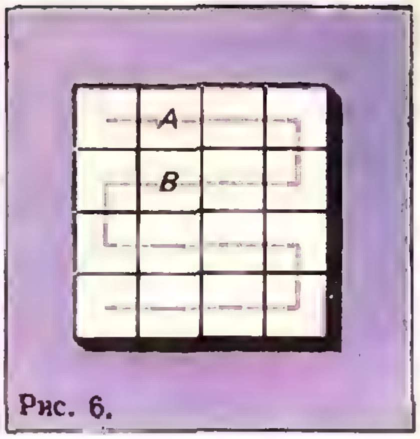


Рис. 6.

(а) и (б) числа). При переходе от (а) к (б) один беспорядок (11, 10) исчезает и три новых (10, 6), (10,5) и (10, 9) возникают. Общее число беспорядков возрастает на 2, так что (а) и (б) имеют действительно одинаковую четность.

В общем случае, когда шашку с номером n передвигают с клетки A на пустую клетку B (рис. 6), доказательство проводится совершенно аналогично. На участке ломаной между A и B располагается всегда четное число шашек. Пусть у m из них номера меньше n, у k — больше n; тогда m беспорядков при передвижении шашки исчезает и k беспорядков возникает. Общее число беспорядков изменяется на $k - m$. Это — четное число, так как по условию число $k + m$ четно. Таким образом, перестановки, соответствующие старому и новому расположению, обязательно имеют *одинаковую четность*.

4. Неразрешимость головоломки Лойда

Перестановки (1) и (2), соответствующие расположениям шашек на рисунках 1 и 2, имеют разную четность. Значит, эти расположения нельзя получить друг из друга: головоломка Лойда неразрешима.

5. Выйдет — не выйдет?

Ну, а если произвольно расположить шашки в коробочке? В каких случаях головоломка выйдет (расположение удастся перевести в «нормальное»), а в каких — не выйдет?

Мы уже знаем: если перестановка, соответствующая расположению, четная, то головоломка заведомо не выйдет. А если нечетная? Тогда, оказывается, обязательно выйдет.

Доказывать это утверждение можно по-разному. Ниже мы сделаем это примерно таким же способом, как С. Бобров в своей книге «Волшебный двурог» *).

6. Как перепрыгнуть через две шашки

Начертим на коробочке замкнутый путь в виде буквы П (рис. 7). Вдоль этого пути шашки можно передвигать одну за другой, «гуськом». Таким образом, можно, например, расположение, изображенное на рисунке 8, *а*, постепенно перевести в «нормальное» (рис. 8, *б*, *в*, *г*, *д*). Это удается сделать потому, что относительный порядок шашек вдоль пути П (начиная с шашки 1, по часовой стрелке) одинаков:

$$\{1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 11, 7, 6, 10, 14, 13, 9, 5\}.$$

Пусть теперь для некоторого расположения шашек этот порядок иной, и пусть мы хотим это расположение перевести в «нормальное». Для этого нам хорошо бы научиться целенаправленно изменять порядок шашек вдоль пути П.

---

*) Бобров С. Волшебный двурог. Детгиз, 1946, с. 29—41, 89—117.

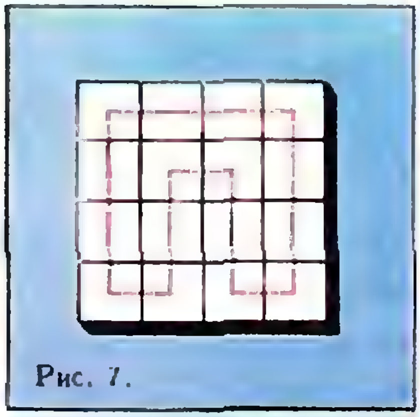
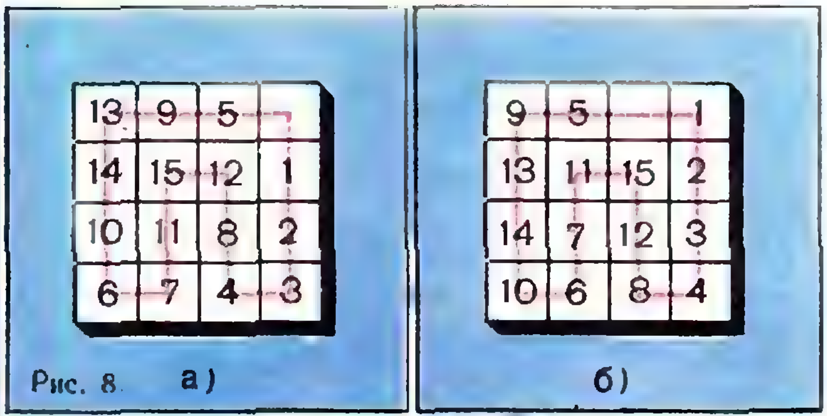
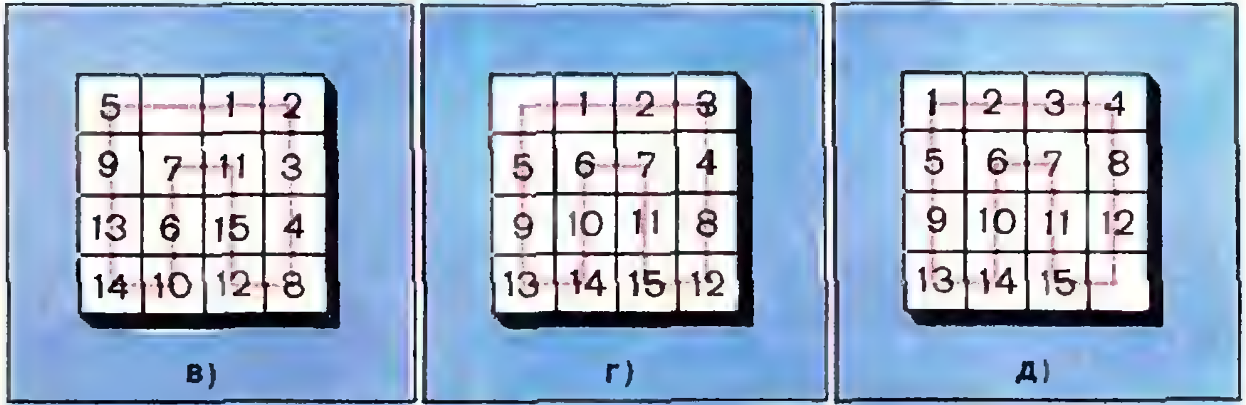
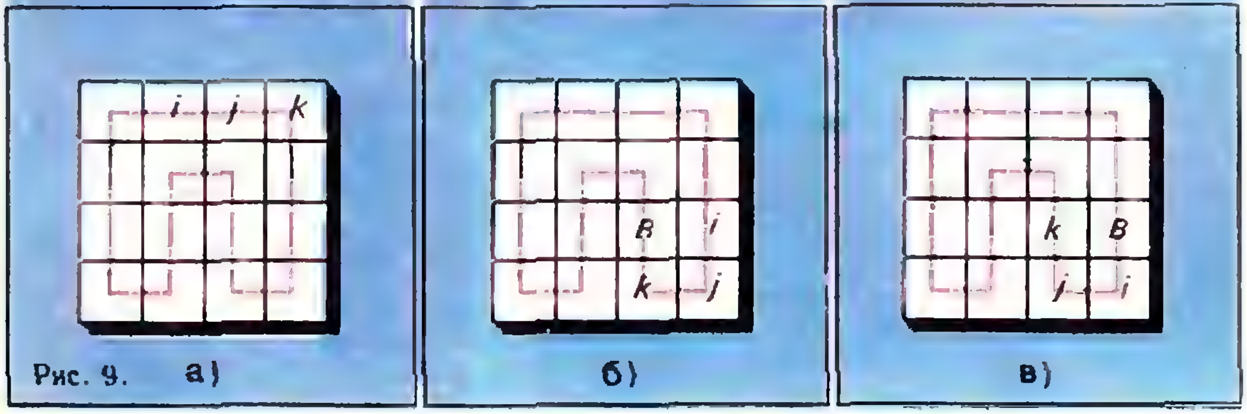


Рис. 7.


13 9 5
14 15 12 1
10 11 8 2
6 7 4 3
9 5 1
13 11 15 2
14 7 12 3
10 6 8 4
Рис. 8 а) б)


5 1 2
9 7 11 3
13 6 15 4
14 10 12 8
1 2 3
5 6 7 4
9 10 11 8
13 14 15 12
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15
в) г) д)


i j k
B i
k j
k B
j i
Рис. 9. а) б) в)

Ниже мы укажем прием, с помощью которого это можно делать.

Пусть шашки с номерами i, j и k стоят друг за другом вдоль пути П (рис. 9, *а*). Передвигая все шашки «гуськом» вдоль П, легко добиться, чтобы шашки i, j, k и пустая клетка B расположились так, как на рисунке 9, *б*. Передвигая теперь шашку i на пустую клетку B, мы из порядка $\{\ldots, i, j, k, \ldots\}$ получим порядок $\{\ldots, j, k, i, \ldots\}$ — шашка с номером i «перепрыгнула» по часовой стрелке через две соседние: j и k.

Так же просто заставить любую шашку «прыгнуть» через две соседние против часовой стрелки. Например, чтобы на рисунке 9, *а* шашка k «перепрыгнула» через i и j, нужно сначала передвинуть шашки «гуськом» вдоль пути П в положение, изображенное на рисунке 9, *в*, а затем передвинуть шашку k на пустое место B.

Итак, мы указали прием, с помощью которого можно заставить любую шашку «прыгнуть» через две шашки, стоящие на пути П рядом с ней.

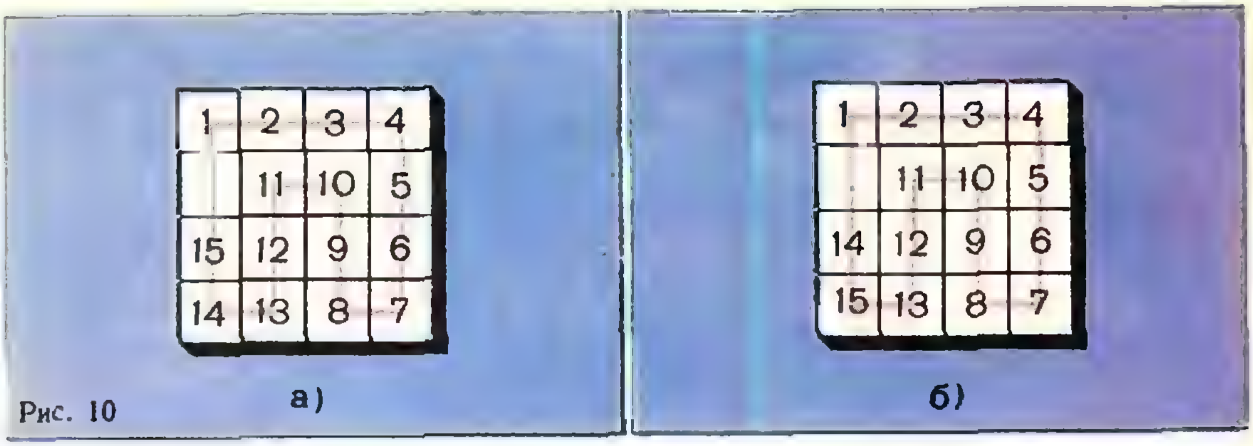


Рис. 10 а) б)

7. Все, кроме двух, — по местам!

С помощью этого приема легко перевести любое расположение шашек в одно из двух расположений, приведенных на рисунках 10, *а*, *б*.

Прежде всего поведем вдоль пути П шашку 2 к шашке 1. Перепрыгивая против часовой стрелки через две шашки столько раз, сколько понадобится, доведем ее либо до «своего» места (рядом с «единицей»), либо до соседнего (между ней и шашкой 1 останется некоторая шашка *i*), — в обоих случаях остановимся в тот момент, когда следующий прыжок был бы через шашку 1. Если между «двойкой» и «единицей» останется шашка *i*, заставим ее прыгнуть через две шашки (в том числе через «двойку») по часовой стрелке, — тогда «двойка» очутится рядом с «единицей» (причем с нужной стороны).

Затем таким же способом подведем «тройку» к «единице» и «двойке». Потом «четверку» — к «единице», «двойке» и «тройке». И так далее — вплоть до шашки 13.

Передвигая после этого все шашки «гуськом» вдоль П, придем к одному из двух расположений, изображенных на рисунке 10.

8. Хорошие и плохие расположения

Все расположения шашек разбились, таким образом, на два класса. Расположения 1-го класса можно перевести в такое, как на рисунке 10, *а*, расположения 2-го — в такой, как на рисунке 10, *б*.

Подумаем, почему отсюда следует утверждение, сделанное в п. 5, и что еще отсюда следует.

Если некоторое расположение P можно перевести в расположение Q, то и обратно, Q можно перевести в P. Поэтому все расположения 1-го класса можно перевести друг в друга. Согласно п. 4 соответствующие им перестановки — одинаковой четности, причем нечетные, так как расположению на рисунке 10, *а* соответствует нечетная перестановка

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11,\ 15,\ 12,\ 9,\ 6,\ 7,\ 8,\ 13,\ 14$$

(тринадцать беспорядков).

Точно так же переводятся друг в друга и все расположения 2-го класса, причем им соответствуют четные перестановки.

Тем самым, «нормальное» расположение относится к 1-му классу, а расположение на рисунке 2 — ко 2-му. Назовем расположения 1-го класса *хорошими*, а 2-го класса — *плохими*.

Подведем итог доказанному.

Хорошие расположения — это те и только те, которым соответствуют нечетные перестановки, все их можно перевести в расположение, изображенное на рисунке 1.

Все остальные расположения плохие, им соответствуют четные перестановки, их нельзя перевести в расположение, изображенное на рисунке 1, и можно перевести в расположение, изображенное на рисунке 2.

Замечание. Соображения, приведенные в п. 6 и в п. 7, фактически позволяют

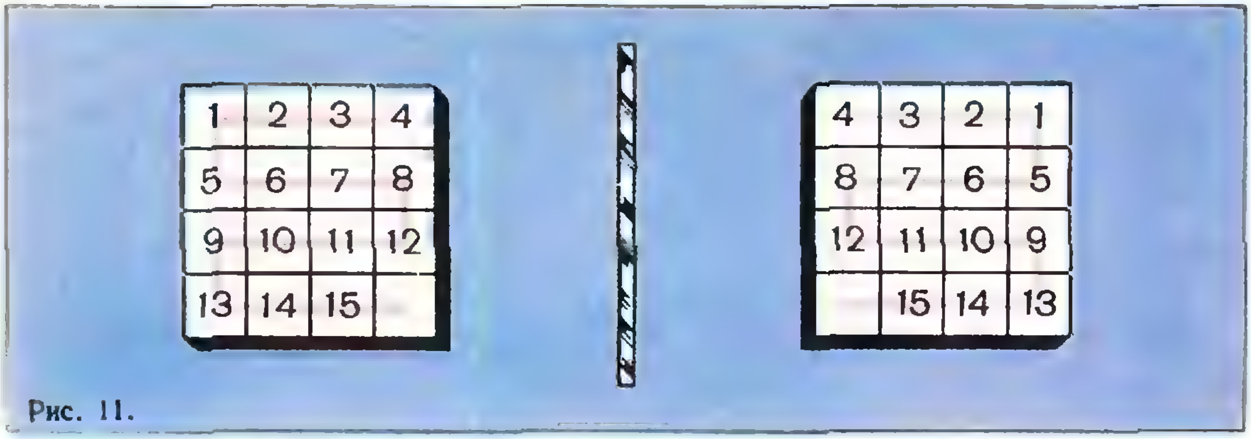


Рис. 11.

перевести любое хорошее расположение в «нормальное», однако вовсе не указывают, как добиться цели скорейшим путем. Последний вопрос мы оставляем в стороне и заниматься им не будем.

Вместо этого подумаем, каких расположений больше: хороших или плохих?

9. Перед зеркалом

Поставим коробочку с «нормальным» расположением шашек перед зеркалом (рис. 11). Нарисуем на коробочке такую ломаную, чтобы ее зеркальное отражение выглядело так же, как на рисунке 3. Расположению R, которое мы увидим в зеркале, соответствует четная перестановка

$$4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 13,\ 14,\ 15$$

(двенадцать беспорядков). Значит, расположение R плохое.

Пусть X — любое хорошее расположение. Докажем, что расположение Y, являющееся его зеркальным отражением, плохое. Последовательно перемещая шашки, переведем расположение X в «нормальное» *перед зеркалом*. Тогда в зеркале расположение Y перейдет в R. Расположение R плохое, значит, и Y плохое.

Так как, кроме того, каждое хорошее расположение отражается в зеркале по-своему, то тем самым доказано, что хороших расположений столько же, сколько плохих.

Одновременно доказано, что четных перестановок столько же, сколько нечетных.

Упражнения

1. В учебниках по высшей алгебре равенство числа четных перестановок числу нечетных устанавливается обычно при помощи понятия «транспозиция». Ниже мы рассматриваем перестановки не из 15, а из n чисел: $1, \ldots, n$. Четность и нечетность таких перестановок определяется так же, как в п. 2.

Определение. Если в некоторой перестановке поменять местами какие-нибудь два числа (не обязательно стоящие рядом), то получится новая перестановка. Это преобразование перестановки называется *транспозицией*.

а) От любой перестановки из чисел $1, \ldots, n$ можно перейти к любой другой перестановке из тех же чисел при помощи нескольких транспозиций. Проверьте это.

б) Докажите, что всякая транспозиция меняет четность перестановки (четную перестановку переводит в нечетную, а нечетную — в четную).

в) Выведите отсюда, что при $n \geqslant 2$ четных перестановок из чисел $1, \ldots, n$ столько же, сколько нечетных.

2. Докажите, что число всех перестановок из чисел $1, \ldots, n$ равно произведению $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (это произведение обозначается $n!$; читается: «эн-факториал»).

С ростом n число $n!$ возрастает необычайно быстро, например, $15! = 1\,307\,674\,368\,000$.

3. С помощью понятия «транспозиция» можно по-новому доказать неразрешимость головоломки Лойда.

Обозначим пустое место в коробочке числом 16. Тогда любому расположению шашек *соответствует некоторая перестановка из чисел* $1, \ldots, 16$. Четность такой перестановки при каждом передвижении шашки на свободное место *меняется* (согласно упр. 1, *б*)). Перестановки, соответствующие расположениям, изображенным на рисунках 1 и 2, по-прежнему имеют разную четность (снова согласно 1, *б*)). Значит, если бы от одного из этих расположений можно было бы перейти к другому, то при этом пришлось бы сделать *нечетное* число передвижений шашек. Это, однако, заведомо невозможно! Почему?

4. Докажите следующее утверждение, являющееся усилением упражнения 1, а): от

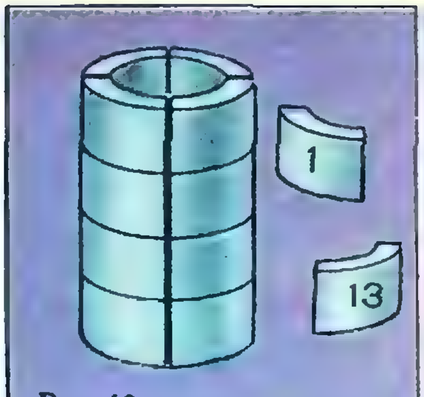


Рис. 12.

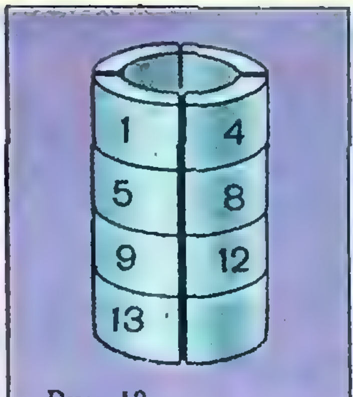


Рис. 13.

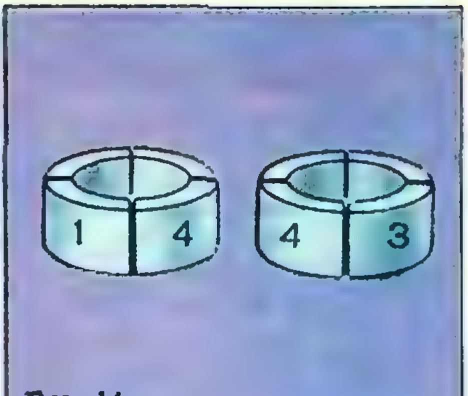


Рис. 14.

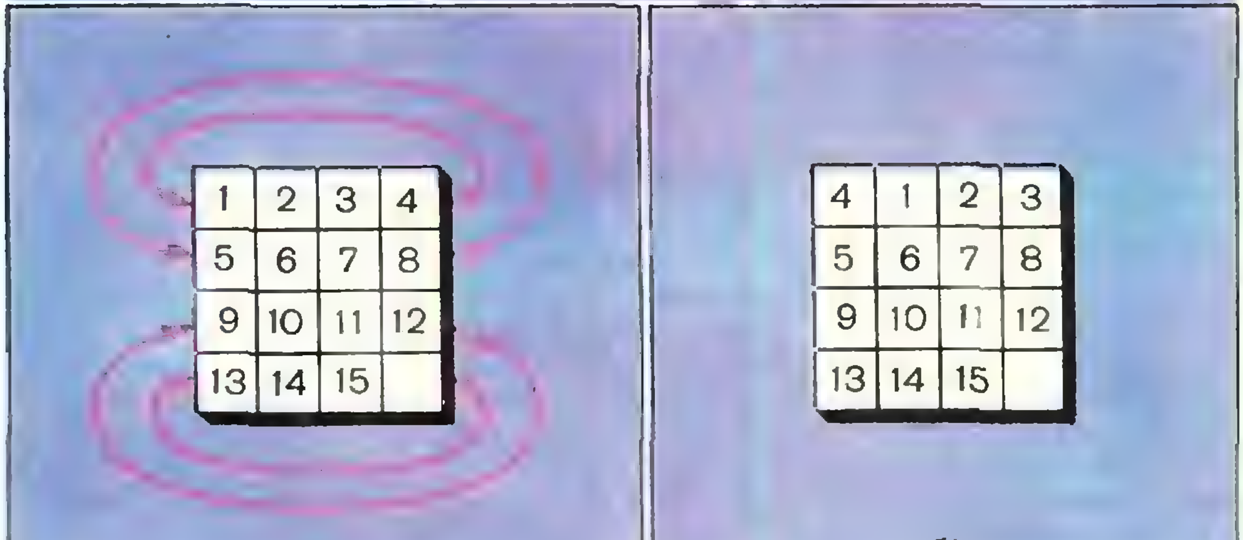


Рис. 15. а) б)

любой перестановки из чисел 1, . . ., *n* можно перейти к любой другой перестановке из тех же чисел, меняя местами *только соседние числа*.

5. Двухэтажная игра в 31. В коробочку с размерами 2 × 4 × 4 положим 31 кубик «в 2 этажа»: 16 кубиков внизу, 15 — наверху. Одно место в коробочке оставим пустым.

На кубиках напишем номера: 1, . . ., 31, причем на каждом кубике напишем его номер дважды: на верхней и нижней грани.

Дно и крышку в коробочке сделаем прозрачными и напротив каждого кубика проделаем отверстия (такие, чтобы кубики через них не пролезали, но их легко было передвигать, не вынимая из коробочки). Теперь коробочку можно как угодно переворачивать: у нее больше нет «постоянного верха» и «постоянного низа». Кубики можно перемещать по каждому этажу и передвигать с этажа на этаж.

Получилась «двухэтажная игра в 31». Разработайте теорию этой игры.

6. Игра в 15 на цилиндре. Полый цилиндр (рис. 12) разрежем на 16 одинаковых изогнутых шашек, проведя 4 вертикальных и 3 горизонтальных разреза. Одну шашку выбросим. Остальные перенумеруем числами 1, . . ., 15 и поместим в специальную коробочку в форме *полости между двумя цилиндрами*. Во внешнем прозрачном цилиндре проделаем 16 отверстий — «игра в 15 на цилиндре» готова (рис. 13).

Как и в обычной игре в 15, шашки разрешается передвигать по одной на свободное соседнее место; кроме того, разрешается одновременно поворачивать 4 шашки (рис. 14), как обойму шарикоподшипника.

Можно ли любое расположение шашек перевести в любое другое?

Замечание. Не обязательно делать коробочку и шашки цилиндрическими. Можно использовать *обычную игру в 15*, разрешив дополнительно «циклические сдвиги строк» (рис. 15): например, «циклический сдвиг 1-й строки» переводит расположение, изображенное на рисунке 15, *а*, в расположение, изображенное на рисунке 15, *б*.

Последнее замечание поможет вам справиться с упражнением 6 и облегчит нам формулировку следующей задачи.

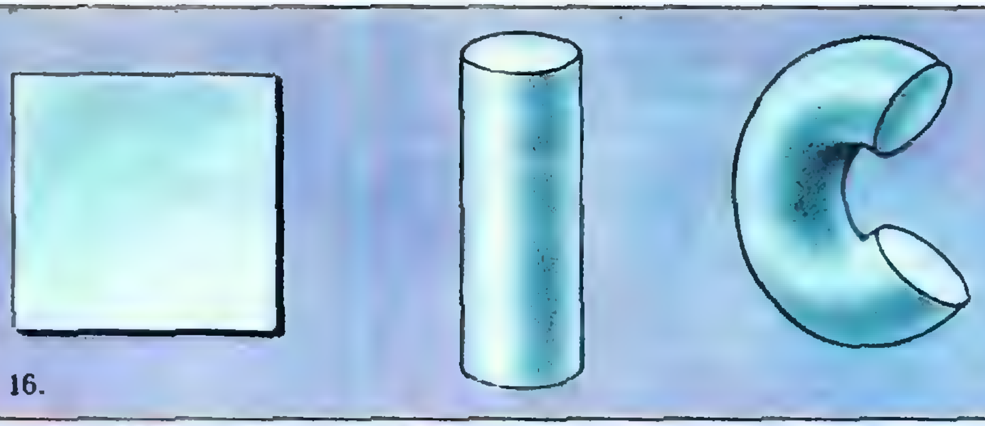


Рис. 16.

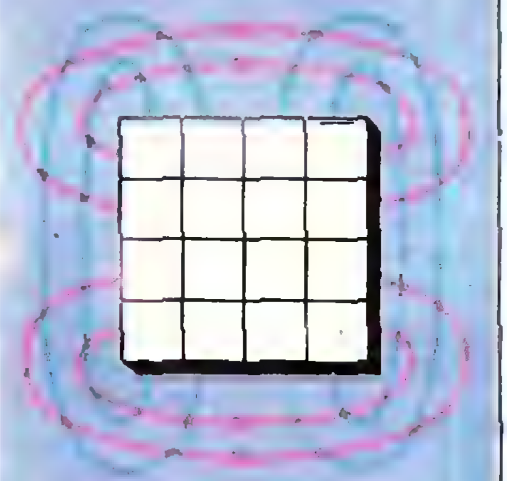
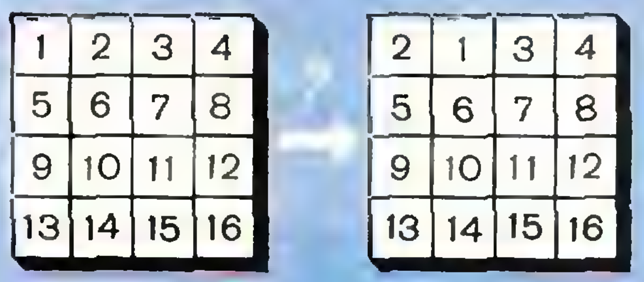


Рис. 17.



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 18. а) б)

7. Игра в 16 на торе. Чтобы сделать из прямоугольника цилиндр, нужно склеить противоположные вертикальные края. Если после этого склеить и противоположные горизонтальные края (рис. 16), получится *тор* (поверхность бублика).

Чтобы изготовить «игру в 16 на торе», не обязательно вырезать шашки из бублика. Достаточно в обычной игре в 15 заполнить пустую клетку шашкой с номером 16 и разрешить «циклические сдвиги и строк и столбцов» (рис. 17).

а) Можно ли такими сдвигами перевести расположение, изображенное на рисунке 18, *а*, в расположение, изображенное на рисунке 18, *б*?

б) Можно ли любое расположение перевести в любое другое?

в) Решите общую задачу об игре в n^2 на торе.

* * *

Эта статья была уже подготовлена к публикации, когда редакция «Кванта» получила письмо об игре в 15 от школьника — десятиклассника А. Григоряна. Имя Саши Григоряна, ученика бакинской средней школы № 211, знакомо нам давно: он регулярно присылает решения задач в «Задачник «Кванта» и является одним из победителей прошлогоднего конкурса «Кванта». В письме про игру в 15 Саша четко и правильно излагает самостоятельно разработанную им теорию этой игры (близкую к теории, описанной в статье). Редакция благодарит А. Григоряна за интересное письмо и желает ему новых успехов.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1-го апреля 1974 г. по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М246, М247» или «... Ф258». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте; «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М246—М250; Ф258—Ф262

М246. На плоскости даны две прямые m и n и точка O. Постройте треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых m и n, а центр описанной окружности находится в точке O.

Ю. А. Грязнов

М247. Квадрат 6×6 нужно заполнить 12 плитками, из которых k имеют форму уголка, а остальные $12 - k$ — прямоугольника (см. рис. 1). При каких k это возможно?

Э. Туркевич

М248. В выпуклый n-угольник $A_1A_2 \dots A_n$ вписан n-угольник $B_1B_2 \dots B_n$, площадь которого равна P (вершина B_i лежит на стороне A_iA_{i+1} для $i = 1, 2, \dots, n-1$, а вершина B_n — на A_nA_1). Около того же n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ описан n-угольник $C_1C_2 \dots C_n$, площадь которого равна Q, так, что

$$C_1C_2 \parallel B_1B_2, \quad C_2C_3 \parallel B_2B_3, \quad \dots, \quad \dots \quad C_nC_1 \parallel B_nB_1$$

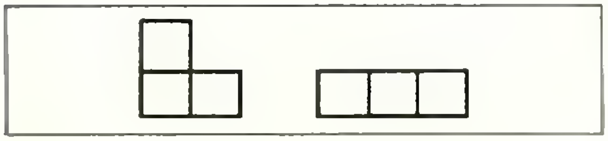


Рис. 1.

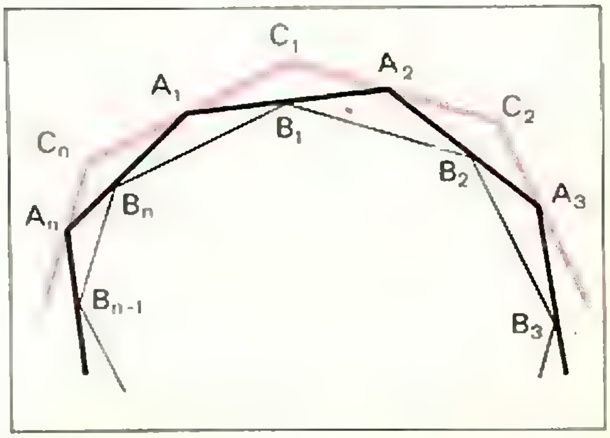


Рис. 2.

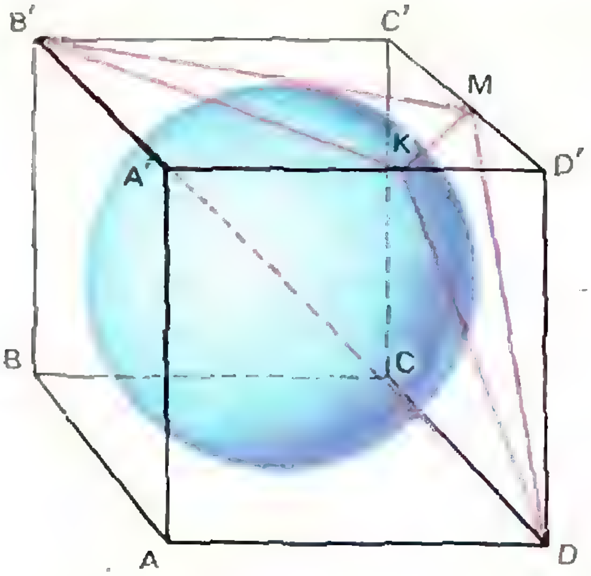


Рис. 3.

(вершина A_i лежит на стороне $C_{i-1}C_i$ для $i = 2, \ldots, n$, а вершина A_1 — на стороне C_nC_1, см. рис. 2). Найдите площадь n-угольника $A_1A_2 \ldots \ldots A_n$.

И. А. Кушнир

М249*. На ребрах $A'D'$ и $C'D'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбирают две точки K и M так, что плоскость KDM касается шара, вписанного в куб (рис. 3). Докажите, что величина φ двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M. Найдите эту величину φ.

И. Ф. Шарыгин

М250. а) * При дворе короля Артура *) собрались n рыцарей. Некоторые из них враждуют друг с другом, но у каждого рыцаря не менее $\frac{n}{2}$ друзей среди собравшихся. Докажите, что Мерлин — советник короля Артура — может усадить рыцарей за круглым столом так, чтобы рядом с каждым сидели его друзья.

б) Докажите, что если у каждого рыцаря четное (и, конечно, положительное) количество друзей, то Мерлин может рассадить рыцарей за несколько круглых столов так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом (у Артура *есть столики на двоих, на троих* и т. д.).

Ф258. Кольцо из тонкой проволоки разрывается, если его зарядить зарядом Q. Диаметр кольца и диаметр проволоки увеличили в 3 раза. При каком заряде будет разрываться это новое кольцо?

Ф259. Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной плоскости с ускорением a. Брусок A, размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, скользит по внутренней поверхности цилиндра так, что угол между радиусом-вектором точки A и вертикалью остается постоянным. Найти этот угол, если коэффициент трения бруска о поверхность цилиндра равен k.

Ф260. На вход схемы (см. рис. 4) подаются прямоугольные импульсы напряжения величиной U_0 и длительностью τ. Период повторения импульсов T (рис. 5). Найти установившееся через очень много периодов

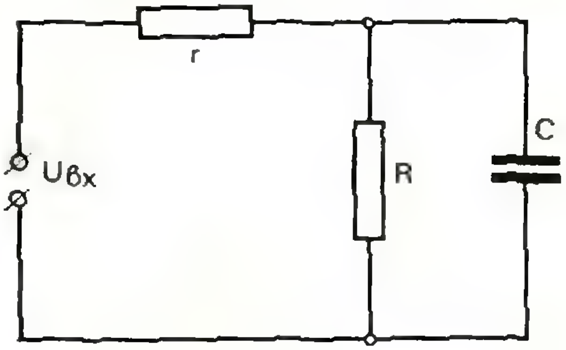


Рис. 4.

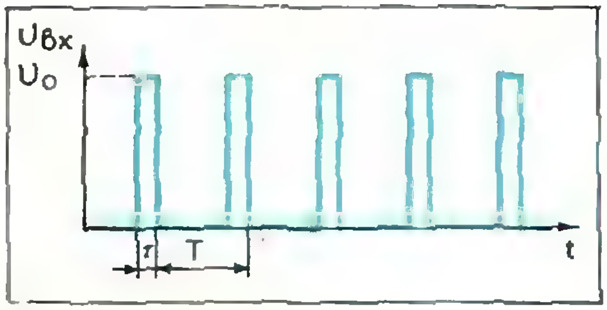


Рис. 5.

---

*) См. Марк Твен. Янки при дворе *короля Артура*.

напряжение на конденсаторе, если в течение периода напряжение на конденсаторе изменяется очень мало.

Ф261. На границе раздела двух жидкостей с разными плотностями плавает, погрузившись в нижнюю жидкость на глубину h, толстостенный стакан с тонким дном. Стакан заполнен доверху верхней жидкостью. Внешний радиус стакана R, внутренний — r. В дне стакана появилась дыра. Насколько изменится глубина погружения стакана после того, как жидкость перестанет втекать в него?

Ф262. Тонкостенный цилиндрический стакан, имеющий тонкое дно, закрыт невесомым тонким поршнем. Между поршнем и дном в стакане вставлена пружина. Внутри стакана находится воздух при атмосферном давлении p_0. Стакан плавает в воде, как показано на рисунке 6, расстояние от поверхности воды до поршня равно l_1, глубина погружения стакана равна l_2. Площадь поршня S, жесткость пружины k, плотность воды ρ. На какую максимальную глубину можно погрузить стакан под воду, чтобы он еще мог всплыть? Объемом пружины пренебречь.

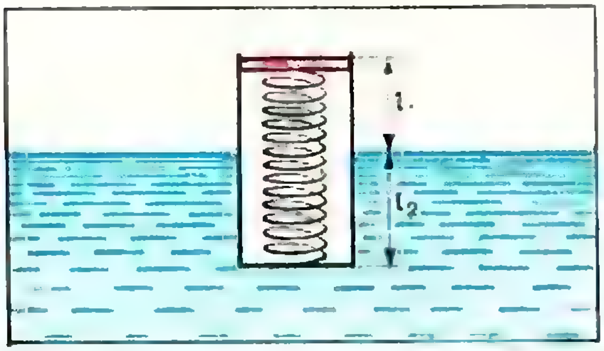


Рис. 6.

Решения задач

М205—М207, Ф213—Ф217

М205. *24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица 24 × 25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что*

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой», так что каждый из студентов решил четное число (в частности, быть может, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «+», а некоторые из остальных знаком «—», и приписать каждой задаче некоторое целое число баллов, так, что каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «+» и «—».

Обе задачи а) и б) легко решить с помощью теоремы о системах линейных уравнений. Сначала сформулируем подходящим образом задачу б).

Пусть число студентов — m, задач — n. Зададим числа a_{ij} ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$) следующим образом: a_{ij} равно 1, если i-й студент решил j-ю задачу, и 0, если нет. Мы должны доказать, что существуют такие целые числа x_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) — положительные, отрицательные и нули, что

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &= 0, \quad (1) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

или, короче, для каждого i от 1 до m

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0.$$

Действительно, если мы припишем j-й задаче знак числа x_j и количество баллов, равное $|x_j|$ (а задачи, для которых $x_j = 0$, пропустим), то i-е уравнение в (1) как раз будет означать, что i-й студент решил «положительные» задачи и «отрицательные» задачи с одной и той же суммой баллов.

Конечно, система уравнений имеет очевидное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (его называют *тривиальным*), но нас оно не интересует: хотя бы одна задача должна быть отмечена знаком «+» или «—».

Теорема. Если $m < n$, то система уравнений (1) всегда имеет нетривиальное решение $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем x_j выражается через числа a_{ij} и число 1 с помощью четырех арифметических действий.

Доказательство проведем индукцией по m. Для $m = 1$ мы имеем одно уравнение (с $n \geqslant 2$ неизвестными):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0.$$

Если $a_{11} = 0$, можно взять

$$x_1^0 = 1, \; x_2^0 = x_3^0 = \dots = x_n^0 = 0. \qquad (2)$$

Если $a_{11} \neq 0$, то можно взять

$$x_2^0 = 1, \; x_3^0 = \dots = x_n^0 = 0,$$

$$x_1^0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Пусть для $(m-1)$ уравнений утверждение доказано. Выведем отсюда теорему для m уравнений.

Если $a_{11} = 0$, то по-прежнему можно взять решение (2). Если $a_{11} \neq 0$, то вычтем из i-го уравнения первое, умноженное на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, чтобы коэффициент при x_1 стал — a_{i1}. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a'_{m1}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Ее последние $(m-1)$ *уравнений, по предположению* индукции (поскольку $m - 1 < n - 1$), имеют нетривиальное общее решение: $(x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$. Подставив его в первое уравнение (2), найдем

$$x_1^0 = -\frac{a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 + \dots + a_{1n}x_n^0}{a_{11}}.$$

Ясно, что все a'_{ij} выражаются через a_{ij} с помощью четырех арифметических действий; по предположению индукции, то же верно для x_j^0 $(j = 2, \dots, n)$, а следовательно, и для x_1^0.

Поскольку в нашей задаче a_{ij} равно 0 или 1, то найденные в теореме x_j будут рациональными числами; если мы умножим все эти числа на общее кратное знаменателей, то получим решение в целых числах: если $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ — решение системы (1), то $(Kx_1^0, \dots, Kx_n^0)$ тоже удовлетворяют этой системе.

Перейдем к задаче а). Во-первых, ее можно также вывести непосредственно из теоремы; нужно только «числа» и «арифметические операции» определить иначе. А именно, пусть множество «чисел» состоит из двух элементов: 0 и 1, сложение и умножение определяются по формулам:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0; \; 0 + 1 = 1 + 0 = 1; \qquad (3)$$

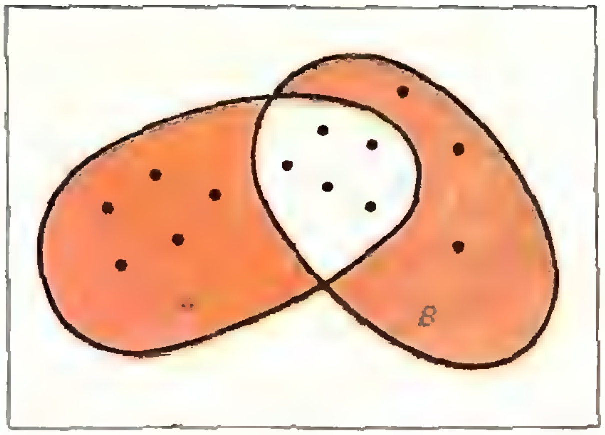


Рис. 1.

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0; \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

Можно проверить, что эти действия удовлетворяют всем обычным свойствам, включая возможность вычитания и деления на числа, отличные от нуля; как говорят, множество $\{0,1\}$ с операциями (3) образует поле. Найдем нетривиальное решение системы уравнений (1) в этом *поле*. Решением будет набор $(x_j^0, \dots, x_n^0)$ нулей и единиц. Если отметить галочками те задачи, для которых $x_j^0 = 1$, то все студенты решат четное число отмеченных задач: ведь сумма четного числа единиц по правилам (3) равна 0, а нечетного — 1.

Второе решение задачи а) можно вывести из б). Пусть уже найден набор целых чисел x_j^0, удовлетворяющих системе (1). Заменим все четные числа x_j^0 на 0, а нечетные — на 1, и отметим задачи, которым соответствует единица *). Ясно, что каждая сумма $\sum a_{ij}x_j^0$ осталась четной (каждое слагаемое изменено на четное число). Поэтому каждый студент решил четное число отмеченных задач.

Наконец, приведем совсем элементарное третье решение задачи а). Соображение, которым мы будем пользоваться — «если в M клетках сидят более M кроликов, то хотя бы в одной клетке сидит не менее двух кроликов» — называется обычно «принципом Дирихле» **).

Подсчитаем, сколькими способами может преподаватель расставить галочки у n задач. Другими словами, сколько имеется разных подмножеств у множества из n элементов, включая «пустое» подмножество и «полное» подмножество из всех n элементов. У каждой задачи, независимо от остальных, мы можем поставить галочку или не поставить. Таким образом, искомое число равно 2^n. Для каждого из 2^n подмножеств A сопоставить цифру 1 тем студентам, *которые решили нечетное число задач*, из подмножества, A и 0 — тем, кто решил четное число задач. Таким образом, каждому подмножеству A мы поставим в соответствие столбец из нулей и единиц. Таких столбцов, очевидно, $2^m < 2^n$. Следовательно, найдутся два разные подмножества A и B такие, что им соответствует один и тот же столбец из нулей и единиц. Мы утверждаем, что условие задачи *будет выполнено*, если отметить теперь те задачи, которые входят ровно в одно из множеств A и B; другими словами, нужно поставить «галочки» у задач из множества, закрашенного на рисунке 1:

---

*) Можно считать, что не все x_j^0 четные. Действительно, если все x_j^0 четные, то рассмотрим набор $x_j^0 = \frac{x_j^0}{2}$, тоже являющийся решением.

**) Статью под таким названием см. в «Кванте № 7», 1971.

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \,\Delta\, B^*).$$

Поскольку у каждого студента число решенных задач из A и B имеют одинаковую четность, то в $A \,\Delta\, B$ количество решенных им задач четно; это совершенно ясно из рисунка 10: ведь число элементов в $A \,\Delta\, B$ равно сумме числа элементов в A и в B минус удвоенное число элементов $A \cap B$.

Н. Б. Васильев

М206. *Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n, взаимно простого с числом 10, в последовательности можно указать такую группу стоящих подряд цифр, что записываемое этими цифрами число делится на n*

Будем считать, что нам задана бесконечная последовательность цифр $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, записанная слева направо. Рассмотрим такие числа: $\overline{a_m}$, $\overline{a_{m-1}a_m}$, $\overline{a_{m-2}a_{m-1}a_m}, \ldots,$

$$\overline{a_1a_2\ldots a_m}$$

(черта, как обычно, обозначает десятичную запись числа). Если m достаточно велико — больше n, — то найдутся два числа $\overline{a_{m-i}a_{m-i+1}\ldots a_m}$ и $\overline{a_{m-j}a_{m-j+1}\ldots a_m}$, где $i<j$, дающие при делении на n одинаковый остаток. Действительно, при делении на n возможно n различных остатков: 0, 1, 2, ... $n-1$. Поэтому, если $m > n$, то среди m остатков, получающихся при делении выписанных выше чисел на n, обязательно найдутся два одинаковых остатка: ведь если бы все остатки были различны, то их было бы не больше n, а $m<n$. Рассуждения такого рода уже неоднократно встречались на страницах «Кванта». В «Кванте» № 7 за 1971 год помещена статья Орлова «Принцип Дирихле», в которой приводится много задач, решающихся с помощью подобных рассуждений.

Итак, $\overline{a_{m-i}\ldots a_m}$ и $\overline{a_{m-j}\ldots a_m}$ дают одинаковый остаток при делении на n. Поэтому их разность

$$\overline{a_{m-j}a_{m-j+1}\ldots a_{m-i-1}0\ldots0} = 10^{i+1}\,\overline{a_{m-j}a_{m-j+1}a_{m-i-1}}$$

делится на n.

В условии задачи сказано, что числа n и 10 взаимно просты, поэтому ни один простой делитель числа n не может входить в число 10^{i+1}, следовательно, $\overline{a_{m-j}a_{m-j+1}\ldots a_{m-i-1}}$ делится на n.

Л. Г. Лиманов

М207. *Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Опишите вокруг треугольника $A_1A_2A_3$ треугольник $M_1M_2M_3$ наибольшей площади, подобный треугольнику $B_1B_2B_3$ (при этом вершина M_1 должна лежать на прямой A_2A_3, вершина M_2 — на прямой A_3A_1, вершина M_3 — на прямой A_1A_2).*

Будем придерживаться следующих обозначений: большая жирная буква (например, **X**) обозначает треугольник, большие и маленькие буквы с индексами 1, 2, 3 (X_1, X_2, X_3, x_1, x_2, x_3) — вершины и противоположные им стороны этого треугольника (причем

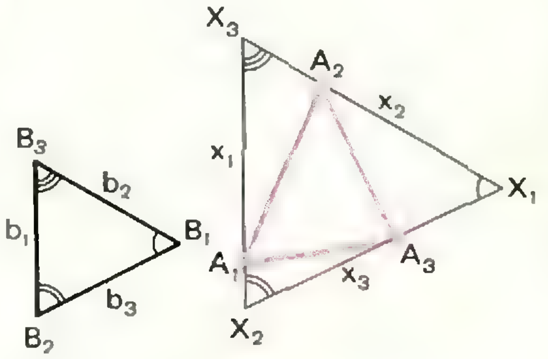


Рис. 2.

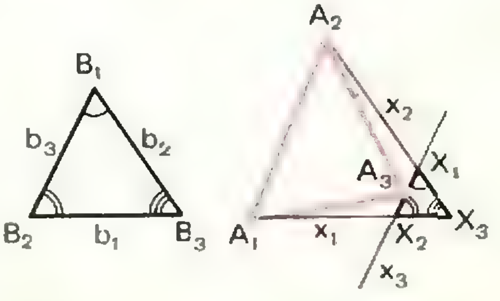


Рис. 3.

---

*) См. статью Гиндикин С. Г., Сколько существует операций над множествами, «Квант», 1973, № 7.

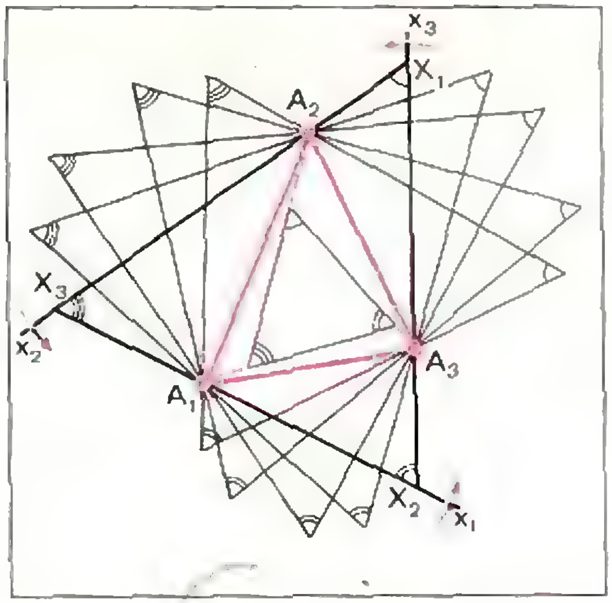


Рис. 4.

маленькие буквы обозначают также и прямые, на которых лежат стороны: X_2X_3 — прямая x_1, X_3X_1 — прямая x_2, X_1X_2 — прямая x_3.

Пусть треугольник **B** как угодно расположен в плоскости треугольника **A**. Проведем через вершины A_1, A_2 и A_3 прямые x_1, x_2, x_3, соответственно параллельные прямым b_1, b_2 и b_3. Ясно, что треугольники **X** и **B** подобны, поскольку стороны их соответственно параллельны (рис. 2, 3). Таким образом, мы построили треугольник **X**, подобный треугольнику **B**, стороны которого или их продолжения проходят через вершины A_1, A_2, A_3 треугольника **A**. (Многие читатели считали, что треугольник, подобный **B**, должен быть описан вокруг **A** в естественном, «узком» смысле слова, то есть точкам A_1, A_2, A_3 не разрешается лежать на продолжениях сторон x_1, x_2, x_3, а только на самих сторонах, как на рисунке 2, но не на 3. В конце мы скажем о тех изменениях, которые придется внести в решение при таком, более «узком» понимании).

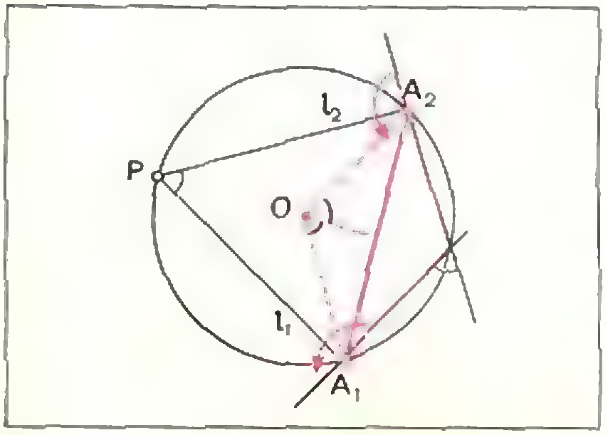


Рис.5

Если вращать одновременно с одной и той же угловой скоростью прямую x_1 вокруг ее точки A_1, x_2 — вокруг A_2 и x_3 — вокруг A_3, то мы получим целое семейство треугольников **X**. Все это семейство мы обозначим буквой S. Ясно, что каждый треугольник **X** семейства S подобен **B**. На рисунке 4 видно, как меняется треугольник **X** при повороте прямых x_1, x_2, x_3; не очень ясно только, что происходит в «критический» момент, когда треугольник **X** становится совсем маленьким; мы увидим скоро, что в некоторый момент прямые x_1, x_2, x_3 проходят через одну точку, так что треугольник **X** вырождается в эту точку; затем прямые x_1, x_2, x_3 приближаются к своим первоначальным положениям (это происходит, когда каждая из них повернется на угол 180°).

Выясним более точно, как устроено семейство S. Заметим, что, когда две прямые равномерно вращаются вокруг двух своих точек A_1 и A_2 (рис. 5), точка их пересечения P описывает окружность с центром O, для которого $\sphericalangle OA_1A_2 = \sphericalangle OA_2A_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, где φ — постоянный угол между прямыми,

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

При этом для точек P по одну сторону от прямой A_1A_2 угол A_1PA_2 равен φ, а по другую — $(\pi - \varphi)$. Отсюда следует, что каждая из точек X_1, X_2, X_3 — вершин треугольников **X** — описывает окружности. Центры этих окружностей обозначим через O_1, O_2, O_3 (окружность с центром O_1 проходит через A_2 и A_3 и т. д.).

Найдем теперь треугольник наибольшей площади. Воспользуемся тем, что все треугольники **X** подобны, то есть и площадь, и длина каждой стороны максимальна у одного и того же из них. Рассмотрим, например, как меняется длина стороны X_2X_3 (рис. 6). Поскольку окружности, по которым пробегают X_2 и X_3, обе проходят через точку A_1, то основания K_2 и K_3 перпендикуляров O_2K_2 и O_3K_3, опущенных на прямую x_1, — середины отрезков A_1X_2 и A_1X_3. Поэтому

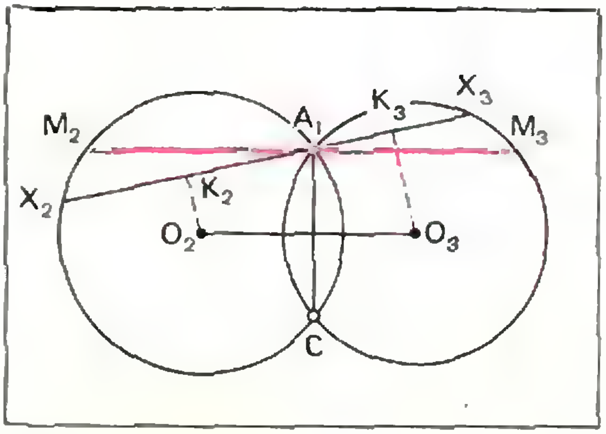


Рис. 6.

$|X_2X_3| = 2|K_2K_3|$. Но длина $|K_2K_3|$ проекции отрезка O_2O_3 на прямую x_1 максимальна, очевидно, тогда, когда $x_1 \parallel O_2O_3$. Итак, мы доказали, что сторона x_1 максимального треугольника **M** из семейства S параллельна O_1O_2. Разумеется, точно так же получим, что у этого треугольника $x_2 \parallel O_1O_3$, $x_3 \parallel O_2O_1$. Отсюда ясно, как построить этот треугольник **M**.

Минимальный треугольник семейства S получается, когда прямые x_1, x_2, x_3 перпендикулярны линиям центров соответствующих пар окружностей: O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2; при этом все стороны треугольника **X** равны нулю. Таким образом, все три вершины треугольника **X** совпадают — он вырождается в точку; обозначим ее C. Через эту точку C проходят все три окружности. Рисовать семейства треугольников вида S проще всего, начиная именно с окружностей: убедитесь*) в том, что если взять произвольно три окружности, проходящие через одну точку C, обозначить отличные от C точки их попарного пересечения через A_1, A_2, A_3, то можно принять любую точку на окружности за одну из трех вершин треугольника **X**, стороны которого проходят через точки A_1, A_2, A_3, а вершины лежат на наших окружностях. Заметим еще, что при гомотетии с центром в точке C и коэффициентом 2 центры окружностей O_1, O_2, O_3 переходят в вершины M_1, M_2, M_3 максимального треугольника семейства S (рис. 7, *а*). Таким образом, треугольник **O** всегда подобен **B****).

Мы указали выше, какой именно треугольник семейства S наибольший. Но это еще не полностью решает задачу М207. Дело в том, что множество треугольников, подобных **B** и описанных вокруг **A**, не исчерпывается одним семейством S. Например, треугольник **X** на рисунке 3 не входит в семейство S, порожденное треугольником **B** рисунка 2. Вообще, если отразить треугольник **B** относительно какой-либо прямой (безразлично какой) и, исходя из полученного треугольника **B′**, построить семейство S' треугольников, — так же, как вначале мы строили семейство S, исходя из **B**, — то семейства S и S' не будут содержать общих треугольников***).

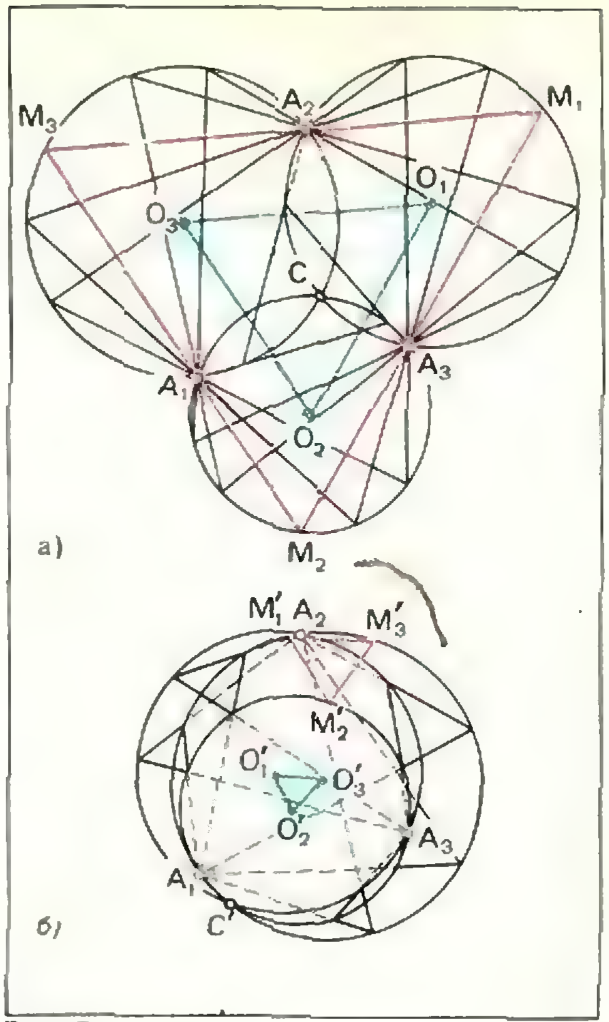


Рис. 7.

Таким образом, нужно найти наибольший треугольник в каждом из них и из этих двух треугольников выбрать больший.

Оказывается, однако, что можно сразу сказать, в каком из двух семейств S и S' наибольший треугольник больше. Чтобы сделать это, а также чтобы разобраться, все ли нужные треугольники «охвачены» двумя семействами S и S', введем понятие «ориентации» треугольника. Заметим, что все рассматриваемые нами треугольники имеют определенную нумерацию вершин: мы говорим «треугольник», подразумевая «треугольник, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3». Ориентация такого треугольника — это направление обхода («по» или «против» часовой стрелки), определяемое указанным порядком вершин: от 1 к 2, затем к 3, затем обратно к 1. На рисунке 8 черные треугольники ориентированы по часовой стрелке, красные — против. Ясно, что два гомотетичных треугольника (стороны которых соответственно параллельны) ориентированы одинаково, треугольники, получающиеся друг из друга поворотом, — тоже, а треугольники, симметричные относительно прямой, ориентированы противоположно друг другу. Таким образом, все треугольники семейства S

---

*) «Убедитесь» можно понимать здесь двояко: и как «проверьте на примерах, вооружившись циркулем, линейкой и бумагой», и как «точно сформулируйте и докажите в общем виде».

**) Заметим, что возможен случай, когда треугольник O вырождается в точку (и все три окружности совпадают). Подумайте, когда это происходит и во что превращается в этом случае семейство S.

***) Окружности, связанные с семейством S', получаются из окружностей, связанных с S, симметрией относительно прямых a_i (см. рис. 7, *б*).

имеют одну ориентацию (такую же, как **B**), все треугольники S' — противоположную. Так вот, можно доказать, что *наибольший треугольник принадлежит семейству, ориентация которого совпадает с ориентацией* **A**. (Докажите это самостоятельно.)

Теперь обсудим вопрос о том, все *ли* треугольники, описанные вокруг **A** и подобные **B**, мы изучили. Пока что мы рассмотрели все треугольники такого вида, получающиеся из **B** поворотом, гомотетией и, быть может, еще симметрией относительно прямой. Это всевозможные треугольники **X**, которые подобны **B** «с сохранением нумерации вершин», то есть так, что $\measuredangle X_1 = \measuredangle B_1$, $\measuredangle X_2 = \measuredangle B_2$, $\measuredangle X_3 = \measuredangle B_3$. Итак, если требовать в условии именно такого подобия (то есть подразумевать, что $\measuredangle M_1 = \measuredangle B_1$, $\measuredangle M_2 = B_2$, $\measuredangle M_3 = \measuredangle B_3$), то решение можно считать законченным: все множество допустимых треугольников **X** исчерпывается двумя семействами S и S', которые мы изучали.

Если же допускать подобия с «перенумерацией вершин» (то есть такие, что $\measuredangle X_1 = \measuredangle B_i$, $\measuredangle X_2 = \measuredangle B_j$, $\measuredangle X_3 = \measuredangle B_k$, где (i, j, k) — любая перестановка из цифр 1, 2, 3), то получится не два, а 12 семейств S_{ijk}, и S'_{ijk}. Вершины треугольников из этих семейств заполнят 18 окружностей*). На рисунке 9, *а* или 9, *б* можно выбрать любую тройку прямых, попарно не параллельных и проходящих (по одной) через точки A_1, A_2, A_3 — обозначить их соответственно x_1, x_2, x_3 — и получится один из представителей семейства S_{ijk} или S'_{ijk} (при этом $x_1 \parallel b_i$, $x_2 \parallel b_j$, $x_3 \parallel b_k$). Оказывается, что и из этих 12 семейств можно указать то, в котором наибольший треугольник больше, чем во всех других. Чтобы сформулировать результат, условимся обозначать вершины треугольников **A** и **B** так, что $\measuredangle A_1 \leqslant \measuredangle A_2 \leqslant \measuredangle A_3$ и $\measuredangle B_1 \geqslant \measuredangle B_2 \geqslant \measuredangle B_3$ (теперь мы можем это себе позволить), и расположим треугольник **B** так, чтобы ориентации **A** и **B** совпадали. Тогда самый большой треугольник принадлежит семейству S_{123}. Это утверждение доказали участники математического кружка из г. Кировска под руководством *Н. Д. Нагаева*, приславшего задачу **М207** в «Квант». Они рассматривали, правда, только те шесть семейств треугольников:

$$S_{123},\ S_{231},\ S_{312},\ S'_{132},\ S'_{321},\ S'_{213}, \quad (1)$$

ориентация треугольников в которых совпадает с ориентацией треугольника **A**, но в остальных семействах, как мы уже говорили, максимальные треугольники заведомо меньше.

Наконец, коснемся решения задачи про треугольники, описанные в «узком» смысле слова — так, что вершины A_i лежат на сторонах x_i, а не на их продолжениях. Ясно, что из всех семейств такие треугольники могут встретиться только в тех, которые дают ориентацию, совпадающую с ориентацией **A**. При заданном соответствии номеров вершин остается, таким образом, одно семейство. Если и **A**, и **B** — треугольники остроугольные, то, как можно доказать**), максимальный треугольник **M** принадлежит допустимому множеству (описан в «узком» смысле). В общем случае это может быть не так,

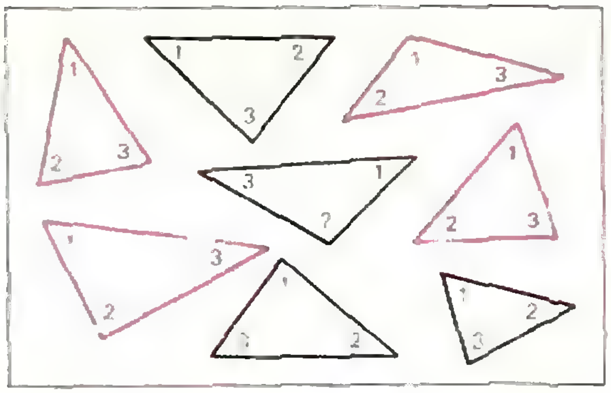


Рис. 8.

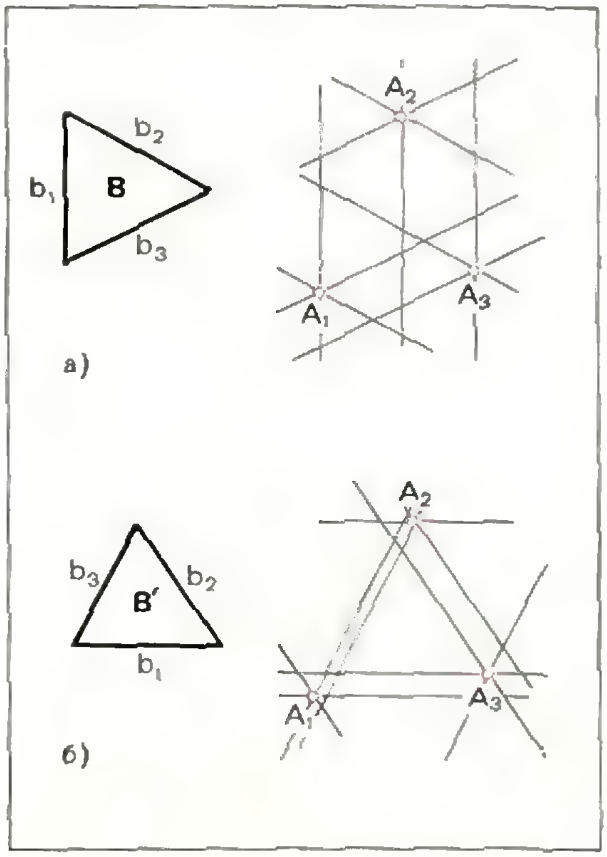


Рис. 9.

---

*) Если **B** равносторонний, то семейств 2; если **B** равнобедренный, то 6.

**) См., например, задачу 54 из книги: Морозова Е. А. и Петраков И. С. Международные математические олимпиады. М., «Просвещение», 1971.

и тогда в допустимом множестве (если оно вообще не пусто!) придется выбрать тот треугольник, который получается из **M** поворотом сторон x_1, x_2, x_3 на наименьший возможный угол. Это будет, конечно, треугольник, одна из сторон которого содержит одну из сторон треугольника **A**.

Н. Б. Васильев

Ф213. *Максимально допустимая скорость движения автомобиля по скользкой дороге при прохождении поворота радиуса R равна $V_{\max}$. На повороте дорога наклонена под углом α к горизонту. Какова минимальная скорость, с которой должен двигаться автомобиль, чтобы проехать поворот?*

Рассмотрим силы, действующие на автомобиль в первом случае (рис. 10, *а*). Это сила тяжести mg, сила нормальной реакции со стороны дороги N и сила трения $F_{\text{тр}} = kN$ (k — коэффициент трения колес о дорогу). Поскольку автомобиль движется с максимально допустимой скоростью, сила трения препятствует «заносу» автомобиля (движению вверх по дороге) и направлена вниз по наклонной плоскости дороги.

Во втором случае сила трения $F'_{\text{тр}} = kN'$ (N' — сила реакции дороги в этом случае) препятствует скольжению автомобиля под действием силы тяжести вниз по плоскости дороги и потому направлена вверх (рис. 10,*б*).

Запишем уравнения движения автомобиля для первого и второго случаев. Для этого спроектируем все силы на вертикальную и горизонтальную оси.

Так как автомобиль в вертикальном направлении не перемещается, то при движении с $v=v_{\max}$

$$N\cos\alpha - mg - F_{\text{тр}}\sin\alpha = 0,$$

или

$$N(\cos\alpha - k\sin\alpha) - mg = 0, \qquad (1)$$

а при движении с $v = v_{\min}$

$$N'\cos\alpha - mg + F'_{\text{тр}}\sin\alpha = 0,$$

или

$$N'(\cos\alpha + k\sin\alpha) - mg = 0. \qquad (2)$$

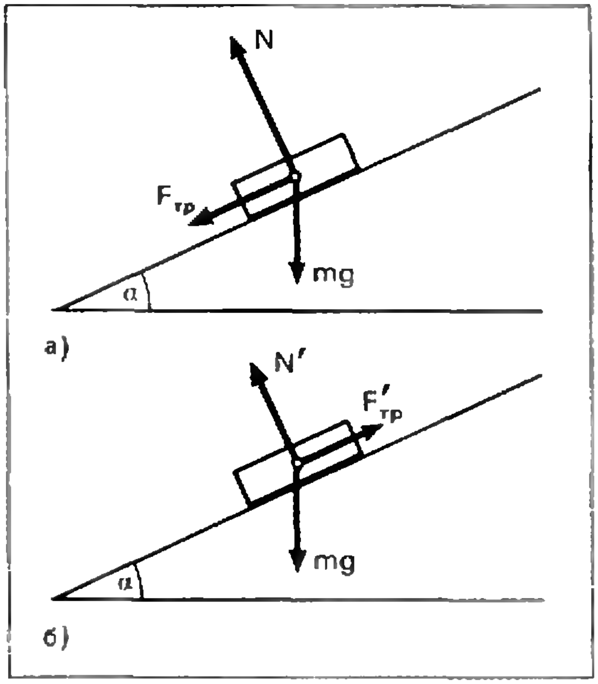


Рис. 10.

В горизонтальной плоскости автомобиль движется по окружности радиуса R с центростремительным ускорением, равным $\frac{v^2}{R}$. Согласно второму закону Ньютона при движении с $v = v_{\max}$

$$N\sin\alpha + F_{\text{тр}}\cos\alpha = \frac{mv_{\max}^2}{R},$$

или

$$N(\sin\alpha + k\cos\alpha) = \frac{mv_{\max}^2}{R}, \qquad (3)$$

а при движении с $v = v_{\min}$

$$N'\sin\alpha - F'_{\text{тр}}\cos\alpha = \frac{mv_{\min}^2}{R}$$

или

$$N'(\sin\alpha - k\cos\alpha) = \frac{mv_{\min}^2}{R}. \qquad (4)$$

Из уравнения (2) найдем N', подставим в уравнение (4) и получим

$$\frac{mv_{\min}^2}{R} = mg\frac{\sin\alpha - k\cos\alpha}{\cos\alpha + k\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$v_{\min} = \sqrt{Rg\frac{\operatorname{tg}\alpha - k}{1 + k\operatorname{tg}\alpha}}. \qquad (5)$$

Для того чтобы найти k, воспользуемся уравнениями (1) и (3). Из уравнения (1) выразим N, подставим в уравнение (3) и получим

$$\frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha} = \frac{v_{\max}^2}{Rg}$$

и

$$k = \frac{v_{\max}^2 - Rg\operatorname{tg}\alpha}{v_{\max}^2\operatorname{tg}\alpha + Rg}.$$

Тогда

$$v_{\min} = \sqrt{Rg\frac{v_{\max}^2(\operatorname{tg}^2\alpha - 1) + 2Rg\operatorname{tg}\alpha}{Rg\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right) + 2v_{\max}^2\operatorname{tg}\alpha}}.$$

Ф214. *В схеме, изображенной на рисунке 11, $R_1 = 10$ ком, $R_2 = R_3 = 5$ ком, а к клеммам 1—2 приложено переменное напряжение $U = 127$ в. Диоды можно считать идеальными — при одном направлении тока их сопротивление бесконечно мало, при другом — бесконечно велико. Найти, какая мощность выделяется на сопротивлении R_1.*

Так как диоды идеальные, можно считать, что половину периода изменения напряжения на клеммах участки цепи *AB* и *CD* накоротко замкнуты, а другую половину периода—разомкнуты. Это означает, что в первом случае данная схема эквивалентна схеме, приведенной на рисунке 12, *а*, а во втором—схеме, приведенной на рисунке 12, *б*.

Количество теплоты, выделяемой на сопротивлении R_1 в течение первой половины периода, равно

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\frac{T}{2}$$

(T—период изменения напряжения в цепи, $U = 127$*в*—действующее значение напряжения).

В течение второй половины периода через сопротивление R_1 идет ток

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

и на нем выделяется количество теплоты

$$Q_2 = I^2 R_1 \frac{T}{2} = \frac{U^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} R_1 \frac{T}{2}.$$

За период T на сопротивлении R_1 выделяется количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{T}{2} U^2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}\right].$$

Это означает, что в среднем (по периоду) на сопротивлении R_1 выделяется мощность

$$P = \frac{Q}{T} = \frac{U^2}{2}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_1}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}\right] \approx 1 \text{ вт}.$$

Ф215. *Два мыльных пузыря радиусов R_1 и R_2 сливаются в один пузырь радиуса R_3. Найти атмосферное давление, если коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки равен σ.*

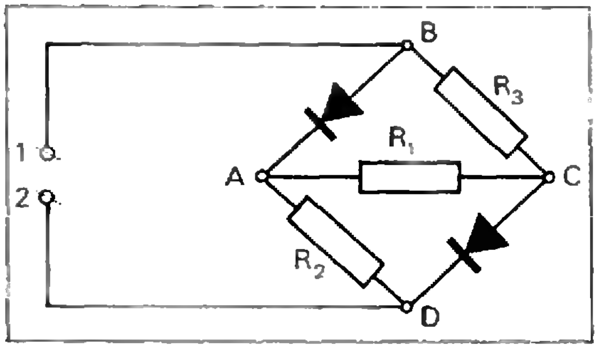


Рис. 11.

При решении этой задачи будем исходить из того, что после слияния двух мыльных пузырей в один суммарная масса воздуха в них не изменяется:

$$m_3 = m_1 + m_2. \qquad (1)$$

Согласно уравнению Менделеева—Клапейрона, масса воздуха в пузыре равна

$$m = \frac{pV\mu}{RT}, \qquad (2)$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$—объем пузыря, μ—молекулярная масса воздуха, T—температура (она равна температуре окружающего воздуха и одинакова для всех пузырей) и R—универсальная газовая постоянная.

Запишем условие равновесия пузыря:

$$p = p_а + p_{доб} = p_а + \frac{2\sigma}{R_п}, \qquad (3)$$

где $p_{доб} = \frac{2\sigma}{R_п}$—добавочное давление под сферической поверхностью мыльной пленки радиуса $R_п$*), а $p_а$ — атмосферное давление.

---

*) Заметим, что в данном случае σ — коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки (заданный в условии), численно равный удвоенному значению коэффициента поверхностного натяжения мыльного раствора, приводимого в таблицах.

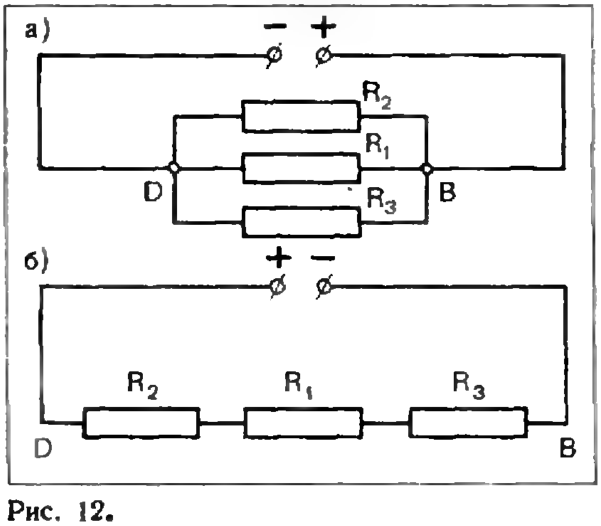


Рис. 12.

Из соотношений (2) и (3)

$$m_1 = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_1}\right)\frac{4}{3}\pi R_1^3\frac{\mu}{RT},$$

$$m_2 = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_2}\right)\frac{4}{3}\pi R_2^3\frac{\mu}{RT},$$

$$m_3 = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_3}\right)\frac{4}{3}\pi R_3^3\frac{\mu}{RT}.$$

Найденные выражения для m_1, m_2, и m_3 подставим в равенство (1). В результате получим:

$$\left(p_a + \frac{2\sigma}{R_1}\right)R_1^3 + \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_2}\right)R_2^3 = \left(p_a + \frac{2\sigma}{R_3}\right)R_3^3,$$

откуда

$$p_a = \frac{2\sigma\left(R_3^2 - R_1^2 - R_2^2\right)}{R_1^3 + R_2^3 + R_3^3}.$$

Ф216. *Вставая и приседая в определенные моменты времени, мальчик на качелях легко увеличивает амплитуду своих качаний. Объясните, почему это удается.*

Качели с мальчиком — это маятник. Свободные колебания маятника затухают из-за наличия сил сопротивления: энергия колебаний маятника переходит в тепло. Для того чтобы сделать колебания незатухающими, нужно каким-либо способом компенсировать эти потери.

Можно маятнику с помощью специального механизма периодически поставлять энергию извне. Если энергия, сообщенная маятнику, например, за период, будет больше потерянной энергии за это же время, то амплитуда колебаний будет нарастать. При этом, однако, будут увеличиваться и потери энергии. Поэтому, когда поступающая извне энергия сравняется с теряемой энергией, амплитуда колебаний перестанет изменяться. Такие колебания называют автоколебаниями. Примером механической автоколебательной системы является маятник в часах.

Другой способ увеличения амплитуды колебаний — изменение параметров самой системы. Именно о таком способе говорится в данной задаче.

Рассмотрим сначала колебания простейшей колебательной системы — математического маятника. Если маятник в силу каких-то случайных причин начал колебаться, то раскачать его, то есть увеличить амплитуду колебаний, можно следующим образом: всякий раз, когда маятник проходит положение равновесия, будем поднимать его, а когда маятник максимально отклонен, будем его опускать. Таким образом мы периодически (с частотой, в два раза большей частоты колебаний маятника) меняем длину нити маятника — параметр самой системы. Поэтому такой способ возбуждения колебаний называют параметрическим возбуждением.

Когда мы поднимаем маятник, мы совершаем над ним работу, увеличиваем его потенциальную энергию. Опуская маятник, мы предоставляем возможность силе тяжести совершить работу, что уменьшает энергию маятника. Но все дело в том, что извне поступает энергии больше, чем расходуется. Действительно, поднимая за нить маятник на высоту h, тем самым укорачивая на h длину нити, мы совершаем работу

$$A_1 \approx F_{н_1} h = \left(mg + m\frac{v^2}{R}\right)h,$$

поскольку сила натяжения нити $F_{н_1}$ в положении равновесия не только уравновешивает силу тяжести, но и сообщает маятнику центростремительное ускорение. Когда же в точке максимального отклонения от положения равновесия мы даем возможность маятнику опуститься, то есть увеличиваем до первоначального значения R длину нити, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh\cos\alpha,$$

так как перемещение маятника по вертикали равно $h\cos\alpha$.

Таким образом, в систему за один полупериод поступает энергия

$$E = A_1 - A_2 > 0.$$

В результате этого амплитуда колебаний будет увеличиваться (конечно, если эта поступающая энергия больше выделяемого тепла из-за действия сил сопротивления).

Теперь вернемся к задаче с качелями. Из вышесказанного ясно, что для того чтобы раскачать качели, мальчик должен приседать всякий раз, когда качели максимально отклонены, и вставать при прохождении положения равновесия. И в этом случае как бы меняется длина нити маятника (если длиной нити считать расстояние от точки подвеса до положения центра тяжести мальчика), а роль силы натяжения нити выполняет сила реакции со стороны ног — N. В положении равновесия $N = mg + m\dfrac{v^2}{R}$ и

$$A_1 \approx \left(mg + \frac{mv^2}{R}\right)h,$$

где h — высота подъема центра тяжести мальчика. Когда качели максимально отклонены и мальчик приседает, сила тяжести совершает работу

$$A_2 = mgh\cos\alpha.$$

Таким образом, за период система получает энергию

$$E = 2(A_1 - A_2) \approx 2h\left[m\frac{v^2}{R} + mg(1 - \cos\alpha)\right].$$

Эта величина положительна, поэтому энергия и, следовательно, амплитуда колебаний будут увеличиваться.

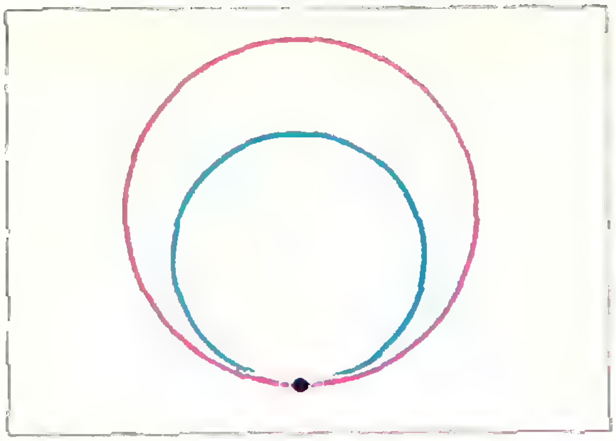


Рис. 13.

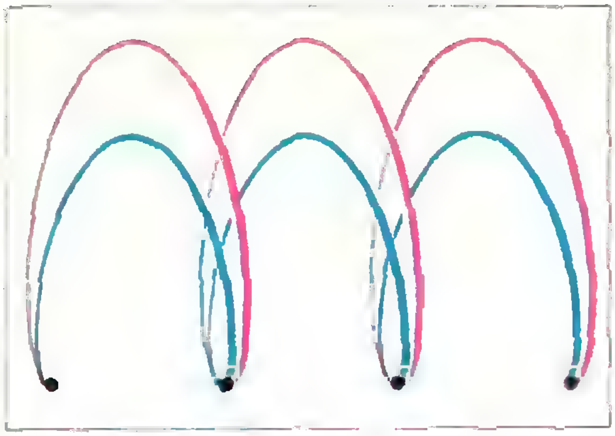


Рис. 14.

Ф217. *Электронно-лучевая трубка с ускоряющим напряжением U помещена в однородное магнитное поле с индукцией B, направленной вдоль оси трубки. На экране при этом наблюдается небольшое расплывчатое пятно. Если менять величину индукции, то можно заметить, что при некоторых значениях B_0, $2B_0$, $3B_0$, . . . электронное пятно фокусируется — собирается в точку. Объясните это явление. Как с помощью такого эксперимента определить отношение заряда электрона к его массе?*

Электроны вылетают из электронной пушки трубки с небольшим угловым разбросом скоростей и попадают в магнитное поле. При этом в направлении оси электроны имеют одинаковые составляющие скоростей, которые согласно закону сохранения энергии равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

и различные составляющие, перпендикулярные оси, намного меньшие, чем v_1.

На составляющие скоростей, параллельные оси трубки, магнитное поле никак не влияет, поэтому движение вдоль оси является равномерным и прямолинейным. Наличие же перпендикулярных оси составляющих приводит к искривлению траектории движения электронов. Действительно, на электрон, влетающий в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям, действует сила Лоренца

$$F = evB,$$

где e — заряд электрона, v — его скорость, в данном случае равная перпендикулярной составляющей скорости электрона. Эта сила сообщает электрону центростремительное ускорение

$$a_ц = \frac{v^2}{R},$$

где R — радиус окружности, по которой будет двигаться электрон. Согласно второму закону Ньютона

$$m\frac{v^2}{R} = evB,$$

$$R = \frac{mv}{eB},$$

и период вращения электрона по окружности

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Мы получили очень важный результат: какими бы ни были составляющие скоростей электронов, перпендикулярные оси трубки, все электроны совершают один оборот за одно и то же время. Если бы составляющие скоростей электронов, параллельные оси трубки, были все равны нулю, то траекториями электронов были бы окружности разных радиусов, проходящие через одну точку — точку вылета электронов из пушки (рис. 13). Причем в эту точку все электроны приходили бы одновременно.

Так как электроны участвуют еще в равномерном прямолинейном движении вдоль оси трубки, то результирующими траекториями их движений будут винтовые линии. Причем эти линии будут пересекаться на каждом шаге винта (рис. 14), так как составляющие скоростей, параллельные оси, одинаковы для всех электронов. В точках пересечения траекторий и фокусируется электронный пучок.

Итак, электронное пятно на экране будет собираться в точку, если расстояние L от электронной пушки до экрана будет кратно шагу винтовой линии $h = v_1T$, то есть

$$L = nv_1T = \frac{n}{B}2\pi\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Причем, при $B = B_0$ $n = 1$, при $B = 2B_0$ $n = 2$ и т. д.

С помощью такого эксперимента можно определить отношение заряда электрона к его массе. Действительно, из последней формулы

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2U}{L^2B_0^2}.$$

Измерив U, L и B_0, найдем отношение $\frac{e}{m}$.

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Метод вспомогательного элемента

И. А. Кушнир

Решение большой группы задач по геометрии облегчается введением дополнительных элементов, непосредственно не заданных в условии задачи. Эти элементы могут быть длинами, площадями, объемами, углами. С их помощью составляется уравнение, где неизвестным будет искомый элемент или элемент, с помощью которого легко найдется искомый. Иногда с помощью этого элемента составляется не уравнение, а соотношение, требуемое условием задачи.

Вспомогательный линейный элемент

В планиметрических задачах линейный элемент или отношение линейных элементов удобно ввести, если рассматриваемые фигуры подобны. Тогда с помощью пропорций или вспомогательных геометрических построений составляется уравнение, в котором введенный элемент как член уравнения сокращается, а найти искомый не представляет большого труда.

Рассмотрим решение задачи, предложенной в Новосибирском государственном университете.

Задача 1 (НГУ, 1969). *Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют треугольник на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь данного треугольника.*

Приступая к решению, замечаем подобие треугольников с площадями S_1, S_2, S_3 (рис. 1) и треугольника ABC с площадью S. Кроме того, сумма длин сторон DQ, QE и FK маленьких треугольников равна длине стороны BC треугольника ABC. Используем эти стороны как вспомогательные элементы, получаем уравнения

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{DQ}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{QE}{BC}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{FK}{BC}.$$

Сложим их:

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{DQ+QE+FK}{BC} = 1.$$

Итак, $S = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

Вспомогательный отрезок рекомендуется вводить, если в условии задачи не даны линейные элементы и требуется найти зависимость между углами.

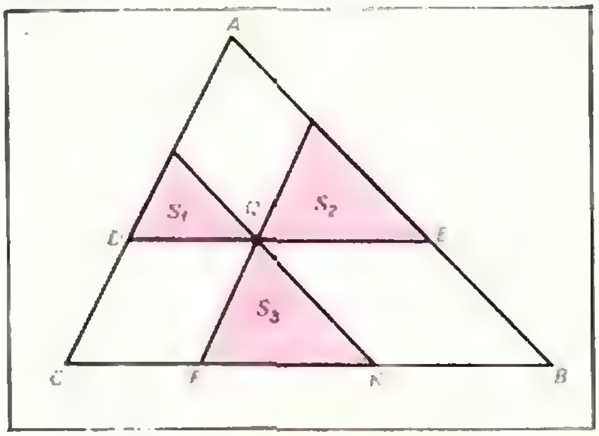


Рис. 1.

Задача 2 (МГУ, физфак, 1967). *Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.*

По условию ортоцентр H треугольника ABC ($AB = AC$) должен находиться внутри треугольника, поэтому $\angle A < 90°$ (рис. 2). Введем вспомогательный элемент a — длину отрезка BD, обозначим $\angle ABC$ через x, центр вписанной окружности — через O. Тогда

$$\angle HCD = \frac{\pi}{2} - x,\ HD = a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= a\,\mathrm{ctg}\,x = 2OD,\ OD = a\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},$$

откуда

$$\mathrm{ctg}\,x = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},\ \ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{5},$$

$$\cos x = \frac{2}{3}.$$

Особенно большое значение имеет введение вспомогательного элемента для нахождения отношений различных геометрических величин.

Задача 3 (МАИ, 1968). *Большее основание правильной усеченной четырехугольной пирамиды образует с боковой гранью угол α, а с плоскостью, проходящей через противолежащие стороны верхнего и нижнего оснований, — угол β. Найти отношение площадей оснований.*

Введем вспомогательный элемент a — длину стороны большего основания пирамиды (рис. 3). Площадь этого основания будет a^2. Длину стороны верхнего основания можно выразить через a, α и β. Рассмотрим равнобедренную трапецию EE_1F_1F, получающуюся в сечении пирамиды плоскостью, перпендикулярной основаниям и проходящей через середины сторон AB и CD. Введем еще вспомогательные отрезки $E_1H = h$, $E_1F_1 = x$. Тогда

$$HF = \frac{1}{2}(a + x),$$

$$EH = \frac{1}{2}(a - x),\ h = HF\,\mathrm{tg}\,\beta =$$

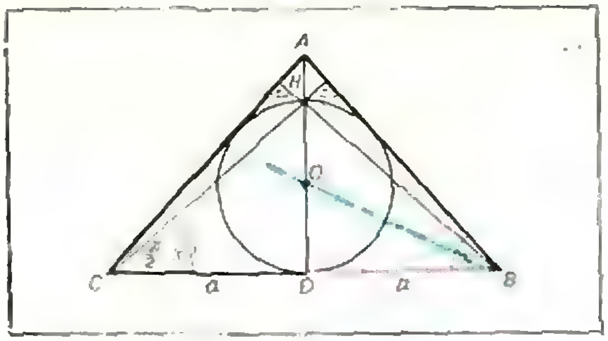


Рис. 2.

$$= \frac{1}{2}(a + x)\,\mathrm{tg}\,\beta = EH\,\mathrm{tg}\,\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(a - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Получаем уравнение $(a + x)\,\mathrm{tg}\,\beta = (a - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда

$$x = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$\frac{s}{S} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

Вспомогательный элемент — площадь или объем

Введение площади и объема в качестве вспомогательного элемента аналогично введению линейного элемента. Сравнивая площади и объемы отдельных частей фигуры, можно получить или уравнение относительно неизвестных задачи, или необходимое соотношение. Лучше находить те площади и объемы, сумма (разность) которых дает площадь заданной фигуры, а также отношение площадей

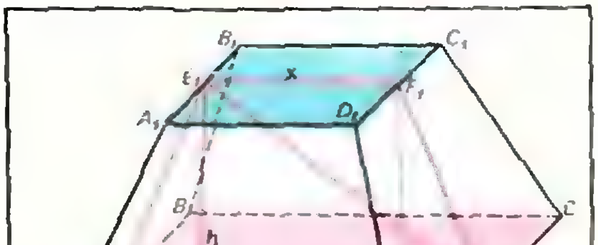


Рис. 3.

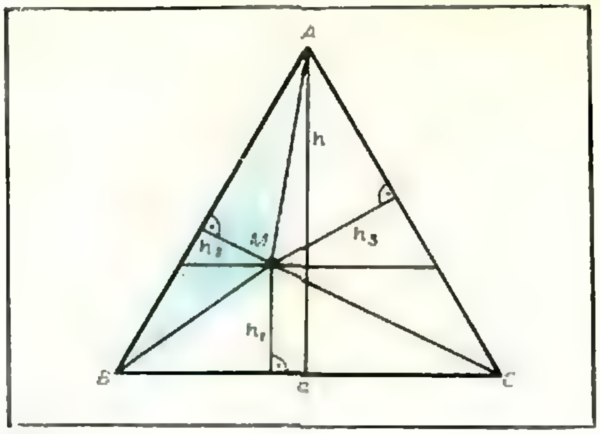


Рис. 4.

тех фигур, у которых линейные элементы — либо искомые, либо являются компонентами необходимого соотношения.

Задача 4 (МГУ, мехмат, 1960). *Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка M. Доказать, что расстояние от точки M до основания треугольника есть среднее арифметическое расстояний от точки M до боковых сторон треугольника.*

Пусть h_1, h_2, h_3 — расстояния от точки M до сторон треугольника BC, AB, AC соответственно (рис. 4). Ясно, что $S_{\triangle AMB}+S_{\triangle CMB}+S_{\triangle AMC}=S_{\triangle ABC}$, или $ah_1+ah_2+ah_3=ah$, где a — сторона треугольника ABC, h — его высота. Итак, $h=h_1+h_2+h_3$, но $h_1=\frac{h}{3}$, поэтому $h_2+h_3=h-h_1=\frac{2}{3}h=2h_1$, $h_1=\frac{h_2+h_3}{2}$.

Задача 5. *Дан четырехугольник ABCD, описанный около круга. Доказать, что квадраты расстояний от центра окружности до противоположных вершин относятся, как произведения сторон, сходящихся в этих вершинах.*

Обозначения приведены на рисунке 5. Требуется доказать, что

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{ad}{bc}.$$

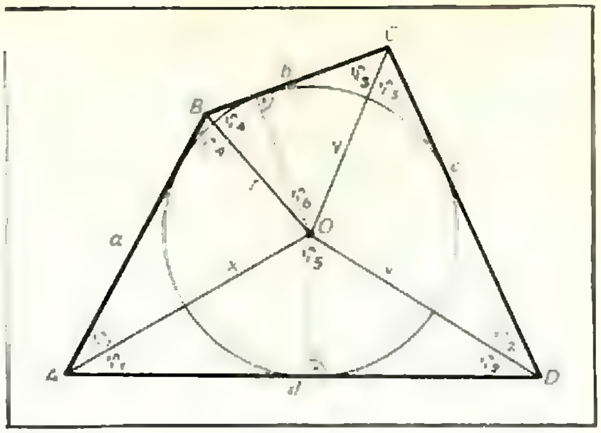


Рис. 5.

Высоты треугольников AOD и BOC равны, поэтому

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{d}{b}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{xv\sin\varphi_5}{yz\sin\varphi_6}. \qquad (2)$$

Докажем, что $\sin\varphi_5=\sin\varphi_6$. Для этого заметим, что $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=\pi$ (это половина суммы всех углов четырехугольника), $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_5=\pi$, $\varphi_4+\varphi_3+\varphi_6=\pi$. Отсюда следует, что $\varphi_5+\varphi_6=\pi$, $\sin\varphi_5=\sin\varphi_6$, и из формулы (2) получаем

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{xv}{yz}. \qquad (2')$$

Из соотношений (1) и (2′) имеем $\frac{xv}{yz}=\frac{d}{b}$, аналогично $\frac{xz}{yv}=\frac{a}{c}$. Перемножив последние два равенства, получим

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{ad}{bc},$$

а разделив первое из них на второе, получим

$$\frac{v^2}{z^2}=\frac{cd}{ab}\,^{*)}.$$

Разберем задачу, где вспомогательным элементом будет объем.

---

*) Дополнительный материал о методе площадей можно прочитать в журнале «Квант», 1971, № 12.

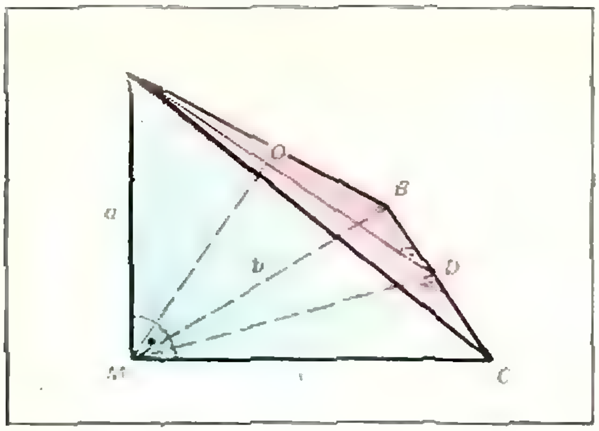


Рис. 6.

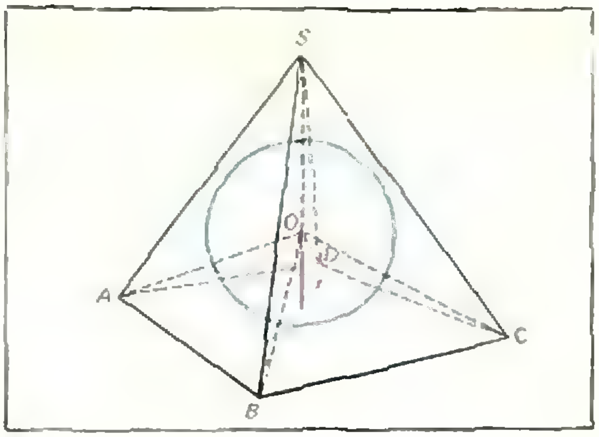


Рис. 7.

Задача 6. (НГУ, 1971. *В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны a, b, c. Высота пирамиды, опущенная из вершины на основание, равна h. Доказать, что*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}.$$

Вычислим объем пирамиды двумя способами: считая ее основанием в первом случае треугольник ABC (рис. 6), а во втором — грань AMC. Пусть $MA=a$, $MB=b$, $MC=c$, $MO=h$, $AD\perp BC$. Тогда $AC=\sqrt{a^2+c^2}$, $BC=\sqrt{b^2+c^2}$, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. Далее, $MD\perp BC$ (почему?), из $\triangle BMC$ имеем $BD\cdot BC=BM^2$, откуда

$$BD=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.\text{ Но } AD^2=$$

$$=AB^2-BD^2=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2},$$

$$V_{MABC}=\frac{1}{6}h\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}.\quad(3)$$

Если основание — треугольник AMC, то

$$V_{MABC}=\frac{1}{6}abc.\qquad(4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем: $\frac{1}{6}h\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=\frac{1}{6}abc$, откуда $(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)h^2=a^2b^2c^2$. Разделив обе части последнего равенства на $a^2b^2c^2h^2$, получаем требуемое равенство.

Задача 7. *Доказать, что объем пирамиды, описанной около шара, вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot r$, где r — радиус шара, вписанного в пирамиду, S — полная поверхность пирамиды.*

Разобьем исходную пирамиду на части, каждая из которых является пирамидой с вершиной в точке O (в центре шара), основаниями этих пирамид будут грани исходной пирамиды (рис. 7). Объем исходной пирамиды V равен сумме объемов этих пирамид $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Но $V_i=\frac{1}{3}S_i\cdot r$, так как высотой пирамиды V_i является радиус r шара, проведенный в точку касания шара и грани. Отсюда $V=V_1+V_2+\ldots+V_k=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\ldots+S_k)r=\frac{1}{3}Sr$.

Заметим, что утверждение задачи верно и для произвольного многогранника, в который можно вписать шар.

Вспомогательный элемент — угол

Если искомые или заданные элементы удобно выразить с помощью три-

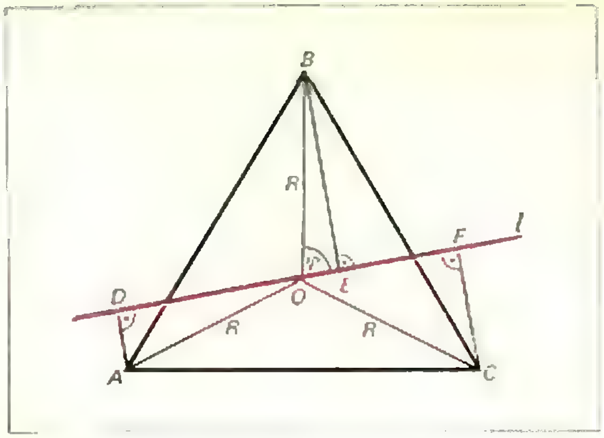


Рис. 8.

гонометрических функций, то вводится вспомогательный угол. Затем с помощью теоремы синусов или косинусов решением треугольника находятся компоненты для записи некоторого условия в виде уравнения.

Задача 8 (МГУ, мехмат, 1962). *Через центр правильного треугольника в плоскости этого треугольника проведена произвольная прямая. Доказать, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.*

Пусть точка O — центр треугольника ABC (рис. 8). Точки D, E, F — соответственно проекции вершин A, B, C на прямую l, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Введем вспомогательный угол φ, обозначив им $\angle BOE$. Тогда

$$\angle AOD = \angle AOB - \angle BOD = \varphi - \frac{\pi}{3},$$

$$\angle COE = \frac{2\pi}{3} - \varphi, \quad BE = R\sin\varphi,$$

$$AD = R\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$CF = R\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = R\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = R^2\left[\sin^2\varphi + \sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{3}{2}R^2$$

(проверьте самостоятельно, что сумма в квадратных скобках равна $\frac{3}{2}$).

Задача 9 (МФТИ, 1967). *В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной a. Через диагональ AC нижнего основания $ABCD$ проведена плоскость, пересекающая верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$. В трехгранные углы B и D_1 вписаны шары, касающиеся этой плоскости и имеющие радиусы $r = \frac{a}{5}$, $R = \frac{a}{4}$. Найти высоту параллелепипеда.*

Диагональное сечение DBB_1D_1 параллелепипеда (рис. 9) пройдет через центры шаров O и O_1. Пусть L и L_1 — точки касания шаров и оснований параллелепипеда, N и N_1 — точки касания шаров с данной плоскостью (мы пока не знаем, расположены ли они вне параллелепипеда

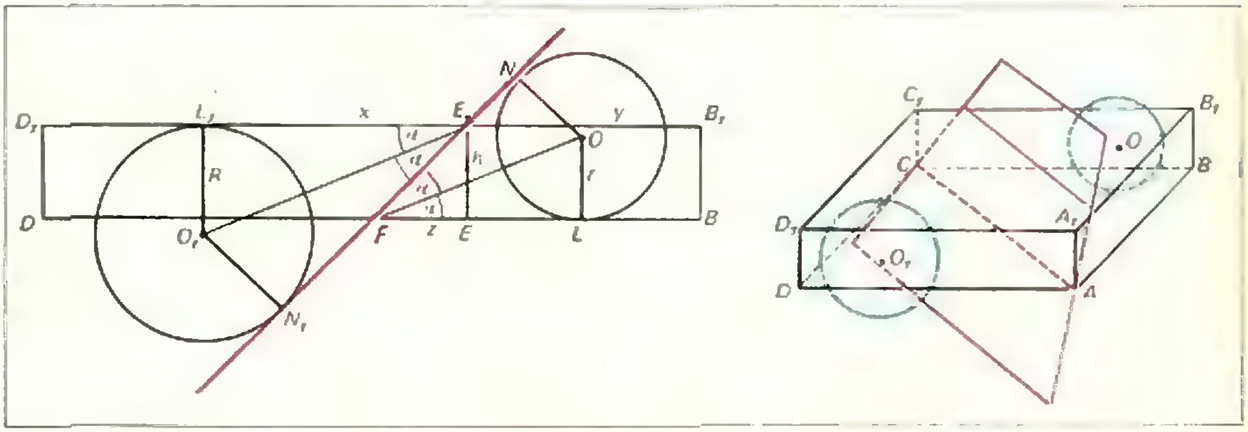


Рис. 9.

или внутри него, но нам это и не понадобится), OF и O_1E_1 — биссектрисы углов NQL и $N_1O_1L_1$ (точка F — середина BD), EE_1 — высота параллелепипеда, $OL = ON = r$, $O_1L_1 = O_1N_1 = R$. Положим $\angle BFE_1 = 2\alpha$, $L_1E_1 = x$, $E_1B_1 = y$, $FE = z$. Тогда $h = z \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = FB - BE = \frac{a\sqrt{2}}{2} - y$, $y = a\sqrt{2} - x - D_1L_1 = a\sqrt{2} - x - R\sqrt{2}$ и $z = x + R\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = x - \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Из подобия треугольников $O_1L_1E_1$ и OLF следует, что $\frac{x}{R} = \frac{FL}{r}$, $FL = FB - LB = \frac{a\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{10}$; $x = \frac{3}{8}a\sqrt{2}$, $z = \frac{a\sqrt{2}}{8}$. Из треугольника OLF находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{FL} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, откуда $h = \frac{3}{14}a$.

Задача 10 (МГУ, мехмат, 1963). *Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, угол между боковыми гранями равен φ. Найти сторону основания.*

Опустим из точек B и C перпендикуляры на боковое ребро AS (рис. 10). Легко убедиться, что основанием обоих этих перпендикуляров является одна точка D (докажите!), а потому $\angle BDC = \varphi$.

Введем вспомогательный угол $\angle BAS = \alpha$ и проведем апофему SK пирамиды. Ясно, что $AB = 2AK = 2b\cos\alpha$. Следовательно, для решения задачи достаточно вычислить $\cos\alpha$. Так как $\alpha < 90°$, то из треугольника BAD имеем $\alpha = \arcsin\frac{BD}{AB}$. В свою очередь длина отрезка BD определяется из треугольника BLD (DL — высота треугольника BDC): $BD = \frac{BL}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{AB}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$. Таким образом,

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}},\ \text{откуда}$$

$$AB = b\sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

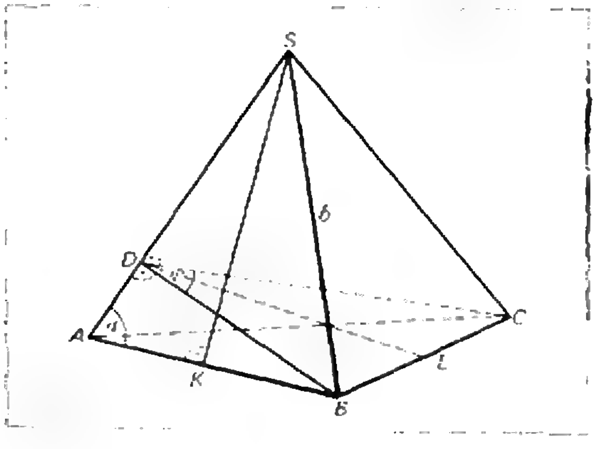


Рис. 10.

Упражнения

1 (МФТИ, 1969). В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D и стороны BC в точке E. Найти углы треугольника, если

$$\frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}, \frac{BE}{CE} = \frac{1}{3}.$$

2 (МФТИ, 1969). В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E лежит на середине ребра AB. Найти угол между отрезками MN и DE.

3 (МИФИ, 1971). В трапеции, основания которой равны a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

4 (МИЭТ, 1970). Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE : EC = a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD : DB = b$. Проведены отрезки CD и BE. Найти отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.

5 (МГУ, физфак, 1969). В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны c. Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определить радиус описанного шара.

6 (МГУ, мехмат, 1961). На окружности радиуса R даны две точки A и B, расстояние между которыми равно l. Какое наибольшее значение может принимать сумма $AC^2 + BC^2$ если точка C также лежит на этой окружности?

7 (НГУ, мехмат, 1969). Двуграный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α, радиус вписанного шара равен R. Найти полную поверхность пирамиды.

Новосибирский государственный университет

В Новосибирском государственном университете имеются следующие факультеты: математический с отделениями математики, прикладной математики и механики; физический; естественный с отделениями химии и биологии; геолого-геофизический; гуманитарный с отделениями русского языка и истории; экономический со специализацией по экономической кибернетике.

Университет расположен в Академгородке в 20 километрах от Новосибирска. Обучение студентов проводится на базе научных институтов Сибирского отделения АН СССР: гидродинамики, математики, вычислительного центра, ядерной физики, теоретической и прикладной механики, теплофизики, физики полупроводников, автоматики и электрометрии, геологии и геофизики, неорганической химии, органической химии, химической кинетики и горения, катализа, истории, филологии и философии, цитологии и генетики.

В этом номере мы помещаем образцы вариантов письменных экзаменов по математике и физике в НГУ в 1973 году.

Математика

Механико-математический факультет, физический факультет, экономический факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_3 (1-y^2)^2 = 5+\sqrt{14\log_{\sqrt{3}}(1-y)+7\log_{\sqrt{3}}\frac{(1+y)^2}{3}-5}.$$

2. В треугольнике ABC биссектриса угла BAC равна a. Окружность, построенная на этой биссектрисе как на диаметре, делит стороны AB и AC в отношении 2:1 и 1:1, считая от точки A. Найти площадь треугольника ABC.

3. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}.$$

4. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$ ($SA = SB = SC = SD = 5$), основанием которой является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = CD = 4$, $AD = BC = 3$. Через диагональ BD под углом 30° к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая ребро SC в точке S'. Найти объем пирамиды $S'BCD$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}}(3x^2-1)+2=\sqrt{1+\log_{\sqrt{x}}x^3+\frac{6}{\log_{3x^2-1}2\sqrt{2}}}.$$

2. Одна из боковых сторон трапеции перпендикулярна основаниям и равна $2a$. На этой стороне как на диаметре построена окружность, которая делит другую боковую сторону на три отрезка. Отношение длин этих отрезков равно 1:2:2 (считая от верхнего основания). Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos^2 x-\cos^2 3x}=\sin 2x.$$

4. В правильном тетраэдре $SABC$ через вершину A параллельно ребру BC проведена плоскость, перпендикулярная боковой грани SBC (S — вершина тетраэдра, ABC — основание). Найти радиус шара, касающегося ребер SA, SB, SC и проведенной плоскости. Ребра тетраэдра равны a.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_x (x^2+1) = \sqrt{\log_{\sqrt{x}} [x^2 (1+x^2)] + 4}.$$

2. В трапеции *ABCD* нижнее основание *AD* в 2 раза больше верхнего, равного *a*, *угол A при основании равен* 45°, а окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} = \sin x + \cos x.$$

4. В куб с ребром *a* вписан шар. Через середины двух смежных ребер куба проведена плоскость, касающаяся шара. Найти площадь сечения куба этой плоскостью.

Факультет естественых наук, геолого-геофизический факультет

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$4 \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} + 2 \log_{4x} x^2 = 3 \log_{2x} x^3.$$

2. В *прямоугольном* треугольнике *ABC* катеты *AB* и *BC* относятся, как 1 : 2. На гипотенузе *AC* выбраны точки *M* и *N* так, что отрезки *BM* и *BN* делят угол *B* на три равные части. Найти отношение отрезков *BM* и *BN*

3. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right) = \cos^3 x.$$

4. В правильную треугольную усеченную пирамиду вписан шар радиуса *r*, касающийся оснований и боковых ребер. Найти объем пирамиды, если стороны оснований относятся, как 1 : 2.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$(x^2-6x+6)^{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = 1.$$

2. В трапецию вписана окружность радиуса *r*. Точки касания с боковыми сторонами делят их соответственно в отношении 1 : 2 и 1 : 3, считая от верхнего основания. Найти площадь трапеции.

3. Решить уравнение

$$\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x.$$

4. Три шара, касаясь друг друга, касаются некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют треугольник со сторонами, равными 4, 2 и 3. Найти радиусы шаров.

Физика

Физический факультет

На письменном экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач.

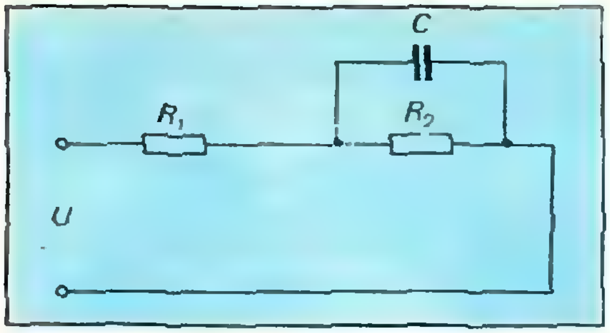


Рис. 1.

В первой задаче требуется объяснить физическое явление, демонстрируемое экзаменатором на демонстрационном столе.

Вторая и третья — легкие задачи, которые может решить почти каждый абитуриент.

Четвертая и пятая — задачи, требующие достаточно уверенных знаний основных физических законов и некоторой сообразительности.

Шестая задача — повышенной трудности. Для ее решения надо уметь разбираться в непривычной или усложненной физической ситуации.

На решение задач отводилось 4,5 астрономических часа. В методических указани-

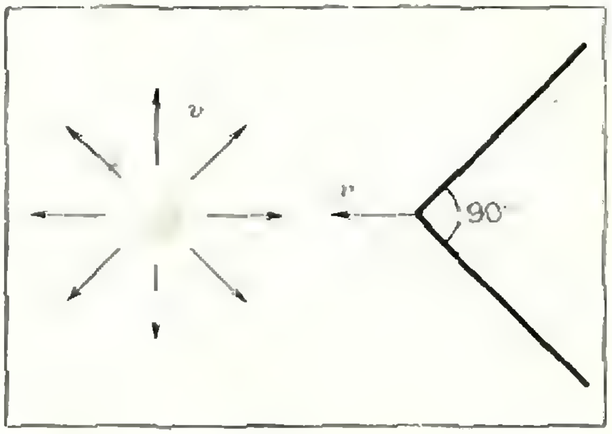


Рис. 2.

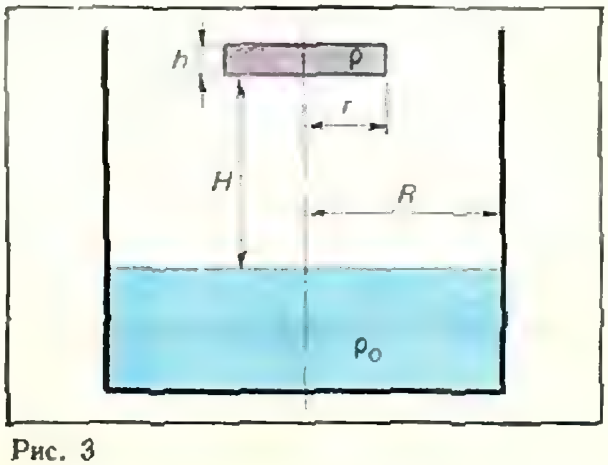


Рис. 3

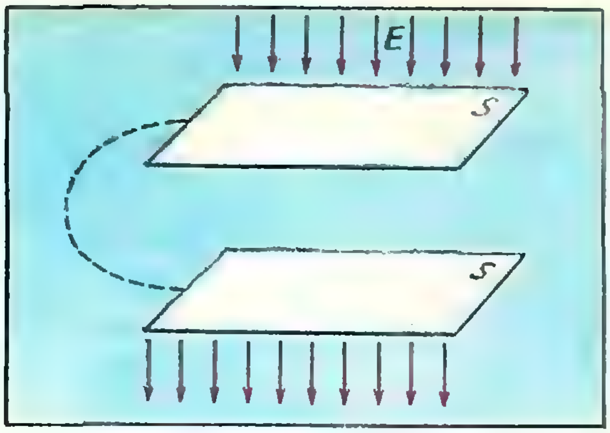


Рис. 4.

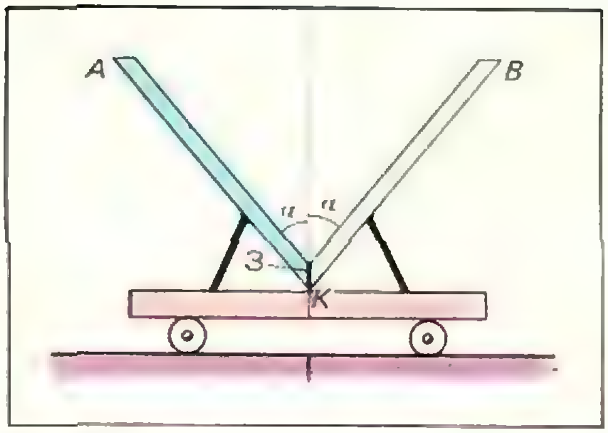


Рис. 5.

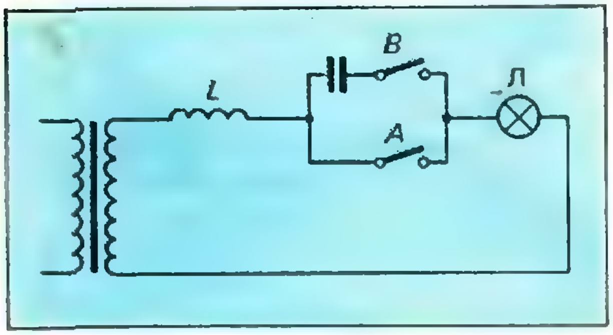


Рис. 6.

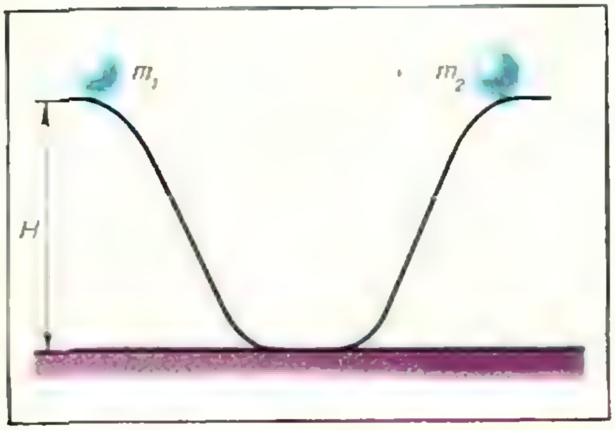


Рис. 7.

ях, раздаваемых абитуриентам вместе с вариантами задач, рекомендовалось вначале решать первые три задачи, а также подчеркивалось, что для получения высокой оценки не обязательно решение всех задач.

В приводимых ниже вариантах письменного экзамена по физике после условия каждой задачи в скобках указана ее оценка в баллах и процент решивших эту задачу.

Вариант 1

1. На столе имеются: два источника света — лампочка накаливания и лазер, дающий параллельный пучок лучей; фотоэлемент; гальванометр для регистрации фототока и плоскопараллельная стеклянная пластинка. Включается источник света, и регистрируется фототок. Затем на пути света ставится пластинка, и опять региструется ток. Один раз источником служит лампочка, второй раз — лазер. Оказалось, что фототок после внесения пластинки в первом случае возрос, а во втором — уменьшился. Объяснить — почему. (5 б., 48%.)

2. Найти заряд на конденсаторе емкости C, если в цепи, изображенной на рисунке 1, течет постоянный ток. Напряжение на клеммах U, сопротивления в цепи R_1 и R_2. (3 б., 82%.)

3. Бесконечный конус с углом раствора 90° движется к центру покоящегося шара со скоростью v (рис. 2). Направление скорости совпадает с осью конуса. В некоторый момент шар разбивается на очень большое число осколков, которые равномерно летят во все стороны с той же скоростью v. Какая часть осколков попадает на конус? Влиянием веса*) пренебречь. (5 б., 52%.)

4. В цилиндр радиуса R, частично заполненный водой, падает цилиндрическая пробка радиуса r и высоты h (рис. 3). Начальная высота нижнего торца пробки над уровнем воды H; начальная скорость равна нулю. Сколько энергии выделится в виде тепла после того, как движение пробки и воды прекратится? Плотность пробки ρ, плотность воды ρ_0, ускорение свободного падения g. (6б., 36%.)

5. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле $\mathbf{E}$, перпендикулярном пластинам (рис. 4). Площадь пластин конденсатора S. Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко? (7 б., 34%).

6. Изогнутая под углом 2α узкая трубка AKB неподвижно закреплена на тележке так, что каждое колено ее составляет угол α с вертикалью (рис. 5). Половина трубки AK заполнена водой, удерживаемой заслонкой З. Тележка может двигаться по горизонтальной плоскости. Заслонку З открывают. Найти скорость тележки в тот момент, когда середина столбика воды проходит самое ниж-

---

*) Точнее, силы тяжести. (*Прим. ред.*)

нее положение. Начальные скорости равны нулю. Трение и капиллярность не учитывать. Масса тележки с трубкой M, масса воды m, $AK = BK = l$. Ускорение силы тяжести g. (8 б., 10%.)

Вариант 2

1. *На столе собрана схема, изображенная* на рисунке 6. Когда замыкают ключ A, лампочка $Л$ загорается тускло. Когда замыкают ключ B, свет становится очень ярким. Почему в первом случае лампочка горит слабее, чем во втором? (5 б., 62%.)

2. Два шарика с массами m_1 и m_2 одновременно начинают соскальзывать без трения и вращения с двух горок одинаковой формы и высоты H (рис. 7). При столкновении шарики слипаются. На какую высоту поднимутся слипшиеся шарики? (3 б., 80%.)

3. Определить ускорение цилиндра, скользящего по желобу, имеющему вид двугранного угла с раствором α (рис. 8). Ребро двугранного угла наклонено под углом β к горизонту. Плоскости двугранного угла образуют одинаковые углы с горизонтом. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба k. (5 б., 40%.)

4. В центре незакрепленной сферы радиуса R и массы M разрывается снаряд массы m на мелкие осколки, разлетающиеся во все стороны равномерно с одинаковой скоростью v. В сфере имеются два круговых отверстия с центрами, лежащими на одном диаметре (рис. 9). Углы α_1 и α_2 близки, но не одинаковы. Осколки, не вылетевшие через отверстия, прилипают к поверхности сферы. Найти конечную скорость сферы. Сопротивлением воздуха и силой тяжести пренебречь. (6 б., 59%.)

5. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле $\mathbf{E}$, перпендикулярном пластинам конденсатора (рис. 10). Площадь каждой из пластин S, по пластинам равномерно распределены заряды $+q$ и $-q$, расстояние между пластинами d. Какую работу нужно совершить, чтобы перевернуть конденсатор на 180° вокруг оси, перпендикулярной полю? (6 б., 36%.)

6. В U-образной трубке с соприкасающимися внутренними стенками в равновесии находятся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$ так, что граница раздела проходит точно через низ трубки (рис. 11). На высоте a от нижней точки трубки появилось небольшое отверстие, и началось перетекание жидкости. Насколько изменится уровень в колене с жидкостью ρ_2, когда перетекание жидкости прекратится?

Трубку считать достаточно тонкой для того, чтобы не происходило перемешивания жидкостей (возможен только разрыв столба жидкости в месте появления отверстия). (8 б., 34%.)

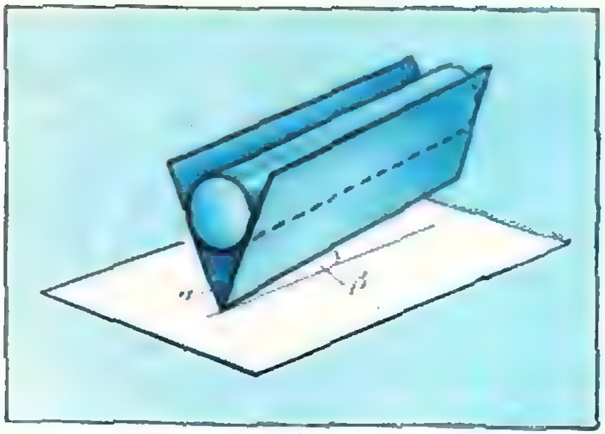


Рис. 8.

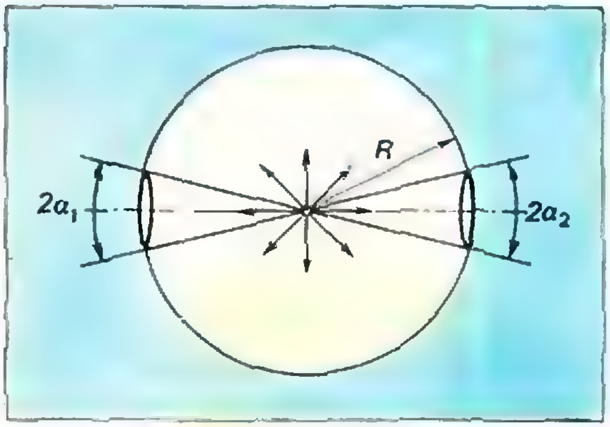


Рис. 9.

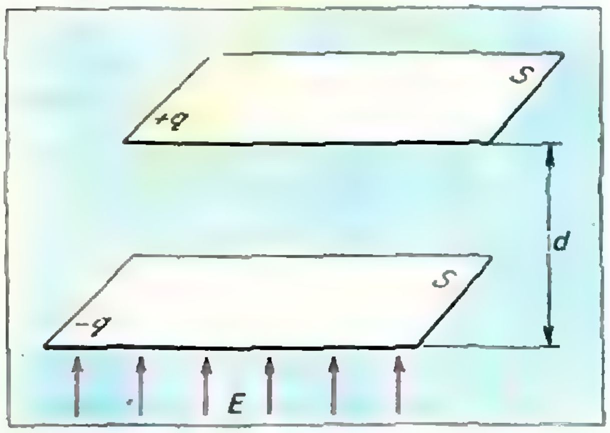


Рис. 10.

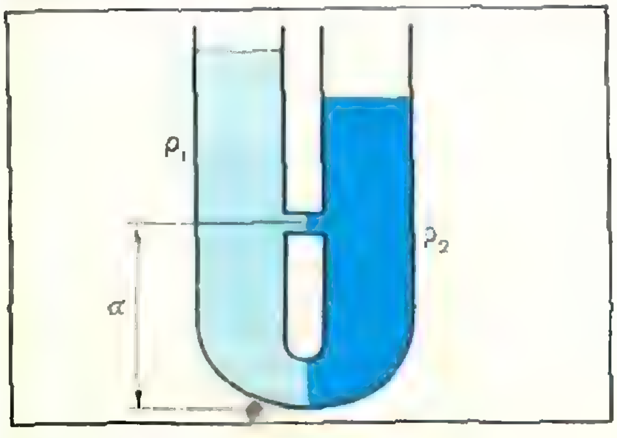


Рис. 11.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Беседы старого учителя

«Беседы по физике». Трудно было бы придумать лучшее название для этой книги *). Михаил Иванович Блудов, опытный педагог и методист, решил поделиться с юными читателями своими знаниями, побеседовать с ними о физике. О чем конкретно? Ведь современная физика слишком обширна и многогранна, чтобы можно было рассказать о ней в столь небольшой по объему книге. Правда, лежащая перед нами первая часть «Бесед» охватывает только два раздела — механику и теплоту, но ведь и это очень много. Если же попытаться перечислить вопросы, которые здесь освещены, то станет совсем непонятно, как книга не разрослась до толстого фолианта.

А все дело в мастерстве автора. Он не излагает того, что читатель знает (или должен знать) из школьного курса, а если и говорит, к примеру, о законе сохранения энергии, то подходит к нему с совершенно новых для ученика позиций. Книга не дублирует, а дополняет, иллюстрирует школьный курс физики. Причем все эти дополнительные сведения преподносятся, как правило, в форме живой, непринужденной беседы. Автор часто непосредственно обращается к читателю или прибегает к форме диалога. Так, в главе «Что такое работа» приводится разговор между Игорем и его отцом-инженером, и в результате сухое определение приобретает иное звучание, как бы обрастает живыми фактами из окружающей действительности.

Кинематика считается, пожалуй, наиболее скучным разделом физики. Однако М. И. Блудов сумел интересно рассказать не только об основных понятиях кинематики(скорость,ускорение и т.д.), но и о ее математическом аппарате — векторах и операциях с ними. Вслед за этим идет глава (или правильнее будет сказать — беседа) о сигналах безопасности на транспорте, об измерении скорости автомобиля, локомотива, судна, самолета, ветра, пули.

Примеры для иллюстрации основных положений механики заимствованы или из повседневной жизни, или из самых новейших научных и технических проблем, наиболее близких интересам школьника. Автор очень часто обращается к астрономии, космонавтике и другим смежным с физикой наукам.

Увлекательность повествованию придают исторические отступления, а подчас и целые разделы, носящие историко-познавательный характер. Таковы, например, беседа «Четыре затруднительных положения» о знаменитых апориях *) Зенона или «Беседа в венецианском арсенале», знакомящая с механикой Галилея.

М.И.БЛУДОВ
БЕСЕДЫ ПО ФИЗИКЕ

В главе «Неосуществимая мечта» читателю предлагается доказать невозможность реализации различных проектов вечных двигателей. Эта глава — прекрасная проверка знаний и сообразительности учащихся, она поможет выработать у них способность к логическим рассуждениям.

В главах, посвященных молекулярной физике и тепловым явлениям, также изложен обширный материал — от броуновского движения до элементов метеорологии. Говоря об агрегатных состояниях вещества, автор упоминает и о плазме, много места отводит кристаллофизике, поверхностным явлениям в жидкости и т. д.

Книга М. И. Блудова вышла вторым изданием. Предыдущее, появившееся в 1964 году, быстро завоевало популярность у читателей — школьников и педагогов. Книга была отмечена дипломом на Всесоюзном конкурсе научно-популярных книг, проводимом ежегодно обществом «Знание». Теперь содержание ее претерпело некоторые изменения, в частности, добавлен ряд новых разделов, отражены последние достижения в освоении космоса.

Мы уверены, что первая часть книги «Беседы по физике» принесет несомненную пользу всем читателям.

И. Зорич

---

*) Блудов М. И. Беседы по физике. Часть I, изд. 2-е, перераб. М., «Просвещение», 1972, 176 с., 68 к.

*) Апория (гр. aporia) в переводе означает «безвыходное положение, тупик, непреодолимая трудность».

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Группа школьников покупала различные альбомы. Каждый ученик покупал альбомы одного типа, причем столько, сколько стоил один альбом этого типа. Все ребята расплачивались монетами по 10 копеек, каждый получил сдачу, и эта сдача не совпала ни у каких двух школьников.

Какую сдачу могли получать школьники и какое наибольшее число школьников могло быть в этой группе?

2. По реке плывет весельная лодка и рядом с ней щепка.

Что легче для гребца: обогнать щепку на несколько метров или на столько же отстать от нее?

3. В следующем примере цифры заменены буквами:

$$\begin{array}{r} \text{деталь} \\ +\ \text{деталь} \\ \hline \text{изделие} \end{array}$$

Восстановите запись.

4. На разных берегах ручья стоят взрослый человек и ребенок. У каждого в руках по доске, чуть более короткой, чем расстояние между берегами. Как они могут поменяться местами?

5. Найти число, сумма цифр которого равна разности между 328 и самим числом.

6. Вагон освещается шестью лампочками, соединенными последовательно. На каждой из них написано: 110 *в*, 25 *вт*. Одна из лампочек перегорела, и ее заменили другой, на которой написано: 110 *в*, 40 *вт*. Будет ли эта лампочка гореть ярче остальных?

Топологические опыты своими руками

Б. А. Кордемский

В этой статье мы предлагаем вам познакомиться с топологией — наукой, исследующей те свойства фигур, которые остаются неизменными при растяжениях без разрывов или сжатиях без склеивания. Для этого вам предстоит выполнить некоторые опыты: раскрасить карту, освободиться из веревочного «плена», разрезать бумажные полоски на нерасцепляющиеся кольца.

В сущности, ведь и сама топология началась с поисков раскрытия секретов некоторых занимательных геометрических головоломок, заинтересовавших в свое время Леонарда Эйлера и других математиков.

Четыре краски: меньше нельзя, больше не требуется

— Вадим, взгляни, какую я получила карту для раскрашивания (рис. 1). Раскрасить надо так, чтобы соседние районы не оказались одноцветными (районы, имеющие лишь одну общую точку, соседними не считаются; такую раскраску называют правильной). Кажется, мне хватит пяти красок.

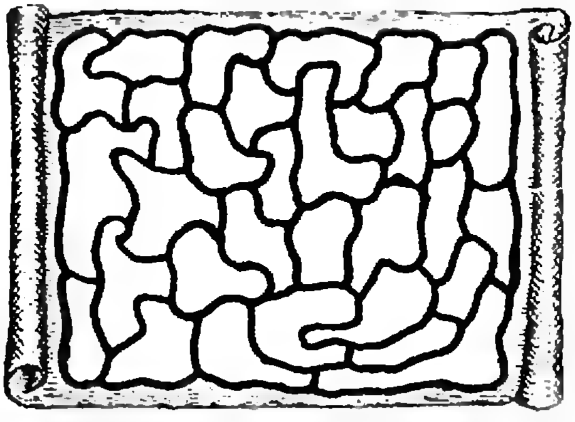


Рис. 1.

— Верно, Оля, пяти красок достаточно, чтобы получить правильную раскраску любой карты на плоскости, — подтвердил Вадим, — но на твоем месте я попытался бы ограничиться четырьмя красками. Помнишь, мы слушали лекцию «О проблеме четырех красок», в которой ...

— Действительно, — перебила Оля Вадима, — ведь никем не придумана карта, для раскраски которой оказалась бы необходимой пятая краска. Это же одна из тех знаменитых старинных задач, которые до сих пор не поддаются усилиям математиков. «Проблема четырех красок», кажется, уже давно перешагнула столетний рубеж, а «воз и ныне там»?

— Ну, если считать от лекции, прочитанной в 1840 году, на которой немецкий астроном и геометр Август Мёбиус высказал первоначальный вариант этой проблемы без ее применения к раскрашиванию карт *), то прошло уже свыше 130 лет, — ответил Вадим, — если же считать от 1878 года, то столетний рубеж еще не достигнут.

— Почему ты упоминаешь еще какую-то вторую дату? — полюбопытствовала Оля.

— В 1878 году на одном из заседаний Британского географического общества выдающийся английский математик Артур Кэли четко сформулировал задачу: *доказать, что каждую географическую карту на плоскости (или на глобусе) можно правильно закрасить четырьмя красками*, — придав тем самым этой проблеме прикладное значение. Именно с этого момента задача получила особую популярность и привлекла к себе внимание многих математиков и любителей математических головоломок. Вскоре появился первый результат: доказательство достаточности пяти красок (тоже в Англии, через год после доклада Кэли), а полного доказательства достаточности четырех красок никто не придумал до сих пор.

---

*) «. . . на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы каждые две из них имели общую границу» — из лекции Мёбиуса.

— Погоди, Вадим, — опять вмешалась Оля. Ты говоришь, что нет полного доказательства, а разве есть какой-нибудь частный результат? Я ничего не знаю об этом.

— Да, Оля, некоторые результаты есть. В последнее время произошел значительный сдвиг в решении «проблемы четырех красок» *). В 1968 году математики Рингель и Янгс дали исчерпывающий ответ на вопрос о наименьшем числе красок, достаточных для правильной раскраски карты, нанесенной на любую поверхность, кроме ... поверхности обыкновенного глобуса, а следовательно, и плоскости.

— Я знаю, — заметила Оля, — почему ты сказал: «следовательно, и плоскости». Если бы была доказана достаточность или, наоборот, недостаточность четырех красок для раскраски карты, нанесенной на сферу, то тем самым «проблема четырех красок» была бы решена и для плоской карты, так как любую карту на сфере можно превратить в эквивалентную карту на плоскости, и наоборот.

— Правильно, Оля, но есть результаты и для плоских карт. В 1969 году математики Оре и Стемпл доказали, что любую карту на плоскости, состоящую не более чем из 39 областей, можно раскрасить четырьмя красками, а в 1971 году советский математик Г. А. Донец доказал это утверждение для карт, состоящих из 41 области.

— Спасибо, Вадим. Пойду раскрашивать карту.

Через несколько дней Вадим поинтересовался, удалась ли Оле раскраска карты четырьмя красками.

— Конечно, — ответила Оля, — на моей карте оказалось всего 32 области. Я попробовала усложнить задачу и закрасить каждой краской ровно по восемь областей. Представь себе — получилось!

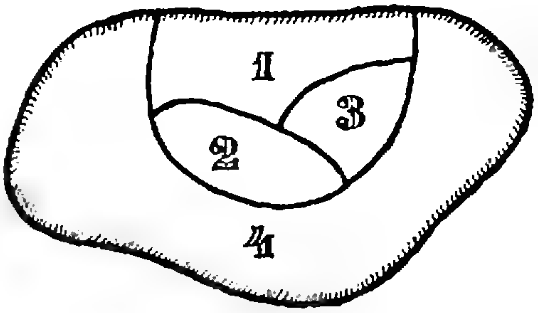


Рис. 2.

— Замечательно! Молодец, Оля! Попробую и я это сделать.

Задача 1. Попробуйте и вы раскрасить каждой из четырех красок ровно по восемь областей на Олиной карте.

Задача 2. Докажите, что найдется карта, которую нельзя закрасить меньше чем четырьмя красками.

Районирование области

Область, изображенная на рисунке 2, разбита на четыре района так, что каждый район граничит с тремя другими.

Задача 3. Перечертите внешний контур этой области в свою тетрадь и придумайте другое разбиение, а именно: разбейте область на шесть частей и раскрасьте пятью красками так, чтобы каждая из пяти красок соприкасалась со всеми остальными красками. Раскраска должна быть «правильной», то есть соприкосновение различных красок должно происходить не в одной или нескольких изолированных точках, а непременно по некоторой линии.

«Плеи» из шнуров

В поле зрения топологии находятся и свойства переплетенных линий, в том числе узлы. Топология умеет объяснить секреты «крепкого» и «ложного» узлов, известных ткачам и мо-

---

*) Вероятно, Вадим прочитал об этом в книге: Харари Ф. Теория графов. М., «Мир», 1973, с. 158, 162.

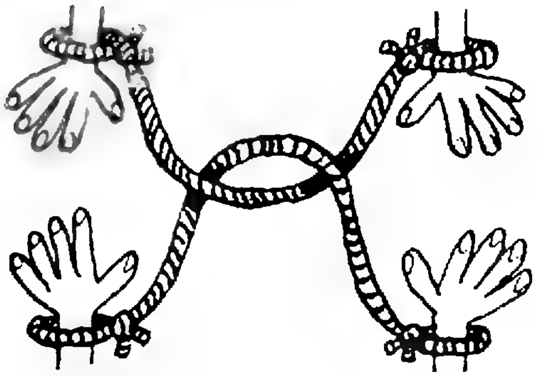


Рис. 3.

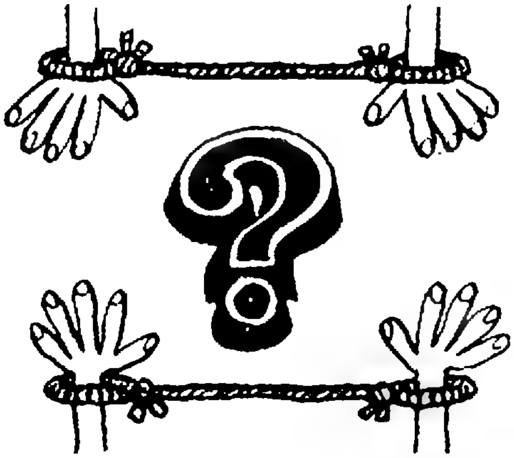


Рис. 4.

рякам, альпинистам и фокусникам на эстраде.

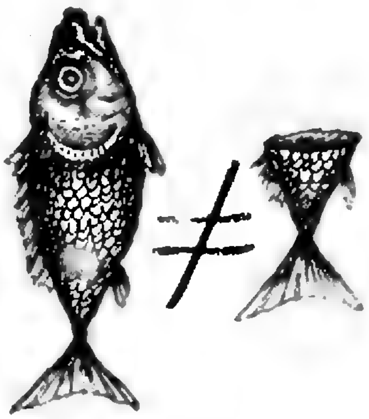
Так, например, топологический анализ ситуаций, создавшейся для двух озорников (рис. 3), показывает, что расцепиться они могут, не разрезая шнуров и не развязывая узлов на запястьях рук.

Но как это осуществить практически? Снять шнур через кисти рук невозможно.

З а д а ч а 4. Предположим, что озорники расцепились. Шнуры остались привязанными к рукам каждого из них. Пусть теперь они завяжут по обыкновенному узлу на своих шнурах, не отвязывая их от рук. Это возможно.

Софизм

Ученик 7-го класса объясняет своим одноклассникам доказательство «теоремы»: «Квадратный корень из любого натурального числа есть число иррациональное». Он рассуждает так. «Пусть дано натуральное число N, и $\sqrt{N} = \frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Пусть дробь $\frac{p}{q}$ — несократимая (ведь любую дробь можно сокращать, пока у числителя и знаменателя не сократятся все общие делители). Тогда $\frac{p^2}{q^2} = N$. В левой части стоит несократимая дробь (ведь p и q не имеют общих делителей), а в правой части уравнения — заведомо целое число. Но дробное число не может быть равно целому. Значит, для любого натурального N число $\sqrt{N}$ не является рациональным, откуда следует, что оно иррациональное, что и требовалось доказать».



Где была допущена ошибка?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Метод вспомогательного элемента»

1. $\frac{\pi}{2}$, $\arccos\frac{4}{5}$, $\arcsin\frac{4}{5}$. Указание. BD — вспомогательный отрезок.

2. $\psi = \arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$. Указание. Ребро тетраэдра — вспомогательный отрезок.

3. $\frac{ab}{a+b}$.

4. $\frac{S_{\square}}{S_{\triangle}} = \frac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}$.

Указание. Опустить перпендикуляры из точек A, E и B на CD, затем найти, в каком отношении делятся BE и CD. Вспомогательный элемент — площадь.

5. $R = \frac{c}{\sqrt{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)}}$. Указание. Вспомогательный элемент — площадь.

6. $4R^2+2R\sqrt{4R^2-l^2}$. Указание. Вспомогательный элемент—угол CAB.

7. $4R^2\frac{(1+\sqrt{-\cos\alpha})^3}{(1+\cos)\sqrt{-\cos\alpha}}$. Указание. Вспомогательный элемент — либо сторона основания пирамиды, либо угол при вершине пирамиды в ее сечении, проходящем через точки касания шара и двух противоположных боковых граней пирамиды.

К статье «Новосибирский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. ОДЗ; $y<1$, $y\neq-1$. $14\log_{\sqrt{3}}(1-y)+7\log_{\sqrt{3}}\frac{(1+y)^2}{3}-5 = 14\log_3(1-y^2)^2-19$. Положим $\log_3(1-y^2)^2=u$. Уравнение примет вид $u=5+\sqrt{14u-19}$. Перенося 5 в левую часть, возводя в квадрат и решая полученное квадратное уравнение, находим $u=22$, $2\log_3(1-y^2)=22$, откуда $1-y^2=3^{11}$, $y^2=1-3^{11}$. Решений нет.

2. Легко видеть, что $\triangle AKD=\triangle ALD=\triangle CLD$ (рис. 1). Отсюда $CD=a$, $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$ и $BD=\frac{3}{4}a$. По теореме Пифагора из $\triangle BKD$ и $\triangle CLD$ находим $KD^2=DL^2=BD^2-KB^2=CD^2-4KB^2$, откуда $3KB^2=\frac{7}{16}a^2$, $KB=\frac{a}{4}\sqrt{\frac{7}{3}}$. Далее, $KD=\sqrt{BD^2-BK^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}KD\,(AB+AC)=\frac{1}{2}KD\cdot 7KB=\frac{7a\sqrt{35}}{48}$.

3. Преобразуем уравнение к виду $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}$. Пусть $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=u$. Решая уравнение $2u=\sqrt{\frac{1}{2}+u}$, находим $u=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k=0,\pm1,\ldots$

4. Пусть O — точка пересечения AC и BD (рис. 2). $SO\perp$ пл. BCD (почему?), и перпендикуляр $S'P$ на плоскость BCD попадает на OC. Но $OC=2{,}5$, поэтому $\angle OSC=30^\circ$. Пусть $S'P=x$. Тогда $PC=\frac{x}{\sqrt{3}}$. Построим $PF\perp OB$, $CT\perp OB$. Имеем $FP=\sqrt{3}\,x=3PC$ (из $\triangle S'FP$, $\angle F=30^\circ$). Из $\triangle OCB$ ($BC=3$, $OC=OB=2{,}5$) находим $S_{\triangle OCB}=3$, $CT=\frac{12}{5}$, $CT=PF+PC\sin\angle COB=3PC+PC\frac{CT}{OC}$. Отсюда

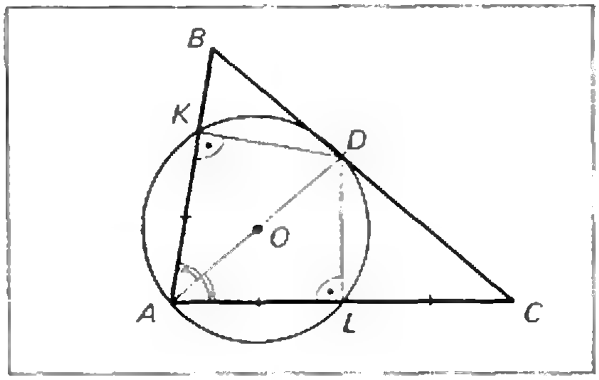


Рис. 1.

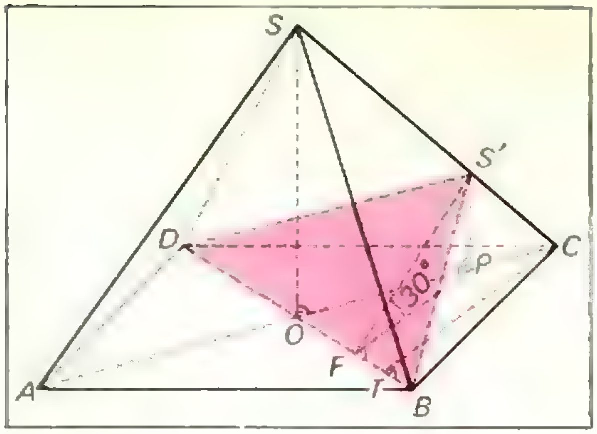


Рис. 2.

$$PC=\frac{20}{33},\quad S'P=\frac{20\sqrt{3}}{33},\quad V_{S'BCD}=\frac{40\sqrt{3}}{33}.$$

Вариант 2

1. $x_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{3}}$,

$x_2=\sqrt{\frac{4+\sqrt{2}}{12}}$.

2. $\frac{a^2(2+3\sqrt{6})}{5}$.

3. $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ (k — целое).

4. $\frac{a}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$.

Вариант 3

1. $x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

2. $\frac{6a^2}{3\sqrt{2}-1}$.

3. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=2k\pi$ (k — целое).

4. $\frac{3a^2}{8}$.

Вариант 4

1. $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=\frac{1}{8}$.

2. $(3\sqrt{3}-4):1$.

3. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (k — целое).

4. $\frac{7\sqrt{3}}{4}r^3$.

Вариант 5

1. $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=2$, $x_4=\frac{1}{4}$.

2. $r^2\,\frac{8\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{6}$.

3. $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}-1)+k\pi$, $x=\operatorname{arcctg}(-1-\sqrt{2})+k\pi$, ($k$ — целое).

4. 3, 4/3, 3/4.

Физика

Вариант 1

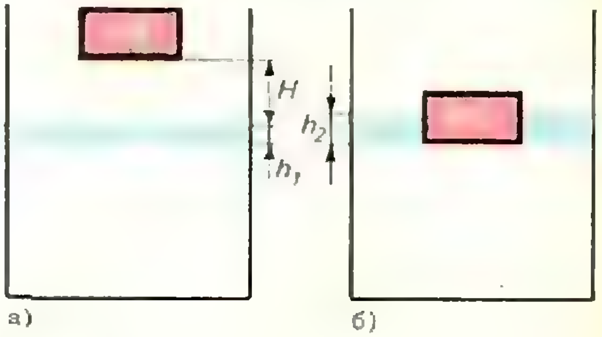
1. Величина фототока пропорциональна световому потоку, падающему на фотоэлемент. Когда источником света является *лазер и на пути параллельного пучка света* ставится стеклянная пластинка, фототок уменьшается потому, что часть светового потока отражается от поверхности пластинки и не попадает на фотоэлемент. Конечно, такой же эффект «потери» светового потока имеет место и для лампочки. Однако существует и другой эффект, связанный с преломлением лучей, падающих на пластинку под некоторым углом, и приводящий к увеличению светового потока, а значит, и величины фототока. Пластинка играет роль как бы фокусирующего устройства, посылающего на фотоэлемент дополнительный световой поток, прежде не попадавший на него. В данном случае, очевидно, этот эффект превышает эффект потерь.

2. $q=CU_C$, но $U_C=U_{R_2}=\frac{UR_2}{R_1+R_2}$,

поэтому

$$q=\frac{CUR_2}{R_1+R_2}.$$

3. Рассмотрим осколки, летящие вверх и вниз относительно земли. В системе отсчета, связанной с конусом, они движутся вправо под углом ±45° к горизонту соответственно, то есть вдоль образующих конуса, и *на него не попадут. Все осколки, находящиеся* справа от рассмотренных, а их прак-



а) б)

Рис. 3

тически половина, рано или поздно попадут на конус.

4. За счет уменьшения потенциальной энергии пробки будет совершена работа по подъему вытесненной воды и выделится тепло:

$$\Delta E_{п} = A + Q. \qquad (1)$$

Будем все высоты отсчитывать от нижнего торца плавающей пробки (рис. 3, *а* и *б*). Тогда

$$\Delta E_{п} = m_{п} g\,(H + h_1) \qquad (2)$$

и

$$A = m_{в} g\,\frac{h_2 - h_1}{2}. \qquad (3)$$

Массу вытесненной воды (она показана на рисунке 3, *а* и *б* синим) можно записать так:

$$m_{в} = \rho_0 \pi R^2 h_1 = \rho_0 \pi\,(R^2 - r^2) h_2, \qquad (4)$$

а условие плавания пробки — так:

$$\rho \pi r^2 h = \rho_0 \pi r^2 h_2. \qquad (5)$$

Тогда из равенств (1) — (5) получим

$$Q = \rho g \pi r^2 h \left[H + \frac{\rho}{2\rho_0} h \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right].$$

5. $q = CU = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} Ed = \varepsilon_0 SE.$

6. Запишем закон сохранения энергии:

$$\Delta E_{п} = E_{кт} + E_{кв}.$$

Здесь $\Delta E_{п} = mg\dfrac{l}{4}\cos\alpha$ — уменьшение потенциальной энергии воды, $E_{кт} = \dfrac{Mv^2}{2}$ — кинетическая энергия тележки, $E_{кв} = \dfrac{m}{2}\left(V_{г}^2 + V_{в}^2\right)$ — кинетическая энергия воды, движущейся как по горизонтали (со скоростью $V_{г}$), так и по вертикали (со скоростью $V_{в}$).

Обозначим скорость воды относительно трубки через u, тогда относительно земли

$$V_{г} = u\sin\alpha - v, \qquad V_{в} = u\cos\alpha.$$

Согласно закону сохранения импульса

$$m(u\sin\alpha - v) = Mv,\ u = \frac{v}{\sin\alpha}\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Тогда окончательно:

$$mg\frac{l}{4}\cos\alpha = \frac{Mv^2}{2} + {}$$

$$+ \frac{m}{2}\left[\frac{M^2}{m^2} v^2 + v^2 \operatorname{ctg}^2\alpha \left(1 + \frac{M}{m}\right)^2\right],$$

откуда

$$v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{gl\cos\alpha}{2\left(1 + \frac{m}{M}\right)\left[1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{ctg}^2\alpha\right]}}.$$

Вариант 2

1. Мощность, выделяемая в лампочке, пропорциональна квадрату тока в цепи. Согласно закону Ома для переменного тока

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где R — активное сопротивление, ωL — индуктивное и $\dfrac{1}{\omega C}$ — емкостное сопротивления.

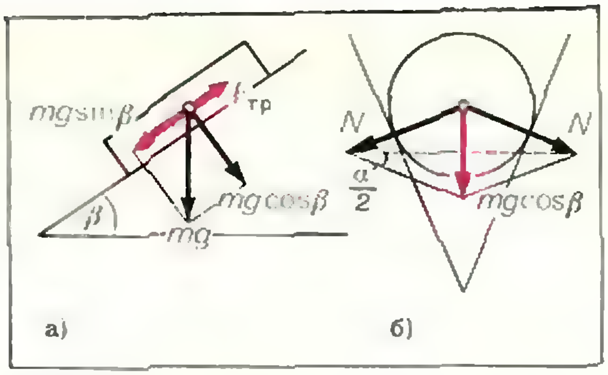


Рис. 4.

В первом случае, когда замыкают ключ *А*, в цепи есть только активное и индуктивное сопротивления, во втором случае добавляется еще и емкостное сопротивление. Если $\dfrac{1}{\omega C}$ близко ωL, то $I_1 < I_2$, и лампочка во втором случае горит более ярко.

2. $$h = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 H.$$

3. Запишем уравнение движения цилиндра вдоль желоба (рис. 4, *а*):

$$ma = mg\sin\beta - F_{тр},$$

где $F_{тр} = 2kN$ (N — сила реакции опоры).

Из рисунка 4, *б*

$$N = \frac{mg\cos\beta}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Поэтому

$$a = g\left(\sin\beta - \frac{k\cos\beta}{\sin(\alpha/2)}\right).$$

4. Запишем закон сохранения импульса для оси, проходящей через центры отверстий:

$$m_1 v\cos\alpha_1 - m_2 v\cos\alpha_2 =$$
$$= [M + m - (m_1 + m_2)]u.$$

Здесь m_1 и m_2 — массы осколков, вылетающих через соответствующие отверстия, u — скорость сферы.

Так как осколки разлетаются равномерно по всем направлениям, то массы осколков m_1 и m_2 пропорциональны площадям поверхностей соответствующих сферических сегментов, то есть

$$\frac{m_1}{m} = \frac{S_1}{S} \text{ и } \frac{m_2}{m} = \frac{S_2}{S},$$

где $S = 4\pi R^2$, $S_1 = 2\pi R h_1 = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha_1)$, $S_2 = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha_2)$. Отсюда

$$m_1 = \frac{m}{2}(1 - \cos\alpha_1) \text{ и } m_2 = \frac{m}{2}(1 - \cos\alpha_2).$$

Поскольку углы α_1 и α_2 близки, можно считать, что $\cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx \cos\alpha$.

Поэтому окончательно получим

$$u = v\,\frac{m_1\cos\alpha_1 - m_2\cos\alpha_2}{M + m - (m_1 + m_2)} \approx$$

$$\approx v\,\frac{m\cos\alpha\,(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{2\,(M + m\cos\alpha)}.$$

5. Перевернуть конденсатор на 180° вокруг горизонтальной оси — это значит поменять местами положительно и отрицательно заряженные пластины.

Поскольку работа по перенесению заряда в электростатическом поле не зависит от формы пути, то для определенности будем считать, что нижняя пластина закреплена, а верхнюю пластину «пронесли» сквозь нижнюю и расположили опять на расстоянии d от неподвижной.

Подсчитаем отдельно работу в поле, созданном неподвижной пластиной, и во внешнем поле $\mathbf{E}$. Если на первом этапе поле нижней пластины само совершило работу по сближению пластин, то на втором этапе пришлось извне совершить такую же работу по разведению пластин. Следовательно, суммарная работа в первом поле равна нулю, и остается только работа против внешнего поля, которая равна

$$A = FS = 2qEd.$$

Можно было подсчитать работу как изменение энергии конденсатора:

$$A = W_2 - W_1 =$$

$$= \frac{CU_2^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2} = \frac{Cd^2}{2}\,[(E + E_к)^2 -$$

$$-(E - E_к)^2] = 2Cd^2EE_к = 2qEd.$$

6. Так как на уровне отверстия давление в левом колене больше, чем в правом, первая жидкость, разорвав столб второй на две части, будет втекать в правое колено. При этом часть второй жидкости, которая была над отверстием, поднимается, а которая была под отверстием, начнет перетекать в левое колено через низ трубки. Движение прекратится, когда давления слева и справа на уровне отверстия сравняются. Пусть уровень жидкости в правом колене поднялся на x, тогда в левом колене уровень должен опуститься также на x. Так как давления на уровне дна трубки тоже одинаковы, жидкости в трубке расположатся так, как показано на рисунке 5.

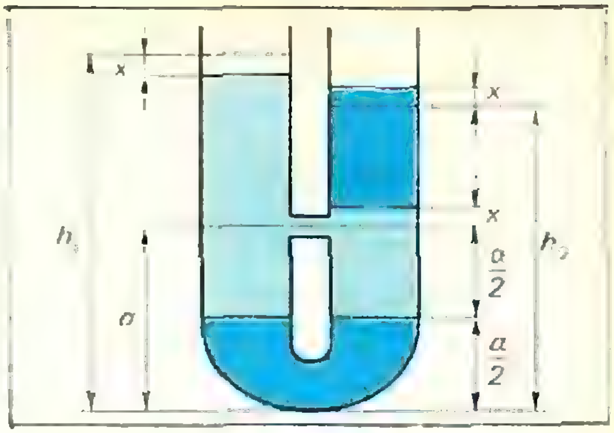


Рис. 5.

Запишем условие равенства давлений на уровне отверстия:

$$(h_1 - a - x)\,\rho_1 = (h_2 - a)\,\rho_2 + x\rho_1, \quad (1)$$

где h_1 и h_2 — начальные высоты первой и второй жидкостей соответственно.

Из условия равенства начальных давлений внизу трубки имеем

$$h_1\rho_1 = h_2\rho_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$x = \frac{a}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right).$$

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, №1)

1. $^1/_5$.
2. Вблизи берега (на мелких местах) из-за трения воды о дно скорость частиц воды тем больше, чем выше они над дном. Поэтому верхние слои воды «обгоняют» нижние.
3. 473.
4. Чай холоднее в стакане с сахаром.
5. 2401.
6. Изменится.

Корректор *Н. Б. Румянцева*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/XI-73 г.
Подписано в печать 28/XII-73 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,84
Тир. [illegible] экз. Т-20129 Цена 30 коп. Зак. 2304

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, г. Чехов Московской области

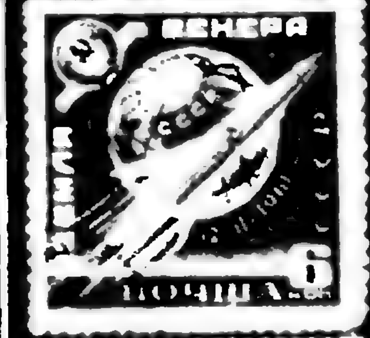
Рукописи не возвращаются

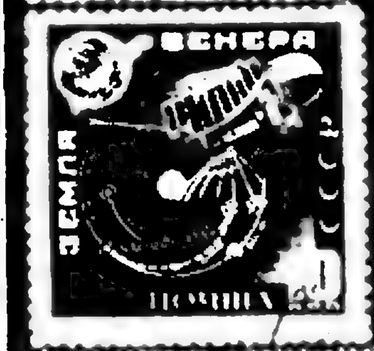
Первый полет к Венере

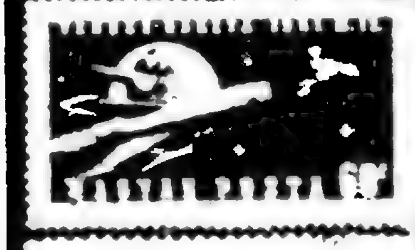
Венера является ближайшей к Земле планетой Солнечной системы. Еще совсем недавно наши представления о строении и свойствах Венеры были весьма скромными и приблизительными. Плотная атмосфера планеты не позволяла увидеть какие-либо детали ее поверхности, и ученые спорили о том, является поверхность Венеры пустыней или она покрыта океаном. Не было точных данных о периоде собственного вращения Венеры, о химическом составе ее атмосферы, температуре и давлении газов на различных высотах и т. п.

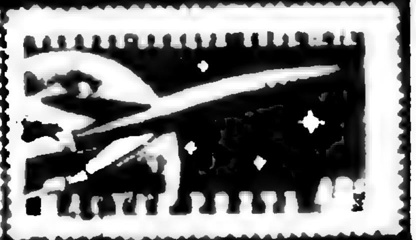
Использование автоматических межпланетных станций позволяет детально исследовать планеты Солнечной системы, получить огромное количество точных сведений об их характеристиках. Однако создание таких станций связано с огромными техническими трудностями.

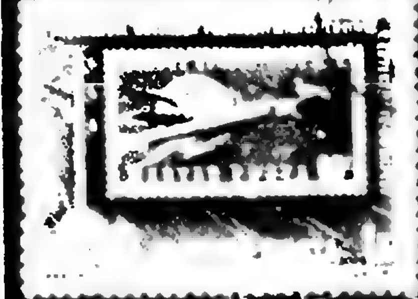
Тринадцать лет тому назад, 12 февраля 1961 года, в Советском Союзе впервые был успешно осуществлен запуск управляемой автоматической станции с борта искусственного спутника на межпланетную трассу. Станция «Венера-1», преодолев 270 миллионов километров, прошла вблизи планеты.

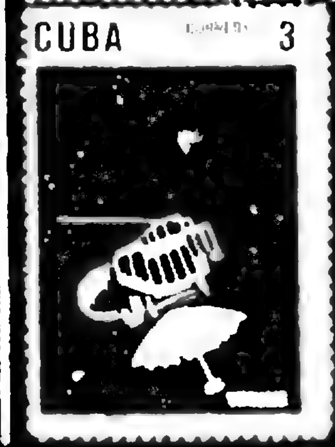










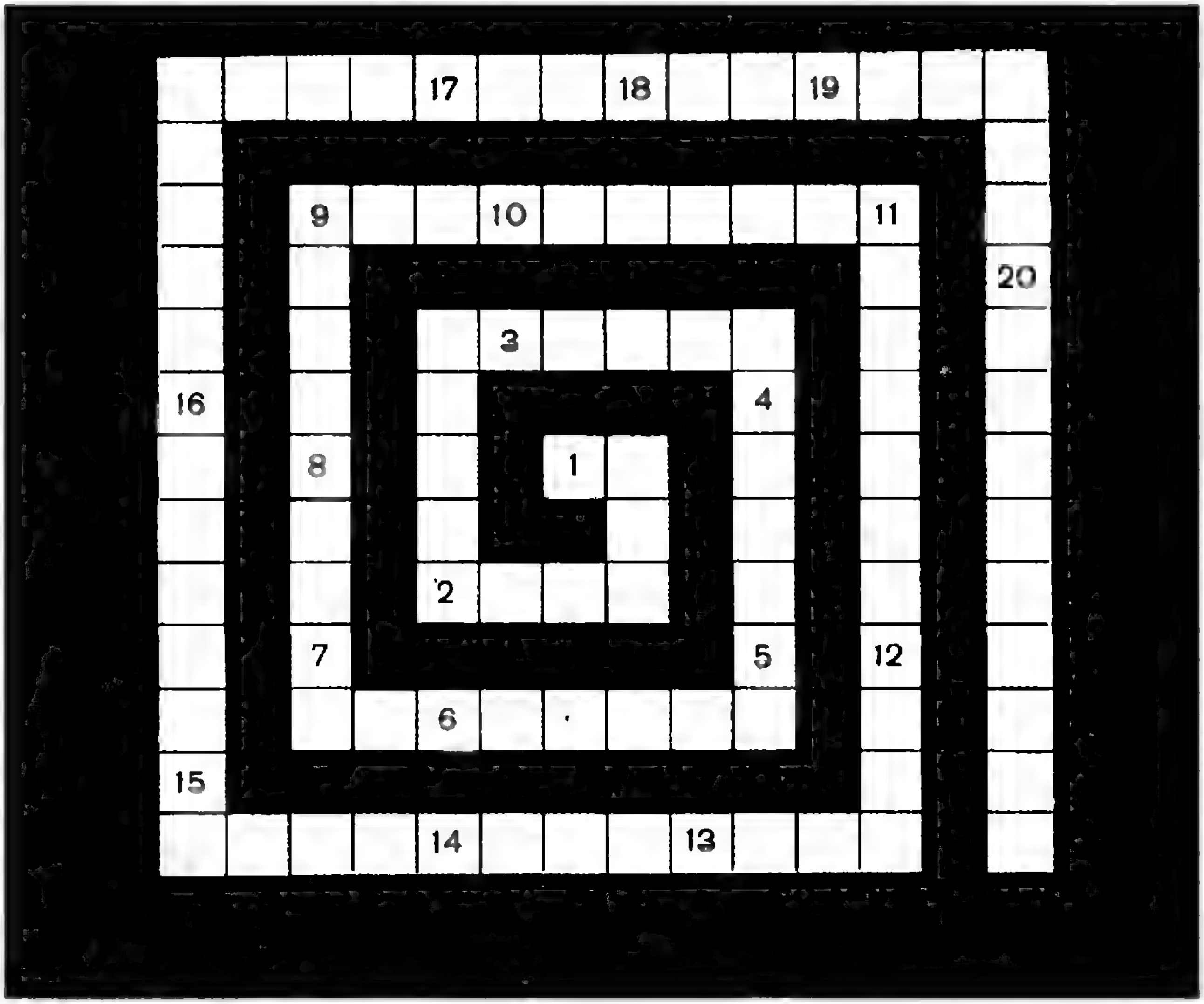


Общий вес станции был равен 643,5 кг. На станции находилась научная аппаратура, предназначенная для исследования космических лучей, измерения магнитных полей, регистрации микрометеоров и заряженных частиц, заполняющих космическое пространство.

Запуск «Венеры-1» открыл новую главу в исследовании космоса. В последующие годы СССР и США не раз отправляли автоматические станции к ближайшим планетам.

В Советском Союзе и в ряде других стран были выпущены почтовые марки, посвященные запуску «Венеры-1». Мы приводим здесь марки СССР, Венгрии и Кубы, приуроченные к этому событию. На советской марке достоинством 10 копеек воспроизведен общий вид станции и схема ее сближения с Венерой. На двух венгерских марках показан момент отделения автоматической станции от корпуса ракеты-носителя.

В. А. Лешковцев



Чайнворд

1. Французский математик, который участвовал в наполеоновском походе в 1812 году и был пленен русскими. 2. Древнегреческий математик, автор первого дошедшего до наших дней теоретического трактата по математике. 3. Французский математик, основоположник проектной и начертательной геометрии, участник сражения при Ла-Рошели в 1628 г. 4. Гениальный французский математик XIX века, убитый на дуэли. 5. Древнегреческий математик, первый открывший формулу Герона. 6. Мера длины, равная примерно четверти дециметра. 7. Известный французский геометр и общественный деятель (в 1792—94 г.г. был морским министром Франции). 8. Голландский математик XVII в., впервые высказавший основную теорему алгебры, доказанную строго в 1799 г. Гауссом. 9. Единица угловой меры, равная $^1/_{32}$ окружности. 10. Математик XX века, который не существовал и не существует. 11. Важнейшее понятие высшей математики, истоки которого имеются у Евдокса и Архимеда. 12. Математик, в честь которого названо число π, вычисленное с 34 десятичными знаками. 13. Один из «семи мудрецов» древности, открывший ряд теорем элементарной геометрии (равенство углов при основании равнобедренного треугольника и др.). 14. Преднамеренно неверный вывод. 15. Математик, друг Декарта, в его честь названы простые числа вида $2^p - 1$ (где p — простое). 16. Повесть С. В. Ковалевской, первой русской женщины — математика. 17. Счетный прибор, которым пользовались древние греки. 18. Среднеазиатский математик, открывший формулу бинома Ньютона. 19. Среднеазиатский ученый (философ, математик, врач и поэт), чье 1000-летие со дня рождения будет отмечаться в 1980 году. 20. Известный советский астрофизик, академик.

НОМЕР
3

Основан в 1970 году.

Квант

1974
3

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Л. А. Арцимович.* Плазма — четвертое состояние вещества
9 *А. П. Савин.* Проективная плоскость
15 *Е. Я. Гик.* Проективные шахматы
20 *Я. А. Смородинский.* Сколько времени идет свет от Меркурия?
24 *В. Я. Саннинский.* Об одной интересной книге

Лаборатория «Кванта»

26 *Г. И. Покровский.* Гидродинамический механизм в падающей пробирке

Математический кружок

27 *М. Л. Гервер.* 20 задач на пределы

32 **Победители конкурса «Кванта»**

Задачник «Кванта»

34 Задачи М251—М255; Ф263—Ф267
36 Решения задач М200, М208—М210; Ф218—Ф222

Практикум абитуриента

48 *Н. Х. Розов.* Читатели советуют
52 *Г. Я. Мякишев.* О законе сохранения энергии в механике
60 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
62 *А. Н. Борзяк, В. И. Давыдов, И. А. Дьяконов, П. Т. Дыбов.* Телевидение готовит в вуз

Рецензии, библиография

64 *И. М. Яглом.* Удачная серия
66 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги
67 *Ф. Кедров.* Брошюры по физике

Информация

68 *А. И. Орлов, А. Л. Розенталь.* Встречи с тремя неизвестными
69 *В. А. Лешковцев.* XXIV Международный астронавтический конгресс

«Квант» для младших школьников

72 Задачи
73 *Б. А. Кордемский.* Топологические опыты своими руками

76 **Ответы, указания, решения**

Уголок коллекционера

А. В. Алтыкис. Марки, посвященные Бенджамину Франклину *(3-я с. обложки)*

Смесь *(с. 8, 23, 25, 47)*

© *«Квант», 1974 год.*

На первой странице обложки помещена композиция на темы статей А. П. Савина «Проективная плоскость» и Е. Я. Гика «Проективные шахматы» (с. 9—19).

На фоне перспективного изображения шахматной доски нарисована модель проективной плоскости — круг, диаметрально противоположные точки которого считаются склеенными. Шесть разноцветных областей на этом круге попарно граничат друг с другом, поэтому для правильной раскраски полученной карты нужно шесть красок. Рисунок в средней области относится к теореме Дезарга — одной из красивейших теорем проективной геометрии (см. также с. 36).

На второй странице обложки вы видите бумажное кольцо, разрезанное по длине. Это кольцо склеено из перекрученной бумажной полоски. Если полоску до склеивания закрутить на пол-оборота, то после склеивания получится лист Мебиуса; на приведенном рисунке полоска перекручена на полтора оборота.

Видно, что после разрезания по длине кольцо не распадается на два куска. Оказывается, можно изготовить такое кольцо, что, разрезав его по длине, мы получим цепь из двух или даже трех колец. Об этом рассказано в статье Б. А. Кордемского «Топологические опыты своими руками» (с. 73—75).

Л. А. АРЦИМОВИЧ

ПЛАЗМА — ЧЕТВЕРТОЕ СОСТОЯНИЕ ВЕЩЕСТВА

Плазма — весьма распространенное в природе состояние вещества. Ее изучение началось сравнительно недавно. С физикой плазмы человечество связывает очень большие надежды, прежде всего, в области энергетики. Именно физика плазмы должна решить проблему осуществления управляемых термоядерных реакций и создания термоядерных электростанций. К ней же относятся работы по новым методам получения электрической энергии за счет обычного топлива без помощи паровых котлов и турбин, а также электрических генераторов.

Помещаемая ниже статья принадлежит недавно скончавшемуся члену редакционной коллегии нашего журнала академику Льву Андреевичу Арцимовичу. Он был руководителем советских исследований в области управляемых термоядерных реакций. Именно ему и его сотрудникам удалось впервые осуществить такие реакции в лабораторных условиях.

Текст статьи заимствован из введения к научно-популярной книге Л. А. Арцимовича «Элементарная физика плазмы», выпущенной в свет издательством «Атомиздат» третьим изданием в 1969 году. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

Пусть в замкнутом сосуде, сделанном из очень тугоплавкого материала, находится небольшое количество какого-либо вещества. Начнем подогревать сосуд, постепенно повышая его температуру. Если первоначально вещество, содержащееся в сосуде, было в твердом состоянии, то при возрастании температуры оно в некоторый момент начнет плавиться, а при еще более высокой температуре испарится, и образовавшийся газ равномерно заполнит весь объем. Когда температура достигнет достаточно высокого уровня, все молекулы газа (если это молекулярный газ, как, например, водород, азот или кислород) диссоциируют, то есть распадутся на отдельные атомы. В результате внутри сосуда будет содержаться газообразная смесь элементов, из которых состоит вещество. Атомы этих элементов будут быстро и совершенно беспорядочно двигаться, испытывая время от времени случайные столкновения между собой.

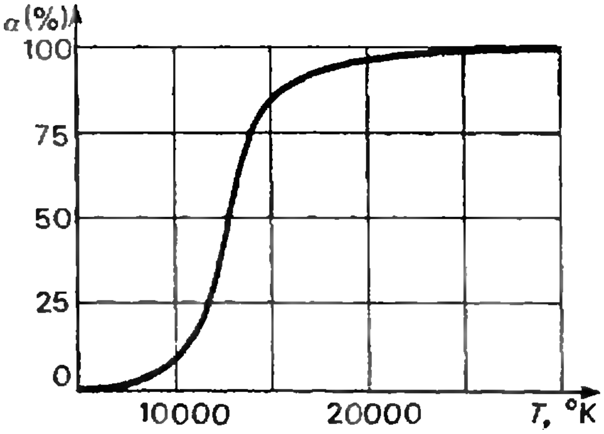
Средняя скорость хаотического теплового движения атомов растет пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры газа. Она тем больше, чем легче газ, то есть чем меньше атомный вес вещества. Величину средней скорости $\bar{v}$ можно найти с помощью следующей формулы:

$$\bar{v} = 1{,}3\cdot 10^4\sqrt{\frac{T}{A}}. \qquad (1)$$

Здесь T — абсолютная температура и A — атомный вес вещества. Из формулы (1) следует, например, что, при $T = 1000\,^\circ\mathrm{K}$ средняя скорость атомов водорода составит около $4\cdot 10^3$ *м/с*, а средняя скорость атомов ртути — всего лишь $3\cdot 10^2$ *м/с*.

Изменяя температуру от наиболее низкого уровня, соответствующего технике глубокого охлаждения (несколько градусов от абсолютного нуля), до нескольких тысяч градусов, мы можем заставить практически любое вещество пройти через все три состояния — твердое, жидкое и газообразное. Естественно возникает вопрос: как будут изменяться свойства вещества, если нагревание продолжится дальше и температура выйдет за пределы нескольких тысяч градусов? Конечно, при очень высокой температуре изображаемую нами картину нагревания вещества в тугоплавком сосуде можно представить только теоретически, так как предел термической стойкости даже самых тугоплавких материалов сравнительно невелик — не более 3000—4000 °К. Однако это практическое возражение не снимает вопроса о том, как будет вести себя вещество при непрерывном повышении его температуры. Поэтому мы не будем пока отказываться от принятой простой схемы. Допустим, что стенки сосуда обладают волшебной способностью противостоять сколь угодно высокой температуре, не разрушаясь и не испытывая никаких изменений. Итак, нагревание продолжается. В таком случае уже при 3000—5000 °К мы сможем заметить первые признаки появления новых процессов, которые будут связаны с изменением свойств самих атомов вещества.

Как известно, каждый атом состоит из положительно заряженного ядра, в котором сосредоточена почти вся масса атома, и электронов, вращающихся вокруг ядра и образующих в совокупности так называемую электронную оболочку атома. Эта оболочка и в особенности ее внешний слой, содержащий электроны, сравнительно слабо связанные с атомным ядром, обладают довольно хрупкой структурой. При столкновении атома с какой-либо быстро двигающейся частицей один из внешних электронов может быть оторван от атома, который превратится в положительно заряженный ион. Именно этот процесс ионизации и будет наиболее характерным для рассматриваемой стадии нагревания вещества. При достаточно высокой температуре газ перестает быть нейтральным: в нем появляются положительные ионы и свободные электроны, оторванные от атомов.



С увеличением температуры относительная доля ионов и электронов в этой смеси очень быстро возрастает. В условиях, когда нагретое вещество находится в тепловом равновесии с окружающей средой (в нашем случае со стенками воображаемого идеального сосуда) при температуре в несколько десятков тысяч градусов, подавляющая часть атомов в любом газе ионизирована и нейтральные атомы практически отсутствуют.

Кривая на рисунке показывает, как должна расти с температурой относительная доля ионизированных атомов в водороде. По оси абсцисс отложена абсолютная температура, по оси ординат — величина α — отношение числа положительных ионов к числу нейтральных атомов, первоначально имевшихся в газе, в процентах. Степень ионизации α зависит не только от температуры, но и от плотности газа (хотя и не так сильно). Поэтому для определенности отметим, что рисунок относится к тому случаю, когда в 1 *см*^{3} газа полное число положительных ионов и нейтральных атомов равно $7 \cdot 10^{16}$. При комнатной температуре газ с такой плотностью будет иметь давление, близкое к 1 *мм рт. ст.* При $T = 10\,000$ °К число ионизированных атомов меньше 10% общего числа атомов водорода, тогда как при $T = 30\,000$ °К на $2 \cdot 10^4$ положительных ионов (протонов) приходится всего лишь один нейтральный атом.

Электронная оболочка атома водорода содержит только один электрон, и поэтому с потерей электрона ионизация заканчивается. В атомах других элементов электронная оболочка имеет более сложную структуру. В ее состав входят электроны, обладающие разной степенью связи с атомом в целом. Электроны, принадлежащие к внешним слоям оболочки, отрываются сравнительно легко. Как уже говорилось выше, при температуре порядка 30 000 °К почти не должно оставаться примеси нейтральных атомов. Это означает, что можно говорить о полной ионизации газа. Однако отсюда не следует, что процесс ионизации закончился, так как положительные ионы в упомянутой области температур сохраняют значительную часть своего «электронного одеяния».

Чем больше порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева, тем больше число электронов в атоме и тем прочнее связаны электроны внутренних слоев оболочки с атомным ядром. Поэтому окончательная ионизация атомов таких тяжелых элементов происходит только при очень высоких температурах (миллионы или даже десятки миллионов градусов). Отметим, что в тяжелом газе при окончательной ионизации на каждый положительный ион будет приходиться столько же свободных электронов, сколько их первоначально находилось в связанном состоянии в атоме. При этом газ в целом остается нейтральным, так как процессы ионизации сами по себе не создают избытка в зарядах того или другого знака.

В ионизации газа при высокой температуре принимают участие различные процессы взаимодействия между отдельными атомами, с одной стороны, и электронами, ионами и световым излучением — с другой.

Газ, в котором значительная часть атомов или молекул ионизирована, называется плазмой. Это название было предложено в 1923 году американскими физиками Ленгмюром и Тонксом. Плазма — нормальная форма существования вещества при температуре порядка 10 000 °К и выше. Вместе с тем это и наиболее распространенное состояние вещества в природных условиях. Солнце и все звезды представляют собой не что иное, как гигантские сгустки высокотемпературной плазмы. Верхний слой атмосферной оболочки Земли также образован из плазмы — это так называемая ионосфера.

Для того чтобы подойти к понятию плазмы, мы воспользовались весьма простой идеей о нагревании вещества в некотором идеальном сосуде. Однако практически это совсем не наилучший и уж, во всяком случае, не наиболее легко осуществимый метод получения плазмы. Как в лабораторных опытах, так и в технике нормальными условиями для получения плазмы считаются различные виды электрических разрядов в газах. При электрическом разряде через газ проходит ток. Носителями этого тока являются электроны и ионы, которые образуются в результате ионизации газа. Самый процесс ионизации неразрывно связан с прохождением тока. Только благодаря наличию тока в газе все время возникают новые ионы и электроны, и поэтому степень ионизации поддерживается на определенном уровне. Будь то молния, электрическая дуга, нарядно окрашенный разряд в рекламной трубке или разряд в люминесцентной лампе дневного света — во всех случаях мы имеем дело с явлениями, разыгрывающимися в сильно ионизированной плазме.

Вместе с тем между плазмой, образовавшейся при нагревании вещества заодно с сосудом, в котором оно находится, и плазмой газового разряда имеется одно существенное различие. Плазма газового разряда не является в термическом (тепловом) отношении равновесной. Она нагревается изнутри за счет энергии, выделяющейся при прохождении тока, и охлаждается с поверхности вследствие контакта с холодными стенками газоразрядного прибора или же с окружающими слоями обычного газа. Плазма, образующаяся при интенсивных газовых разрядах, может иметь во много раз более высокую температуру, чем металл, стекло или нейтральный газ, которые ее окружают. Кроме того, такая плазма термически неравновесна еще в одном отношении. Она состоит из смеси нескольких компонент, неодинаково нагретых. Одной из этих компонент являются электроны, другой — положительные ионы и третьей — нейтральные атомы. Они так же равномерно перемешаны между собой, как кислород и азот в атмосфере.

В противоположность обычной газовой смеси, все частицы которой независимо от их принадлежности к той или другой составляющей имеют одинаковую среднюю кинетическую энергию беспорядочного теплового движения, у электронов, ионов и нейтральных атомов плазмы газового разряда средняя кинетическая энергия различна. Электроны, как правило, обладают гораздо более высокими энергиями, чем ионы, а кинетическая энергия ионов может превышать энергию нейтральных атомов и молекул. Поэтому можно сказать, что плазма представляет собой смесь компонент с различными температурами. Как известно, средняя величина кинетической энергии $\overline{E}$ частиц газа, участвующих в беспорядочном тепловом движении, связана с температурой T следующей простой формулой:

$$\overline{E} = \frac{3}{2} kT, \qquad (2)$$

где k — постоянная Больцмана.

Из-за различия в величине средней кинетической энергии электронов, ионов и нейтральных частиц в плазме вместо одной общей температуры следует различать три разные температуры — электронную $T_э$, ионную $T_и$ и атомную $T_а$. Обычно $T_э \gg T_и > T_а$. Очень большое различие между $T_э$ и $T_и$, характерное для большинства форм газового разряда, обусловлено громадной разницей в величине массы электронов и ионов. Внешние источники электрической энергии, с помощью которых создается и поддерживается газовый разряд, передают энергию непосредственно электронам плазмы, так как именно легкие электроны являются носителями тока. Ионы приобретают свою энергию благодаря столкновениям с быстро движущимися электронами. Однако при каждом отдельном столкновении из-за большого различия в массе легкий электрон передает иону лишь небольшую часть своей кинетической энергии, отскакивая от него, как шарик для пинг-понга, ударившийся о массивный стальной шар.

Простой анализ, основанный на применении закона сохранения энергии и закона сохранения количества движения, показывает, что если тело малой массы m_1 сталкивается упруго с телом во много раз большей массы m_2, то относительная доля кинетической энергии, которую легкое тело в состоянии передать тяжелому, не может превысить $\frac{4m_1}{m_2}$ (попробуйте доказать это сами). Отношение массы электрона к массе иона равно $1 : 1840\,A$, где A — атомный вес вещества, которому принадлежат ионы. Следовательно, наибольшая относительная величина передаваемой в одном соударении энергии составляет всего лишь около $2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{A}$. Поэтому электрон должен испытать очень много столкновений с ионами для того, чтобы полностью отдать имеющийся у него излишек энергии.

Поскольку параллельно процессам, при которых происходит обмен энергиями между электронами и ионами, идет процесс приобретения энергии электронами от источников электрического тока, питающего разряд, в плазме при газовом разряде обычно все время поддерживается большой перепад температур между электронами и ионами. Так, например, в упоминавшихся выше газоразрядных приборах (рекламные трубки, лампы дневного света, ртутные выпрямители и т. д.) величина $T_э$ обычно лежит в пределах нескольких десятков тысяч градусов, в то время как величины $T_и$ и $T_а$, как правило, не превышают одной—двух тысяч градусов. При дуговом разряде, который используется для электросварки, электронная и ионная температуры ближе друг к другу вследствие того, что в этом случае разряд происходит в газе с большей плотностью и частые столкновения между электронами и ионами быстро выравнивают разность температур. Однако и в дуговом разряде $T_э$ все же больше $T_и$ ($T_э$ порядка нескольких десятков тысяч градусов, а $T_и$ и $T_а$ порядка 6000 °K).

При некоторых специальных условиях в сильно ионизированной плазме ионная температура может значительно превысить электронную. Такие условия возникают, например, при кратковременных электрических разрядах очень большой мощности в экспериментальных установках, предназначенных для исследования способов генерации так называемых управляемых термоядерных реакций.

Теперь несколько уточним общие представления о плазме и ее основных характеристиках. Плазма, то есть ионизированный газ, может обладать довольно сложным составом. Даже в том случае, если плазма образуется в результате ионизации химически простого газа, например азота, кислорода или паров ртути, ее ионная компонента будет содержать ионы различных сортов — с одним, двумя, тремя или более элементарными зарядами. Следует отметить, что кроме атомарных ионов могут присутствовать молекулярные ионы, а также нейтральные атомы и молекулы. Каждая из этих компонент будет характеризоваться своей концентрацией n и температурой T.

В простейшем случае, когда все ионы — однозарядные атомарные ионы, а нейтральная компонента полностью диссоциирована и состоит только из атомов, в плазме будут присутствовать всего три компоненты: электроны, ионы и нейтральные атомы. Такие условия создаются только при интенсивных разрядах в водороде, дейтерии или тритии. В приведенном примере концентрация ионов $n_и$ приблизительно равна концентрации электронов $n_э$. В более общем случае, когда в плазме присутствуют однозарядные ионы с концентрацией n_1, двухзарядные — с концентрацией n_2, трехзарядные — с концентрацией n_3 и т. д., можно записать следующее приблизительное равенство:

$$n_э = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots$$

Такое соотношение между концентрацией отрицательных и положительных зарядов в плазме говорит о том, что плазма в целом квазинейтральна, то есть в ней нет заметного избытка зарядов одного знака над зарядами другого знака.

На этом свойстве плазмы нужно остановиться несколько подробнее, так как оно имеет существенное значение и, в конечном счете, в нем содержится самое определение понятия «плазма».

Возникает естественный вопрос: с какой степенью точности в ионизированном газе должно соблюдаться условие квазинейтральности? Каким бы путем ни создавалась ионизация, заранее совсем не очевидно, что положительных и отрицательных зарядов должно быть поровну. Из-за различия в скоростях движения электронов и ионов первые могут с большей легкостью покидать объем, в котором они возникли. Поэтому если благодаря процессам ионизации атомов первоначально образуется одинаковое число зарядов противоположных знаков, то из-за быстрого исчезновения электронов, погибающих на стенках аппаратуры, внутри которой находится ионизированный газ, ионы, казалось бы, должны оставаться в значительно большем числе, то есть ни о какой квазинейтральности не должно быть и речи.

С другой стороны, нужно учесть, что при преимущественной утечке зарядов одного знака (электронов) в ионизированном газе немедленно образуется избыточный заряд другого знака, который способствует выравниванию потока электронов и ионов и препятствует увеличению разницы между концентрациями частиц обоих знаков. Условия, при которых этот эффект будет достаточен для того, чтобы поддерживать квазинейтральность, можно разъяснить с помощью следующих соображений.

Допустим для простоты, что в ионизированном газе присутствуют кроме электронов только однозарядные ионы. Квазинейтральность означает, что $n_э$ очень мало отличается от $n_и$. Как отразится на поведении отдельных частиц заметное отклонение $n_э$ от $n_и$? Очевидно, что все будет зависеть от того, насколько сильным окажется обратное влияние электрического поля, возникающего при таком отклонении, на движение заряженных частиц. Здесь сразу же выделяются два крайних случая. Если число заряженных частиц в объеме невелико, то создаваемые ими электрические поля слишком слабы для того, чтобы повлиять на их движение, даже если все поля складываются. В этом случае отдельные электроны и ионы в своем поведении никак не связаны друг с другом и каждая из частиц двигается так, как будто бы все другие отсутствуют. Следовательно, условие квазинейтральности здесь не обязано выполняться. Противоположный случай соответствует ионизированному газу с высокой концентрацией заряженных частиц, занимающему достаточно большой объем. В этом случае избыточные заряды, возникающие при сильном нарушении равенства между $n_э$ и $n_и$, создают электрические поля, достаточные для выравнивания потоков и восстановления квазинейтральности.

В конечном счете все зависит от соотношения между потенциальной энергией отдельного иона или электрона в электрическом поле, возникающем при нарушении квазинейтральности, и величиной средней кинетической энергии частиц, связанной с их тепловым движением. Если потенциальная энергия $W_п$, соответствующая заметному отклонению $n_э$ от $n_и$, будет значительно превышать величину $kT_э$, которая является мерой энергии теплового движения электронов, то условие квазинейтральности будет соблюдаться с достаточно хорошей точностью. Анализируя соотношение между $W_п$ и $kT_э$ более детально, можно прийти к простому количественному критерию, характеризующему условия, при которых квазинейтральность сохраняется:

$$r \gg 5\sqrt{\frac{T_э}{n_э}}. \qquad (3)$$

В этом соотношении $n_э$ — концентрация заряженных частиц (число электронов в единице объема) и r — линейный размер области, занятой ионизированным газом, например, радиус сферической колбы, в которой этот газ находится. Появление величины r в данном выражении нетрудно разъяснить. При заданной концентрации заряженных частиц создаваемый ими потенциал, а следовательно, и потенциальная энергия отдельной частицы зависят от размеров области, в которой находятся эти частицы. Поэтому величина, характеризующая данный размер, должна обязательно входить в формулу, выражающую условие квазинейтральности. Величина $5\sqrt{\frac{T_э}{n_э}} = r_Д$ носит название дебаевского радиуса по имени немецкого физика Дебая.

Согласно условию (3), если размеры области, занимаемой ионизированным газом с заданной концентрацией $n_э$ и электронной температурой $T_э$, значительно превосходят $r_Д$, то внутри этой области $n_э \approx n_и$. В этом случае при сильном отклонении $n_э$ от $n_и$ образующееся электрическое поле будет выталкивать частицы одного знака (присутствующие в избытке) и задерживать уход частиц другого знака. Такой механизм, автоматически поддерживающий равенство $n_э$ и $n_и$, перестает действовать в случае, когда $r \ll r_Д$. В объемах с линейными размерами, значительно меньшими, чем $r_Д$, электрические поля, возникающие при отклонении $n_э$ от $n_и$, будут слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на движение отдельных частиц.

Теперь можно вложить более определенный смысл в понятие «плазма». До той поры, пока мы имеем дело с относительно небольшим числом заряженных частиц, которые не в состоянии создать достаточно сильное поле для того, чтобы оно могло существенно сказаться на поведении каждой из частиц, не имеет смысла говорить о наличии какого-то нового состояния вещества. Новая форма вещества — плазма — соответствует такому состоянию, когда число электронов и ионов настолько велико, что даже небольшое смещение электронной компоненты по отношению к ионной оказывается невозможным из-за сильных электрических полей, возникающих при нарушении равенства между $n_э$ и $n_и$. Таким образом, ионизированный газ имеет право называться плазмой только в том случае, если условие (3) выполнено с достаточным запасом.

Нужно подчеркнуть, что квазинейтральность плазмы соблюдается только в пределах достаточно больших объемов. Если выделить внутри плазмы куб со стороной x, значительно меньшей, чем $r_Д$, то в пределах этого куба число ионов может значительно отличаться от числа электронов. Чем меньше отношение $x/r_Д$, тем больше может быть различие между величиной отношения $n_э/n_и$ и единицей.

Как появился знак корня

Извлечение корня обозначается знаком $\sqrt{\ }$. Не все знают, что это — видоизменение латинской буквы *r*, первой в латинском слове «radix», означающем «корень». В XVI веке знаком корня служила не строчная, а прописная буква *R*, а рядом с нею ставилась первая буква латинских слов «quadrătus» — «квадратный» (*q*) или «cŭbĭcus» — «кубический» (*c*), чтобы указать, какой именно корень требуется извлечь. Например, писали $R \cdot q \cdot 4352$ вместо нынешнего $\sqrt{4352}$.

Найти число

1. Найти трехзначное число, которое, будучи прочитано справа налево, сохраняет свое значение, если считать, что в этом случае оно изображено в девятиричной системе счисления.

2. 3, 5, 7 — три последовательных нечетных простых числа. Имеются ли в натуральном ряде чисел еще три последовательных нечетных простых числа?

3. Найти четырехзначное число, равное квадрату числа, образованного двумя последними цифрами этого числа.

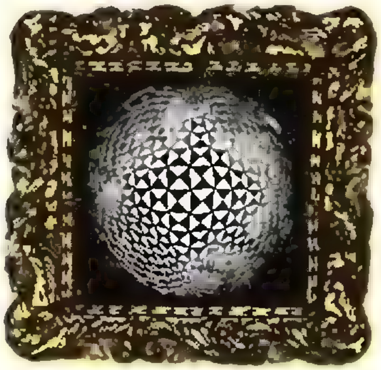
4. Найти двухзначное число, квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

5. Найти четырехзначное число, равное 4-й степени суммы его цифр.

6. Найти число, являющееся точным квадратом, если известно, что в пятиричной системе оно оказывается числом четырехзначным, а если его записать в семиричной системе, то оно изображается одинаковыми цифрами.

А. П. САВИН

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ



Рисунки и планы

Недавно, перелистывая учебник природоведения для 3-го класса, я обратил внимание на две картинки: класс, нарисованный художником (рис. 1), и план того же класса (рис. 2). Взгляните на них. Класс на рисунке 1 изображен таким, каким вы его видите, стоя у доски. А план? Таким вы свой класс наверняка не видели, даже забравшись на стул, поставленный на парты.

Однако сделать хороший рисунок класса, комнаты, двора — задача гораздо более трудная, чем нарисовать соответствующий план. Действительно, чтобы нарисовать план, достаточно набраться терпения и измерить размеры предметов и расстояния между ними, а затем в соответствующем масштабе перенести на лист бумаги. Задача, вполне посильная любому третьекласснику.

А рисунок? «Для этого нужен талант», — скажете вы. Что ж, несомненно, Галя Мисевич из Киева — талантливая девочка, рисунок, сделанный ею в семилетнем возрасте (рис. 3), украшал обложку журнала «Мурзилка». Однако что-то в нем не так. В нем... отсутствует перспектива! Та самая перспектива, которая придает объемность плоскому изображению.

Впервые правильным изображением перспективы серьезно заинтересовались художники эпохи Возрождения, в особенности Альбрехт Дюрер (1471—1528) и Леонардо да Винчи (1452—1519). Затем к решению этой задачи приступили математики и создали красивую науку — проективную геометрию, ее основы были заложены Жераром Дезаргом (1593—1661) и Блезом Паскалем (1623—1662).

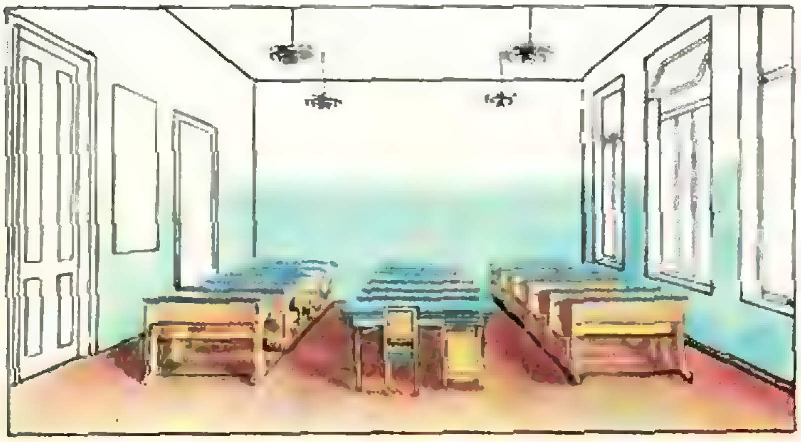


Рис. 1.

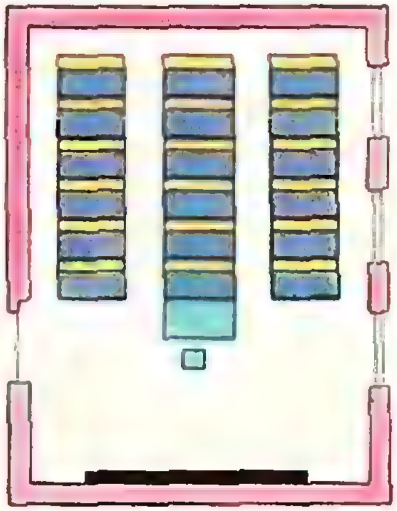


Рис. 2.

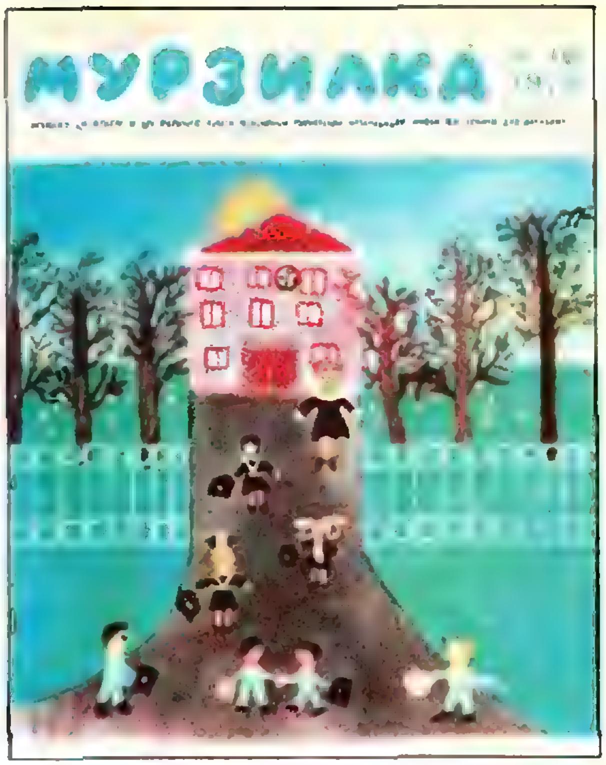


Рис. 3.

Взгляните в окно. Вы увидите пейзаж. А теперь представьте себе, что это не окно, а картина. «Автору» этой картины, очевидно, невозможно поставить в упрек плохую перспективу. Попробуем повторить эту картину, например, мелом прямо на оконном стекле. Встанем и пойдем к окну. И тут же «картина» начнет изменяться — на ней появятся новые предметы, а те, которые были прежде, станут перемещаться и менять свою форму. Однако дойдем до окна и попытаемся изобразить то, что мы видим. Нас ждет неудача: малейшее движение головой, и картина меняется, изображения передвигаются на другие места. Что же делать?

Взгляните на гравюру А. Дюрера (рис. 4). С помощью остроумного приспособления художник рисует вазу так, как она видна из точки, в которой веревка прикреплена к стене. Пользуясь этим инструментом и вы сможете правильно изобразить перспективу пейзажа в вашем окне. Однако не думайте, что вы уже стали художником. Еще точнее эту картину воспроизведет фотоаппарат, а для того, чтобы картина стала действительно художественным произведением, нужен талант.

Но оставим на время живопись и перейдем к геометрии. Рассмотрим схему метода Дюрера (рис. 5). Зададим в пространстве плоскость P и точку O. Для того чтобы построить изображение точки N на плоскости P, проведем прямую через точки N и O. Точка N_1, в которой эта прямая пересечет плоскость P, и будет изображением точки N на плоскости P. Такой метод построения изображения называется *центральной проекцией на плоскость P из точки O.*

Рассмотрим центральную проекцию из некоторой точки O фигур, ле-

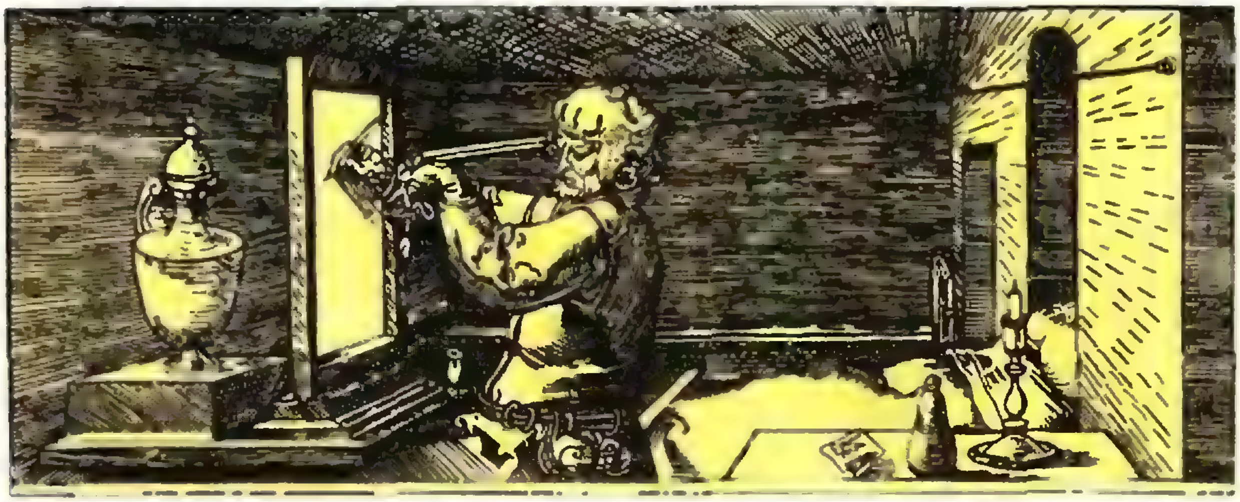


Рис. 4.

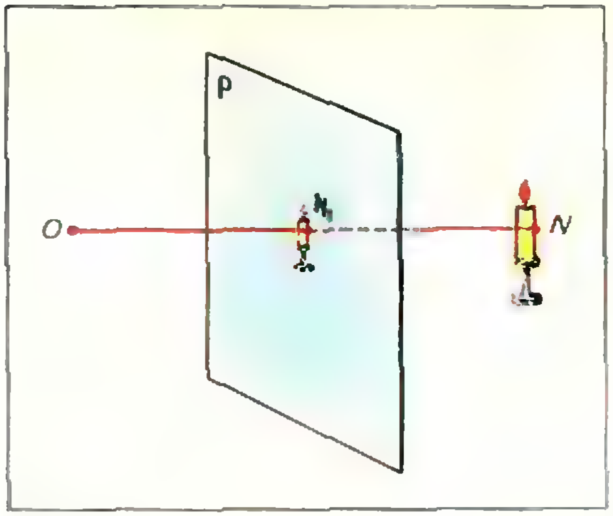


Рис. 5.

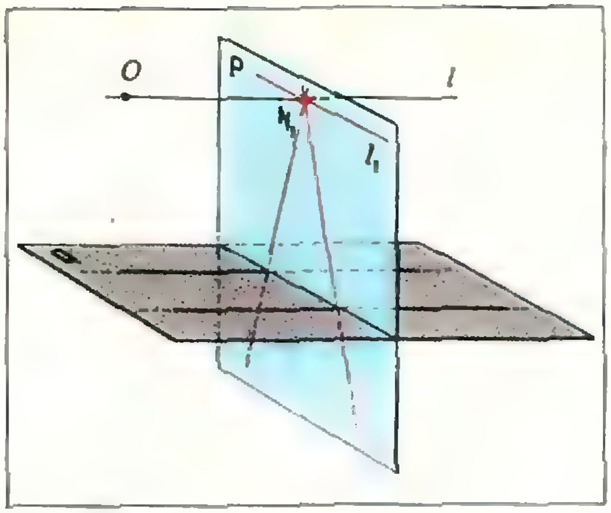


Рис. 7.

жащих в горизонтальной плоскости Q, на вертикальную плоскость P (рис. 6). Заметим, что при этом прямые будут переходить в прямые. Действительно, проведем плоскость через прямую на плоскости Q и точку O. Линия ее пересечения с плоскостью P и будет изображением выбранной прямой. Ясно, что если две прямые пересекаются (не на прямой l_2, см. далее рис. 8), то их изображения тоже пересекаются. Могут пересекаться даже изображения параллельных прямых (рис. 7), причем точка N_1 пересечения этих прямых лежит на прямой l, проходящей через точку O и параллельной плоскости Q (так «пересекаются» на горизонте рельсы железной дороги).

А какой прямой на плоскости Q соответствует «горизонтальная» прямая l_1 на плоскости P — «линия горизонта»? Такой прямой нет. В то же время для любой другой прямой плоскости P найдется прямая на плоскости Q, которая ей соответствует (проверьте). С другой стороны, для прямой l_2 пересечения плоскости Q с плоскостью R (R параллельна плоскости P и проходит через точку O, см. рис. 8) и только для этой прямой не найдется изображения на плоскости P ни для одной из ее точек, да и образы прямых, параллельных l_2 и лежащих в Q, на P не пересекаются. Стремление устранить такую «дискриминацию» привело к созданию понятия проективной плоскости.

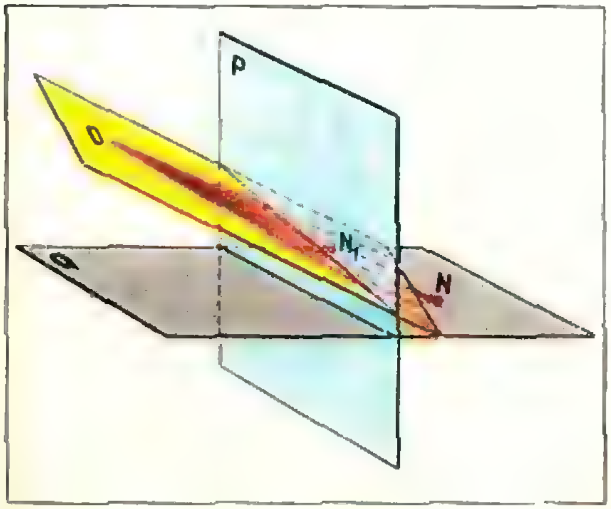


Рис. 6.

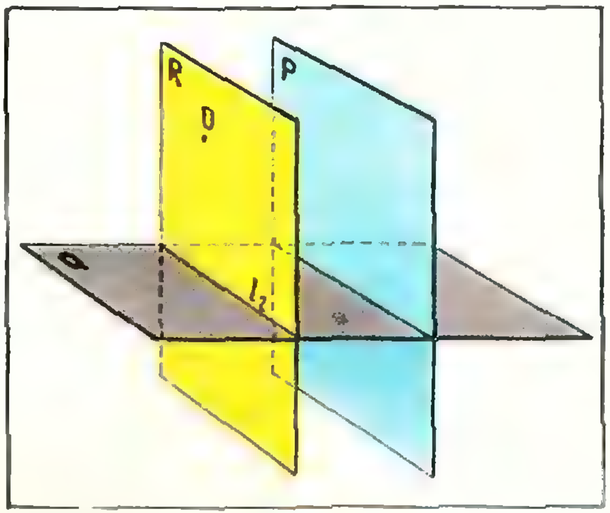


Рис. 8.

Проективная плоскость

Мысленно дополним обычную плоскость точками еще одной «прямой», которую будем называть *бесконечно удаленной* (ее точки также будем называть *бесконечно удаленными*). Свяжем элементы плоскости с вновь введенными элементами.

Во-первых, будем считать, что любая прямая плоскости пересекается с бесконечно удаленной прямой и притом в единственной точке (эта точка, естественно, будет бесконечно удаленной, поскольку она принадлежит бесконечно удаленной прямой).

Во-вторых, будем считать, что любая прямая, параллельная данной, пересекается с бесконечно удаленной прямой в той же точке, что и данная. Тогда эта точка является точкой пересечения всех прямых, параллельных данной (в смысле параллельности на обычной плоскости).

Теперь при центральном проектировании прямую l_1 можно считать образом «бесконечно удаленной прямой» плоскости Q, а образом прямой l_2 — «бесконечно удаленную прямую» плоскости P, при этом лишь для точки пересечения «бесконечно удаленной прямой» плоскости Q с прямой l_2 не найдется места на прямой l_1, то есть эта точка останется «бесконечно удаленной» (и аналогично для «бесконечно удаленной прямой» плоскости P и прямой l_1).

Каковы же свойства полученной проективной плоскости? А это зависит от того, с какой точки зрения их рассматривать. Наиболее естественно рассматривать те свойства проективной плоскости, которые не меняются при центральном проектировании. Действительно, при этом стирается разница между прямыми на первоначальной плоскости и бесконечно удаленной прямой, поскольку свойства бесконечно удаленной прямой плоскости Q будут в таком случае полностью соответствовать свойствам прямой l_1 плоскости P.

Перечислим основные из этих свойств:

1) *Для любых двух точек существует одна и только одна прямая, которой они одновременно принадлежат.*

2) *Любые две прямые пересекаются в одной и только в одной точке.*

При этом придется забыть и об углах между прямыми, поскольку их величины не сохраняются при центральном проектировании, и о расстояниях между точками. Кажется, что это обстоятельство обедняет геометрию проективной плоскости. Тем не менее получается большая и содержательная теория, которая носит название *проективной геометрии* и отличается чрезвычайным изяществом своих теорем. Вот одна из них.

Теорема Дезарга. *Пусть даны три прямые, пересекающиеся в точке O. Пусть на одной прямой лежат точки A и A_1, на другой — B и B_1, на третьей C и C_1. Тогда точки пересечения прямых AB и A_1B_1,*

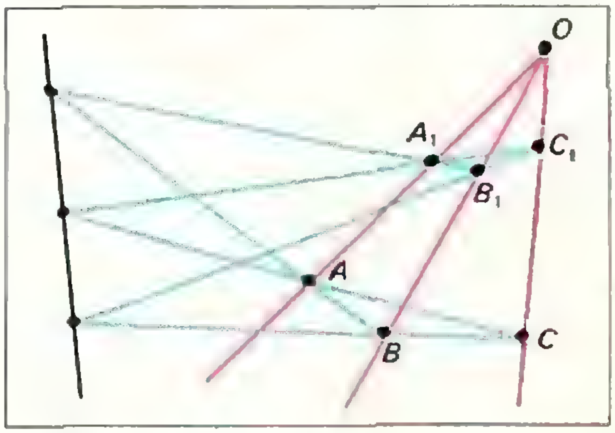


Рис. 9.

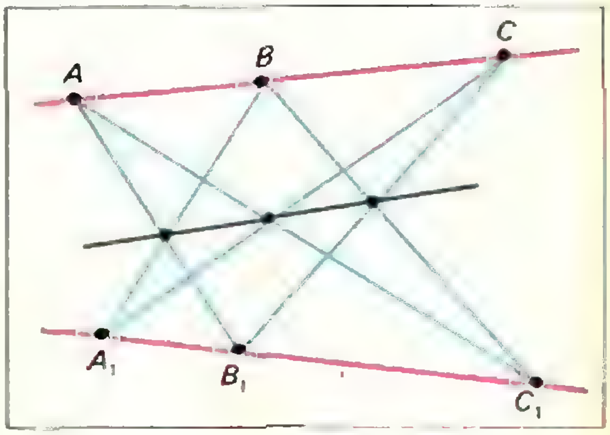


Рис. 10.

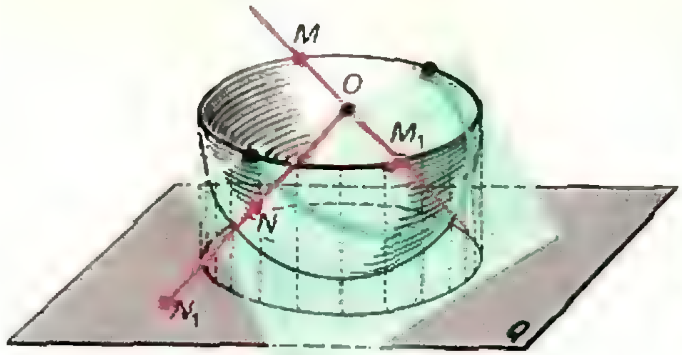


Рис. 11.

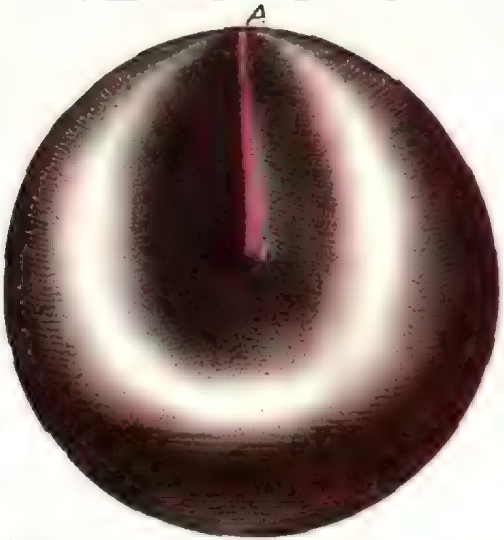


Рис. 12.

AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 лежат на одной прямой (рис. 9).

На обычной плоскости в этой теореме приходится отдельно оговаривать ряд случаев, когда какие-либо прямые параллельны. А вот еще одна теорема.

Теорема Паппа. *Пусть на одной прямой даны точки A, B и C, а на другой — точки A_1, B_1 и C_1, тогда точки пересечения прямых AB_1 и A_1B, AC_1 и A_1C, BC_1 и B_1C лежат на одной прямой* (рис. 10).

И эта теорема на обычной плоскости нуждается в уточнениях в случае параллельности тех или иных прямых.

Одним из самых замечательных свойств проективной геометрии является «принцип двойственности»: *на проективной плоскости каждая теорема остается справедливой, если в ней всюду слово «точка» заменить на слово «прямая», слово «прямая» на слово «точка» и поменять местами выражения: «лежит на...» и «проходит через...».* Примером такой двойственности могут служить указанные выше свойства проективной плоскости.

Упражнение

Сформулируйте теоремы, двойственные теоремам Дезарга и Паппа.

Тем, кого заинтересовала проективная геометрия, рекомендуем прочитать книги, указанные в конце статьи. А сейчас вернемся к самой проективной плоскости, как к геометрическому объекту.

Модели проективной плоскости

Мы получили проективную плоскость, введя «бесконечно удаленные точки» и «бесконечно удаленную прямую». Можно ли посмотреть, что же из этого получилось? «Бесконечно удаленную прямую» (без одной точки) мы увидели, когда спроектировали проективную плоскость Q на плоскость P. Но при этом «ушли на бесконечность» другие ее точки — прямая l_2. Хотелось бы получить такую модель проективной плоскости, в которой были бы «видны» все ее точки.

Одна такая модель уже почти построена. А именно, зафиксируем точку O в пространстве и назовем «точками» прямые, проходящие через точку O, а «прямыми» — плоскости, проходящие через точку O. Посмотрите еще раз на рисунки 6—8. Каждой точке проективной плоскости действительно соответствует единственная «точка» модели — прямая, проходящая через эту точку и точку O, а каждой прямой — «прямая» — плоскость, проходящая через эту прямую и точку O. При этом бесконечно уда-

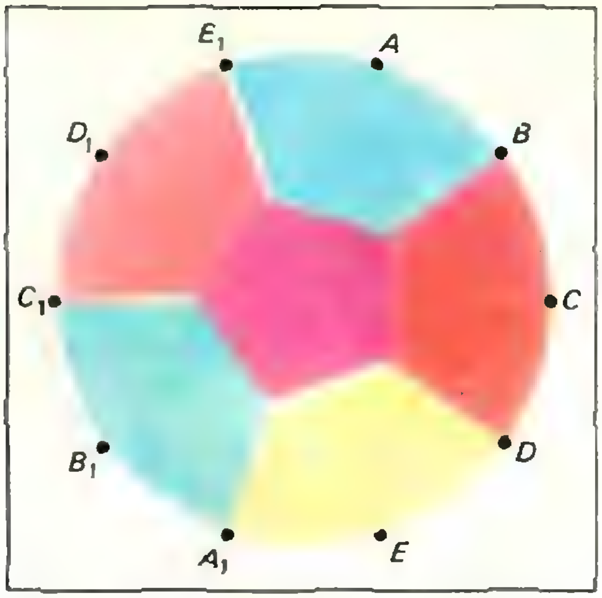


Рис. 13.

ленной прямой будет соответствовать горизонтальная плоскость — «прямая», а бесконечно удаленным точкам — лежащие в горизонтальной плоскости прямые (например, ON_1 на рисунке 7) — «точки». В этой модели наиболее ярко видно равноправие всех точек и прямых проективной плоскости.

Полученная модель очень хороша для исследования свойств проективной плоскости, однако хотелось бы иметь такую модель, в которой точки были бы точками, а прямые — линиями. Оказывается, такую модель нетрудно получить из предыдущей. Добавим еще полусферу с центром в точке O, касающуюся плоскости Q (основание полусферы параллельно плоскости Q). Тогда каждой прямой, соединяющей точку O с точкой на плоскости Q, будет соответствовать точка на полусфере — та самая, в которой эта прямая пересекается с полусферой. Прямым обычной плоскости при этом будут соответствовать полуокружности на полусфере, проходящие через диаметрально противоположные точки границы полусферы. Семейству параллельных прямых на плоскости Q будут соответствовать две диаметрально противоположные точки на границе полусферы (рис. 11), а бесконечно удаленной прямой — граница полусферы.

К сожалению, каждой «бесконечно удаленной точке» (точке «бесконечно удаленной прямой») соответствуют две диаметрально противоположные точки границы полусферы. Чтобы избавиться от этого недостатка модели, надо лишь склеить между собой две полуокружности границы полусферы, но так, чтобы при этом склеивались диаметрально противоположные точки. Это сделать, оказывается, совсем не просто. Мало того, что полусферу придется изгибать, придется еще и разрешить ей пересекать саму себя. То, что получится в результате, можно увидеть на рисунке 12 — поверхность сама себя пересекает по линии AB.

В этой модели, естественно, уже трудно хорошо изобразить прямые. Поэтому чаще всего пользуются другой моделью: круг, диаметрально противоположные точки которого мысленно считаются склеенными. Такая модель получается из модели на полусфере (рис. 11), если эту полусферу спроектировать на плоскость Q.

На проективной плоскости можно нарисовать шесть стран, каждые две из которых граничат друг с другом (рис. 13). Заметим, что на обычной плоскости таких стран может быть не больше четырех. Было доказано, что шести красок достаточно для правильной раскраски любой карты на проективной плоскости (раскраска называется правильной, если любые две страны, имеющие общую границу, раскрашены в разные цвета), а для обычной плоскости до сих пор не найдено карты, для правильной раскраски которой не хватило бы четырех красок, но и не доказано, что любую карту можно правильно раскрасить четырьмя красками.

Литература

1. П. С. Александров, Лекции по аналитической геометрии. «Наука», М., 1968.

2. Дж. В. Юнг. Проективная геометрия. ИЛ, М., 1949.

3. Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. «Наука», М., 1966.

Е.Я.ГИК

ПРОЕКТИВНЫЕ ШАХМАТЫ

На страницах «Кванта» уже рассказывалось о том, как играть в шахматы на различных досках, получающихся при помощи геометрических преобразований из обычной шахматной доски. Именно таким способом возникают, например, цилиндрические и тороидальные шахматы *). Сейчас мы познакомимся с шахматной игрой еще на одной необычной доске. В основе этой игры лежат элементы проективной геометрии, поэтому шахматы называются проективными.

Проективная плоскость

О ней рассказано в этом номере журнала в статье А. П. Савина (см. с. 9). Коротко повторим: к обычной плоскости добавляется некоторое множество дополнительных точек. Каждая из этих точек соответствует семейству параллельных прямых плоскости и называется *бесконечно удаленной* точкой проективной плоскости. Параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. Различным множествам параллельных прямых соответствуют различные бесконечно удаленные точки — в каждом направлении имеется своя точка. Совокупность всех бесконечно удаленных точек объявляется «прямой», она называется *бесконечно удаленной прямой* проективной плоскости. Точки и прямые исходной плоскости называются *конечными*.

Итак, на проективной плоскости всякие две прямые обязательно пересекаются, причем в единственной точке: конечной, если на обычной плоскости они не параллельны, и в бесконечно удаленной, если параллельны. Если же одна из прямых бесконечно удаленная, то она пересекается со второй прямой в бесконечно удаленной точке.

Проективная шахматная доска

Расширяя раскраску обычной шахматной доски на всю бесконечную плоскость, мы получаем клетчатую черно-белую плоскость, которую будем называть *бесконечной шахматной доской* Ш. Естественным образом введем на ней декартову систему

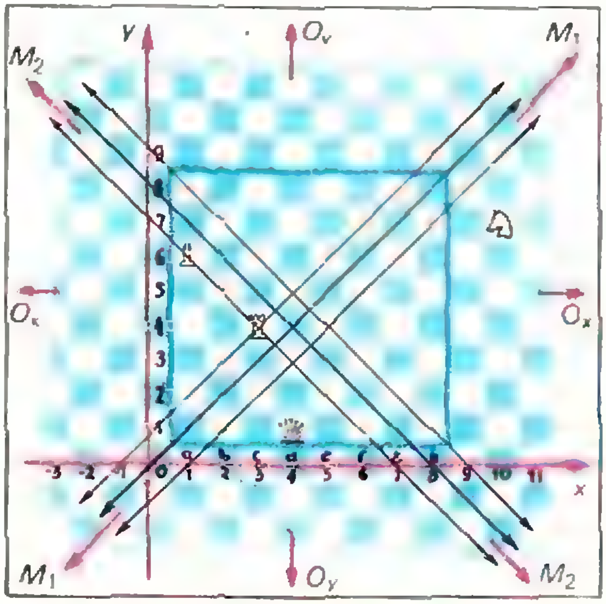


Рис. 1.

---

*) См. «Квант», 1970, № 5 и 1971, № 8.

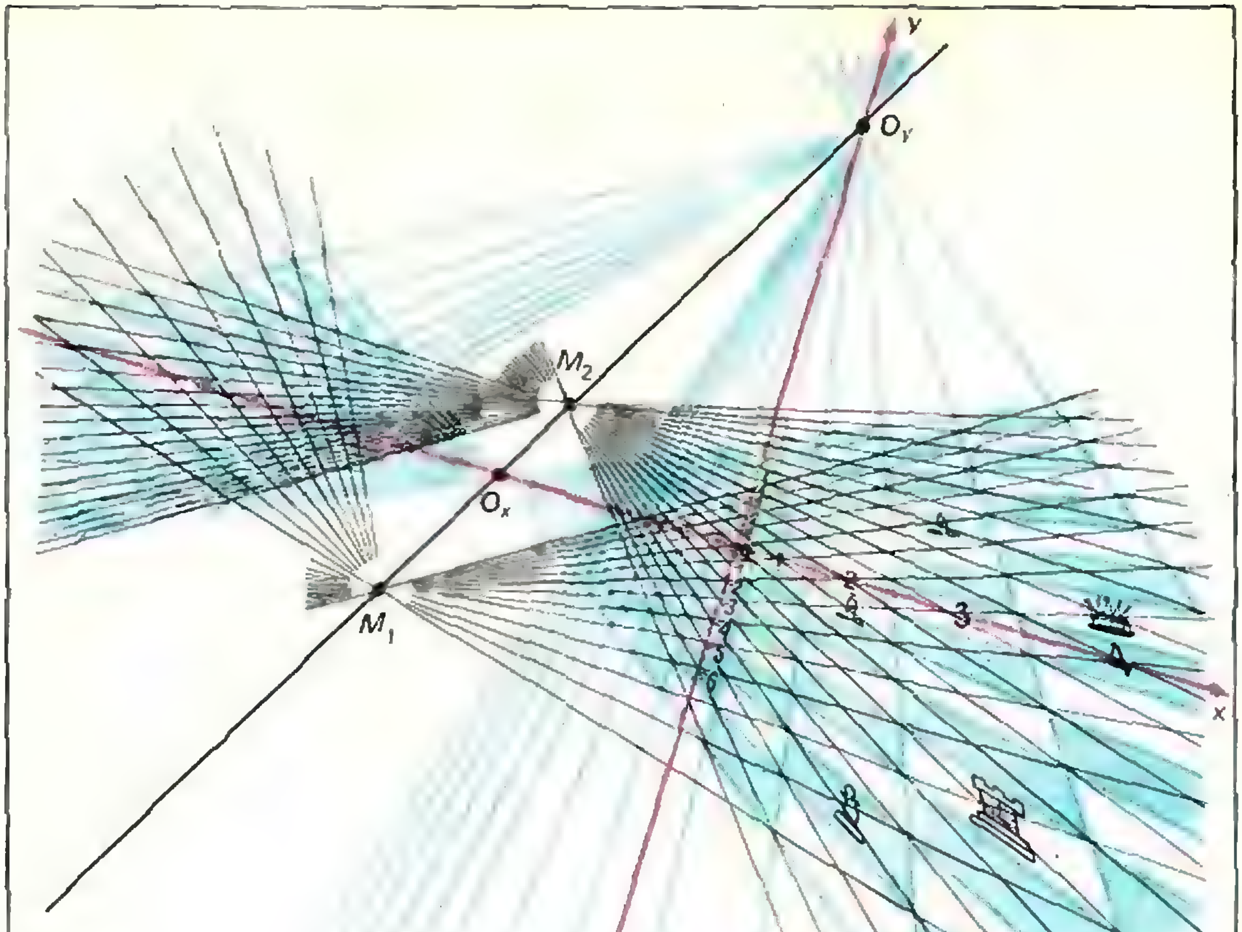


Рис. 2.

координат xOy (см. рис. 1). При этом каждое поле доски Ш обозначается парой чисел (x, y) — абсциссой и ординатой центра этого поля. Например, конь на рисунке 1 стоит на поле (10,7). Конечно, если события «протекают» в пределах обычной шахматной доски (на рисунке 1 она выделена), то можно пользоваться и шахматной нотацией. Так, поле (1,6), на котором находится пешка, есть просто а6.

Теперь добавим к доске Ш четыре бесконечно удаленных поля: поле O_x, в котором пересекаются все горизонтали, поле O_y — в котором пересекаются все вертикали, и два поля M_1 и M_2, в которых пересекаются соответственно два множества диагоналей (рис. 1).

Доску Ш, дополненную бесконечно удаленными полями O_x, O_y, M_1 и M_2, назовем проективной шахматной доской П. Аналогия между рассмотренной выше проективной плоскостью и полученной доской П очевидна. Вместо точек проективной плоскости (конечных и бесконечно удаленных) здесь мы имеем дело с полями доски П (соответственно конечными или бесконечно удаленными). Поскольку «шахматными» направлениями являются только горизонтали, вертикали и диагонали, то мы ограничиваемся лишь четырьмя направлениями в плоскости, а значит и четырьмя бесконечно удаленными полями. Можно считать, что эти поля лежат на бесконечно удаленной прямой доски Ш.

Заметим, что если фигура непрерывно движется вдоль произвольной линии в заданном направлении, то она пройдет при этом бесконечно удаленное поле, а затем вернется в исходное положение, то есть всякая линия на доске П как бы замкнута. Это связано с тем, что в проективной плоскости каждому множеству параллельных прямых, независимо от их ориентации, соответствует ровно одна бесконечно удаленная точка. Это также изображено на рисунке 1.

На рисунке 2 доска П изображена довольно оригинальным способом. Здесь бесконечно удаленная прямая как бы спроектирована на доску Ш. Правда, для этого все поля Ш пришлось «поджать». Представьте себе путника, стоящего на шоссе, взгляд которого устремлен далеко вперед. Ему кажется, что края дороги где-то обязательно пересекаются. Рисунок 2 можно рассматривать как графическую иллюстрацию этой иллюзии. Мы видим поля O_x, O_y, M_1, M_2, а также проходящие через них горизонтали, вертикали и диагонали (двух направлений).

С каждого конечного поля ладья или ферзь могут попасть на поля O_x или O_y, двигаясь в любом из двух противоположных направлений. Например, ладья с поля (3,4) (см. рис. 1) попадает на поле O_x, проходя через поля (2,4) или (4,4).

С каждого конечного поля слон или ферзь могут попасть на поля M_1 или M_2, также двигаясь по любому из двух противоположных направлений. Так, ферзь с поля (4,1) (см. рис. 1) попадает на поле M_2, проходя через поля (3,2) или (5,0).

Остальные шахматные фигуры (король, конь и пешка), которые не могут линейно перемещаться на любое число полей, никогда не попадают на поля O_x, O_y, M_1, M_2. Эти фигуры всегда остаются на доске Ш.

Правила игры

Итак, доска П для игры в проективные шахматы у нас уже есть. Осталось определить правила движения фигур на ней.

1. *Основные правила обычных шахмат (способ выполнения ходов, шах, мат, пат и т. д.) сохраняются и на доске П.*

2. *На доске Ш фигуры ходят как и в обычных шахматах.*

3. *Дальнобойная фигура может за один ход переместиться на бесконечно удаленное поле по любому из двух противоположных направлений. Однако вернуться обратно она может лишь следующим ходом. При этом слон, отправляясь в «бесконечность», не забывает своего цвета, хотя сами бесконечно удаленные поля мы считаем бесцветными.*

4. *С бесконечно удаленного поля дальнобойная фигура может вернуться на конечное поле по любому из двух противоположных направлений (с учетом ее способа передвижения).*

Например, белопольный слон с поля M_2 может попасть на белое поле (2,1) только по белым диагоналям через поля (3,0) или (1,2).

Ферзь может пойти с полей M_1 или M_2 на любое конечное белое или черное поле, двигаясь по диагоналям, проходящим через него. Так, с M_1 он попадает по белой диагонали на поле (4,1) через поля (3,0) или (5,2).

5. *Фигура, находящаяся на бесконечно удаленном поле, по полям своего действия (в двух направлениях) угрожает фигуре противника, стоящей на конечном поле. Наоборот, если с конечного поля фигура по полям своего действия может пойти на бесконечно удаленное поле, то она угрожает стоящей там фигуре противника.*

Например, ладья с поля O_y угрожает пешке (2, —6) по вертикали, проходящей через поле (2, —5), а также в противоположном направлении — через поле (2, —7). Чернопольный слон с поля (3,3) нападает на неприятельскую фигуру, стоящую на поле M_1 по черной диагонали в двух направлениях: через поля (2,2) и (4,4).

6. *Фигура, стоящая на бесконечно удаленном поле, может взять фигуру противника, стоящую на конечном поле, если она угрожает ей по полям своего действия (хотя бы по одному из направлений). Аналогично, с конечного поля фигура может взять неприя-*

тельскую, стоящую на бесконечно удаленном поле.

7. *На каждом бесконечно удаленном поле не могут находиться одновременно две фигуры.*

8. *С одного бесконечно удаленного поля на другое ходить нельзя (перемещение по бесконечно удаленной прямой запрещено).*

9. *Пешка не может делать двойной ход или превращаться в другую фигуру.*

Впрочем, если разработать «начальную позицию», то это правило можно модифицировать в соответствии с обычными шахматами.

Таким образом, правила игры в проективные шахматы построены на основе строгих геометрических рассуждений. Любопытно, что абстрактные геометрические понятия находят в данном случае практическое применение.

Шахматно-проективные задачи

В проективных шахматах открываются богатые и неожиданные возможности по сравнению с обычной игрой. Расширение площади «сражения» фактически ведет к изменению силы фигур. При этом возникают новые оригинальные идеи. Не случайно шахматные композиторы в своих изысканиях часто прибегают к проективным шахматам. Особой популярностью они пользуются в Югославии *).

В начальной позиции шахматно-проективной задачи фигуры, как правило, располагаются внутри обычной доски 8×8. При этом ее рисуют без краев как фрагмент доски Ш. Это означает, что решение следует искать на шахматно-проективной доске П.

Сейчас мы разберем две шахматно-проективные задачи. Все варианты в них мы будем записывать в обычной шахматной нотации.

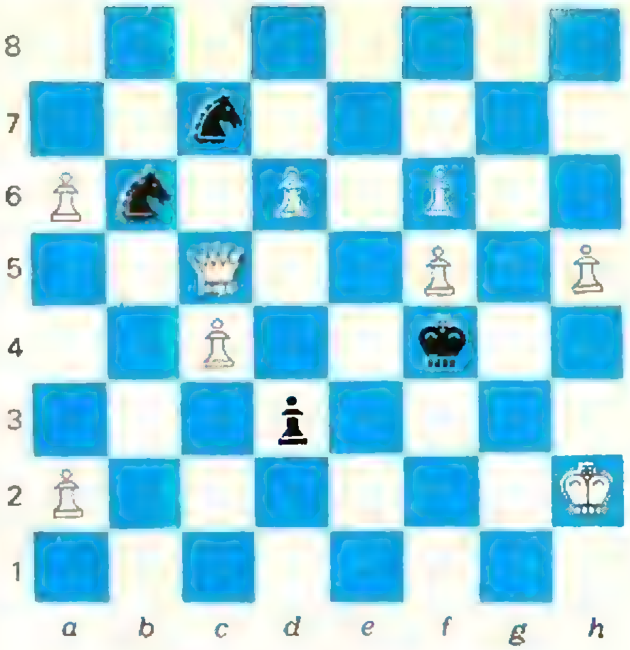


Рис. 3. Мат в два хода

1. Крh 2—g1! Теперь у черных несколько возможностей, рассмотрим каждую из них в отдельности.

Если на любое поле уходит конь с поля b6, что обозначается 1 . . . . . . Кb6∼, то матует 2. Фс5 — а7 — — M_2 (здесь и далее промежуточное поле указывает направление, в котором фигура отправляется в бесконечность). С поля M_2 ферзь нападает на черного короля и, кроме того, дер-

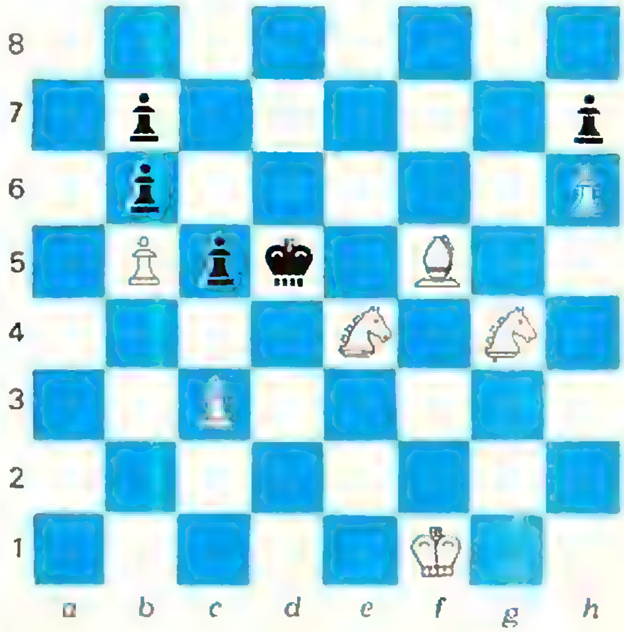


Рис. 4. Мат в три хода

---

*) В частности, в основе настоящей статьи лежат материалы, опубликованные югославским проблемистом и инженером Н. Петровичем в различных номерах югославского журнала «Problem».

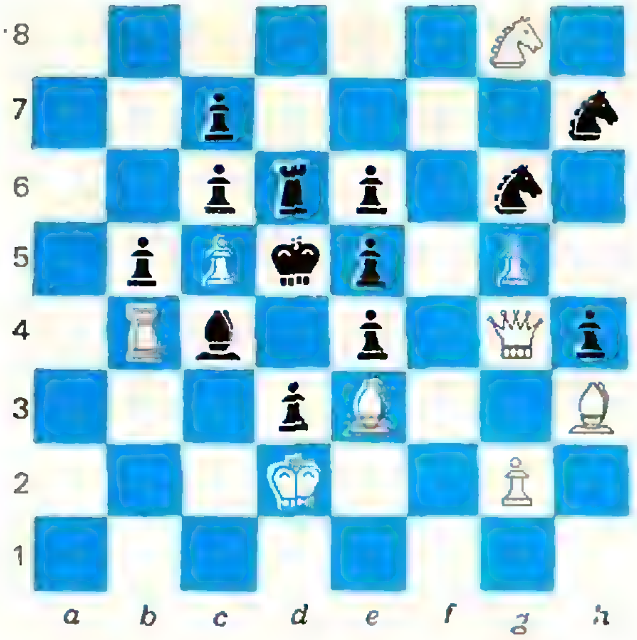


Рис. 5. Мат в два хода

жит все поля вокруг него: e3 через a7, f3 и e4 — через h1, g4 и f5 — через h3, g5 — через h4, а g3 и e5 — через h2 (это поле на первом ходу освободил белый король).

Если уходит другой черный конь — 1 . . . Кс7~, то матует 2. Фс5 — c8 — — O_y. Если вперед идет пешка d — 1 . . . d3 — d2, или черный король переходит на линию g — 1 . . . . . . Крf4 — g3 (g4, g5), то следует 2. Фс5 — a3 — M_1 мат. В исходной позиции этот ход не матует, так как у короля находится пристанище на e4 (пешки d3 и f5 защищают его от ферзя). Наконец, на отход короля 1 . . . Крf4 — e4 (f3) следует 2. Фс5 — a5 — O_x мат (на первом ходу это тоже только шах, так как черный король скрывается на g5).

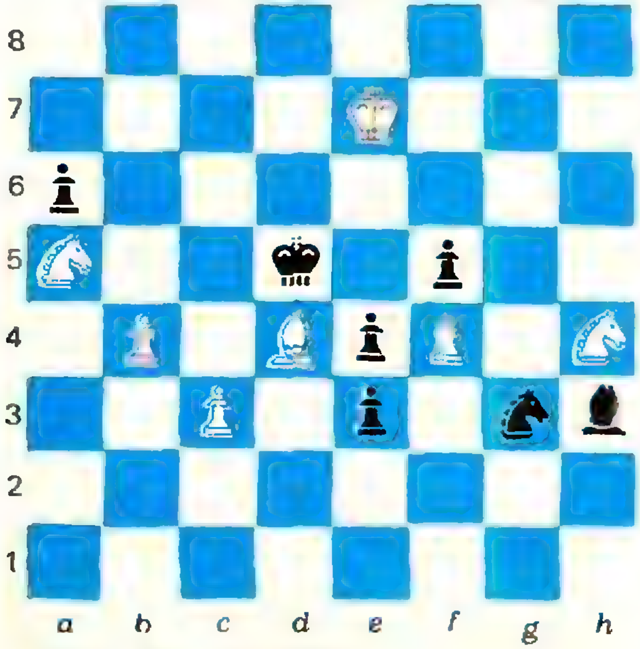


Рис. 6. Мат в три хода

Разумеется, в задаче-двухходовке первый ход должен быть единственным, иначе она обесценивается. Убедимся, что в нашем случае других решений нет. На 1.Крh2 — h3 с угрозой мата 2. Фс5 — M_2 у черных находится защита 1 . . . Кb6 — d7!

Теперь на 2. Фс5 — M_2 шах следует 2 . . . Крf4 : f5!, и черный король скрывается от ферзя, в чем ему помогает король противника, стоящий на h3. Убедитесь сами, что не достигается цель и при других вступительных ходах белых, которые мы ниже приводим вместе с необходимыми возражениями (в краткой нотации).

1. Крg2 (h1) Кbd5! 2. Ф — M_2шах Крe4!; 1. Крi3 (вертикаль i следует за h) Крf3!; 1. Ф : b6 Крe4!; 1. Фd4 шах Крf3!; 1. Ф — M_1 шах Крe4!; 1. Ф — O_x шах Крg5! 1. Ф: : c7 Крe3!

Рассмотрим вторую задачу (рис. 4). 1. Сf5 — c8 — M_2. У черных два ответа: пойти на c4 либо пешкой, либо королем.

1 . . . c5 — c4 2. Крf1 — g2! Крd5 : e4 (на предыдущем ходу конь через поле h1 был защищен слоном с M_2), и после 3. Крf3 — g3 вскрытый мат дает слон!

1 . . . Крd5 — c4 2. Кg4 — e3 шах Крc4 — d3 (поля b3 и b5 под обстрелом держит слон с M_2). 3. Крf1 — f2 мат! Вновь сделал свое дело находящийся в бесконечности слон!

Предлагаем вам самим проявить изобретательность на шахматно-проективной доске и придумать несколько задач. Приводим также две задачи для самостоятельного решения (рис. 5, 6).

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

СКОЛЬКО ВРЕМЕНИ ИДЕТ СВЕТ ОТ МЕРКУРИЯ ?

Уже давно никто не удивляется тому, что свету нужно время, чтобы дойти от небесного тела до Земли. Свет от Солнца «тратит» на свою дорогу около 8 минут. Эту цифру нетрудно проверить. Расстояние от Земли до Солнца составляет 150 миллионов *км*, то есть $1{,}5 \cdot 10^{11}$ *м*. Скорость света — около $3 \cdot 10^{8}$ *м/с*. Поделив одно число на другое, получим 500 *с* ≈ 8 *мин*.

Общая теория относительности вносит, однако, хотя и небольшие, но очень важные поправки в такие рассуждения. Эффекты общей теории относительности заметны лучше всего у Меркурия. О нем и будет идти речь.

Максимальное и минимальное значения расстояние Меркурий—Земля принимает в моменты «соединения» Меркурия с Солнцем, то есть в моменты, когда Земля, Солнце и планета лежат практически на одной прямой. В верхнем соединении, когда расстояние Меркурий — Земля максимально, оно равно $r_{\max} = 1{,}38$ астрономических единиц (1 *а. е.* — расстояние Земля — Солнце); в нижнем соединении оно минимально и равно $r_{\min} = 0{,}62$ *а. е.* (рис. 1) *). Если умножить эти числа на 8 минут, то получим грубо время прохождения света от Меркурия до Земли в обоих положениях. Такой расчет, конечно, дает правильный результат, если мы не интересуемся мелкими подробностями. Но именно о «мелочах» и будет речь.

Путь луча света в случаях, когда Меркурий находится в верхнем соединении, проходит мимо Солнца. Общая теория относительности приводит к выводу, что в поле тяжести Солнца скорость света меньше, чем в пустоте (как в веществе). Такое уменьшение

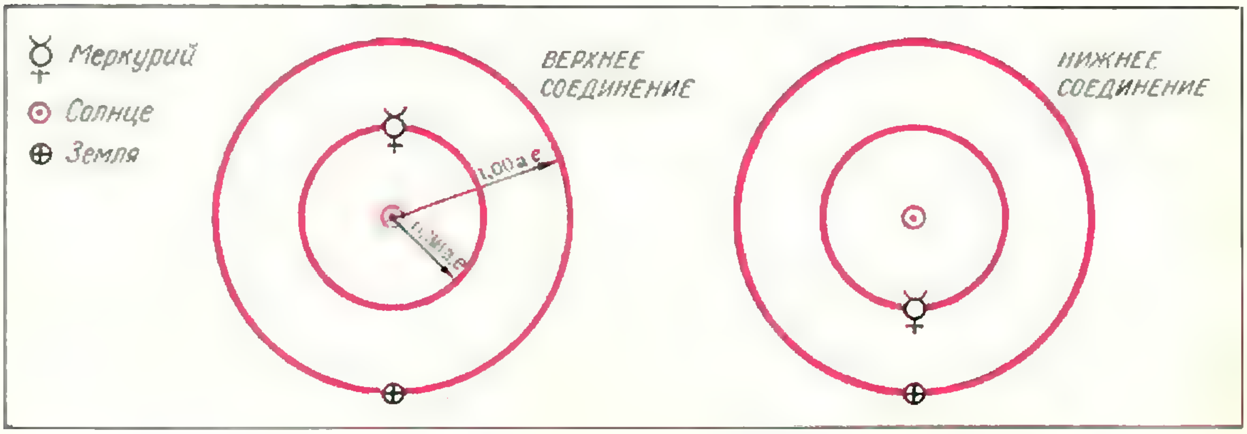


Рис. 1.

---

*) Напомним, что планеты движутся почти в одной плоскости—плоскости эклиптики. Мы не учитываем, что орбиты планет — эллипсы; учет этого приведет к небольшим вариациям $r_{\max}$ и $r_{\min}$.

скорости очень мало, оно по расчетам приведет к увеличению времени прохождения света на 0,000 24 секунды (за такое время свет проходит 72 *км*). Современная радарная техника оказалась в состоянии зарегистрировать такой экзотический эффект.

Как можно понять это число 72 *км*? Ясно, что вычислить его сложно. Однако можно получить представление о порядке величины, если знать только о том, что такое гравитационный радиус и уметь работать с размерностями.

Количественной характеристикой поля тяжести массивного тела является потенциал поля, определяемый согласно закону всемирного тяготения Ньютона:

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r}.$$

В эту формулу входят две величины: произведение γM, которое характеризует источник поля — в нашем случае Солнце, и r — расстояние. Вместо γM часто в теории относительности пользуются другой величиной, отличающейся от γM только множителем, но имеющей размерность длины

$$R_{\text{гр}} = \frac{2\gamma M}{c^2}.$$

Эта величина называется гравитационным радиусом. Гравитационный радиус Солнца равен 3 *км*, гравитационный радиус Земли — 9 *мм* *).

Закон всемирного тяготения можно записать теперь так:

$$\frac{\varphi}{c^2} = -\frac{1}{2}\frac{R_{\text{гр}}}{r}.$$

Слева стоит потенциал поля тяжести в безразмерных единицах; справа стоит также безразмерная величина.**)

Величиной $\frac{\varphi}{c^2}$ обычно и характеризуют величину поля тяжести массивного тела.

Можно ожидать, что когда свет проходит у поверхности Солнца (при $r \approx R_\odot$), то его скорость будет уменьшаться на величину, пропорциональную $\frac{\varphi}{c^2} \sim \frac{R_{\text{гр}}}{R_\odot}$ (так как это единственная величина, которая характеризует поле Солнца):

$$\Delta v = \frac{c \cdot R_{\text{гр}}}{R_\odot}.$$

Можно сказать, что пространство около Солнца имеет оптические свойства среды с показателем преломления, немногим больше единицы.

Если бы сила тяжести действовала на свет только вблизи Солнца, например, на участке пути, протяженностью в 3—4 диаметра Солнца (возьмем для определенности 10 радиусов), то можно было бы сказать, что время прохождения света увеличивается на величину Δt, определяемую из уравнения

$$t + \Delta t = \frac{10R_\odot}{v_{\text{св}}} = \frac{10R_\odot}{c - \Delta v} \approx$$

$$\approx \frac{10R_\odot}{c}\left(1 + \frac{\Delta v}{c}\right),$$

или

$$\Delta t \approx \frac{10R_\odot}{c} \cdot \frac{\Delta v}{c} = \frac{10R_\odot}{c}\,\frac{R_{\text{гр}}}{R_\odot} =$$

$$= \frac{10R_{\text{гр}}}{c}.$$

Такая оценка дает для Δt время, необходимое свету для прохождения пути в 30 *км*. Конечно, наша оценка грубая; особенно непоследователен выбор коэффициента 10. Более того, как оказывается, правильная формула содержит еще и расстояние от Солнца до планет и радиус Солнца, так как на всем пути (а не только вблизи Солнца) от Земли до планеты и обратно время течет медленнее. Мы этого не заметили, так как пренебрегли действием Солнца на свет на больших расстояниях. Тем не менее наша оцен-

---

*) Обратите внимание, что принято определять $R_{\text{гр}}$ с коэффициентом 2. Иногда встречаются формулы без этого коэффициента.

**) Безразмерной величиной называется величина, которая не изменяется с изменением единиц измерения.

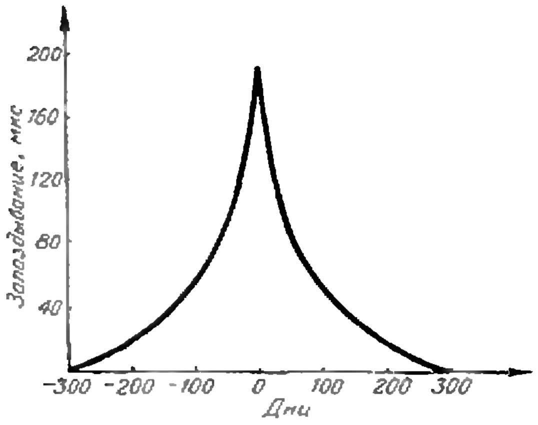


Рис. 2.

ка полезна для того, чтобы ориентироваться в задаче. Более точная формула теории относительности гласит

$$\Delta t = \frac{2R_{\text{гр}}}{c}\left\{1 + \ln\frac{R_{\odot}^{2}}{r_1 \cdot r_2}\right\},$$

где под логарифмом *) радиус Солнца и расстояния от Солнца до Земли и до Меркурия. Именно логарифм мы и «прозевали» в наших рассуждениях. Этот логарифм вовсе не мал, а равен 11,2, так что точная формула имеет вид:

$$\Delta t = \frac{22{,}4R_{\text{гр}}}{c}.$$

Чтобы проверить эту формулу по данным наблюдений, надо хорошо знать момент, отвечающий верхнему соединению в случае, если бы Солнце не оказывало влияния на свет. Для этого надо знать астрономические расстояния с точностью до 1—2 *км*. Такие требования на пределе современных возможностей.

Опыт встречает и другие трудности. Так, не очень просто узнать, от какой точки поверхности планеты отразился сигнал — измеряется время путешествия сигнала от Земли к планете и (после отражения) обратно (радарное эхо).

Тем не менее такие опыты были проделаны группой американских физиков. Измерялись сигналы, посланные на Меркурий, Венеру и Марс. Результаты согласовались с предсказанием теории; однако ошибки обработки опытов были еще велики (около 5—10%).

На рисунке 2 показана одна из кривых запаздывания сигнала в разные дни. Ноль на шкале абсцисс — момент верхнего соединения.

Отклонение луча света в поле Солнца

Выше было сказано, что пространство около Солнца действует на свет как среда с показателем преломления немного больше единицы. Это значит, что свет далеких звезд, проходя около Солнца, должен искривлять свой путь подобно тому, как это происходит в призме. В принципе этот эффект был известен уже давно. Еще когда Ньютон выдвинул теорию, согласно которой свет представляет собой поток мельчайших частиц — корпускул, ему было ясно, что свет должен притягиваться к Солнцу. Так как в поле тяжести ускорение всех тел одинаково, то путь света не зависит от массы корпускулы и представляет собой параболу. Напомним, что в законы Кеплера не входит масса планет. Зандеманн в 1801 году вывел из этих соображений формулу, согласно которой луч света, проходящий вблизи края солнечного диска, отклоняется на угол $\theta = R_{\text{гр}}/R_{\odot} \approx 0{,}85''$. Этот результат оказался ошибочным. В 1915 году Эйнштейн на основе созданной им общей теории относительности получил новую формулу, которая давала для эффекта вдвое большее значение

$$\theta = \frac{2R_{\text{гр}}}{R_{\odot}} \approx 1{,}7''.$$

Впервые отклонение луча света было измерено в 1919 году. 27 сентября 1919 года Эйнштейн писал матери: «Сегодня хорошие новости! Лоренц телеграфировал мне, что британская экспедиция действительно доказала смещение света вблизи Солнца».

---

*) Логарифм в этой формуле «натуральный», то есть по основанию *e*. Он в 2,3 раза больше десятичного логарифма.

С тех пор эффект Эйнштейна измеряли во время почти каждого затмения Солнца. Однако получить достаточно точное значение оказалось очень трудно. Надо очень точно измерить положение звезды около Солнца и примерно через полгода, когда Солнце покинет эту область неба. Но при двух измерениях изменяется состояние атмосферы, изменяется преломление в атмосфере Солнца, короче, возникает целая система поправок, которые ухудшают условия для сравнения.

Тем не менее сейчас в результате огромной работы многих астрономов удалось уменьшить ошибку настолько, что можно говорить о согласии теории с опытом в пределах ошибок, составляющих не более 1% от величины эффекта.

Лучшие до сего времени результаты получены при изучении затмения квазаров — мощных источников радиоизлучения. Преимущество наблюдения радиоисточников очевидно: регистрация их излучения не требует затмения и можно производить измерения все время.

Таким образом, уже сейчас можно считать установленным, что скорость света вблизи массивных небесных тел изменяется — такие тела действуют как огромные собирающие линзы. При этом преломление заведомо больше, чем это следует из эффекта притяжения кванта света к Солнцу по закону Ньютона. Это значит, что для света закон всемирного тяготения оказывается не точным, свет притягивается сильнее, чем простое тело с массой, вычисленной по формуле $mc^2 = h\nu$ (энергия кванта). Это и есть эффект искривления пространства около Солнца.

Ньютон и этика

Приводим отрывок из письма Ньютона к секретарю Английского Королевского общества Астону, отправляющемуся в заграничное путешествие.

Это письмо представляет большой интерес для характеристики личности ученого.

«Сэр,

В письме Вашем Вы позволяете мне, не стесняясь, высказать мое суждение о том, что может быть для Вас полезным в путешествии, поэтому и делаю это значительно свободнее, чем было бы прилично в ином случае.

Когда Вы будете в новом для Вас обществе, то: 1) наблюдайте нравы; 2) приноравливайтесь к ним, и Ваши отношения будут более свободны и откровенны; 3) в разговорах задавайте вопросы и выражайте сомнения, не высказывая решительных утверждений и не затевая споров . . . Вы мало или ничего не выиграете, если будете казаться умнее или менее невежественным, чем общество, в котором Вы находитесь; 4) если Вы будете оскорблены, то в чужой стороне лучше смолчать или свернуть на шутку, хоть бы и с некоторым бесчестием, чем стараться отомстить. . . Если положение будет безвыходным, то, полагаю, лучше всего сдержать свою страсть и язык в пределах умеренного тона, не раздражая противника и его друзей и не доводя дело до новых оскорблений. Одним словом, если разум будет господствовать над страстью, то он и настороженность станут Вашими лучшими защитниками».

В. Я. САННИНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРЕСНОЙ КНИГЕ

В свое время я приобрел сборник «Математика в современном мире» (М., Мир, 1967). При чтении его у меня возникли непредвиденные трудности. На «участке» страниц 113—144 порядок страниц оказался весьма своеобразным. Прочитав с. 113, каждый ожидает на обороте того же листа увидеть с. 114, а видит — с. 118. Далее должна быть с. 115, а в моем экземпляре здесь оказалась с. 119 и так далее. Иными словами, порядок страниц на этом участке можно представить такой последовательностью:

(113, 118), (119, 116), (117, 114), (115, 120), (121, 126), (127, 124), (125, 122), (123, 128), (129, 134), (135, 132), (133, 130), (131, 136), (137, 142), (143, 140), (141, 138), (139, 144).

Составив такую «схему расположения страниц» для выделенного участка книги, я уже не испытывал прежних трудностей при переходе от прочитанной страницы к следующей по порядку.

Можно было бы этот эпизод с необычным экземпляром книги оставить без внимания. Однако вполне естественно возникает вопрос — как образовался такой порядок страниц в книге, в чем состоит ошибка печатника?

Выскажем некоторые соображения по этому вопросу, предоставив полное его решение читателю.

В выходных данных о книге сообщается «Бумага... $70 \times 108^{1}/_{16}$ = 6,5 бум. л.». Эта условная фраза означает следующее: книга сшита из 6,5 тетрадей, каждая полная тетрадь образована четырехкратным складыванием пополам листа форматом 70 × 108 *см* (полутетрадь — из листа форматом 70 × 54 *см*, полная тетрадь содержит 16 книжных листов форматом 17,5 × 27 *см*.

Чтобы избежать ошибок при сборке тетрадей в книгу, они нумеруются. В нашей книге полутетрадь идет под номером 3. Необычная тетрадь имеет номер 5.

Условимся о таком порядке типографского изготовления полной тетради: набираем в отдельности все 32 ее страницы вместе с их порядковыми номерами, формируем из них пару «матриц» по 16 страниц каждая, производим с обеих матриц оттиски на обеих сторонах листа, образуем тетрадь последовательным складыванием бумажного листа пополам.

Введем два понятия, необходимые для дальнейшего.

Назовем **схемой** книжной тетради прямоугольную таблицу, за-

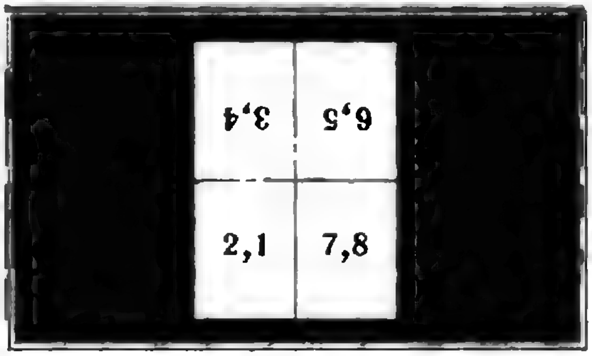


Рис. 1.

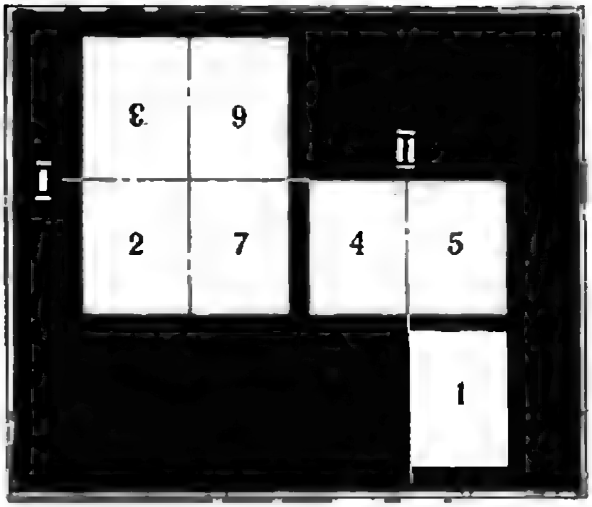


Рис. 2.

полненную ориентированными по вертикали парами чисел (нормально расположенными или перевернутыми), первые компоненты которых обозначают номера страниц одной, а вторые — другой стороны бумажного листа.

На рисунке 1 приведена одна из возможных схем книжной тетради на 8 страниц.

Назовем порядок складывания пополам листа нормальным, если последняя страница будущей тетради ни разу не переворачивается и после складывания она пригодна для сшивания по корешку (все сгибы здесь вложены друг в друга).

На рисунке 2 показано, как посредством нормального складывания из листа, приведенного на рисунке 1, получить соответствующую тетрадь.

Нетрудно показать, что для случая тетради из 8 страниц существует только одна схема, из которой нормальным складыванием можно ее получить. Для случая тетради из 16 (или 32) страниц таких схем уже несколько.

Задачи

1. Составить всевозможные схемы книжной тетради № 5 упомянутой книги, из которых нормальным складыванием можно получить тетрадь с неперепутанными страницами. Указать соответствующий каждой схеме порядок нормального складывания.

2. Та же задача для тетради с перепутанными страницами.

3. Указать наиболее рациональный способ исправить ошибку печатника.

Конфуз с «Обратной теоремой»

Не часто, совсем не часто прибегают писатели к математической терминологии. А художественное произведение с «математическим названием» — вообще большая редкость. Поэтому не могла не привлечь к себе естественного интереса повесть А. Жаренова «Обратная теорема» (журнал «Искатель», 1972 г., № 2).

Скажем сразу, о математике как таковой в повести речь специально не идет. Там рассказывается о жизни Виктора Назарова, однажды нечестным путем завладевшего весьма крупной суммой денег. Собственно, деньги были целью и смыслом его жизни. Однако после этого его жизнь, вместо того чтобы стать, как он надеялся, счастливой и безоблачной, наполнилась сплошными кошмарами и постоянным страхом перед возмездием. Обогащение Назарова стало известно уголовным элементам, и за «подпольным миллионером» устроили настоящую охоту, окончившуюся его убийством. Параллельно с жизнеописанием Назарова разворачивается детективная линия повести — расследование этого преступления.

Вот как описывает автор тяжкие размышления Назарова, на сознание которого постоянно давит совершенное им преступление:

«В тумане лицо школьного учителя математики: «Дети, теоремой мы называем такие рассуждения . . . Если в теореме заключение сделать условием, и условие заключением, то первая будет прямой, а вторая обратной . . . Дети, если верна прямая теорема, то это еще не значит, что верна и обратная ей . . .»

(окончание см. на с. 47)

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Гидродинамический механизм в падающей пробирке

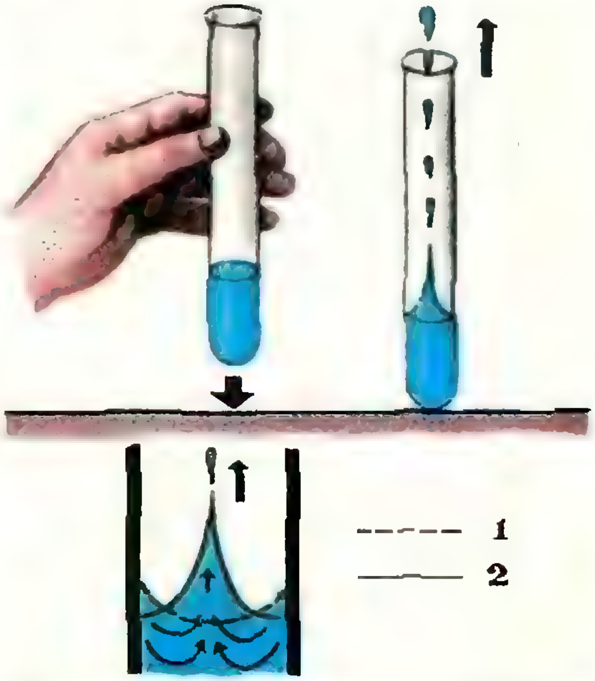
Г. И. Покровский

Налейте воды в обыкновенную пробирку и, придерживая ее рукой как показано на рисунке, дайте ей упасть (с небольшой высоты), сохраняя вертикальное положение, на поверхность стола. Эта поверхность должна быть достаточно твердой, чтобы дно пробирки произвело жесткий удар. В момент такого удара мениск воды в пробирке, имеющий (вследствие действия капиллярных сил) вогнутую форму, быстро выравняется, и из его центральной части по оси пробирки стремительно вырвется вверх тонкая струя воды. Эта струя распадается на капли, причем первая из них взлетает на высоту, существенно превосходящую высоту падения пробирки. Это значит, что энергия воды в пробирке в момент удара перераспределяется таким образом, что небольшая часть воды вблизи центральной части мениска получает большую скорость и стремительно выбрасывается вверх.

Устройство, перераспределяющее энергию, можно назвать механизмом. Обычно этим словом называют сочетание деталей, сделанных из твердого вещества (рычаги, шестерни и т. п.). Однако могут быть механизмы из жидкостей и даже из газов. Примером механизма такого рода и является вода в пробирке.

Гидродинамические механизмы имеют особое значение тогда, когда действуют очень большие силы, которых не могут выдержать обычные детали из твердого вещества. Например, при взрыве заряда взрывчатого вещества большой мощности можно сконцентрировать часть энергии этого взрыва, сделав в заряде выемку и вложив в нее металлическую вогнутую облицовку. Сила взрыва сожмет металл облицовки и создаст тонкую металлическую струю. Скорость этой струи может (при соответствующей форме облицовки) достичь даже второй космической скорости.

Таким образом, наблюдение и анализ очень простого и скромного явления, происходящего в пробирке, раскрывает одну из интереснейших проблем гидродинамики сверхвысоких скоростей.



Всплеск воды в падающей пробирке. Пунктир 1 — форма поверхности воды до удара, сплошная линия 2 — сразу после удара.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

20 задач на пределы

М. Л. Гервер

Многие, вероятно, знают определение предела последовательности: «Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что для всех $n>N$. . .». Но одно дело — помнить его, и совсем другое — уметь свободно с ним обращаться, доказывать теоремы, не путаясь со всеми «найдется», «для любого» и т. п. Это, пожалуй, самая крутая ступенька на пути к «высшей математике», которую с трудом преодолевают не только школьники, но и студенты.

Если Вам удастся решить задачи, которые собраны в этой статье — или хотя бы разобраться в их решениях — то дальше заниматься метематическим анализом Вам будет намного проще и интереснее.

1. Докажите, что при любом натуральном n

а) $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1}$;

б) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}$;

в) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}$.

В дальнейшем буквой n мы будем обозначать только натуральные числа.

2. а) Докажите, что найдется такое n, что $2^n>10^{10}$.

б) Докажите, что при любом n и при любом $a>0$ выполняется неравенство $(1+a)^n\geqslant1+na$.

в) Докажите, что найдется такое k, что при любом $n>k$ справедливо неравенство $10^n>n^{10}$.

г) Пусть $|q|<1$. Докажите, что найдется такое k, что при любом $n>k$ справедливо неравенство $|q|^n<10^{-10}$.

д) Существует ли такое положительное число, которое при любом n меньше, чем $1/n$?

е) Пусть $|q|<1$. Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое k, что при любом $n>k$ справедливо неравенство $|q|^n<\varepsilon$*).

ж) Можно ли найти такое k, чтобы при любом $n>k$ и при любом $\varepsilon>0$ выполнялось неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\varepsilon$?

Замечание. Сравнивая 2е и 2ж, мы видим, что порядок слов — вещь важная!

з) Положим $s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}$. Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое k, что для любого $n > k$

---

*) ε — греческая буква, читается: «эпсилон», употребляется обычно для обозначения маленьких положительных чисел. Точного смысла слова «маленькие числа» не имеют. — что значит «маленькое»: 0,01 или 10^{-10}? Вот и говорят; «для любого $\varepsilon>0$» — подразумевая под этим обычно: «как бы мало ни было $\varepsilon>0$». По отношению к задаче сказанное означает: положим $\varepsilon=0{,}01$, тогда найдется такое k, что при любом $n>k$ будет $|q|^n<0{,}01$; положим $\varepsilon=10^{-10}$, тогда найдется другое k (побольше) такое, что при всяком n, большем, чем это новое k, будет $|q|^n<10^{-10}$; вообще для любого $\varepsilon>0$ (как бы мало оно ни было) можно подобрать такое k (может быть, очень большое), что при всех $n>k$ будет $|q|^n<\varepsilon$.

$$|s_n - 1| < \varepsilon.$$

Числовые последовательности. Напишем какое-нибудь число: x_1, потом другое: x_2, потом третье: x_3 и т. д.

Мы получим *числовую последовательность*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

Номер рядом с буквой x указывает, на каком месте стоит число в последовательности: x_1 — на 1-м, x_2 — на 2-м, ..., x_n — на n-м, ...

Короче, она обозначается символом $\{x_n\}$. Разумеется, для обозначения последовательностей можно употреблять и другие буквы: $\{s_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ и т. д.

Выпишем десяток последовательностей, используемых в следующих задачах:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(2) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, \ldots$

(3) $\{s_n\}, s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

(4) $\{y_n\}, y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots - \frac{(-1)^n}{2^n}$.

(5) $1, 1, 1, 1, \ldots$

(6) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(7) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots$

(8) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

(9) $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{11}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{99}, \frac{1}{2}, \frac{1}{100}, \frac{1}{3}, \ldots$

(знаменатель дроби, стоящей на четном месте, равен числу знаков знаменателя предыдущей дроби).

(10) $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \ldots$

Определение 1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для любого $n > k$

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число a является пределом $\{x_n\}$, записывают так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

(читается: «предел x_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a») или так:

$$x_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

(читается: «x_n стремится к a при n, стремящемся к бесконечности»). Иногда упоминание про n, стремящееся к бесконечности, опускают и пишут просто:

$$\lim x_n = a \text{ при } x_n \to a.$$

Последовательности, имеющие предел, называют *сходящимися.*

3. а) Сформулируйте задачи 2е и 2з, используя определение 1.

б) Докажите, что 0 есть предел последовательностей (1), (2), (8) и (9).

в) Найдите пределы последовательностей (3), (4) и (10).

г) Докажите, что 1 не есть предел последовательности (1).

д) Имеют ли пределы последовательности (5), (6) и (7)?

е) Пусть x_n — n-й член последовательности (9). Укажите такое k, чтобы при $n > k$ выполнялось неравенство $x_n < \frac{1}{2}$.

ж) Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

4. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность. Выпишем какой-нибудь из ее членов, потом еще один — с большим номером, потом третий — с еще большим номером и т. д. Получим *подпоследовательность* последовательности $\{x_n\}$.

а) Если $\{x_n\}$ сходится, то любая ее подпоследовательность сходится, причем к тому же пределу. Докажите.

б) Если всякая подпоследовательность $\{x_n\}$ сходится, то сама последовательность $\{x_n\}$ сходится. Докажите.

в) Пусть $\{y_n\}$ состоит из тех же членов, что $\{x_n\}$, но взятых в другом порядке. Докажите, что если $x_n \to a$, то и $y_n \to a$.

Геометрический смысл. Будем изображать члены последовательности $\{x_n\}$ точками на числовой оси (при этом разные члены последовательности могут попасть в одну и ту же точку; например, в последовательности (7) все члены с нечетными номерами попадут в точку 1). Пусть $x_n \to a$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем на числовой оси интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Тогда вне этого интервала или совсем не окажется членов последовательности $\{x_n\}$, или их будет только конечное число. Все x_n с номерами, большими, чем некоторое k, попадут внутрь интервала $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Таков геометрический смысл понятия «предел последовательности».

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если найдется такое C, что для любого n

$$|x_n| < C.$$

5. а) Каков геометрический смысл понятия «ограниченная последовательность»?

б) Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Верно ли обратное?

в) Придумайте ограниченную последовательность, которая имеет и наибольший, и наименьший член; имеет наибольший, но не имеет наименьшего; имеет наименьший, но не имеет наибольшего; не имеет ни наименьшего, ни наибольшего члена. Все ли 4 указанных случая возможны, если последовательность имеет предел?

г) Приведите пример последовательности, которая не является ограниченной. Такие последовательности называются *неограниченными*.

Без отрицаний. Попробуем сформулировать определение неограниченной последовательности, не употребляя отрицаний. Для краткости утверждение «для любого n выполняется неравенство $|x_n| < C$» обозначим одной буквой $У$. Тогда определение ограниченной последовательности $\{x_n\}$ будет выглядеть так: найдется такое C, что справедливо $У$. Что означает, что $\{x_n\}$ — неограниченная? Что такого C не найдется, чтобы $У$ было справедливо. Другими словами, какое бы C ни взять, $У$ несправедливо. Мы получили промежуточный (не окончательный) вариант определения:

$\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого C утверждение $У$ несправедливо.

Расшифруем последнюю часть этого определения: «$У$ несправедливо». Подробней это означает, что не для любого n выполняется неравенство $|x_n| < C$. Не для любого n выполняется,— значит, для некоторого n не выполняется. Для некоторого n неравенство $|x_n| < C$ не выполняется,— значит, для этого n выполняется противоположное неравенство: $|x_n| \geqslant C$. Итак, «$У$ несправедливо» означает: «найдется такое n, что $|x_n| \geqslant C$». Таким образом, окончательно получаем:

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого C найдется такое n, что $|x_n| \geqslant C$.

6. Не употребляя отрицаний, сформулируйте следующие утверждения:

а) Число a не является пределом $\{x_n\}$.

б) Последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.

Определение 4. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности* (это записывают так: $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$), если для любого C найдется такое k, что для любого $n > k$ $|x_n| > C$.

7. Какие из следующих последовательностей стремятся к бесконечности и какие являются неограниченными?

а) $x_n = n$, б) $x_n = (-1)^n \cdot n$,

в) $x_n = n^{(-1)^n}$

г) $x_n = \begin{cases} n^2 & \text{при } n \text{ четном}, \\ \sqrt{n} & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases}$

Определение 5. Число a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого k найдется такое $n > k$, что $|a - x_n| < \varepsilon$.

8. Докажите а) что предел сходящейся последовательности является ее предельной точкой,

б) что если $x_n \to a$ и $b \neq a$, то b не есть предельная точка $\{x_n\}$.

в) что если a — предельная точка $\{x_n\}$, то $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к a.

9. Придумайте последовательность $\{x_n\}$, предельными точками которой являются:

а) все натуральные числа (и только они),

б) все числа вида $^1/_n$,

в) все рациональные числа.

10. а) Придумайте последовательность, удовлетворяющую задаче 9а, в которой при этом нет целых чисел.

б) Пусть $\{x_n\}$ удовлетворяет задаче 9б. Может ли 0 не быть ее предельной точкой?

в) Укажите все предельные точки последовательности, удовлетворяющей задаче 9в.

16 условий. «Any» по-английски значит «любой», «Exist» — «существовать». Символы $\forall$ и $\exists$ — перевернутые 1-е буквы этих слов — означают соответственно:

«для любого» и «найдется такое,. . . что».

Рассмотрим следующие 16 условий:

1) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
2) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
3) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
4) $\exists \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
5) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
6) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
7) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
8) $\exists \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
9) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
10) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
11) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
12) $\forall \varepsilon > 0\, \exists k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
13) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
14) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \exists n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$,
15) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| < \varepsilon$,
16) $\forall \varepsilon > 0\, \forall k\, \forall n > k\, |x_n - a| \geqslant \varepsilon$.

11. Какие из этих условий выражают уже знакомые вам свойства последовательностей (быть ограниченной, иметь a пределом или предельной точкой, стремиться к бесконечности) или отрицания этих свойств? Каков смысл остальных условий?

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если выполняется одно из двух условий:

1) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$,
2) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$

В первом случае $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, во втором—*убывающей*.

12. а) Докажите, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

б) Докажите, что предельная точка монотонной последовательности является ее пределом.

в) Докажите, что всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел (иногда это свойство действительных чисел принимают за аксиому).

13. а) Докажите, что всякая ограниченная последовательность имеет хоть одну предельную точку.

б) Проверьте, что утверждения 12в и 13а эквивалентны: каждое можно вывести из другого (так что 13а тоже можно принять за аксиому).

14. а) Пусть $|q| < 1$, $s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$. Докажите, что последовательность $\{s_n\}$ сходится, и

найдите ее предел.

б) Проверьте, что при $|q| \geqslant 1$ последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела.

15. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$ при $n \to \infty$. Докажите, что тогда

а) $x_n + y_n \to a + b$,

б) $x_n - y_n \to a - b$,

в) $x_n y_n \to ab$,

г) если $b \neq 0$, то $x_n/y_n \to a/b$.

Замечание. Среди y_n могут быть нули, но если $b \neq 0$, их (докажите это) лишь конечное число: $\exists N \forall n > N \;\; y_n \neq 0$; последовательность x_n/y_n заведомо определена, таким образом, для $n > N$.

д) Если $b = 0$, то последовательность x_n/y_n (если она определена) может не иметь предела, может стремиться к любому числу или к бесконечности,— приведите соответствующие примеры.

16. а) Докажите, что если $x_n \geqslant 0$ при всех n и $x_n \to a$ при $n \to \infty$, то $a \geqslant 0$.

б) Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$, если все $x_n > 0$?

в) Пусть $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, и пусть $x_n \to a$ и $z_n \to a$ при $n \to \infty$. Докажите, что тогда $y_n \to a$ при $n \to \infty$.

17. а) Последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для любого $n > k$ и любого натурального p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Докажите, что тогда $\{x_n\}$ имеет предел.

б) Докажите обратное утверждение: если x_n — сходящаяся последовательность, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \;\; \forall n > k \;\; \forall p \;\; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

в) Последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall p \;\; \exists k \;\; \forall n > k \;\; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Обязана ли $\{x_n\}$ сходиться?

18. Построим последовательность $\{x_n\}$ так: $|x_n| = 1/2^n$, знаки $x_1, x_2, x_3, \ldots$ выберем произвольно. Далее положим $s_n = x_1 + \ldots + x_n$.

а) Докажите, что последовательность $\{s_n\}$ сходится.

б) Укажите все значения, которые может принимать $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (когда знаки x_n выбираются всевозможными различными способами).

Комплексные $\{x_n\}$. До сих пор мы рассматривали последовательности, состоявшие из действительных чисел.

Пусть теперь x_n — любые комплексные числа.

Определение предела в этом случае — дословно такое же, как прежде. Но геометрический смысл его иной: неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает теперь, что x_n лежит внутри круга радиуса ε с центром в точке a; следовательно, число a служит пределом $\{x_n\}$, если вне любого круга с центром a лежит лишь конечное число членов $\{x_n\}$.

19. а) Пусть $x_n = a_n + ib_n$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся обе последовательности: $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Докажите.

б) Пусть $|x_n| = r_n$, $\arg x_n = \alpha_n$. Верно ли, что $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся и $\{r_n\}$, и $\{\alpha_n\}$?

20. Пусть последовательность $\{x_n\}$ стремится к 0. Построим последовательность $\{s_n\}$ так:

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \; \ldots, \quad s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \; \ldots$$

Выясните, может ли $\{s_n\}$ иметь ровно две предельные точки:

а) если x_n — действительные числа,

б) если x_n — комплексные числа (в этом случае определение предельной точки — дословно такое же, как раньше).

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА „КВАНТА“

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад.

За прошлый, 1973 год, редакция получила более шести тысяч писем с решениями задач. Редколлегия журнала «Квант» совместно с Оргкомитетом Всесоюзной олимпиады отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже публикуется список школьников, — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в областных, краевых и республиканских (в АССР и союзных республиках без областного деления) олимпиадах 1974 года.

К участию в математической олимпиаде допущены

П. Агаронов — Баку, с. ш. 56, 10 кл.
Л. Басов — Пржевальск, с. ш. 11, 10 кл.
И. Бахмутский — Львов, с. ш. 52, 9 кл.
Е. Башкиров — Минск, с. ш. 50, 10 кл.
С. Белолипецкий — Киржач Владимирской обл., с. ш. 5, 10 кл.
А. Берлин — Бобруйск, с. ш. 3, 10 кл.
А. Блох — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
А. Брысьев — р. п. Тюльган Оренбургской обл., Тюльганская с. ш., 9 кл.
А. Вальков — Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
Р. Вассерман — Одесса, с. ш. 116, 10 кл.
А. Векслер — Ташкент, с. ш. 50, 10 кл.
А. Войновский — Баку, с. ш. 221, 10 кл.
А. Гончаров — Никополь, с. ш. 13, 8 кл.
А. Григорян — Баку, с. ш. 221, 10 кл.
Г. Гутин — Клинцы Брянской обл., с. ш. 2, 10 кл.
К. Данильченко — Волгоград, с. ш. 35, 9 кл.
А. Еременко — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
М. Закс — Пермь, с. ш. 7, 10 кл.
А. Заславский — Калинин, с. ш. 20, 10 кл.
С. Зенович — Ташкент, с. ш. 50, 10 кл.
С. Ильинков — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
М. Кобозев — Киев, с. ш. 173, 10 кл.
В. Кобылецкий — Баку, с. ш. 134, 9 кл.
С. Коршунов — п. Монино Московской области, с. ш. 1, 9 кл.
А. Кукуш — Киев, с. ш. 145, 10 кл.
М. Левин — Витебск, с. ш. 2, 10 кл
М. Любич — Харьков, с. ш. 27, 8 кл.
А. Макаричев — Львов, с. ш. 14, 10 кл.
С. Мельник — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
А. Мехович — Владивосток, с. ш. 75, 10 кл.
В. Мильман — Минск, с. ш. 19, 10 кл.
Л. Михлин — Курск, с. ш. 6, 9 кл.
Г. Мустафаев — Сиазань Аз. ССР, с. ш. 1, 10 кл.
С. Нужный — Куйбышев, с. ш. 135, 10 кл.

С. Охитин — Оренбург, с. ш. 30, 9 кл.
В. Паньков — Минск, с. ш. 93, 10 кл.
Е. Пасике — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
С. Путинцев — Кемерово, с. ш. 10, 10 кл.
А. Разгуляев — Клин, с. ш. 10, 10 кл.
А. Рашковский — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
А. Резников — Киев, с. ш. 145, 9 кл.
А. Репецкий — Краматорск, с. ш. 5, 9 кл.
С. Родионов — Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
А. Рязанов — Новокузнецк, с. ш. 16, 10 кл.
С. Сатановский — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
В. Сац — Киев, с. ш. 198, 10 кл.
Г. Скляр — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
В. Слепой — Фрунзе, с. ш. 62, 10 кл.
А. Слесаренко — Рубцовск Алтайского края, с. ш. 11, 10 кл.
А. Ткач — Каменец-Подольский Хмельницкой обл., с. ш. 13, 10 кл.
М. Харитонов — Павлоград, с. ш. 7, 10 кл.
А. Черебатов — Омск, с. ш. 82, 9 кл.
Н. Чернов — Кривой Рог, с. ш. 95, 10 кл.
Ю. Шмелев — Ярославль, с. ш. 20, 9 кл.
Н. Щербина — Днепропетровск, с. ш. 80, 10 кл.
А. Щехорский — с. Старики Житомирской обл., Иршанская с. ш., 10 кл.
И. Юнус — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Р. Ямилов — Уфа, с. ш. 86, 10 кл.

К участию в физической олимпиаде допущены

А. Амельченко — Магнитогорск, с. ш. 53, 10 кл.
Р. Басыров — д. Н. Каракитяны ТАССР, Дрожжановская с. ш., 9 кл.
О. Войнова — п. Кош-Тегирмен Кирг. ССР, с. ш. 1, 10 кл.
С. Герц — Хуст, Закарпатская обл. с. ш. 1, 10 кл.
Л. Глазман — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
А. Гуревич — Минск, с. ш. 50, 10 кл.
А. Давыдов — Магнитогорск, с. ш. 53, 10 кл.
В. Жук — Грозный, с. ш. 57, 10 кл.
В. Канзюба — Днепродзержинск, с. ш. 37, 10 кл.
М. Качановский — Пинск, с. ш. 4, 10 кл.
Я. Коган — Глазов, с. ш. 14, 9 кл.
С. Коршунов — п. Монино Московской обл., с. ш. 1, 9 кл.
Л. Кофман — Таллин, с. ш. 15, 10 кл.
С. Макаров — Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
С. Мельник — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
С. Нужный — Куйбышев, с. ш. 135, 10 кл.
А. Ремеев — Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
Р. Сирота — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Ю. Смоленцев — Ессентуки, с. ш. 3, 10 кл.
М. Султангалиев — с. Ваныш БАССР с. ш. 1, 10 кл.
В. Татаринов — п. Знобь-Новгородское Сумской обл., Знобь-Новгородская с. ш., 10 кл.
И. Усвят — Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
Е. Федоров — Магнитогорск, с. ш. 53, 10 кл.
В. Хацимовский — Красноярск, с. ш. 98, 9 кл.
Е. Шафирович — Ногинск Московской обл., с. ш. 3, 10 кл.
В. Шнейдман — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 мая 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: Задачник «Кванта», М251, М252 «или»... Ф263». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта"», «новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные отмечены звездочкой.

Задачи

М251-М255; Ф263-Ф267

М251. Дано n фишек нескольких цветов, причем фишек каждого цвета не более $\frac{n}{2}$. Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.

Ф. Г. Шлейфер

М252. а) На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается «перекатывать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки M плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки M на расстоянии меньше ε (рис. 1).

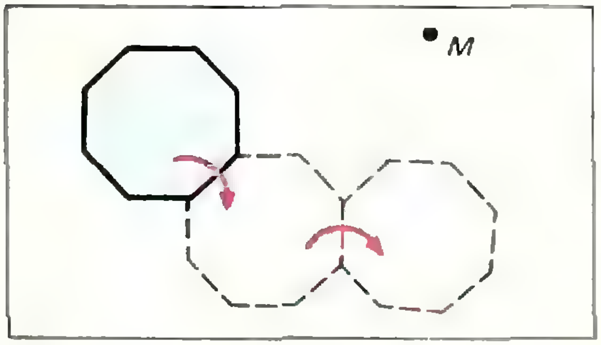


Рис. 1.

б) Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.

в*) Для каких правильных n-угольников верно аналогичное утверждение?

Г. А. Гальперин

М253. На плоскости заданы три точки, являющиеся соответственно центрами вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей треугольника. Как по этим данным восстановить треугольник?

(Напомним, что вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон.)

Б. В. Мартынов

М254. Вычислите значение $\sqrt{0{,}\underbrace{11111\ldots11111}_{100}}$ с точностью а) 100 знаков после запятой; б) 101 знака после запятой; в *) 200 знаков после запятой.

А. А. Егоров

М255 *. *AB* и *CD* — две различные касательные к двум данным шарам (*A* и *C* принадлежат поверхности одного шара, *B* и *D* — другого). Докажите, что проекции отрезков *AC* и *BD* на прямую, проходящую через центры шаров, равны.

И. Ф. Шарыгин

Ф263. Матированное стекло (одна из поверхностей стекла гладкая, другая шероховатая) прикладывают к чертежу: один раз гладкой поверхностью кверху, другой раз — книзу. В одном случае чертеж виден хорошо, в другом — разобрать его невозможно. Почему?

Ф264. Две одинаковые круглые плоские металлические пластины, расположенные так, как показано на рисунке 2, вращают с угловой скоростью ω в противоположные стороны в магнитном поле, перпендикулярном плоскостям пластин. Индукция магнитного поля равна *B*, расстояние между пластинами *a*. Оси пластин соединяют проводником. Найти установившееся распределение плотности зарядов на пластинах.

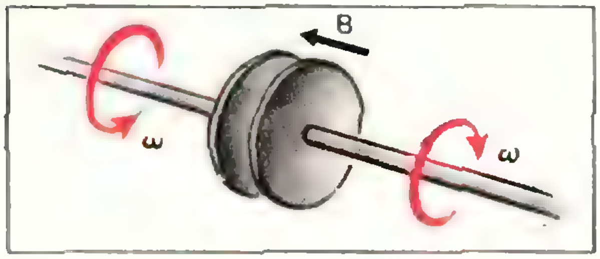


Рис. 2.

Ф265. Мальчик, сидящий на санках, хочет подтянуть себя к стене с помощью веревки, прикрепленной к санкам и перекинутой через блоки (рис. 3). Каким должен быть для этого коэффициент трения мальчика о санки, если масса санок *m*, масса мальчика *M*, коэффициент трения полозьев санок о снег равен *k*?

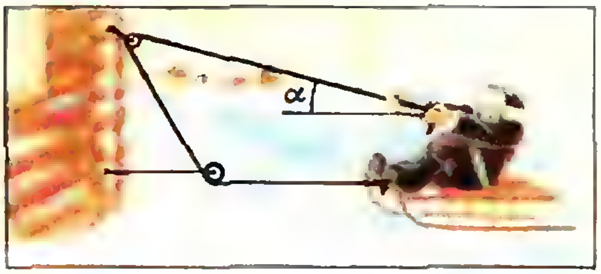


Рис. 3.

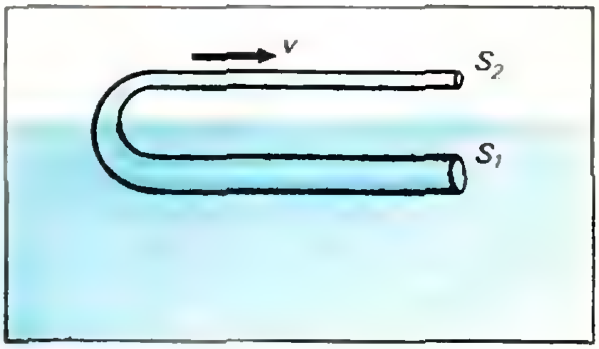


Рис. 4.

Ф266. U-образная трубка движется с постоянной скоростью v параллельно поверхности жидкости (рис. 4). Сечение нижней части трубки, опущенной в воду, равно S_1, а верхней, находящейся над водой, — S_2. Какая сила приложена к трубке? Плотность жидкости ρ. Трением и образованием волн на поверхности жидкости пренебречь.

Ф267. Космический корабль сферической формы движется вокруг Солнца по круговой орбите. Какова температура корабля, если энергия, излучаемая единицей площади поверхности Солнца и корабля, пропорциональна четвертой степени их абсолютных температур? Космонавты, которые находятся на корабле, видят Солнце в угле 30′. Температуру поверхности Солнца принять равной 6000 °K.

Решения задач

М200, М208-М210; Ф218-Ф222

М200. *а) На рисунке 1 изображены шесть точек, которые лежат по три на четырех прямых. Докажите, что можно 24 разными способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отображались в три точки, также лежащие на одной прямой.*

б) На рисунке 2 девять точек лежат по три на девяти прямых, причем через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отображалась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображенной на рисунке 3.

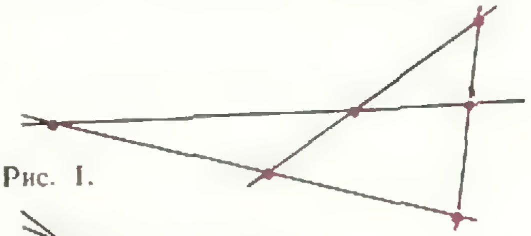


Рис. 1.

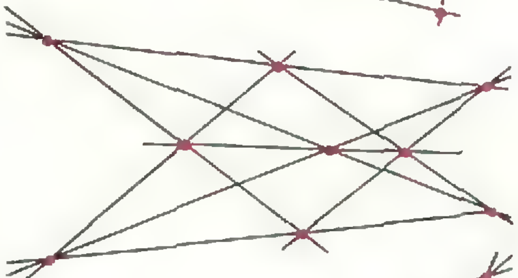


Рис. 2.

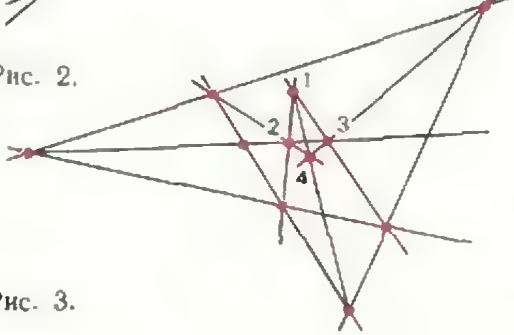


Рис. 3.

В пунктах б) и в) задачи значительно проще найти ответ, чем его обосновать.

Ответ можно получить так. Назовем *треугольником* тройку точек, не лежащих на одной прямой и таких, что каждые две из них лежат на одной прямой *), принадлежащей, разумеется, нашей конфигурации. Легко заметить, что если указано, какая точка переходит в каждую вершину данного треугольника (эти три точки тоже должны образовывать треугольник), то положение всех остальных точек благодаря нашему условию — три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой, — определяется однозначно во всех трех случаях: а), б), в).

Разберем для примера случай в). Пусть при отображении точки i, j, k перешли в точки 1, 2 и 3 соответственно. Тогда в точку 4 должна перейти та точка l, которая соединена прямыми с каждой из точек i, j, k, — две точки, лежащие на прямой, должны перейти в две точки, лежащие на прямой, — а в точки 5, 6, . . ., 10 должны перейти третьи точки, лежащие на прямых, проходящих через пары точек i, j, k, l.

Поэтому в случае а) действительно есть 24 разных отображения: в первую вершину выделенного треугольника можно отобразить любую из шести точек, во вторую — любую из четырех точек, лежащих с ней на одной прямой, а точка, переходящая в третью вершину, определяется однозначно. Всего $6\cdot 4=24$ отображения. Аналогично, в в пунктах б) и в) ответы: $9\cdot 6\cdot 2=108$ и $10\cdot 6\cdot 2=120$ (здесь в третью вершину треугольника может перейти не одна, а две точки). Однако обосновать наши подсчеты не просто: производя их, мы пользовались «равноправием» всех треугольников. Например, могло оказаться, что точки l, с которой соединены прямыми точки i, j, k, вообще нет или что таких точек две. Хотя это равноправие, по-видимому, имеется, его все же нужно доказать. Разумеется, это можно сделать «в лоб», взяв в случае а) 24 треугольника, в случае б) 108 треугольников, а в случае в) 120 треугольников (мы различаем треугольники с разным порядком вершин). Но можно поступить и по-другому. Поскольку для описания наших конфигураций существенно только, какие точки лежат на данной прямой и какие прямые проходят через данную точку, — именно эти сведения необходимы и достаточны для того, чтобы изучать отображения, — можно задавать наши конфигурации с помощью моделей: указать набор «прямых», «точек» и указать, какие точки и прямые *инцидентны*. Точка i и прямая j инцидентны, если точка i лежит на прямой j или, что то же самое, прямая j проходит через точку i. На рисунке 4 приведено несколько моделей одной и той же конфигурации.

---

*) Порядок точек, входящих в тройку, существен.

Мы построим для каждой из конфигураций а), б), в) такие модели, для которых равноправие треугольников будет очевидным.

Пункт а). Рассмотрим тетраэдр — правильную треугольную пирамиду — и назовем прямыми его вершины, а точками — ребра. Скажем, что точка i инцидентна прямой j, если вершина j инцидентна ребру i. Проверьте, что получилось модель конфигурации пункта а). Треугольникам в этой модели отвечают три ребра, прилегающие к одной грани, а нашим отображениям — повороты и симметрии тетраэдра. Эти преобразования показаны на рисунке 5. Проверьте, что они переводят три точки, лежащие на одной прямой, в три точки, лежащие на одной прямой. В этой модели равноправие всех треугольников очевидно.

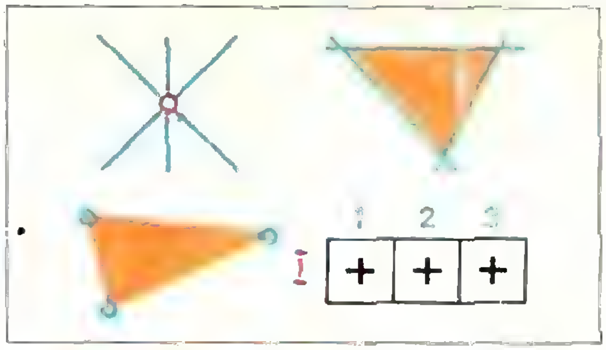


Рис. 4.

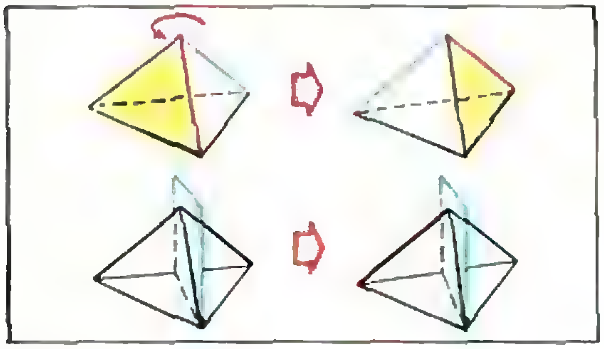


Рис. 5.

Конфигурация Паскаля. Модель конфигурации Паскаля будет несколько более замысловатой. Рассмотрим сетку из правильных треугольников, образованную тремя семействами параллельных прямых (см. рис. 6). Изготовим «точки» и «прямые» из прямых и узлов этой сетки следующим образом. Объединим все параллельные прямые через три в одну «прямую» и, аналогично, все узлы, находящиеся на прямых, через три объединим в одну «точку». На рисунке 6 узлы, входящие в одну «точку», занумерованы одинаково, а прямые, входящие в одну «прямую», имеют один и тот же цвет. «Точка» и «прямая» инцидентны, если инцидентны составляющие их узлы и прямые.

Упражнение. Убедитесь, что получилась модель конфигурации Паскаля.

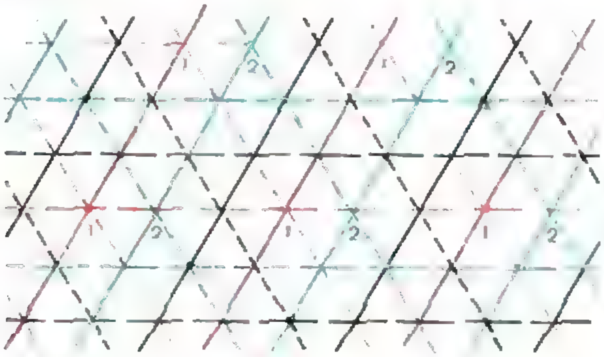


Рис. 6.

Треугольнику в модели отвечает набор треугольников, изображенный на рисунке 7. Легко убедиться, что повороты, параллельные переносы и симметрии плоскости, переводящие сетку в себя, являются допустимыми*) отображениями. Поэтому равноправие всех треугольников очевидно — любой треугольник можно перевести в любой другой с помощью допустимого отображения.

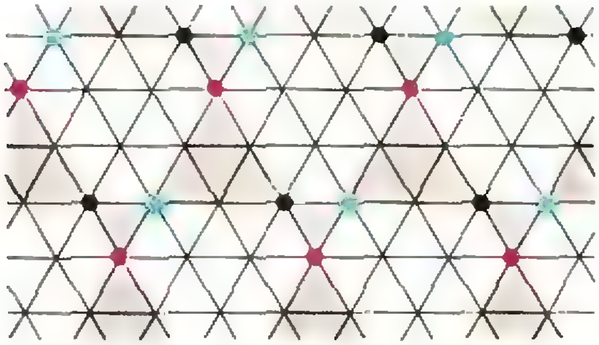


Рис. 7.

Упражнение. Докажите, что других допустимых отображений нет.

Конфигурация Дезарга. Конфигурацию Дезарга мы представим следующим образом. Возьмем тетраэдр и отметим середины его ребер (см. рис. 8). Точками назовем вершины тетраэдра и середины его ребер, а прямыми — его ребра и середины ребер, лежащих в одной грани. Прямой-ребру принадлежат лежащие на нем вершины и его середина.

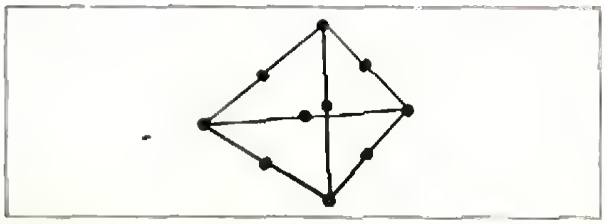


Рис. 8.

---

*) Так для краткости мы будем называть отображения, удовлетворяющие условиям задачи.

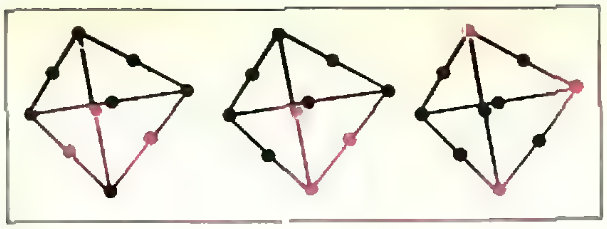


Рис. 9.

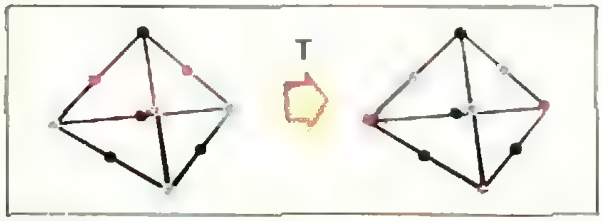


Рис. 10.

Упражнение. Убедитесь, что получилась модель конфигурации Дезарга.

Какие тройки точек нашей модели являются треугольниками? Это вершины, лежащие в одной грани, или вершина и середины прилегающих к ней ребер, или середины ребер, прилегающих к одной вершине (см. рис. 9). Хотя с точки зрения обычных преобразований тетраэдра — поворотов и симметрий (см. рис. 5) — эти треугольники не равноправны, достаточно добавить еще одно преобразование T (оно показано на рисунке 10), чтобы убедиться в равноправности всех треугольников и тем самым в правильности ответа.

Упражнение. Убедитесь, что повороты, симметрии и отображение T являются допустимыми отображениями. Укажите все допустимые отображения.

Задача решена.

В заключение еще несколько вопросов для самостоятельного продумывания. Сколько существует допустимых отображений наших конфигураций, оставляющих неподвижными:

а) данную точку;

б) данную пару точек;

в) данную прямую (то есть отображений, переставляющих точки, лежащие на данной прямой);

г) данную пару прямых и т. п.?

М208. *Известно, что разность между наибольшим и наименьшим из вещественных чисел*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$$

равна 1. *Какой:*

а) наибольшей;

б) наименьшей

— может быть разность между наибольшим и наименьшим из 10 чисел

$$x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \ldots, \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}?$$

Каков будет ответ, если чисел не 10, а n?

Будем решать задачу сразу для n чисел. Сделаем несколько предварительных замечаний.

Обозначим через y_k число $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}$, где $k=1, 2, \ldots, n$. Если прибавить ко всем x_i некоторое число a, то вместо чисел y_i мы получим числа y_i+a. Максимальные разности для чисел y_i и для чисел y_i+a совпадают. Поэтому от набора $\{x_i\}$ с помощью подходящего выбора a можно перейти к такому набору $\{x'_i\}$, что все $x'_i \geqslant 0$, наименьшие x_i равны нулю, а наибольшие — единице. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие наборы. Аналогично, если заменить числа x_i на $1-x_i$, то y_i заменятся на $1-y_i$. Следовательно, от набора $\{x_i\}$ можно перейти к набору $\{1-x_i\}$: максимальные разности между числами y_i и числами $1-y_i$ одинаковы.

Решим теперь задачу а). Пусть y_k — наименьшее, а y_l — наибольшее из чисел $\{y_i\}$. Если $k<l$, то

$$y_l-y_k=\frac{ky_k}{l}+\frac{x_{k+1}+\cdots+x_l}{l}-$$

$$-y_k=\frac{x_{k+1}+\cdots+x_l}{l}-\frac{l-k}{l}y_k\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_{k+1}+\cdots+x_l}{l}\leqslant\frac{l-k}{l}=1-\frac{k}{l}\leqslant$$

$$\leqslant 1-\frac{1}{n}.$$

Если же $l>k$, то $y_l-y_k=\frac{k-l}{k}y_l-$ $-\frac{y_{l+1}+\ldots+y_k}{k}\leqslant 1-\frac{l}{k}\leqslant 1-\frac{1}{n}$. Следовательно, максимальная разность не больше $1-\frac{1}{n}$. Набор с такой разностью легко указать: $x_1=0$, $x_2=x_3=\ldots=x_n=1$.

Перейдем к решению задачи б). Оценим, чему равна максимальная разность, если в наборе $\{x_i\}$ $x_k=1$, $x_l=0$. Будем считать, что $k<l$ (если это не так, то от набора $\{x_i\}$ перейдем к набору $\{1-x_i\}$). Если $k=1$, то разность не меньше $\frac{1}{n}$. Действительно, тогда $y_1=1$, а $y_n=$ $=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\leqslant\frac{n-1}{n}$, поскольку все $x_i\leqslant 1$, а один из них равен нулю. Пусть $k>1$. Тогда $\Delta_1=y_k-y_{k-1}=$ $=\frac{1}{k-1}-\frac{y_k}{k-1}$, $\Delta_2=y_{l-1}-y_l=$ $=\frac{y_{l-1}}{l}$, и если $y_k\leqslant y_{l-1}$, то $\Delta_2\geqslant\frac{y_k}{l}$.

Наибольшие из чисел Δ_1 и Δ_2 не меньше $\frac{1}{k+l-1}$, поскольку $1 \leqslant (k-1)\Delta_1 + l\Delta_2 \leqslant (k+l-1)M$, где $M = \max(\Delta_1, \Delta_2)$. Если же $y_h > y_{l-1}$, то рассмотрим еще разность $\Delta_3 = y_k - y_l = y_k - y_{l-1} + \frac{y_{l-1}}{l}$. $l\Delta_3 + (k-1)\Delta_1 = (l-1)(y_k - y_{l-1}) + 1 > 1$, откуда $\max(\Delta_1, \Delta_3) \geqslant \frac{1}{k+l-1}$. Итак мы доказали, что разность не меньше $\frac{1}{k+l-1}$. Поэтому для произвольного набора она не меньше $\frac{1}{2(n-1)}$ $(l \leqslant n,\ k \leqslant n-1)$. Такую разность реализовать можно: достаточно, например, рассмотреть набор $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-2} = \frac{1}{2}$, $x_{n-1} = 1$, $x_n = 0$. Итак, наименьшая разность равна $\frac{1}{2(n-1)}$

Л. Г. Лиманов

M209. *Для любого треугольника ABC можно вычислить такую сумму:*

$$S = \operatorname{tg}^2 A/2 + \operatorname{tg}^2 B/2 + \operatorname{tg}^2 C/2.$$

Докажите что

а) $S \leqslant 2$ для всех остроугольных и прямоугольных треугольников;

б) $S \geqslant 2$ для тупоугольных треугольников с тупым углом, большим или равным $2 \operatorname{arctg} 4/3$;

в) среди треугольников с тупым углом φ таким, что $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2 \operatorname{arctg} 4/3$, имеются и такие, что $S > 2$, и такие, что $S < 2$.

Приведем одно из наиболее коротких решений, близкое к присланным *С. Берколайко* (Белгородская обл.) и *А. Григоряном* (Баку).

Из формулы

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$

следует, что положительные числа x, y и z могут служить тангенсами половин углов $\triangle ABC$ в том и только том случае, когда

$$xy + yz + zx = 1. \qquad (1)$$

Тождество (1) позволяет вместо суммы $S = x^2 + y^2 + z^2$ рассматривать более простую сумму $T = x + y + z$: поскольку $T^2 = S + 2$, то условия $S > 2$, $S = 2$ и $S < 2$ равносильны соответственно условиям $T > 2$, $T = 2$ и $T < 2$.

Задача сводится, таким образом, к следующей.

Пусть $xy + yz + zx = 1$, $x + y + z = T$, $0 < x \leqslant z$, $0 < y \leqslant z$.

Тогда

а) $T \leqslant 2$ при $z \leqslant 1$,

б) $T \geqslant 2$ при $z \geqslant 4/3$,

в) для всякого z между 1 и 4/3 найдутся и такие x, y, что $T < 2$, и такие x, y, что $T > 2$.

Докажем утверждения а), б) и в).

а) Если $z \leqslant 1$, то $S = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant xz + yz + z^2 < xy + xz + yz + z^2 = 1 + z^2 \leqslant 2$, так что и $S < 2$, и $T < 2$.

б) Если $z = \frac{4}{3} + d$, $d \geqslant 0$, то $x + y \geqslant \frac{2}{3} - d$.

Докажем это от противного: предположим что $x + y < \frac{2}{3} - d$.

Тогда

$$xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4} < \frac{1}{9} - \frac{d}{3} + \frac{d^2}{4},$$

$$(x+y)z < \left(\frac{2}{3} - d\right)\left(\frac{4}{3} + d\right) = \frac{8}{9} - \frac{2d}{3} - d^2,$$

так что

$$1 = xy + (x+y)z < 1 - d - \frac{3d^2}{4} \leqslant 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $x + y \geqslant \frac{2}{3} - d$, и $T = (x+y) + z \geqslant \frac{2}{3} - d + \frac{4}{3} + d = 2.$

в) Пусть теперь $1 < z < \frac{4}{3}$.

Сначала найдем такие x и y, что $T < 2$. Возьмем $x = y$. Согласно тождеству (1) тогда $x = y = \sqrt{z^2+1} - z$, $T = 2\sqrt{z^2+1} - z$. Так как $z < 4/3$, то $3z^2 < 4z$, $4(z^2 + 1) < 4 + 4z + z^2$, $2\sqrt{z^2+1} < z + 2$, и значит, $T < 2$.

Замечание. Вернувшись к исходной формулировке задачи, мы видим, что для равнобедренных тупоугольных треугольников с тупым углом $\varphi < 2 \operatorname{arctg} 4/3$ сумма $S < 2$.

Теперь найдем такие x и y, что $T > 2$. Используя тождество (1), запишем T в виде $T = (x+y) + z = \frac{1 - xy}{z} + z$.

Сумма $z + \frac{1}{z} > 2$, T отличается от нее на величину $\frac{xy}{z}$. Так как $y \leqslant z$, то $\frac{xy}{z} \leqslant x$.

Значит, если взять $x < z + \frac{1}{z} - 2$, то T окажется больше 2. Остается только проверить, что действительно существует x и y, удовлетворяющие условиям $0<x\leqslant z$, $0<y\leqslant z$,

$$xy+yz+zx=1 \text{ и } x<z+\frac{1}{z}-2. \qquad (2)$$

Воспользуемся тем, что $z>1$ (отметим, что при $z\leqslant 1$ таких x и y не существует, — это следует, например, из пункта а). Согласно (1) $y=\frac{1-xz}{x+z}$. При $z>1$ и при $0<x<\frac{1}{z}$, очевидно, $0<y<1$. Итак, для любого $x>0$ такого, что $x<\frac{1}{z}$ и $x<z+\frac{1}{z}-2$, при $y=\frac{1-xz}{x+z}$ условия (2) выполняются. Таким образом, при $1<z<{}^4/_3$, если $0<x<z+\frac{1}{z}-2$ и $y=\frac{1-xz}{x+z}$, то $T>2$. Задача решена.

Геометрический смысл. Построим три окружности α, β, и γ с центрами A, B и C, которые попарно касаются друг друга внешним образом.

При $S<2$ существует одна окружность δ, которая касается α, β и γ внешним образом, и одна окружность ε, которой α, β и γ касаются изнутри.

При $S>2$ две окружности δ_1 и δ_2 касаются α, β и γ внешним образом и нет ни одной окружности, которой α, β и γ касались бы изнутри.

Случай $S=2$—переходный: одна окружность δ касается α, β, γ внешним образом, кроме того α, β и γ имеют общую касательную.

Доказательство этих утверждений можно найти в статье «Сюрпризы» («Квант», 1974, № 1).

М. Л. Гервер

М210. *Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В такой последовательности разрешается поменять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько всего существует неэквивалентных последовательностей?*

Решим задачу для последовательностей из $3n$ цифр. Чтобы не возникло путаницы, греческими буквами будем обозначать последовательности, а латинскими — элементы последовательностей. Пусть последовательность α состоит из $3n$ цифр

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{3n}\}.$$

Разобьем α на три подпоследовательности:

$$\alpha_1=\{a_1, a_4, a_7, \ldots, a_{3k+1}, \ldots \\ \ldots, a_{3(n-1)+1}\},$$

$$\alpha_2=\{a_2, a_5, a_8, \ldots, a_{3k+2}, \ldots \\ \ldots, a_{3(n-1)+2}\},$$

$$\alpha_3=\{a_3, a_6, a_9, \ldots, a_{3k}, \ldots, a_{3n}\}.$$

Такое разбиение будем называть *стандартным*. Каждая из последовательностей α_1, α_2, α_3 стандартного разбиения состоит из n цифр. Пусть β — произвольная последовательность. Через $|\beta|$ обозначим число единиц в последовательности β.

Подсчет числа неэквивалентных последовательностей основывается на следующей теореме:

Теорема. *Пусть α и β — две последовательности длины $3n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — их стандартные разбиения.*

Для того чтобы последовательности α и β были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы подпоследовательности α_1 и β_1, α_2 и β_2, α_3 и β_3 содержали одинаковое число единиц соответственно, то есть чтобы выполнялось условие

$$|\alpha_1|=|\beta_1|, \quad |\alpha_2|=|\beta_2|, \quad |\alpha_3|=|\beta_3|. \quad (1)$$

Покажем сначала, как на основе этой теоремы подсчитывается число неэквивалентных последовательностей, а затем докажем теорему.

В силу теоремы каждый класс эквивалентных последовательностей однозначно определяется упорядоченной тройкой чисел $(|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|)$. Эти числа могут принимать любые значения от 0 до n. Следовательно, число неэквивалентных последовательностей длины $3n$ равно числу различных упорядоченных троек целых чисел от 0 до n. Нетрудно видеть, что число таких троек равно $(n+1)^3$.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть мы переставили в последовательности $\alpha=\{a_1, a_2, \ldots a_{3n}\}$ две соседние тройки цифр: a_k, a_{k+1}, a_{k+2} и $a_{k+3}, a_{k+4}, a_{k+5}$. Эту перестановку можно представить следующим образом: сначала поменяли местами цифры a_k и a_{k+3}, затем поменяли местами цифры a_{k+1} и a_{k+4} и, наконец, поменяли местами цифры a_{k+2} и a_{k+5}. Числа a_k и a_{k+3} — соседние цифры одной и той же подпоследовательности стандартного разбиения α; числа a_{k+1} и a_{k+4} — другой, а числа a_{k+2} и a_{k+5} — третьей. Таким образом, в каждой из подпоследовательностей α_1, α_2, α_3 стандартного разбиения α мы переставили два соседних члена. Значит, если последовательность β получена из последовательности α конечным числом перестановок, то есть, если последовательности α и β эквивалентны, то подпоследовательности β_1, β_2, β_3 стандартного разбиения β суть некоторые перестановки подпоследовательностей α_1, α_2, α_3 соответственно. Отсюда вытекают равенства (1).

Достаточность. Нам надо доказать, что если последовательности α и β длины $3n$ удовлетворяют условию (1), то эти последовательности эквивалентны. Удобнее доказывать более общее утверждение: если последовательности α и β длины k удовлетворяют условию (1), то эти последовательности эквивалентны. Доказательство будем вести индукцией по k.

1) При $k = 1$ последовательности α и β содержат по одной цифре. Из условия (1) следует, что эти цифры равны, то есть что последовательности α и β просто совпадают.

2) Предположим, что в случае, когда $k = p$, утверждение уже доказано. Докажем его при $k = p + 1$. Итак, пусть α и β — последовательности длины $p + 1$ и пусть выполнено соотношение (1). Пусть, далее, последовательность α состоит из цифр $\{a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}\}$, а последовательность β — из цифр $\{b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}\}$.

а) если $a_1 = b_1$, то рассмотрим последовательности $\alpha' = \{a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}\}$ и $\beta' = \{b_2, b_3, \ldots, b_{p+1}\}$. Ясно, что последовательности α' и β' удовлетворяют условию (1). А так как длины этих последовательностей равны p, то можно воспользоваться индуктивным предположением. Таким образом, последовательности α' и β' эквивалентны, то есть последовательность α' несколькими перестановками можно перевести в последовательность β'. Эти же перестановки переводят α в β. Значит, последовательности α и β эквивалентны.

б) Пусть $a_1 \neq b_1$, и пусть для определенности $a_1 = 1$, а $b_1 = 2$. Так как $a_1 = 1$, то $|\alpha_1| > 0$. Тогда в силу (1) и $|\beta_1| > 0$. Следовательно, найдется число q такое, что $b_{3q+1} = 1$. В последовательности β поменяем местами соседние тройки цифр b_{3q+1}, b_{3q+2}, b_{3q+3} и $b_{3(q-1)+1}$, $b_{3(q-1)+2}$, $b_{3(q-1)+3}$. В результате этой перестановки тройка b_{3q+1}, b_{3q+2}, b_{3q+3} сдвинется на 3 цифры влево. Затем поменяем местами эту тройку с рядом стоящей тройкой цифр $b_{3(q-2)+1}$, $b_{3(q-2)+2}$, $b_{3(q-2)+3}$ и так далее; после q перестановок получим последовательность β'', первой цифрой которой будет b_{3q+1}, то есть 1. Последовательности β и β'' эквивалентны и поэтому, как было доказано выше, удовлетворяют условию (1). Значит, последовательности α и β'' удовлетворяют условию (1). Но первые элементы этих последовательностей совпадают. Таким образом, случай б) свелся к уже разобранному случаю а). Теорема доказана.

Желающие могут попытаться решить задачу в еще более общем виде:

В последовательностях, состоящих из цифр 1 *и* 2, *разрешается менять местами любые две рядом стоящие подпоследовательности длины k. Сколько существует неэквивалентных последовательностей, состоящих из n цифр $(n \geqslant k)$?*

Ответ: если $n = mk + q$, где $0 \leqslant q < k$, то число неэквивалентных последовательностей равно $(m + 1)^{k-q}(m + 2)^q$.

Г. А. Гуревич

Правильные решения задач М206 — М215 прислали (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи): *А. Абдуррахманов* (Баку) **13**; *С. Абрамов* (Москва) **06**; *П. Агаронов* (Баку) **11**, **14**; *С. Агеев* (Воронеж) **09**, **11—14**; *Л. Азов* (Челябинск) **11**; *Г. Айрапетян* (Ереван) **13**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **06**; *Ю. Акутин* (Москва) **12**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **13**; *В. Ашихмин* (Таллин) **12**, **13**; *В. Бакиров* (Куйбышев) **12**; *П. Баньковский* (Уральск) **11—14**; *А. Бараов* (Москва) **11—13**; *А. Барсуков* (Пятигорск) **12**; *В. Басманов* (Воронеж) **11**, **13**; *Л. Басов* (Пржевальск) **13**; *И. Бахмутский* (Львов) **13**, **14**; *С. Белолипецкий* (Киржач Владимирской обл.) **06**, **13**, **14**; *А. Берлин* (Бобруйск) **12—15**; *Р. Бесчоков* (с. Старый Урух КБАССР) **13**; *Л. Блаженова* (Москва) **13**, **14**; *А. Блох* (Харьков) **06**, **09**, **13**, **14**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **13**; *А. Брысьев* (Тюльган Оренбургской обл.) **11—13**; *А. Валовой* (Москва) **13**, **14**; *А. Вальков* (Ташкент) **06**, **11—14**; *Р. Вассерман* (Одесса) **06**, **09**, **11—14**; *А. Векслер* (Ташкент) **11**, **13**; *А. Волков* (Челябинск) **06**, **14**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **06**; *В. Гаделия* (Очамчира Абхаз. АССР) **13**; *В. Гармаев* (Мирный) **13**; *Д. Гашибаязов* (Тбилиси) **13**; *Я. Гедеок* (Жидачев Львовской обл.) **12**; *С. Глазков* (Златоуст Челябинской обл.) **13**, **14**; *Т. Говорова* (Симферополь) **11—13**; *И. Голдовский* (Брянск) **13**; *Л.* и *М. Гондельсман* (Ленинград) **06**; *А. Гончаров* (Никополь) **06**, **11**, **12**, **14**, **15**; *Е. Горбатый* (Одесса) **06**; *А. Гордон* (Москва) **13**; *С. Горшков* (Москва) **06**, **07**; *М. Грабельковский* (Воронеж) **12**; *А. Григорян* (Баку) **06—11**, **13**; *А. Гринберг* (Кишинев) **13**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **13**, **14**; *Е. Гугель* (Днепропетровск) **13**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **14**; *Б. Гуревич* (Воронеж) **11**, **12**; *Г. Гутин* (Клинцы Брянской обл.) **11**; *М. Даниелян* (Баку) **12**, **13**; *В. Данилов* (Москва) **11—14**; *К. Данильченко* (Волгоград) **06**, **11**, **13**; *С. Даркембаев* (с. Сара-Джак Алма-Атинской обл.) **11**, **13**, **14**; *П. Дедик* (Москва) **06**, **08**, **11—14**; *А. Деревягин* (Красноярск) **13**; *Э. Дяченко* (Киев) **11**, **13**; *Р. Егорян* (Раздан) **12**, **14**; *А. Еременко* (Харьков) **11**, **12**, **14**; *А. Журавлев* (Москва) **07**, **12**; *М. Закс* (Пермь) **06**, **11—14**; *В. Зарубин* (Москва) **06**, **07**, **13**; *Д. Зелевинский* (Москва) **13**, **14**; *С. Зенович* (Ташкент) **07**, **13**; *П. Зозуль* (п. Гребенки Киевской обл.) **14**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **13**; *А. Иванов* (Москва) **11**, **12**; *А. Иванов* (Хабаровск) **13**; *Т. Иванова* (Москва) **11**, **13**; *А. Измайлов* (Баку) **13**; *С. Ильинков* (Харьков) **11—14**; *И. Йовик* (Магнитогорск) **13**; *А. Калюжный* (Киев) **11**, **13**; *М. Кангиев* (Самарканд) **13**; *П. Кацыло*

(Москва) 11, 14; *И. Кирова* (Болгария) 13; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) 11; *М. Кобозев* (Киев) 14; *В. Кобылецкий* (Баку) 11—13; *Е. Ковкрак* (д. Рудня-Журавлева Гомельской обл.) 13; *А. Колодин* (Коломыя Ивано-Франковской обл.) 12, 13; *В. Конев* (Ангарск) 13; *А. Корлат* (с. Чугулены МССР) 13, 14; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) 06, 09, 11—14; *В. Костанян* (Москва) 13; *А. Костюнин* (Люберцы Московской обл.) 12; *А. Котанов* (п. Цалка ГССР) 13; *А. Котенко* (с. Березовая Рудка Полтавской обл.) 13; *А. Кошутин* (Челябинск) 14; *А. Кукуш* (Киев) 09, 12—14; *А. Кумахов* (с. Лескен КБАССР) 11—13; *М. Левин* (Витебск) 12, 13; *А. Легостев* (Москва) 11; *С. Лифиц* (Харьков) 11, 12; *М. Любич* (Харьков) 06, 07, 10, 11, 13, 14; *Е. Мазур* (Дербент) 07; *А. Макаричев* (Львов) 06, 12—14; *С. Макаров* (Саратов) 11, 13, 14; *С. Малинский* (Полтава) 14; *В. Мацукатов* (п. Цалка ГССР) 13; *С. Мельник* (Харьков) 06, 07, 09; *А. Мехович* (Владивосток) 13; *В. Мильман* (Минск) 11, 12, 14, 15; *А. Мирошниченко* (Харьков) 13, 14; *А. Михеев* (Шахты) 13; *А. Михлин* (Курск) 11, 12; *Ю. Муранов* (Москва) 11—14; *Р. Мусин* (с. Никитино Оренбургской обл.) 13; *Г. Мустафаев* (Сиазань Аз. ССР) 06, 11, 13, 14; *И. Муха* (Тернополь) 12, 13; *А. Навасардян* (Ереван) 13; *Ю. Неретин* (Москва) 06, 08, 11, 13—15; *А. Николаев* (Москва) 06, 11, 12; *Б. Ниязбеков* (Алмалык Ташкентской обл.) 13; *И. Новиков* (Куйбышев) 06, 11; *С. Нужный* (Куйбышев) 11—14; *С. Охитин* (Оренбург) 11—13; *И. Панин* (Апатиты) 11, 12; *П. Парамонов* (Москва) 09, 11—13; *Е. Пасике* (Харьков) 06, 11, 13, 14; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) 12—15; *А. Поносов* (Пермь) 06, 08; *Р. Портной* (Черновцы) 12; *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) 11; *Ю. Протас* (Кагул МССР) 13, 14; *С. Путинцев* (Кемерово) 06, 11—15; *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) 06, 12; *А. Рашковский* (Харьков) 06, 12, 13; *А. Резников* (Киев) 11, 12, 14; *С. Родионов* (Саратов) 13, 14; *Р. Рожков* (Москва) 08, 11—14; *Ф. Рожков* (Рязань) 08, 11—14; *Б. Розенштейн* (Каменец-Подольский) 06; *Д. Ромашов* (с. Галкино Курганской обл.) 13, 14; *А. Рубашевский* (Киев) 12; *Л. Рубинштейн* (Калининград) 13, 14; *А. Рязанов* (Новокузнецк) 06, 11, 12; *Ш. Сайнароев* (ст. Наурская ЧИАССР) 13; *П. Самовол* (Гайворон Кировоградской обл.) 12, 13; *М. Сапир* (Свердловск) 11—14; *С. Сатановский* (Харьков) 11, 13; *В. Сац* (Киев) 13, 14; *Т. Сельбирак* (Польша) 11—14; *В. Семененко* (Ставрополь) 13; *В. Семенов* (Чебоксары) 13; *А. Симонян* (Фрунзе) 13; Г. *Скляр* (Харьков) 06, 10—15; *С. Скоков* (д. Соковин, г. Слободской) 14; *В. Слепой* (Фрунзе) 13; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) 09, 11—14; *Ф. Смирнов* (Ленинград) 06; *Г. Сорокин* (Актюбинск) 12—14; *С. Табачников* (Москва) 06, 08, 09, 11—13; *Т. Талько* (п/о Оленья губа Мурманской обл.) 13; *С. Тваури* (п. Ленингори ГССР) 14; *А. Тверской* (Москва) 06, 14; *К. Тевосян* (Абовян Арм. ССР) 13; *В. Ти* (Кировабад) 06, 13; *Н. Тимиров* (Азнакаево ТАССР) 13; *А. Ткач* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.) 11; *Г. Токарев* (Тула) 14; *М. Торонджадзе* (Тбилиси) 11; *А. Тралле* (Минск) 13; *А. Троценко* (с. Березовая Рудка Полтавской обл.) 13; *Э. Туркевич* (Черновцы) 06, 11, 13—15; *А. Тяпин* (Москва) 11, 13—15; *М. Уридия* (Тбилиси) 11; *В. Урываев* (Москва) 12, 13; *В. Филоненко* (Днепропетровск) 13; *С. Финашин* (Ленинград) 06, 11, 12; *Т. Фисенко* (Грозный) 13; *А. Фридман* (Рига) 11, 12; *Р. Хизанишвили* (Тбилиси) 11; *А. Хомич* (Брест) 11, 12; *М. Хорошин* (Чернигов) 14; *С. Цветцих* (п/о Стрелково Московской обл.) 12; *С. Церковный* (Ленинград) 13, 14; *И. Цукерман* (Ленинград) 06, 11, 13; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 13; *Я. Чепулионите* (Кайшадорский р-н Лит. ССР) 13; *А. Черебатов* (Омск) 06, 11, 12, 14; *А. Чернявский* (Харьков) 14; *Л. Черняева* (Воркута) 13; *В. Чернякин* (с. Березовая Рудка Полтавской обл.) 13; *В. Шапкин* (Октябрьский БАССР) 13; *К. Шварцман* (Кишинев) 13; *А. Шерстюк* (Николаев) 06, 10; *В. Шкатов* (Одинцово Московской обл.) 13; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 06, 07, 11—13; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 06, 07, 09; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) 09, 13, 14; *В. Щипанонов* (Ковылкино) 06; *А. Эстерлис* (Тбилиси) 13; *Р. Юлмухаметов* (д. Иткулово БАССР) 12, 13; *И. Юнус* (Харьков) 06, 07, 09, 11, 13—15; *Б. Юсин* (Москва) 06, 10; *А. Яблонский* (Волгоград) 13; *Р. Ямилев* (Уфа) 09, 11, 13, 14.

Ю. П. Лысов

Ф218. *Железнодорожный состав идет с постоянной скоростью $v = 72$ км/ч по горизонтальному участку пути. На сколько должна измениться мощность, развиваемая локомотивом, чтобы состав с той же скоростью продолжал двигаться во время сильного вертикального дождя? Считать, что каждую секунду на состав падает $m = 100$ кг воды, которая затем стекает на землю по стенкам вагонов. Изменением сил трения пренебречь.*

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с землей. Вода, стекающая на землю, имеет горизонтальную составляющую скорости, равную скорости поезда. Поэтому горизонтальная составляющая импульса воды, стекающей на землю за время Δt, равна $(\mu\Delta t)\, v$, где $\mu = 100$ кг/с — масса воды, стекающей на землю за 1 секунду. При падении же воды на состав горизонтальная составляющая ее импульса равна нулю. Таким образом, поезд за время Δt передает воде импульс

$$\mu v\Delta t - 0 = \mu v\Delta t.$$

Это означает, что на воду со стороны поезда и, согласно третьему закону Ньютона, на поезд со стороны воды действует сила, равная по абсолютной величине

$$F = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t} = \mu v.$$

Следовательно, чтобы скорость поезда не изменилась, именно на величину силы F и должна возрасти сила тяги локомотива во время дождя. А его мощность должна возрасти на

$$\Delta N = Fv = \mu v^2 = 4 \cdot 10^4 \ (\textit{вт}).$$

Ф219. *В вертикальном цилиндре имеется n молей идеального одноатомного газа. Цилиндр закрыт сверху поршнем массы M и площади S. Вначале поршень удерживался неподвижным, газ в цилиндре занимал объем V_0 и имел температуру T_0. Затем поршень освободили, и после нескольких колебаний он пришел в состояние покоя. Пренебрегая в расчетах всеми силами трения, а также теплоемкостью поршня и цилиндра, найти температуру и объем газа при новом положении поршня.*

Вся система теплоизолирована. Атмосферное давление равно p_a.

В начальный момент (сразу после того, как поршень освободили) на поршень действуют три силы: сила тяжести и сила атмосферного давления, направленные вниз, и сила давления газа в цилиндре, направленная вверх. Если равнодействующая всех сил направлена вниз, то поршень начнет двигаться вниз, если же равнодействующая направлена вверх, поршень будет подниматься вверх.

Для определенности будем считать, что поршень смещается вниз. Запишем уравнение состояния газа в цилиндре при равновесном положении поршня:

$$pV = nRT.$$

Из условия равновесия поршня

$$p = p_a + \frac{Mg}{S}.$$

Поэтому

$$\left(p_a + \frac{Mg}{S} \right) V = nRT. \qquad (1)$$

Мы получили уравнение, связывающее V и T. Однако для того чтобы найти V и T, необходимо иметь еще одно уравнение. Его можно получить, воспользовавшись законом сохранения энергии. Так как сосуд теплоизолирован, а силы трения и теплоемкость поршня и цилиндра пренебрежимо малы, то работа, совершенная над газом, равна изменению его внутренней энергии:

$$A = \Delta U.$$

Как известно, внутренняя энергия одного моля идеального одноатомного газа равна

$$U = \frac{3}{2} RT,$$

где R — универсальная газовая постоянная. Внутренняя энергия n молей равна $\frac{3}{2} nRT$, а изменение внутренней энергии газа при изменении его температуры от T_0 до T равно

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T - T_0).$$

Теперь найдем работу по сжатию газа. Эта работа совершается силой атмосферного давления и силой тяжести. Поэтому она равна

$$A = (p_a S + Mg)\, h,$$

где $h = \frac{V_0 - V}{S}$ —расстояние, на которое сместился поршень. Таким образом,

$$\frac{3}{2} nR\,(T - T_0) = \left(p_a + \frac{Mg}{S} \right)(V_0 - V). \qquad (2)$$

Заметим, что если поршень движется вверх, газ сам совершает работу против атмосферного давления и веса поршня, при этом его внутренняя энергия уменьшается. Равенство (2) остается справедливым и в этом случае.

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$T = \frac{3}{5} T_0 + \frac{2}{5} \frac{\left(p_a + \frac{Mg}{S} \right) V_0}{nR},$$

$$V = \frac{2}{5} V_0 + \frac{3}{5} \frac{nRT_0}{p_a + \frac{Mg}{S}}.$$

Ф220. *Экран освещается параллельным пучком лучей, перпендикулярным плоскости экрана. Как изменится освещенность экрана, если на пути света поставить призму ABC с малым углом раствора α и показателем преломления n, причем грань AB параллельна экрану (рис. 11, а)? Отражением света от призмы пренебречь.*

Световые лучи, попавшие на призму, преломляются на ее грани BC и попадают на участок экрана DF (рис. 11, б). При этом на участок GD световые лучи совсем не попадают, поэтому его освещенность равна нулю, а участок EF освещается как прямыми лучами, так и лучами, прошедшими через призму.

Найдем сначала освещенность участка DE, куда попадают только преломленные призмой лучи. Если освещенность призмы и экрана прямыми лучами обозначить E_0, то через призму проходит световой поток $\Phi = E_0 \cdot AB \cdot d$ ($AB \cdot d$ — площадь грани AB). Попадая на участок экрана DF, этот световой поток распределяется по нему равномерно (так как лучи и после призмы идут параллельным пучком) и создает освещенность

$$E = \frac{\Phi}{DF \cdot d} = E_0 \frac{AB}{DF}$$

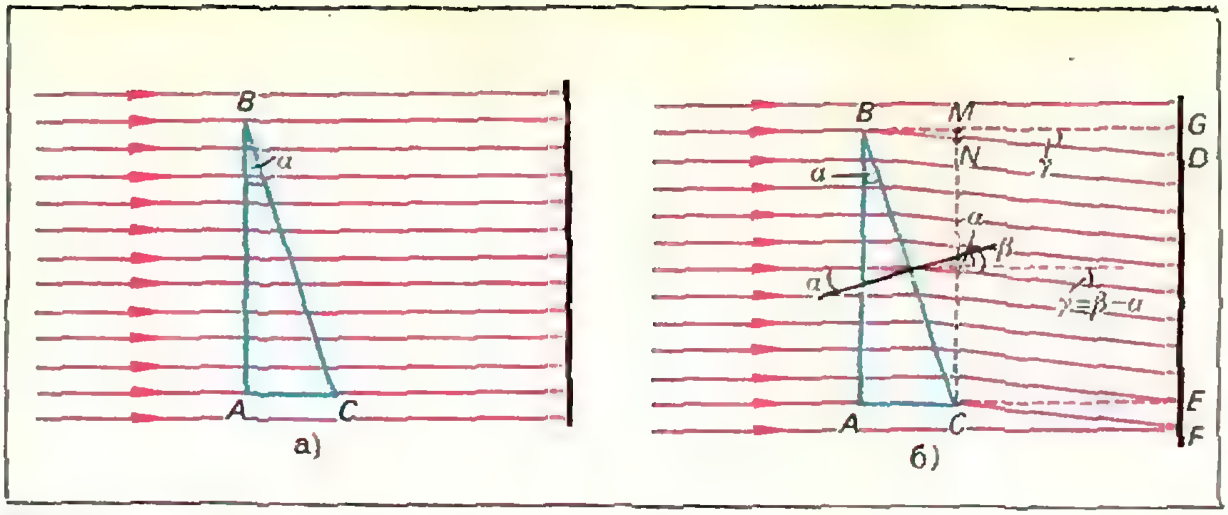


Рис. 11.

($DF\cdot d$ — площадь соответствующего участка экрана).

Из рисунка 11, *б*: $DF=NC=MC-MN$. Но $MC=AB$, а $MN=BM\,\mathrm{tg}\,\gamma=AB\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma$. Поэтому $DF=AB-AB\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma=AB\,(1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma)$ и

$$\frac{AB}{DF}=\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma}.$$

Углы α и γ не независимы: $\gamma=\beta-\alpha$, где β — угол преломления лучей. Из закона преломления света $\sin\beta=n\sin\alpha$, то есть $\beta=\arcsin(n\sin\alpha)$. Так как угол α мал, а величина n обычно порядка 1, то можно считать, что $\beta=\arcsin(n\alpha)=n\alpha$. Тогда

$$\gamma=n\alpha-\alpha=\alpha(n-1).$$

Следовательно,

$$\frac{AB}{DF}=\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma}=\frac{1}{1-\alpha\gamma}=\frac{1}{1-(n-1)\,\alpha^2}$$

и

$$E=E_0\frac{AB}{DF}\approx E_0\frac{1}{1-(n-1)\,\alpha^2}.$$

Таким образом, на участке DE освещенность увеличилась в

$$\frac{E}{E_0}=\frac{1}{1-(n-1)\,\alpha^2}\ \text{раз},$$

а на участке EF — в

$$\frac{E_0+E}{E_0}=1+\frac{1}{1-(n-1)\,\alpha^2}\ \text{раз}.$$

Ф221. *На неподвижном круглом цилиндре радиуса R лежит доска, как показано на рисунке 12, а. Толщина доски равна h. При каком соотношении между h и R равновесие доски будет устойчивым? Трение между доской и цилиндром велико.*

Чтобы выяснить, каким является равновесие доски, надо повернуть ее относительно цилиндра на небольшой угол α и посмотреть, что будет дальше.

Так как трение между доской и цилиндром велико, то при повороте доски она не скользит по цилиндру, но высота ее центра тяжести изменяется. При этом положение равновесия доски будет устойчивым, если при повороте центр тяжести доски поднимется. Поэтому для того чтобы решить задачу, нужно найти положение центра тяжести доски в горизонтальном положении, затем найти *положение центра тяжести доски, повернутой* на малый угол α, и записать условие, что в этом новом положении центр тяжести доски находится выше, чем в прежнем.

Будем все высоты отсчитывать от горизонтальной плоскости, проходящей через середину цилиндра.

Когда доска горизонтальна, ее центр тяжести — точка C — находится на высоте (см. рис. 12, *б*)

$$H_1=OC=R+\frac{h}{2},$$

а в новом положении — на высоте

$$H_2=C'M.$$

Свяжем высоту H_2 с R, h и α, для чего сделаем некоторые дополнительные построения. Опустим из точки C' перпендикуляр на сторону доски, опирающуюся на цилиндр, то есть на основание доски, до пересечения с этой стороной в точке B'. Затем из точки O проведем радиус в точку касания A и продолжим его до прямой, проходящей через точку C' и параллельной основанию доски; получим точку D. Теперь из точки D опустим перпендикуляр DF на горизонтальную плоскость и перпендикуляр DE на прямую $C'M$.

Высота

$$H_2=C'M=C'E+EM.$$

Из треугольника FDO найдем отрезок DF, который равен отрезку EM:

$$DF = EM = OD\cos\alpha = \left(R+\frac{h}{2}\right)\cos\alpha.$$

Из треугольника $C'DE$ найдем $C'E$:

$$C'E = DC'\sin\alpha,$$

где $DC' = AB'$. Очевидно, что отрезок AB' можно считать равным длине дуги $AB = R\alpha$. Поэтому

$$C'E = R\alpha\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$H_2 = C'M = C'E + EM = R\alpha\sin\alpha + \left(R+\frac{h}{2}\right)\cos\alpha.$$

Равновесие доски устойчивое, если $H_2 > H_1$, то есть если

$$R\alpha\sin\alpha + \left(R+\frac{h}{2}\right)\cos\alpha > R+\frac{h}{2},$$

или

$$R\alpha\sin\alpha - \left(R+\frac{h}{2}\right)(1-\cos\alpha) > 0.$$

Заменяя $1-\cos\alpha$ на $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, получим

$$R\alpha\sin\alpha - 2\left(R+\frac{h}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2} > 0.$$

Так как угол α мал, то

$$\sin\alpha\approx\alpha \quad \text{и} \quad \sin\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому последнее неравенство можно переписать так:

$$R\alpha^2 - 2\left(R+\frac{h}{2}\right)\frac{\alpha^2}{4} > 0,$$

откуда

$$h < 2R.$$

Итак, положение равновесия доски будет устойчивым, если ее толщина меньше диаметра цилиндра.

Ф222. *Громоотвод соединен с землей при помощи тонкостенной трубки диаметром 2 см и толщиной стенок 2 мм. После удара молнии трубка мгновенно превратилась в круглый стержень. Объясните это явление и оцените силу тока разряда, если известно, что при сжатии цилиндрический образец диаметром 3 мм, сделанный из того же материала, что и трубка, разрушался при силе* 140 000 *н.*

При ударе молнии в громоотвод по трубке пошел ток. Можно считать, что он по трубке распределен равномерно. Разобьем мысленно трубку на вертикальные проводники, параллельные оси трубки. Токи, идущие по таким проводникам, параллельны друг другу и направлены в одну сторону, поэтому проводники притягиваются друг к другу. Очевидно, при ударе молнии это взаимное притяжение проводников было столь велико, что напряжение*) в стержне превысило предел прочности $\sigma_{\text{пр}}$, то есть то максимальное напряжение, при котором материал трубки начинает разрушаться, и трубка превратилась в стержень.

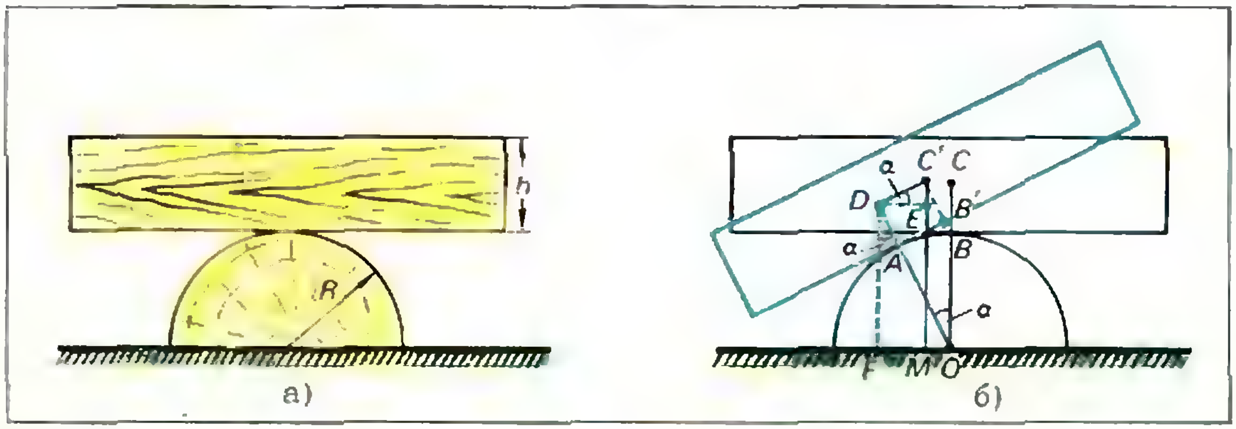
Для оценки силы тока I грозового разряда будем считать, что притягиваются два проводника с током (две половинки трубки), находящиеся на расстоянии R друг от друга, причем по каждому из них идет ток $\frac{I}{2}$. Согласно закону Ампера для параллельных токов сила взаимодействия этих проводников равна

$$F = \mu_0\frac{I^2/4}{2\pi R}\,l,$$

где l — длина трубки, R — радиус трубки.

---

*) Напомним, что напряжением образца при деформации называют отношение действующей силы к площади сечения, перпендикулярного этой силе.



а) б)

Рис. 12.

Эта сила вызывает в трубке напряжение

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{la} = \mu_0 \frac{I^2}{8\pi Ra}$$

($a = 2$ *мм* — толщина стенок трубки). В то же время материал трубки, как показали испытания образца, разрушается при напряжении

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{Q}{\pi d^2/4},$$

где d — диаметр образца, $Q = 140\,000$ *н* — разрушающая сила.

Следовательно,

$$\mu_0 \frac{I^2}{8\pi Ra} \approx \frac{4Q}{\pi d^2},$$

откуда

$$I \approx \sqrt{\frac{32QRa}{d^2\mu_0}} = \sqrt{\frac{32\cdot 1{,}4\cdot 10^5\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}26\cdot 10^{-6}}} \approx$$

$$\approx 3\cdot 10^{-6}\ (a).$$

И. Ш. Слободецкий

Редакция получила больше 600 писем с решениями задач **Ф213 — Ф222**. Почти все читатели справились с задачами **Ф215** и **Ф218**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи):

С. Абрамов (Москва) 1; *С. Актершев* (Магнитогорск) 9, 1; *Ю. Алекна* (Алитус Лит. ССР) 1; *С. Алехин* (Липецк) 4; *А. Амельченко* (Магнитогорск) 3, 4, 6; *А. Амиров* (Оренбург) 7; *П. Анциферов* (Фатеж) 3, 4, 9; *С. Астафьев* (Орджоникидзе) 9; *И. Ахатов* (Уфа) 4; *В. Бакуров* (Душанбе) 2; *А. Бараов* (Москва) 3, 4; *А. Баринов* (с. Семиозерье Выборгского р-на) 1; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) 4; *В. Беляев* (Москва) 3, 4, 6, 7; *В. Бенхан* (Калинин) 1; *М. Берман* (Капустин Яр-1) 4; *С. Богданов* (с. Вавожск Удм. АССР) 1; *С. Бороздин* (Новгород) 4; *В. Борь* (Запорожье) 3; *Л. Брагинский* (Фрунзе) 7; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) 7; *М. Валюнин* (Баку) 3, 4; *В. Ваничкин* (Абай) 3; *А. Васищев* (Ставрополь) 7; *М. Васнецов* (Долгопрудный Московской обл.) 7, 1; *М. Ведула* (Артемовск Донецкой обл.) 4, 1; *А. Векслер* (Ташкент) 3, 4; *А. Виноградов* (Целиноград) 1; *П. Волохов* (п. Криуляны МССР) 7, 2; *Л. Воронов* (Ленинград) 4, 7; *А. Воскалян* (Ереван) 9; *Д. Габриэлян* (Белая Калитва) 9; *В. Галайдич* (п. Сахновщина Харьковской обл.) 3; *А. Галюченко* (Харьков) 1; *А. Герман* (Воронеж) 4, 6, 7, 0; *С. Герц* (Хуст) 3, 4; *В. Герцик* (Николаев) 1, 2; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) 4, 1; *Ю. Гладе* (Тернополь) 1; *Л. Глазман* (Харьков) 1; *С. Глазнов* (Златоуст) 1; *О. Глущенко* (Киев) 3, 7; *Г. Говяда* (Киев) 3, 1; *А. Годунов* (Пинск) 4; *Я. Голда* (Тернополь) 4; *А. Гуревич* (Минск) 4, 9, 2; *В. Даник* (Черкассы) 3, 4; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 1; *А. Дробинин* (Евпатория) 1; *Ю. Дубина* (п. Сахновщина Харьковской обл.) 3; *Р. Егорян* (Раздан) 1; *С. Жаров* (Ефремов) 7, 1; *В. Жук* (Грозный) 3, 4; *С. Заичко* (с. Обуховка Ростовской обл.) 3; *И. Зайцев* (с. Райгород Черкасской обл.) 4; *В. Зарубин* (Одинцовский р-н Московской обл.) 1; *Ю. Зеленцов* (Актюбинск) 3, 4, 7; *С. Зенович* (Ташкент) 3, 7, 1; *В. Золатарев* (Одесса) 7, 1; *В. Зонов* (Кирс) 4, 7; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) 3; *С. Зырянов* (Тамбов) 3, 4; *А. Иванов* (Фергана) 1; *В. Иванов* (с. Могутово Оренбургской обл.) 7; *А. Ивлев* (п. Стройкерамики Куйбышевской обл.) 3, 4; *В. Игнатьев* (Волгоград) 3, 4, 1; *А. Измайлов* (Баку) 3; *А. Илькун* (Зеленодольск ТАССР) 7, 9, 1; *А. Калуцкий* (Иссык) 4; *Е. Калягина* (Грозный) 4; *К. Канжапарова* (п. Краснокумск Павлодарской обл.) 4; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) 3, 4, 7, 9, 1, 2; *С. Карпенко* (Киев) 4, 7; *С. Картюков* (Ульяновск) 4; *В. Карлин* (Волоколамский р-н Московской обл.) 1; *М. Качановский* (д. Вишевичи Брестской обл.) 4; *В. Квасницын* (Коркино) 1; *А. Клочко* (Жуковский) 3; *В. Ковалевский* (Витебск) 1; *Л. Коган* (Черновцы) 3, 4, 7; *Р. Козак* (Винница) 1; *А. Козарян* (Ереван) 4; *С. Коляда* (с. Пришиб Полтавской обл.) 1; *А. Корнилов* (Ленинакан) 7; *В. Корошков* (Калининград Московской обл.) 3, 4; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) 3, 7, 9, 0; *Л. Кофман* (Таллин) 3, 4, 7, 1; *С. Кривонос* (Днепропетровск) 1, 2; *С. Кручинин* (п. Грушевое Ворошиловградской обл.) 7; *А. Кудряшов* (Саратов) 4; *А. Кузнецов* (Саратов) 4, 7; *А. Кузнецов* (Казань) 4; *В. Кузьмин* (Грозный) 3, 4, 7; *А. Куликов* (Ленинград) 3, 7; *В. Куропаткин* (Кирово-Чепецк) 1; *А. Кутлимуратов* (Хорезмская обл. Узб. ССР) 7, 0; *И. Куцык* (Ярославль) 3, 4, 6; *В. Лисенков* (Киреевск) 1; *А. Лихоманов* (Саратов) 4; *Н. Ложникова* (Оренбург) 7; *Г. Львовский* (Днепропетровск) 1; *С. Ляпин* (п/о Белокоровичи Житомирской обл.) 3; *Е. Мазур* (Дербент) 3; *А. Макаров* (Харьков) 1; *С. Макаров* (Саратов) 3, 7; *Ю. Мальцев* (Березники Полтавской обл.) 1; *Г. Мамедов* (Баку) 4, 7; *В. Мамоский* (Краматорск) 4; *Е. Медовой* (Запорожье) 4; *С. Мельник* (Харьков) 4, 1; *Е. Метт* (Ленинград) 1; *В. Милованов* (Воронеж) 3, 4; *А. Моцарьян* (Орск) 3, 4; *Ю. Муринец* (Магнитогорск) 3; *Р. Мусин* (с. Никитино Оренбургской обл.) 9, 1; *В. Навценя* (п. Старая Купавна Московской обл.) 3, 4, 9; *А. Нарушевич* (Канск) 1; *А. Николаев* (Москва) 4, 7, 1; *Е. Никитин* (Саранск) 9; *Б. Новосядлый* (Чертков) 4; *В. Навроцкий* (Овруч) 7, 1; *С. Нужный* (Куйбышев) 4; *С. Оганесян* (Армавир) 7; *А. Огир* (п. Лутовиновка Полтавского р-на) 3, 4; *В. Онохов* (с. Саваслейка Горьковской обл.) 4; *С. Островская* (Харьков) 3, 4; *В. Пархоменко* (Тейково) 1; *В. Перевозкин*

(Омск) 4; *Ю. Перфильев* (Саратов) 1; *С. Петураев* (п. Ясный Оренбургского р-на) 9; *С. Пеунков* (Архангельск) 3; *К. Пирятинский* (Кишинев) 3, 2; *А. Полеханов* (Клинцы) 2; *А. Поблагуев* (Винница) 1; *О. Поваляев* (Подольск) 3, 4, 2; *А. Полянский* (Челябинск) 1; *С. Поляруш* (Жабинка) 7, 9; *А. Пономарев* (Киев) 4; *С. Попов* (Шахты) 4; *С. Прокопенко* (Одинцово) 3, 4; *В. Пуховой* (с. Сковородиновка Харьковской обл.) 4; *В. Рапопорт* (Минск) 3; *А. Рассказов* (Тихорецк) 4; *А. Ремеев* (Ташкент) 4; *В. Решетняк* (Киев) 3; *В. Ройна* (Познань, Польша) 9; *Б. Роженштейн* (Каменец-Подольский) 1; *Д. Рубанец* (Сторожинец) 3, 4; *М. Рывкин* (Бобруйск) 3; *В. Рыжиков* (Актюбинск) 3, 1; *Е. Сандер* (д. Гармакла Омской обл.) 3, 4, 7; *И. Сафаргалиев* (с. Янги-Курган Узб. ССР) 9; *В. Свистунов* (Горький) 3, 4; *Ю. Свириденко* (Фрунзе) 4; *А. Сергеев* (Подольск) 3, 7; *А. Силяков* (Калинин) 4, 7; *Р. Сирота* (Харьков) 1; *Ю. Скалько* (Черкассы) 3; *А. Смирнов* (Евпатория) 7; *И. Смирнов* (п. Звенигово Марийской АССР) 1; *В. Смоленков* (Ленинград) 3; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 3, 4, 7, 9, 1, 2; *С. Смышляев* (Вятские Поляны) 3, 7, 1; *В. Соколов* (Кишинев) 0, 1; *В. Спиридонов* (Вознесенский р-н Николаевской обл.) 1; *Н. Сугоров* (Самарканд) 4; *М. Султангалиев* (с. Ваныш БАССР) 3, 4; *А. Суровежкин* (с. Гуляй-Борисовка Ростовской обл.) 4; *А. Теватян* (п. Сисиан Арм. ССР) 9; *А. Тверской* (Москва) 9, 1; *О. Трунов* (Джалал-Абад) 4; *А. Тужилин* (Москва) 3, 6, 7, 1; *В. Тумаков* (Рустави) 1; *Д. Узненко* (Магнитогорск) 3; *И. Усвят* (Ташкент) 3, 4, 7, 1, 2; *Н. Федин* (Омск) 3, 4, 7, 9, 0, 1; *И. Федичкин* (Баку) 6; *Е. Федоров* (Магнитогорск) 3; *С. Фрид* (Москва) 3, 4, 7, 1, 2; *Д. Фушман* (Черновцы) 4; *И. Харченко* (Сальск) 7; *В. Хацимовский* (Красноярск) 3; *С. Хохлов* (Жданов) 1; *А. Худавердян* (Ереван) 4, 7; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) 3, 1; *В. Чеплаков* (Волгоград) 1; *А. Черников* (с. Андреевка Оренбургской обл.) 4; *А. Чернявский* (Харьков) 3; *В. Чернышов* (Пензенская обл.) 4; *А. Чечулин* (Уфа) 4, 7; *В. Чистяков* (Буй) 3; *А. Шагин* (п. Глинищево Ивановской обл.) 9; *Е. Шафирович* (Ногинск) 3, 1; *К. Шварцман* (Кишинев) 3, 4; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 3, 6, 7; *В. Шкатов* (Одинцово) 2; *В. Шнейдман* (Харьков) 3, 7, 1, 2; *А. Штиль* (Оренбург) 1; *С. Шульга* (Славянск) 4, 7, 0, 2; *А. Шумаков* (Тула) 4; *О. Щербаков* (Лида) 3, 4, 6; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 4; *А. Яблонский* (Вологда) 1; *С. Яременко* (Москва) 4, 6, 7.

С. Г. Семенчинский

Конфуз с «Обратной теоремой»

(Окончание, начало см. на с. 25)

Если ты всю жизнь считаешь, что в деньгах счастье . . . Если ты, наконец, крадя их, добываешь. . . «Дети, если верна прямая теорема», если в деньгах счастье . . . Прямая, может быть, верна. С обратной вышел конфуз. Краденые деньги не дали Назарову счастья . . . «Дети, если верна прямая теорема, это еще не значит, что верна и обратная ей». Как решить эту теорему?»

Оставим в стороне странные обороты речи вроде «теоремой мы называем такие рассуждения» или «как решить эту теорему». Разберемся лишь в том, какую же теорему имеет в виду автор, тем более, что приведенный пассаж ему, видимо, так понравился, что послужил даже поводом для названия повести.

Насколько можно понять, «прямой теоремой» автор называет утверждение «если есть деньги, то есть счастье». И своей повестью он достаточно убедительно показывает, что эта «теорема», вера в справедливость которой составляла жизненное кредо Назарова, не верна — добытые нечестным путем деньги счастья не приносят. Автор напрасно пишет: «Прямая (теорема), может быть, верна». Она не верна: выражаясь математическим языком, история Назарова — контрпример, опровергающий ее справедливость.

А при чем же здесь обратная теорема? Увы, совершенно ни при чем (хотя, кстати, и она не верна). Видимо, автор, увлекшись внешней «красивостью» своих рассуждений, не удосужился разобраться по существу в том, что же такое прямая и обратная теоремы.

Н. Х.

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Читатели советуют

Н. Х. Розов

В обширной редакционной почте «Кванта» много писем, в которых обсуждаются те или иные теоретические вопросы школьного курса математики и физики, предлагаются приемы решения некоторых типов задач, содержатся отдельные замечания и наблюдения методического характера. Хотя приводимые читателями соображения и задачи не всегда новы и оригинальны, ряд затронутых в письмах вопросов, на наш взгляд, представляет интерес для поступающих.

Поэтому сегодня в «Практикуме абитуриента» помещается необычная статья: редакция публикует подборку материалов по математике, составленную по идеям и предложениям из писем читателей. Мы надеемся, что подобные подборки явятся своеобразной формой обмена опытом и идеями.

На вступительных экзаменах часто предлагают задачи такого типа: *выяснить (не пользуясь таблицами), что больше:* $\log_a M$ *или* $\log_b N$, где a, b, M, N — данные числа, причем, естественно, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$. В «Практикуме абитуриента» (см. «Квант», 1972, № 3) уже приводились примеры решений подобных задач. Читатель *Б. А. Грубиян* (г. Березники Пермской области) обращает внимание на возможность использовать для сравнения величины логарифмов двух чисел следующий прием.

Задача решается совсем просто, если удается найти такое целое число k, что, скажем,

$$\log_a M < k, \quad k < \log_b N.$$

Поэтому наиболее интересен случай, когда

$$k - 1 < \log_a M < k,$$
$$k - 1 < \log_b N < k.$$

В этом случае следует стремиться *подобрать такое натуральное* n, *чтобы между* $n \log_a M$ *и* $n \log_b N$ *оказалось некоторое целое число* p. Подбор числа n с указанным свойством осуществляется последовательными пробами.

Пример 1. *Сравнить* $\log_3 4$ *и* $\log_7 10$.

Легко проверить, что $1 < \log_3 4 < 2$, $1 < \log_7 10 < 2$, но отсюда не видно, какой из предложенных логарифмов больше. Возьмем $n = 2$; получим $2 \log_3 4 = \log_3 16$, $2 \log_7 10 = \log_7 100$. Так как $2 < \log_3 16 < 3$ и $2 < \log_7 100 < 3$ (убедитесь в этом!), то значение $n = 2$ требуемым свойством не обладает. Аналогично проверяется, что и значение $n = 3$ нам не подходит.

Для $n = 4$ получаем:

$$4 \log_3 4 = \log_3 256, \quad 4 \log_7 10 = \log_7 10\,000.$$

Поскольку $3^5 = 243$, $3^6 = 729$ и $7^4 = 2401$, $7^5 = 16\,807$, то

$$5 < 4 \log_3 4 < 6, \quad 4 < 4 \log_7 10 < 5,$$

так что значение $n = 4$ требуемым свойством обладает (роль p играет число 5). Отсюда получаем, что

$$\log_3 4 > \log_7 10.$$

Пример 2. *Какое из двух чисел больше:* $\log_{\sqrt{2}} \frac{6}{11}$ или $\log_{1/3} \pi$?

Непосредственно проверяется, что оба эти числа заключены между -2 и -1. Взяв $n = 2$, получим

$$2\log_{\sqrt{2}}\frac{6}{11} = -\log_2\frac{11^4}{6^4},$$

откуда легко найти, что

$$-4<2\log_{\sqrt{2}}\frac{6}{11}<-3.$$

С другой стороны,

$$2\log_{1/3}\pi = \log_{1/3}\pi^2,$$

и несложный подсчет показывает, что

$$-3<\log_{1/3}\pi^2<-2.$$

Таким образом, $\log_{\sqrt{2}}\frac{6}{11}<\log_{1/3}\pi$.

Конечно, число проб, необходимых для подбора нужного n, в разных задачах различно (и может быть велико), но важно, что такое n всегда найдется. Именно, докажем следующее утверждение, являющееся теоретическим обоснованием использованного приема: *если* $\log_a M\neq\log_b N$, *то существует такое натуральное* n, *что между* $n\log_a M$ *и* $n\log_b N$ *заключено некоторое целое число.*

Пусть $\alpha=\log_a M$ и $\beta=\log_b N$, причем $\alpha\neq\beta$. Допустим, например, что $\alpha>\beta$ (случай $\alpha<\beta$ рассматривается аналогично). Тогда $\alpha-\beta$ — положительное число, и потому найдется такое натуральное n, что дробь $^1/_n$ меньше этого положительного числа: $\frac{1}{n}<\alpha-\beta$ или $n\alpha-n\beta>1$. Но последнее неравенство означает, что числа $n\alpha=n\log_a M$ и $n\beta=n\log_b N$ отличаются больше, чем на единицу, а значит, между этими числами должно находиться некоторое целое число.

Напомним в заключение один весьма общий метод определения знака неравенства между числами (или выражениями) α и β: *пытаются подобрать такое число (выражение)* γ, *для которого, например,* $\alpha<\gamma$ *и одновременно* $\gamma<\beta$. Описанный выше прием является по существу вариантом этого метода: роль γ играет здесь число p/n.

Упражнения

1. (МГУ, ф-т психологии, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_3 7>\log_7 27$.

2. (МГУ, филфак, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_5 14>\log_7 18$.

3. (МГУ, экономич. ф-т, 1972). Не пользуясь таблицами, определить, что больше: $\log_4 60$ или $\log_3 30$.

* * *

При доказательстве неравенств иногда оказываются полезными алгебраические тождества и, в частности тождество

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots$$
$$\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

где n — натуральное число, а a и b — действительные числа. Ученик 10 класса *Л. Давитидзе* (село Шуахеви Грузинской ССР) предлагает читателям журнала использовать это тождество (доказав его) для решения следующего упражнения.

4. Доказать, что если m — натуральное число и $c\geqslant1$, то справедливо неравенство

$$\sqrt[m]{c+1}+\sqrt[m]{c-1}<2\sqrt[m]{c}.$$

* * *

Решение некоторых задач удается существенно упростить, если применить удачную тригонометрическую подстановку. Гибкость тригонометрических формул позволяет в ряде случаев облегчить выполнение преобразований, освободиться от радикалов, получить более простые и обозримые выражения. Этому вопросу посвящены письма наших читателей *В. В. Пикан* (Киев) и *Д. П. Дорохина* (г. Павловская слобода Московской области).

Суть тригонометрической подстановки состоит в том, что переменная x, входящая в фигурирующие в условии задачи выражения, рассматривается как значение некоторой тригонометрической функции вспомогательного переменного угла φ, причем эту функцию стараются подобрать так, чтобы предложенные выражения записывались более компактно.

Пример 3. *Вычислить значение выражения*

$$A=\left[\frac{(x^2+a^2)^{-1/4}+(x^2-a^2)^{-1/4}}{(x^2+a^2)^{-1/4}-(x^2-a^2)^{-1/4}}\right]^{-3} \quad (1)$$

$$\text{при } x = a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2},$$
$$\text{где } a < 0,\ n > m > 0.$$

Так как интересующее нас значение x отрицательно, то прежде всего упростим выражение (1), считая, что $x < a$. (Заметьте, что (1) имеет смысл лишь при $|x| > |a|$, и докажите, что указанное в условии значение x этому неравенству удовлетворяет!). Наличие двучленов $x^2 \pm a^2$ наводит на мысль положить $x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, что позволит записать эти двучлены проще:

$$x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi},$$
$$x^2 - a^2 = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Поэтому применим тригонометрическую подстановку:

$$x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi,\quad \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Несложные преобразования показывают, что тогда

$$A = \left(\frac{\sqrt{-\cos 2\varphi} - 1}{\sqrt{-\cos 2\varphi} + 1}\right)^3,\quad \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Далее, легко подсчитать, что если $x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi = a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}$, то

$$\cos 2\varphi = \frac{1-\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = -\frac{(n-m)^2}{(n+m)^2},$$

и потому при указанном значении x

$$A = \frac{(4n^2-m^2)\sqrt{n^2-m^2} - (4n^2-3m^2)n}{m^3}.$$

Пример 4. *Решить уравнение*

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = 2 + \sqrt{1-x^2}.$$

Областью допустимых значений для этого уравнения является множество $|x| \leqslant 1$. Если воспользоваться тригонометрической подстановкой $x = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то, как легко проверить, от радикалов удается освободиться — уравнение принимает вид

$$\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right)\cdot 2\sqrt{2}\times$$
$$\times\left(\cos^3\frac{\varphi}{2} - \sin^3\frac{\varphi}{2}\right) = 2 + \sin\varphi.$$

Отсюда в свою очередь получаем уравнение

$$\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin\varphi\right)\cos\varphi =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sin\varphi$$

или

$$\left(\sqrt{2}\cos\varphi - 1\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) = 0,$$

которое удовлетворяется лишь при $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$. Следовательно, исходное уравнение имеет корень $x = \sqrt{2}/2$.

Пример 5. *Найти наименьшее и наибольшее значения функции*

$$y = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}. \qquad (2)$$

Аргумент этой функции пробегает все действительные числа, и потому мы можем рассматривать x как значение тангенса вспомогательного переменного угла φ, изменяющегося на промежутке $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Тригонометрическая подстановка $x = \mathrm{tg}\,\varphi$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ позволяет вместо функции (2) исследовать функцию

$$y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi \qquad (3)$$

при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Поскольку $0 \leqslant \sin^2 2\varphi \leqslant 1$, то очевидно, что наименьшее значение функции (3) равно $1/2$ и достигается при $\varphi = -\pi/4$ и при $\varphi = \pi/4$, а наибольшее равно 1 и достигается при $\varphi = 0$. Отсюда заключаем, что наименьшее значение функции (2) равно $1/2$ и достигается при $x = -1$ и при $x = 1$, а наибольшее значение равно 1 и достигается при $x = 0$.

Отметим, что примеры использования тригонометрических подстановок для решения уравнений уже рассматривались в «Практикуме абитуриента» (см. «Квант», 1971, № 1).

Упражнения

5. Упростить выражение

$$B = \frac{(m+x)^{3/2} - (m-x)^{3/2}}{(m+x)^{3/2} + (m-x)^{3/2}}, \quad m > 0.$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

* * *

Ученик 9 класса *В. Оласюк* (г. Тулун Иркутской области) предлагает читателям журнала решить следующую задачу.

7. На листе бумаги изображены оси координат и парабола, являющаяся графиком функции $y = x^2$. Однако единица длины, использовавшаяся при построении графика для измерения расстояний вдоль осей, не указана. Как восстановить эту единицу длины?

* * *

При решении уравнений удачная замена неизвестного часто позволяет вместо сложного исходного уравнения рассматривать более простое. Однако «увидеть» нужную замену не всегда легко, и здесь может помочь лишь настойчивость, приобретенный опыт и знание наиболее употребительных замен.

Наш читатель *И. А. Гаврилов* (г. Фрязино Московской области) в своем письме напоминает об одном типе замен для решения алгебраических уравнений. Эти замены с полным основанием можно назвать «симметризацией».

Покажем, в чем состоит «симметризация» на примере двух уравнений четвертой степени.

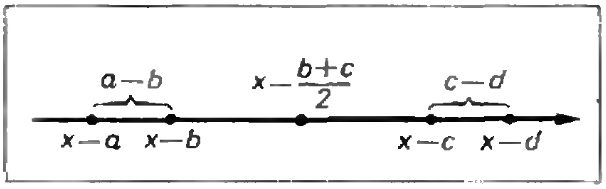
Если в уравнении

$$(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$$

ввести вместо неизвестного x новое неизвестное

$$y = x - \frac{a+b}{2},$$

то получится биквадратное уравнение.



Ясно, что при любом x число $x - \frac{a+b}{2}$ является серединой отрезка с концами в точках $x-a$ и $x-b$. *Если в уравнении*

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = p \quad (4)$$

разности каких-либо пар чисел a, b, c, d совпадают, например, $a - b = c - d$, то замена неизвестного

$$y = x - \frac{b+c}{2}$$

приводит к биквадратному уравнению (убедитесь в этом!). Отметим, что если $a - b = c - d$, то двучлен $x - \frac{b+c}{2}$ служит в некотором смысле «центром тяжести» сомножителей $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, что наглядно видно из геометрической интерпретации этих выражений точками числовой оси (см. рисунок).

Идея «симметризации» с успехом применяется при решении и ряда других алгебраических уравнений и систем уравнений.

Упражнения

8. Решить уравнение $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

9. Решить уравнение

$$4\sqrt{x} + \sqrt{4-x^2} = 4 + x.$$

10. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+y-2)^4 + (x+y)^4 = 82, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

11. (УДН, 1973). Решить уравнение

$$(x^2-4x)^2 + 2(x-2)^2 = 43.$$

12. (УДН, 1973). Решить уравнение

$$\frac{5}{x^2+3x} + \frac{6}{(x+1)(x+2)} = 1.$$

Г. Я. Мякишев

О законе сохранения энергии в механике

Закон сохранения энергии в механике можно получить, используя законы Ньютона и зная выражения для сил, зависящих от расстояний между телами или их частями (силы тяготения и силы упругости).

Основные понятия, которые при этом используются, это *работа*, *кинетическая энергия*, *потенциальная энергия* и *полная энергия*. Эти понятия, за исключением потенциальной энергии, не являются особенно сложными. Тем не менее наибольшее количество ложных представлений возникает при изучении механики именно в связи с законом сохранения энергии. Причина, по-видимому, в том, что, с одной стороны, изучающие механику не всегда вдумываются как следует в смысл основных понятий, а с другой стороны (и это главное), часто для облегчения понимания сути дела рассматриваются простые частные случаи, но затем на их основе непродуманно делаются более общие заключения, которые оказываются иногда несостоятельными. Цель настоящей статьи — подробно остановиться на недоразумениях, связанных с понятием работы и энергии в механике.

Работа

Напомним определение работы. Работа силы при столь малом перемещении тела (материальной точки) $\Delta \mathbf{s}$, что действующую на тело силу $\mathbf{F}$ можно считать постоянной по величине и направлению, равна (рис. 1)

$$A = |\mathbf{F}|\,|\Delta \mathbf{s}| \cos \alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\Delta \mathbf{s}$. Другими словами, работа определяется скалярным произведением векторов $\mathbf{F}$ и $\Delta \mathbf{s}$, то есть

$$A = (\mathbf{F}\,\Delta \mathbf{s}).$$

Если тело движется прямолинейно и сила $\mathbf{F}$ постоянна, то формула (1) применима при любой величине перемещения.

Иногда говорят, что работа данной силы равна произведению проекции силы на перемещение, *вызванное этой силой*. Это неверно. Не важно, что вызывает перемещение тела. Если во время перемещения на тело действует некоторая сила, то работа этой силы

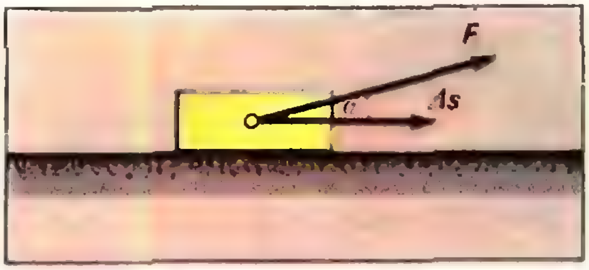


Рис. 1 .

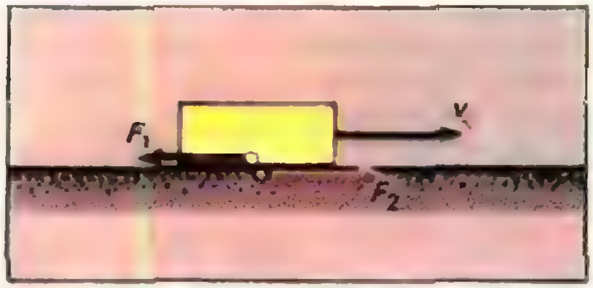


Рис. 2. Сила трения F_1, действующая на тело, совершает работу, а сила трения F_2, действующая на неподвижную опору, работы не совершает.

равна проекции силы на направление перемещения, умноженной на само перемещение.

Отсюда следует, что работа не совершается, когда точка приложения силы не перемещается относительно данной системы отсчета. Так, при скольжении тела с трением по некоторой поверхности (рис. 2) сила трения F_1, приложенная к телу, совершает работу, а сила трения F_2, приложенная к поверхности, никакой работы не совершает.

Величина совершенной работы, конечно, зависит от выбора системы отсчета. Ведь тело, неподвижное в одной системе отсчета, будет перемещаться в другой, движущейся относительно первой. Например, если человек стоит в поезде и просто удерживает растянутую пружину, то в системе отсчета, связанной с поездом, рука человека не совершает никакой работы, так как свободный конец пружины не перемещается. Но с точки зрения наблюдателя в системе отсчета, связанной с землей, работа будет произведена. Еще пример. Обычно считается, что работа силы трения скольжения всегда отрицательна. Но она может быть и положительна. Все дело в выборе системы отсчета (см. раздел «Роль сил трения»).

Кинетическая энергия

Наиболее простым является понятие кинетической энергии. Используя определение работы и второй закон Ньютона, нетрудно показать, что во всех случаях работа любой силы **F** равна изменению кинетической энергии тела $K = \frac{mv^2}{2}$:

$$A = (\mathbf{F}\,\Delta\mathbf{s}) = \Delta K. \qquad (2)$$

Природа силы здесь совершенно не важна. Это может быть сила тяготения, сила упругости или сила трения.

Кинетическая энергия отдельного тела определяется его массой и скоростью и не зависит от того, взаимодействует это тело с другими телами или нет. Величина кинетической энергии тела, как и работа силы, зависит от системы отсчета.

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий тел, входящих в эту систему.

Потенциальная энергия — энергия взаимодействия тел

Не всегда подчеркивается, что потенциальная энергия в механике — это энергия взаимодействия по крайней мере двух тел. Понятие потенциальной энергии относится к системе тел, а не к одному телу. Если в системе имеется несколько тел, то полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех пар взаимодействующих тел (любое тело взаимодействует с каждым из остальных).

Обычно при выводе формулы, связывающей изменение потенциальной энергии с работой сил, одно из тел системы принимается за неподвижное. Так, когда рассматривается падение груза на Землю под действием силы тяжести, то смещением Земли при этом можно пренебречь. Поэтому работа сил взаимодействия между Землей и грузом сводится к работе только одной силы, действующей на груз. Или другой пример. Сжатая или растянутая пружина, действующая на тело, обычно закреплена одним концом, и этот конец пружины не перемещается (фактически он скреплен с Земным шаром). Работу совершает при этом лишь сила упругости деформированной пружины, приложенная к телу.

Из-за этого потенциальную энергию системы двух тел привыкают рассматривать как энергию одного тела. Это может привести к путанице.

В действительности справедливо во всех случаях следующее утверждение: изменение потенциальной энергии двух тел, взаимодействующих с силами, зависящими только от расстояния между телами, равно работе этих сил, взятой со знаком минус:

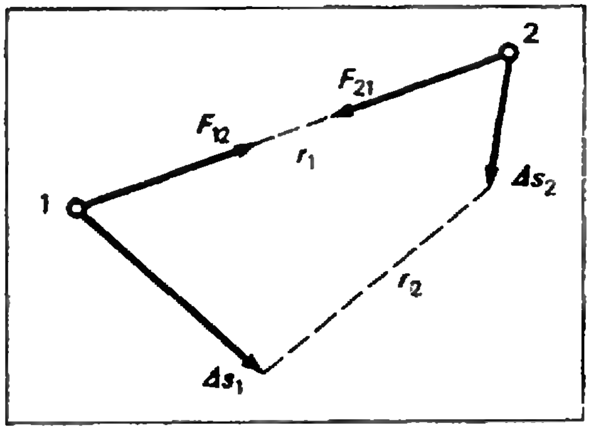


Рис. 3. Изменение потенциальной энергии взаимодействия тел 1 и 2 определяется работой сил $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ на перемещениях $\Delta \mathbf{s}_1$ и $\Delta \mathbf{s}_2$.

$$A = (\mathbf{F}_{12}\Delta \mathbf{s}_1) + (\mathbf{F}_{21}\Delta \mathbf{s}_2) = -[\Pi(r_2) - \Pi(r_1)] = -\Delta\Pi, \quad (3)$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на тело 1 со стороны тела 2, а $\mathbf{F}_{21}$ — сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1 (рис. 3).

Силы взаимодействия между телами, которые зависят только от расстояния между телами, являются консервативными силами. Упомянутое утверждение есть следствие того, что работа консервативных сил определяется только начальными и конечными положениями тел и не зависит от формы их траекторий.

Изменение потенциальной энергии легко вычисляется, если известна зависимость сил от расстояния между взаимодействующими телами.

Нулевой уровень потенциальной энергии

Согласно уравнению (3) работа сил взаимодействия определяет не саму потенциальную энергию, а ее изменение.

Для силы тяжести вблизи поверхности Земли

$$\Delta\Pi_т = mgh_2 - mgh_1, \quad (4)$$

где h_1 и h_2 — высоты тела над Землей в начальном и конечном состояниях.

Изменение потенциальной энергии деформированной пружины

$$\Delta\Pi_у = \frac{k(\Delta l_2)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_1)^2}{2}, \quad (5)$$

где k — коэффициент упругости, а Δl_1 и Δl_2 — начальная и конечная деформации пружины.

Поскольку работа определяет изменение потенциальной энергии, а не саму энергию, *только изменение энергии в механике имеет физический смысл*. Поэтому можно произвольно выбрать состояние системы, в котором ее потенциальная энергия считается равной нулю. Этому состоянию соответствует нулевой уровень потенциальной энергии. Выбор нулевого уровня производится по-разному и диктуется исключительно соображениями удобства, то есть простоты записи уравнения, выражающего закон сохранения энергии.

Обычно в качестве состояния с нулевой энергией выбирают такое состояние системы, при котором П минимальна. Тогда потенциальная энергия положительна.

У пружины потенциальная энергия минимальна в отсутствие деформации а у камня — когда он лежит на поверхности Земли. Поэтому в первом случае (рис. 4)

$$\Pi_у = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, \quad (6)$$

а во втором случае (рис. 5)

$$\Pi_г = mgh. \quad (7)$$

Но к данным выражениям можно добавить любую постоянную величину C, и это ничего не изменит в результатах применения закона сохранения энергии. Можно считать, что

$$\Pi_у = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + C, \quad \Pi_т = mgh + C. \quad (8)$$

Если во втором случае положить $C = -mgh_0$, то это будет означать, что нулевой уровень энергии принят на высоте h_0 над Землей.

Иногда невозможно выбрать нулевой уровень П так, чтобы минимальная энергия равнялась нулю. Так, например, потенциальная энергия тяготения двух материальных

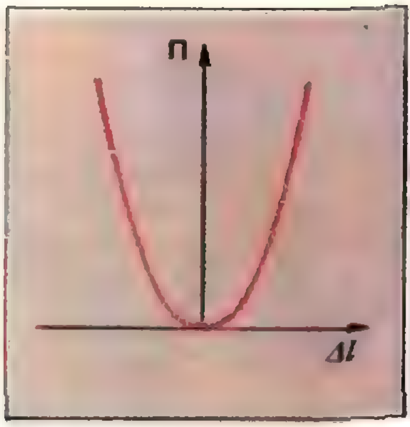


Рис. 4. Зависимость потенциальной энергии пружины П от деформации Δl.

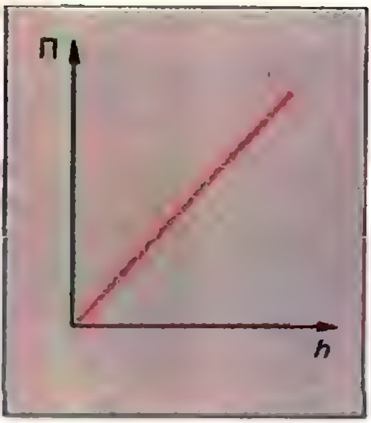


Рис. 5. Зависимость потенциальной энергии П взаимодействия камня с Земным шаром от высоты h камня над поверхностью Земли.

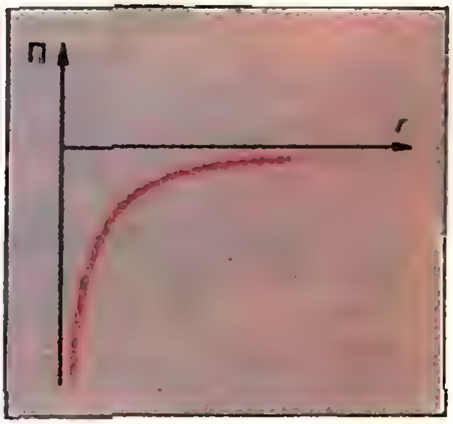


Рис. 6. Зависимость потенциальной энергии П взаимодействия двух точечных масс от расстояния r между ними.

точек равна

$$П = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r} + C, \qquad (9)$$

где γ — гравитационная постоянная *) (см., например, статью Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяготения», «Квант», 1972, № 6).

При $r \to 0$ первое слагаемое стремится к $-\infty$. Поэтому минимальное значение энергии можно считать равным нулю лишь при $C = \infty$. Но пользоваться уравнениями, в которые входит бесконечная величина, разумеется, нельзя. Поэтому здесь удобнее положить $C = 0$ и тем самым за нулевой уровень П принять потенциальную энергию в состоянии, когда тела бесконечно удалены друг от друга ($r = \infty$). Тогда нулевому уровню будет соответствовать не минимальная, а максимальная энергия. При любом конечном значении r потенциальная энергия отрицательна (рис. 6).

Независимость потенциальной энергии от выбора системы отсчета

Заметим еще раз, что понятие потенциальной энергии имеет смысл для таких систем, в которых силы взаимодействия консервативны, то есть зависят лишь от расстояний между телами или их частями. Соответственно и П зависит от расстояний: от высоты камня над поверхностью Земли, от длины пружины, от расстояния между точечными массами или зарядами. От координат тел потенциальная энергия *непосредственно* не зависит. (Лишь постольку, поскольку расстояния являются функциями координат, можно говорить о зависимости П от координат.) Отсюда следует один очень важный вывод, на который часто не обращают внимания. Поскольку расстояния во всех системах отсчета, движущихся и неподвижных, одни и те же, *потенциальная энергия не зависит от выбора системы отсчета.*

Но как же это может быть? Ведь $\Delta П = -A$, а работа зависит от движения системы отсчета. Вот здесь-то и проявляется отчетливо тот факт, что П есть энергия взаимодействия двух тел, а ее изменение определяется работой сил, действующих на оба тела. При переходе от неподвижной системы к движущейся меняются обе работы, но их сумма остается неизменной. В самом деле, если в некоторой системе отсчета за время t совершается работа

$$A_1 = (\mathbf{F}_{12}\Delta\mathbf{s}_1) + (\mathbf{F}_{21}\Delta\mathbf{s}_2),$$

то в другой системе, движущейся относительно первой, работа равна

---

*) Точно такой же вид имеет потенциальная энергия взаимодействия двух точечных электрических зарядов противоположного знака:

$$П = -\frac{|q_1||q_2|}{r} + C.$$

$$A_2 = (\mathbf{F}_{12}(\Delta\mathbf{s}_1 + \Delta\mathbf{s}_0)) + (\mathbf{F}_{21}(\Delta\mathbf{s}_2 + \Delta\mathbf{s}_0)),$$

где $\Delta\mathbf{s}_0$ — перемещение систем друг относительно друга за время t. Так как по третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, то $(\mathbf{F}_{12}\Delta\mathbf{s}_0) = -(\mathbf{F}_{21}\Delta\mathbf{s}_0)$. Следовательно,

$$A_1 = A_2.$$

Закон сохранения энергии в замкнутой системе

В замкнутой системе, в которой действуют консервативные силы, работа этих сил $A = -\Delta\text{П}$. С другой стороны, во всех случаях $A = \Delta\text{К}$. Это означает, что при совершении работы увеличение кинетической энергии сопровождается убылью потенциальной и наоборот:

$$\Delta\text{К} = -\Delta\text{П}.$$

Отсюда вытекает закон сохранения полной механической энергии для замкнутой системы тел:

$$\text{Е} = \text{К} + \text{П} = \text{const}. \qquad (10)$$

Все это достаточно просто, и здесь неверные представления встречаются редко. Иначе обстоит дело в случае, если на систему действуют внешние силы.

Изменение энергии системы под действием внешних сил

Наиболее распространены здесь два недоразумения.

Во-первых, не всегда отчетливо понимают, что внешние силы *непосредственно* изменяют лишь кинетическую энергию тел системы, но не потенциальную энергию взаимодействия этих тел. Изменение потенциальной энергии системы всегда определяется работой сил взаимодействия (внутренних сил). Конечно, внешние силы изменяют расположение тел системы (так как изменяется их кинетическая энергия), и за счет этого меняется работа внутренних сил, а значит, меняется потенциальная энергия системы. Но если бы в системе не действовали консервативные силы, то потенциальная энергия при этом не изменялась бы.

Действительно, пусть на систему, состоящую из камня и Земли, действует внешняя сила $\mathbf{F}$. Этой силой может быть, например, натяжение веревки, привязанной к камню. Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}. \qquad (11)$$

Пусть за некоторый промежуток времени камень переместился вертикально вверх на $\Delta\mathbf{s}$. Умножая уравнение (11) слева и справа на $\Delta\mathbf{s}$, получим

$$m(\mathbf{a}\Delta\mathbf{s}) = (\mathbf{F}\Delta\mathbf{s}) + m(\mathbf{g}\Delta\mathbf{s}),$$

или

$$m(\mathbf{a}\Delta\mathbf{s}) - m(\mathbf{g}\Delta\mathbf{s}) = (\mathbf{F}\Delta\mathbf{s}). \qquad (12)$$

Первое слагаемое слева есть изменение кинетической энергии. Действительно, в этом случае

$$m(\mathbf{a}\,\Delta\,\mathbf{s}) = ma\,\Delta\,s = ma\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta\,\text{К}.$$

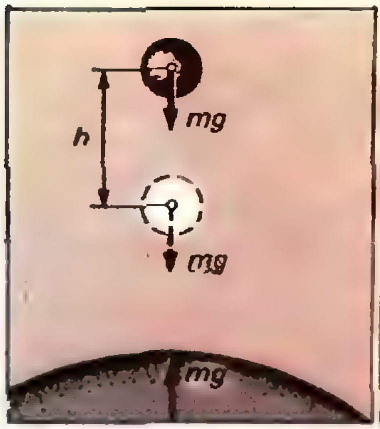
Второе слагаемое слева есть изменение потенциальной энергии $\Delta\text{П}$. Заметьте, что изменение потенциальной энергии произошло за счет работы сил взаимодействия Земли и камня. А правая часть — это работа внешней силы, которую можно назвать внешней работой $A_{\text{внеш}}$. Поэтому равенство (12) можно записать так:

$$\Delta\text{К} + \Delta\text{П} = A_{\text{внеш}}, \qquad (13)$$

то есть изменение механической энергии системы равно работе внешней силы.

Другое заблуждение более серьезно.

Работа силы, действующей на тело (выражение (1)), определяется силой и перемещением тела. Но рассматриваемое тело, согласно третьему закону Ньютона, действует на другое тело (или тела), и при этом тоже может совершаться работа. Однако вычислить эту последнюю ра-



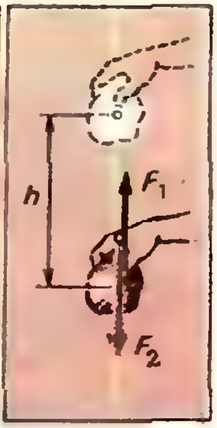


Рис. 7. При падении камня на Землю сила тяготения, приложенная к Земному шару, не совершает работы.

Рис. 8. Работа силы $\mathbf{F}_1$, приложенной к камню со стороны руки, в точности равна по величине и противоположна по знаку работе силы $\mathbf{F}_2$, действующей на руку со стороны камня.

боту мы не можем, если не знаем перемещения других тел.

Тем не менее очень часто утверждается, что если внешние по отношению к рассматриваемой системе силы совершают работу $A_{\text{внеш}}$, то силы, приложенные со стороны системы к внешним телам, совершают такую же по величине работу A', имеющую противоположный знак:

$$A_{\text{внеш}} = -A'. \qquad (14)$$

Но ведь так будет лишь в том случае, когда рассматриваемая система и внешние тела совершают одинаковые перемещения. А это имеет место далеко не всегда. Силы по третьему закону Ньютона обязательно равны по величине и противоположны по направлению, но перемещения не обязаны быть равными.

В качестве примера рассмотрим две простейшие системы: Земной шар и падающий на него камень *). Тогда силы тяготения и для Земли и для камня будут считаться внешними силами. Сила тяжести, приложенная к камню, совершит работу $A_{\text{внеш}} = mgh$, а сила, приложенная к Земле, никакой работы не совершит, так как Земной шар не смещается (рис. 7): $A' = 0$.

Иное дело, если, например, камень поднимают рукой (рис. 8). Тогда работа внешней силы $\mathbf{F}_1$, приложенной к камню, в точности равна по величине и противоположна по знаку работе силы $\mathbf{F}_2$, приложенной к руке со стороны камня. Точно так же работа, которую совершает двигатель, связанный ременной передачей со станком, равна по величине и противоположна по знаку работе, совершаемой станком над двигателем.

Выясним детальнее, с точки зрения закона сохранения энергии, условия, при которых выполняется равенство (14). Пусть имеется незамкнутая система I из двух тел. На них действуют внешние силы со стороны третьего тела (системы II). Системы I и II в целом замкнуты (рис. 9).

Согласно второму закону Ньютона

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}, \\ m_2\mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23}, \\ m_3\mathbf{a}_3 &= \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ являются внутренними для системы I, а силы $\mathbf{F}_{13}$ и $\mathbf{F}_{23}$ — внешними. Система II состоит из одного тела, и все действующие на нее силы являются внешними.

Пусть за малое время первое тело переместилось на $\Delta\mathbf{s}_1$, второе на $\Delta\mathbf{s}_2$, а третье на $\Delta\mathbf{s}_3$. Умножим уравнения (15) на $\Delta\mathbf{s}_1$, $\Delta\mathbf{s}_2$ и $\Delta\mathbf{s}_3$ соответственно. Тогда, учитывая, что $m_i(\mathbf{a}_i\Delta\mathbf{s}_i) = \Delta K_i$, получим

$$\begin{aligned} \Delta K_1 &= (\mathbf{F}_{12}\Delta\mathbf{s}_1) + (\mathbf{F}_{13}\Delta\mathbf{s}_1), \\ \Delta K_2 &= (\mathbf{F}_{21}\Delta\mathbf{s}_2) + (\mathbf{F}_{23}\Delta\mathbf{s}_2), \\ \Delta K_3 &= (\mathbf{F}_{31}\Delta\mathbf{s}_3) + (\mathbf{F}_{32}\Delta\mathbf{s}_3). \end{aligned} \qquad (16)$$

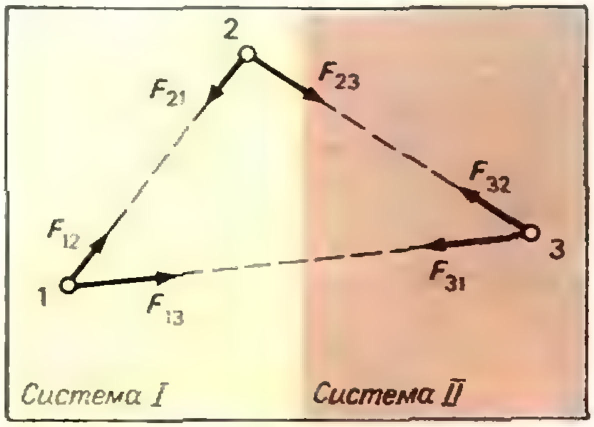


Рис. 9. Взаимодействие между системами I и II, изолированными от внешнего мира.

---

*) Мы имеем полное право любую группу тел или одно тело считать рассматриваемой системой. Это вопрос удобства.

Складывая первые два уравнения системы (16) и учитывая, что $(\mathbf{F}_{12}\Delta \mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{21}\Delta \mathbf{s}_2)$ есть изменение энергии взаимодействия системы I, взятое со знаком минус, и $(\mathbf{F}_{13}\Delta \mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{23}\Delta \mathbf{s}_2)$ есть работа внешних сил, получим

$$\Delta(K_1+K_2)+\Delta П_I=A_{внеш}. \qquad (17)$$

Знакомый результат: изменение механической энергии системы равно работе внешних сил.

Согласно третьему уравнению системы (16)

$$\Delta K_3=A', \qquad (18)$$

где A' — работа сил системы I над системой II.

Сложив уравнения (17) и (18), будем иметь

$$\Delta(K_1+K_2)+\Delta П_I+\Delta K_3=\Delta E_I+\Delta E_{II}=$$
$$=A_{внеш}+A'. \qquad (19)$$

Здесь $E_I=K_1+K_2+П_I$ — полная энергия первой системы, а $E_{II}=K_3$ — энергия второй системы. Отсюда видно, что

$$A_{внеш}=-A',$$

если

$$\Delta E_I=-\Delta E_{II}, \qquad (20)$$

то есть если убыль энергии первой системы равна увеличению энергии второй (или наоборот).

Потенциальная энергия взаимодействия системы с внешними телами

Условие равенства работ (равенство (14)) можно записать по-другому, если ввести понятие потенциальной энергии взаимодействия рассматриваемых систем. Перепишем уравнение (19) в развернутом виде, подставив выражения для работ $A_{внеш}$ и A':

$$\Delta E_I+\Delta E_{II}=(\mathbf{F}_{13}\Delta \mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{23}\Delta \mathbf{s}_2)+$$
$$+(\mathbf{F}_{31}\Delta \mathbf{s}_3)+(\mathbf{F}_{32}\Delta \mathbf{s}_3). \qquad (21)$$

Пусть силы взаимодействия тел системы I с системой II являются консервативными. Тогда $(\mathbf{F}_{13}\Delta \mathbf{s}_1)+(\mathbf{F}_{31}\Delta \mathbf{s}_3)=-\Delta П_{13}$, а $(\mathbf{F}_{23}\Delta \mathbf{s}_2)+(\mathbf{F}_{32}\Delta \mathbf{s}_3)=-\Delta П_{23}$, где $П_{13}$ и $П_{23}$ — потенциальные энергии взаимодействия тел 1—3 и 2—3. Сумма

$$П_{13}+П_{23}=П_{I-II} \qquad (22)$$

представляет собой потенциальную энергию взаимодействия систем I — II. Ее можно назвать потенциальной энергией взаимодействия системы I с внешним телом 3.

Теперь равенство (22) запишем так:

$$\Delta E_I+\Delta E_{II}=-\Delta П_{I-II},$$

или

$$\Delta(E_I+E_{II}+П_{I-II})=0. \qquad (23)$$

Значит, $\Delta E_I=-\Delta E_{II}$ и, следовательно, $A_{внеш}=-A'$ в том случае, когда $\Delta П_{I-II}=0$, то есть когда потенциальная энергия взаимодействия систем не меняется.

Когда двигатель вращает станок, то потенциальная энергия их взаимодействия (энергия растянутого приводного ремня) остается неизменной. При падении же камня на Землю потенциальная энергия взаимодействия меняется. Поэтому в первом случае $A_{внеш}=-A'$, а во втором это равенство не выполняется.

Роль сил трения

Силами, зависящими от скорости, в механике являются силы трения. Как и все силы, силы трения изменяют кинетическую энергию системы. Причем, хотя силы трения могут совершать и положительную работу, суммарная работа сил трения внутри системы всегда отрицательна, и они уменьшают кинетическую энергию системы. Понять, почему так происходит, можно на таком примере.

Найдем изменение кинетической энергии в системе, состоящей из тележки массы M, движущейся без трения со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, и кирпича массы m, положенного на тележку в начальный момент времени (рис. 10). Пусть кирпич сначала скользит по тележке и проходит относительно нее расстояние l. После этого кирпич движется вместе с тележкой. Коэффициент трения между кирпичом и тележкой равен k.

За время t тележка пройдет относительно земли путь s, а скользя-

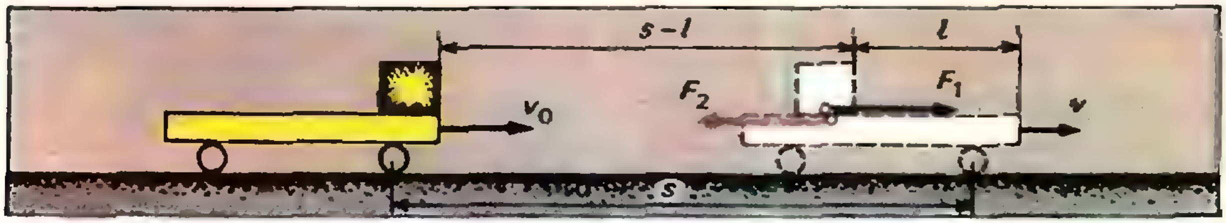


Рис. 10. Отрицательная работа на пути s больше положительной работы на пути $s-l$.

щий по ней кирпич пройдет путь $s - l$. После этого они будут двигаться с одинаковой скоростью v.

Сила трения скольжения $F_1 = kmg$ совершит над кирпичом положительную работу, которая увеличит кинетическую энергию кирпича:

$$A_1 = kmg(s-l) = \Delta K_1 = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа силы трения $F_2 = -kmg$, действующей на тележку, будет отрицательной, что вызовет уменьшение кинетической энергии тележки:

$$A_2 = -kmgs = \Delta K_2 = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2}.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим, что

$$\frac{(M+m)v^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -kmgl,$$

то есть убыль кинетической энергии системы равна работе силы трения на пути, равном относительному перемещению кирпича и тележки.

Итак, работа силы трения ведет к убыли кинетической энергии системы. Но при этом под действием силы трения потенциальная энергия системы не увеличивается, как это происходит под действием консервативных сил. Это является следствием того, что силы трения зависят не от расстояний между телами, а от их относительных скоростей. В результате работа этих сил зависит от формы траектории тела, а не только от его начального и конечного положений в пространстве. Силы трения, действующие внутри системы, изменяют кинетическую энергию системы так же, как и внешние силы. Поэтому при наличии сил трения в замкнутой системе ее механическая энергия убывает:

$$\Delta E = A_{\text{тр}} < 0.$$

В связи со сказанным может возникнуть такой вопрос. Известно, что сила трения может поднять кирпич на движущемся с постоянной скоростью транспортере. Не означает ли это, что работа этой силы увеличивает потенциальную энергию системы кирпич — Земля? Конечно, нет. В данном случае положительная работа силы трения равна отрицательной работе составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости. Из-за этого кинетическая энергия кирпича не меняется. Потенциальная же энергия кирпича растет, так как сила взаимодействия между Землей и кирпичом, то есть сила тяжести, совершает при подъеме кирпича отрицательную работу.

Упражнения

1. Почему при абсолютно упругом соударении шарика со стенкой импульс шарика меняется, а кинетическая энергия не меняется?

2. Закрытый пробкой сосуд, вес которого равен выталкивающей силе, покоится на дне стакана с водой. Почти не совершая работы, его можно поднять к поверхности воды. Если теперь вынуть пробку, то сосуд наполнится водой и утонет. При этом он может совершить работу. Если же вынуть пробку, когда сосуд лежит на дне, то он также наполнится водой, но работы не совершит.

Как согласовать полученный в первом случае выигрыш в работе с законом сохранения энергии?

3. Кубик соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой h. Согласно закону сохранения энергии его кинетическая энергия у основания плоскости равна $\frac{mv^2}{2} = mgh$. Рассмотрим теперь движение кубика с точки зрения инерциальной системы отсчета, движущейся вдоль наклонной плоскости со скоростью $v = \sqrt{2gh}$. В этой системе отсчета начальная скорость кубика равна $v = \sqrt{2gh}$, а конечная скорость равна нулю. Следовательно, начальная энергия $E_1 = \frac{mv^2}{2} + mgh = 2mgh$, а конечная $E_2 = 0$.

Куда же исчезла энергия?

4. Рассматривая падение камня на Землю, мы говорим об изменении импульса Земли, о том, что оно равно изменению импульса камня, а изменение кинетической энергии Земли при этом не учитывается. Как это можно объяснить?

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Мы помещаем ниже образцы вариантов письменного экзамена по математике и билетов устного экзамена по физике, предлагавшихся в 1973 году поступающим на естественные факультеты Московского университета.

Математика

Химический факультет

1. Алик, Боря и Вася покупали трехкопеечные карандаши и блокноты. Алик купил 4 карандаша и 2 блокнота, Боря — 6 карандашей и блокнот, Вася — 3 карандаша и блокнот. Оказалось, что суммы, которые уплатили Алик, Боря и Вася, образуют геометрическую прогрессию. Сколько стоит блокнот?

2. Решить неравенство

$$\log_4 (5-3^x)\cdot\log_2\left(\frac{5-3^x}{8}\right)\geqslant -1.$$

3. Найти все действительные x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{\sin^2 x}{\sin x+1}}.$$

4. Плоскость основания правильной четырехугольной пирамиды проходит через центр шара, причем получающийся в сечении большой круг шара вписан в основание пирамиды. Внутрь пирамиды помещен еще один шар, касающийся боковых граней пирамиды и первого шара. Известно, что радиус второго шара равен 2, а точка касания шаров отстоит от основания пирамиды на расстояние, равное одной трети высоты пирамиды. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

5. В прямоугольный треугольник ACB вписан квадрат $CEKM$ так, что его вершина K лежит на гипотенузе AB, а вершины E и M — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник ACB, как $(2+\sqrt{2}):2$. Найти углы треугольника ACB.

Факультет биологии

1. Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стенку, причем первый каменщик работал 6 часов, второй 4 часа и третий 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй 2 часа и третий 5 часов, то было бы выполнено лишь $^2/_3$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали все вместе одно и то же время?

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x-1=(2\cos 2x+1)\,\mathrm{tg}\,x.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\sin 2x}(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x)=1-\log^2_{\sin 2x}2.$$

4. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найти площадь четырехугольника $QMCD$.

5. Найти все значения действительного параметра a, для которых неравенство

$$4^x-a\cdot 2^x-a+3\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Геологический факультет

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sin(x+y)=\dfrac{3}{2},\\[2mm] 3x-\sin(x+y)=\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0.$$

3. Два велосипедиста выехали из пункта A одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист едет со скоростью 7 *км/ч*, второй — со скоростью 10 *км/ч*. Через 30 *мин* из пункта A в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал первого велосипедиста, а еще через полтора часа после этого догнал и второго велосипедиста. Определить скорость третьего велосипедиста.

4. Решить неравенство

$$\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4>0.$$

5. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую его сторону в точках A и B и пересекает биссектрису прямого угла в точках C и D. Известно, что $AB=\sqrt{6}$ *см*, $CD=\sqrt{7}$ *см*. Найти радиус окружности.

Факультет почвоведения

1. Общий вес снаряжения туристской группы 202 *кг*. Если распределить его так, чтобы каждому юноше пришлось нести по 16 *кг*, а каждой девушке — по 9 *кг*, то 4 *кг* останутся нераспределенными. Поэтому все

юноши берут себе еще по 2 *кг* каждый, в результате чего удается облегчить рюкзак каждой девушки на 1 *кг*, а одну из них освободить от груза вовсе; при этом все снаряжение оказывается распределенным. Сколько юношей и сколько девушек участвуют в походе?

2. Что больше:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\log_{81}\left(\frac{1}{27}\right)$$

или

$$\sin\frac{43\pi}{6}\,\operatorname{tg}^3\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}\ ?$$

3. Решить уравнение

$$\cos x(\sqrt{3}+\cos x)-1=\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}-$$
$$-\sin x(\sqrt{3}+\sin x).$$

4. Две окружности радиуса 32 с центрами в точках O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

5. Найти все действительные решения уравнения

$$\log_2(x^2+7)=5+\log_2 x-\frac{6}{\log_2\left(x+\frac{7}{x}\right)}.$$

Географический факультет

1. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работу на 30 минут раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 27 *м*, оказалось, что он отстает от первого на 1 *м*. Сколько метров в час проходит каждый из экскаваторов, если известно, что второй прокапывает в час на 4 *м* больше, чем первый?

2. Упростить выражение

$$5^{\log_{1/5}(1/2)}+\log_{1/2}\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+$$
$$+\log_{1/2}\frac{1}{10+2\sqrt{21}}.$$

3. Сторона AB квадрата $ABCD$ является хордой некоторой окружности, а все остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина отрезка касательной, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Чему равен диаметр окружности, если сторона квадрата равна 1?

4. Найти решения уравнения

$$3^{x^2+4x}=\frac{1}{25},$$

удовлетворяющие неравенству $x>-3$.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}.$$

Физика

Билет 1

1. Точечные заряды $q_1=-1{,}7\cdot10^{-8}$ *к* и $q_2=2\cdot10^{-8}$ *к* находятся от точечного заряда $q_0=3\cdot10^{-8}$ *к* на расстояниях $l_1=2$ *см* и $l_2=5$ *см* соответственно. Какую работу A надо совершить, чтобы поменять местами заряды q_1 и q_2?

2. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. График скорости равнопеременного движения с начальной скоростью. Свободное падение тел.

3. Законы отражения света. Построение изображений в плоском зеркале. Построение изображений в сферических зеркалах.

Билет 2

1. Самолет массы $m=2{,}5$ *т* с выключенным мотором спускается, планируя, с постоянной скоростью $v=144$ *км/ч* с высоты $h_1=2$ *км* до высоты $h_2=1$ *км*, пролетев при этом расстояние $l=10$ *км*. Какую мощность W должен развивать мотор самолета, чтобы он мог подняться до высоты h_1, пролетев расстояние l с той же скоростью?

2. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Индукция магнитного поля. Амперметр. Вольтметр.

3. Собирающие и рассеивающие линзы. Формула линзы. Построение изображений.

Билет 3

1. В бассейн с водой погружен опрокинутый вверх дном тонкостенный цилиндрический сосуд с высотой $h=1$ *м* и площадью дна $S=0{,}1$ *м*². Сосуд заполнен жидким маслом плотностью $\rho=800$ *кг/м*³. От дна сосуда до поверхности воды расстояние $H=2$ *м*. Найти силу F, действующую изнутри сосуда на его дно. Атмосферное давление $p_0=10^5$ *н/м*².

2. Два рода электричества. Взаимодействие электрических зарядов. Закон Кулона. Влияние среды на силу взаимодействия зарядов. Диэлектрическая проницаемость.

3. Проекционный аппарат. Фотоаппарат. Лупа. Ход лучей в этих приборах.

Билет 4

1. Точка лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $f=25$ *см*. Расстояние от линзы до изображения этой точки $b=15$ *см*. На какое расстояние l переместится изображение точки, если саму линзу подвинуть на расстояние $L=2$ *см* в направлении, перпендикулярном главной оптической оси?

2. Понятие о потенциале. Потенциал поля для точечного заряда (без вывода). Работа перемещения заряда в электрическом поле. Разность потенциалов. Связь потенциала с напряженностью для однородного поля.

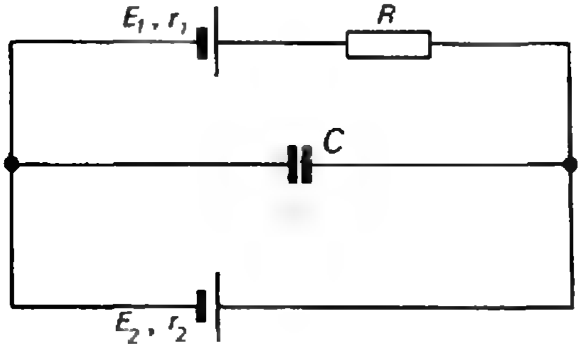
3. Явления, подтверждающие сложное строение атома. Способы наблюдения частиц. Строение атома. Излучение и поглощение энергии атомом.

Телевидение готовит в вуз

Физика

В течение января — марта 1974 года на физическом отделении телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы *) читались лекции и проводились практические занятия по теме «Основы электродинамики». Для знакомства читателей журнала с уровнем трудности домашних заданий (которые систематически публикуются в еженедельнике «Говорит и показывает Москва») мы приводим ниже несколько задач на законы постоянного тока, на магнитное взаимодействие токов, на явление электромагнитной индукции и переменный ток.

1. Конденсатор емкости $C = 10$ *мкф* включен в цепь постоянного тока (см. рис.). Определить заряд конденсатора, если $R = 4{,}0$ *ом*, $E_1 = 5{,}0$ *в*, $E_2 = 2{,}0$ *в* и $r_1 = r_2 = 1{,}0$ *ом*.



2. Элемент с внутренним сопротивлением $r = 2$ *ом* замкнут на сопротивление $R_1 = 8$ *ом*. Какое другое сопротивление R_2 надо подключить к этому элементу, чтобы мощность, выделяемая во внешней цепи, была такая же, как и в первом случае?

3. Электроплитка имеет два нагревателя. При включении в сеть одного нагревателя $V_1 = 0{,}5$ *л* воды закипает через $t_1 = 10$ *мин*; при включении второго нагревателя $V_2 = 1{,}0$ *л* воды закипает через $t_2 = 15$ *мин*. Через сколько минут закипит на плитке $V_3 = 2{,}0$ *л* воды, если оба нагревателя включить последовательно в ту же сеть?

4. Водород, выделяющийся при электролизе раствора поваренной соли в воде, собирается в сосуд объемом $V = 0{,}5$ *л*. Через некоторое время давление водорода в сосуде становится $p = 1{,}3$ *атм* при температуре $t = 27°$ С. Найти работу, совершенную источником тока при электролизе, если разность потенциалов между электродами $U = 25$ *в*.

5. По трем длинным прямым параллельным проводникам пренебрежимо малого сечения, расположенным в воздухе на одинаковых расстояниях $a = 20$ *см* друг от друга, текут в одном направлении токи $I_1 = 4{,}0$ *а*, $I_2 = 6{,}0$ *а* и $I_3 = 10$ *а*. Найти магнитную индукцию в точках, равноудаленных от всех трех проводников.

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ *тл* равномерно вращается металлический стержень длиной $l = 1$ *м*. Плоскость вращения стержня перпендикулярна вектору индукции магнитного поля. Определить частоту вращения стержня ν, если э.д.с. индукции, возникающая на концах стержня, $E_{\text{инд}} = 2$ *в*.

7. По двум вертикальным сторонам П-образной рамки, находящейся в магнитном поле с индукцией $B = 2$ *тл*, скользит без трения с постоянной скоростью, не теряя электрического контакта, проводник с сопротивлением $R = 4$ *ом* и массой $m = 10$ *г*. Определить скорость движения проводника, если расстояние между сторонами рамки $l = 1$ *м* и вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости рамки.

8. На конце линии передачи электроэнергии с общим сопротивлением $R = 50$ *ом* установлен понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 5$. Потребитель получает от трансформатора мощность $P = 400$ *вт* при токе $I = 10$ *а*. Определить активное сопротивление вторичной обмотки трансформатора, если напряжение в начале линии $U = 500$ *в*. Активным со-

---

*) Подробнее об этих курсах см. статью: Качанов А. В., Наслузов Н. Н. «Телевидение готовит в вуз» («Квант», 1973, № 9).

противлением первичной обмотки и тепловыми потерями в трансформаторе пренебречь.

9. Сопротивление $R = 220$ *ом* и конденсатор подсоединены параллельно к источнику переменного тока с частотой $\nu = 400$ *гц*. Найти емкость конденсатора, если амплитудное значение тока через сопротивление $I_{0_1} = 1$ *а*, а через конденсатор $I_{0_2} = 2$ *а*.

10. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ *тл* равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной полю, квадратная рамка со стороной $a = 20$ *см*. Определить частоту вращения рамки, состоящей из $n = 100$ витков, если при подключении ее к катушке с индуктивностью $L = 0{,}5$ *гн* действующее значение напряжения на катушке $U = 20$ *в*. Сопротивление рамки $R = 5$ *ом*. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

Математика

В феврале для слушателей отделения математики телекурсов проводилось очное собеседование. Приглашенным на собеседование были предложены два варианта, включающие задачи по пройденным ранее темам. Собеседование проводилось в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах. Мы публикуем тексты обоих вариантов.

Вариант 1

1 (Белорусский ун-т, 1973). Доказать, что выражение

$$\frac{1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)},$$

где $\alpha \neq \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, не зависит от α.

2. В треугольнике ABC известны два угла: $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$. Из вершины B проведены высота BH и медиана BM. Найти площадь треугольника BMH, если $BH = h$.

3 (УДН, 1973). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2(x+y), \\ x^3+y^3 = 4(x-y). \end{cases}$$

4 (МФТИ, 1971). Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x = \cos^2 3x.$$

Вариант 2

1 (МИФИ, 1971). Найти два целых положительных числа, зная, что их сумма равна 85, а их наименьшее общее кратное равно 102.

2. Две окружности h и l радиусов R и r $(R > r)$ касаются в точке A. Определить сторону равностороннего треугольника, одна из вершин которого находится в точке A, другая вершина лежит на окружности h и третья — на окружности l.

3 (МГУ, 1973). Найти все пары значений x, y, являющиеся решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+\dfrac{1}{\cos y} = 2\sqrt[4]{14}, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = \sqrt[4]{196}-2. \end{cases}$$

4 (Ленинградский политехнический ин-т, 1972). Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x-8\cos^2 x+\operatorname{tg} 2x = 0.$$

В марте на телекурсах читаются лекции по темам: «Показательные и логарифмические функции», «Логарифмы и их свойства», «Показательные уравнения и неравенства», «Логарифмические неравенства». В этом номере мы предлагаем ряд задач из домашних заданий для слушателей телекурсов.

Задачи

1. Упростить выражение

$$\left[\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}-2\right]^{1/2},$$

если $1<a<b$.

2. Расположить в порядке возрастания числа

$$a = \log_{63}27, \quad b = \log_{21}9, \quad c = \log_{189}81.$$

3. Решить уравнение

$$(x-1)2^x+x^2-2x+1 = 0.$$

4. Решить уравнение

$$2(2^{2x}+2^{-2x})+7(2^x-2^{-x})-19 = 0.$$

5. Решить уравнение

$$x+\lg(2^x-3) = \lg 4+x\lg 5.$$

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^{\log_3 y}+2\cdot y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 x-\log_3 y = 1. \end{cases}$$

7. Решить неравенство

$$\sqrt{1+\log_4 x}-\sqrt{3\log_4 x}>2\log_4 x-1.$$

8. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x+9}\right)\log_3\frac{2x^2+x-3}{3}\geqslant 0.$$

А. Н. Борзяк,
В. И. Давыдов,
И. А. Дьяконов,
П. Т. Дыбов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Удачная серия

Многим читателям «Кванта» известны выпускаемые московскими издательствами серии научно-популярных книг и брошюр по математике, рассчитанных на учащихся средней школы. На первом месте среди этих серий стоят выходящие с 1950 года брошюры «Популярные лекции по математике» — к настоящему времени вышли в свет уже 52 книжки этого обширного собрания! В более молодой серии «Библиотечка физико-математической школы» выпущено 8 книг по математике *), а «Библиотека математического кружка» состоит из 12 довольно больших по объему книг. Все эти книги выпустила главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»; этому же издательству принадлежит инициатива выпуска «Математической библиотечки» (вышло в свет 7 книг), быть может, несколько более сложной, чем «Популярные лекции по математике» или «Библиотечка физико-математической школы», но в основной своей части также доступной достаточно настойчивому школьнику. Издательство «Мир» выпускает серию научно-популярных переводных книг «Современная математика» (вышло в свет 14 книг), а издательство «Просвещение» — серию «Математическое просвещение» (на прилавках книжных магазинов побывало пока 7 книг этой серии). Многие из этих книг также вполне доступны интересующимся математикой школьникам. По существу, в отдельном ряду стоят неоднократно упоминавшиеся в журнале «Квант» превосходные переводные книги М. Гарднера («Математические головоломки и развлечения», 1971; «Математические досуги», 1972) и Льюиса Кэролла («История с узелками», 1973), выпущенные редакцией научно-популярной и научно-фантастической литературы издательства «Мир». Ежемесячно выходят в свет брошюры серии «Математика. Кибернетика» издательства «Знание»; некоторые из них вполне можно рекомендовать и школьникам. Наконец, эпизодически появляются книги по математике в «общенаучных» сериях «Эврика» (издательство «Молодая гвардия») и «В мире науки и техники» (переводная серия, выпускаемая издательством «Мир» *)).

Менее известны книги такого же рода, выходящие вне Москвы. И именно поэтому хотелось бы обратить внимание читателей «Кванта» на книги серии «Бібліотечка зико-математичної школи», ходящие в издательстве ища школа» в Киеве (глав- ый редактор математической сти серии — чл.-корр. кадемии наук УССР про- ессор А. В. Скороход). В 1972 году было издано 5 книг этой серии: А. Я. Дороговцев, М. И. Ядренко. Метод координат; Н. И. Кованцев. Геометрические преобразования; В. А. Вышенский. Отношения и функции; И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. Элементы комбинаторики; Ю. М. Рыжов. Пределы. Все эти книги написаны на украинском языке; однако их возможные читатели — не одни лишь украинские школьники: ведь украинский язык близок к русскому, а сочинения по математике можно читать и на слабо известном (или даже вовсе неизвестном) языке, ибо математическая символика универсальна, а математическая терминология также практически одинакова во всех европейских языках (кроме, пожалуй, венгерского, финского и эстонского, принадлежащих к редкой в Европе группе угро-финских языков, и польского языка, использующего свойственную лишь ему и далекую от принятых во всех других странах математическую терминологию).

Книжки названной серии по объему близки к брошюрам из ряда «Популярные лекции по математике»; по содержанию же они являются в известном смысле промежуточными между «Популярными лекциями по математике» и «Библиотечкой физико-математической школы». Для того чтобы читатель смог лучше себе их представить, расскажем здесь подробнее о двух очень разных и, быть может, самых удачных из этих брошюр (хотя и вся серия в целом заслуживает высокой оценки) «Элементы комбинаторики» и «Отношения и функции»:

---

*) «Библиотечка физико-математической школы» состоит из двух частей: «Математика» и «Физика».

*) В частности, мне хочется обратить внимание читателей «Кванта» на изданную в этой серии книгу: Сойер У. Путь в современную математику. М., «Мир», 1972.

Елементи комбінаторики

Автору кажется удачной адресованная школьникам «Комбинаторика» Н. Я. Виленкина *); однако кое-кого из учащихся может отпугнуть уже объем этой довольно толстой книги (328 страниц). Содержательная же брошюра И. И. Ежова, А. В. Скорохода и М. И. Ядренко имеет всего лишь 83 страницы малого формата.

Вводный § 1 посвящен обсуждению содержания комбинаторики и формулировке «основного правила», которое в нашей литературе зачастую называется *правилом произведения* или *правилом умножения*. Последующие два параграфа посвящены конечным множествам и операциям над ними, а также числу подмножеств конечного множества; к этому материалу в известной степени примыкает используемый во второй половине книги § 7, в котором разъясняется понятие *прямого* (или *декартова*) *произведения* $A \times B$ конечных множеств A и B (то есть множества пар (a, b) элементов из A и из B). §§ 4—6 посвящены *упорядоченным множествам*. Затем на языке конечных множеств излагаются некоторые основные понятия комбинаторики и решаются задачи о числе *перестановок*, *размещений* и *сочетаний* (*без повторений* и *с повторениями*) элементов заданного (конечного) множества.

§§ 4—7 книжки И. И. Ежова, А. В. Скорохода, М. И. Ядренко составляют ее, так сказать, «первый концентр»; §§ 8—12, посвященные некоторым более специальным (но зато и более интересным!) темам, можно рассматривать как «второй концентр». В § 8 авторы доказывают *биномиальную* и *полиномиальную* теоремы, то есть выводят формулы для выражений $(a+b)^n$ и $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n$, где n — целое число. Украшением этого параграфа служат выведенные в нем изящные соотношения между так называемыми *биномиальными коэффициентами* (то есть коэффициентами C_n^m в формуле для $(a+b)^n$); еще больше таких соотношений читатель найдет в упражнениях к § 9. Последующие параграфы посвящены двум основным специальным методам комбинаторики — методу *рекуррентных соотношений* (ср., например, гл. VI книги Н. Я. Виленкина) и методу *производящих функций* (частично затронутому в гл. VII той же книги). Отдельный § 11 содержит обсуждение так называемой *формулы включений и исключений* (см. с. 26 книги Виленкина) и ее приложений. Наконец, заключительный § 12 посвящен *методу траекторий*, которым решается, например, известная «задача об очереди» (*в очереди в билетную кассу стоят $m+n$ человек, m из которых имеют 50 коп. мелочью, а n — лишь бумажные рубли; если билет стоит 50 коп., то сколькими способами можно расположить очередь так, чтобы никому из покупателей не пришлось ждать сдачи?*).

Відношення і функції

Если книжка И. И. Ежова и др. посвящена совершенно конкретным математическим задачам, то в книге В. А. Вышенского, напротив, на первом плане стоят общие понятия. Его книжка состоит из двух глав: «Множества» и «Отношения»; некоторое представление об ее направленности читатель может получить из статей А. Н. Колмогорова «Что такое функция» и «Что такое график функции» («Квант», 1970, №№ 1, 2). При этом важные понятия множества и операций над множествами, импликации (следования) и эквивалентности (равносильности), предикатов и кванторов, отношений и функций автор раскрывает на достаточно содержательных примерах (к тому же близких учащимся средней школы!). Так, например, на протяжении всей книги используется понятие *множества решений уравнения* (или неравенства, системы уравнений, системы неравенств). Существенной компонентой книжки В. А. Вышенского являются также многочисленные задачи и упражнения.

В целом мне кажется, что интересные книги И. И. Ежова, А. В. Скорохода, М. И. Ядренко и В. А. Вышенского было бы полезно перевести и на русский язык. Издателям же серии «Бібліотечка фізико-математичної школи» хочется пожелать успешного продолжения серии.

И. М. Яглом

---

*) Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., «Наука», 1969.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Новые книги

В 1974 году мы продолжаем публикацию раздела «Новые книги». В этом разделе будут публиковаться краткие аннотации на уже вышедшие книги и на книги, которые выходят в 1974 году, и представляют интерес для наших читателей. В связи с многочисленными просьбами читателей мы также будем публиковать аннотации на некоторые книги, выходящие в издательствах «Молодая гвардия», «Детская литература», «Мир» и «Знание», и не имеющие прямого отношения к математике и физике.

Заказы на книги надо одновременно оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в 1-м квартале 1974 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И., *Лекции и задачи по элементарной математике.* Объем 28 л., тираж 200 000 экз., цена 87 коп. Издание 2-е.

Книга предназначена в первую очередь для самостоятельной подготовки в вузы. Теоретический материал, изложенный в книге, посвящен наиболее трудным вопросам школьной программы алгебры и элементарных функций. Большое количество задач (зачастую повышенной трудности) приведено с подробным решением.

Книга предназначена для школьников 9—10 классов. Она также будет полезна учителям математики и студентам педагогических вузов.

2. Васильев Н. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Савин А. П., *Математические соревнования (геометрия).* Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 16 коп.

Эта книга — логическое продолжение ранее вышедшей — «Математические соревнования» (арифметика и алгебра). В ней представлены как задачи традиционных разделов геометрии, так и задачи «олимпиадного типа». К задачам повышенной трудности даются подробные решения или указания.

Книга рассчитана на школьников 7—10 классов, а также учителей, ведущих математические кружки.

3. Перельман Я. И. *Живая математика.* Объем 8 л., тираж 200 000 экз., цена 28 коп. Издание 10-е.

Автор книги — Яков Исидорович Перельман — один из выдающихся популяризаторов науки. Ее с удовольствием прочтут и школьники 6—10 классов, и взрослые читатели.

Издательство «Знание»

4. Шрейдер Ю. А., *Беседы о семиотике.* Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 коп.

Автор интересно и популярно рассказывает о новой отрасли знания — семиотике, тесно примыкающей к математической лингвистике и математической логике.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Высшая школа».

5. Шувалова О. З., Агафонов Б. Г., Богатырев Г. И., *Повторим математику.* Объем 30 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 09 коп. Издание 2-е.

Книга предназначена для читателей, окончивших школу и самостоятельно готовящихся к вступительным экзаменам в вузы.

М. Л. Смолянский

Физика

Издательство «Наука»

1. Новожилов Ю. В., *Элементарные частицы.* Объем 15 л., тираж 300 000 экз., цена 50 коп. Издание 3-е.

Автор излагает основные идеи одного из самых интересных разделов современной физики — физики элементарных частиц. Популярное изложение и отсутствие сложных математических выводов делают ее доступной для школьников 9—10 классов.

Издательство «Мир»

2. Кок У., *Видимый звук.* Объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 26 коп.

В книге рассказано о способах регистрации звука, о звуковой структуре речи, музыки. Большое внимание уделено звуковой голографии — получению изображения при помощи освещения звуковой волны.

Книга доступна для школьников 8—10 классов.

3. Уорд Р. Р., *Живые часы.* Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 76 коп.

Книга посвящена новой области современной геофизики — биоритмологии. Прочитав ее, вы узнаете, что такое «внутренние часы живых организмов», каковы принципы их работы, как животные и растения узнают время, и многое другое.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

4. Тарасенко Н. Д., *Вторжение в клетку.* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 25 коп. Издание 3-е.

В книге популярно рассказывается о новой науке — радиационной селекции, о том, как ученые-генетики, пользуясь радиоактивным излучением, получают новые, более урожайные, скороспелые и устойчивые к болезням сорта растений.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Научно-фантастическая литература

Издательство «Молодая гвардия»

1. Петрович Н., *Кто вы?* Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 60 коп. Издание 2-е.

Автор — крупный ученый в области радиолокации. Используя фантастический сюжет, он увлекательно рассказывает о создании радиомостов между Землей и другими планетами, населенными разумными существами.

2. Растригин Л., *Этот случайный, случайный, случайный мир.* Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 35 коп.

Используя интересно подобранные примеры, автор рассказывает о закономерности случайных событий, о их роли в нашей жизни в науке и эволюции на Земле.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Т. С. Петрова

Брошюры по физике

В этом году в серии брошюр «Физика», выпускаемых издательством «Знание», будет издан ряд брошюр, рассказывающих о достижениях в различных областях физики.

Брошюра Г. И. Покровского *«Успехи газодинамики»* посвящена различным аспектам газодинамики. Автор излагает множество вопросов, относящихся к физическим основам динамики детонации, расширения взрывных газов и их действия на окружающую среду. Читатели, вероятно, с интересом познакомятся с особенностями взрывов сверхновых звезд и явлениями направленного выброса при взрыве галактик.

Достижениям атомной энергетики и тенденциям ее развития в наиболее развитых странах запада посвящена брошюра Председателя Госкомитета по использованию атомной энергии СССР А. М. Петросьянца. Она написана на основе личного ознакомления с наиболее интересными разработками, проектами и атомными электростанциями, находящимися уже в эксплуатации в странах запада.

Брошюра Ю. Ф. Орлова *«Импульсные источники нейтронов»* описывает различные методы получения коротких импульсов монохроматических нейтронов низких энергий. Автор особое внимание уделяет изложению физических принципов, лежащих в основе этих методов.

Брошюра М. П. Малкова познакомит читателей с применением жидкого гелия в экспериментальных исследованиях. Она так и называется *«Жидкий гелий в научных исследованиях»*. Автор описывает новейшие методы получения жидкого гелия. Основная часть брошюры посвящена наиболее интересным экспериментальным исследованиям с применением жидкого гелия.

Брошюра А. С. Компанейца *«Сверхплотное вещество»* рассматривает превращения, происходящие в веществе при сильном сжатии и применимые к проблемам создания новых веществ. Превращения, происходящие в веществе при высоких давлениях, в настоящее время являются предметом широко ведущихся исследований в разных странах. Автор рассказывает также о приложении превращений вещества при сильном сжатии к проблемам астрофизики и космологии.

Развитию теории относительности Эйнштейна посвящена научно-популярная брошюра Л. Э. Гуревича и Э. Б. Глинера под названием *«Абсолютно или относительно пространство?»*. Это, по утверждению авторов, одна из тех «вечных» проблем, которые, хотя и не нашли еще полного решения, но продолжают оставаться важными побудительными причинами создания новых и изменения имеющихся фундаментальных физических теорий.

Молодой физик-экспериментатор И. С. Гулькаров в своей брошюре *«Электрон — орудие исследования ядер»* рассказывает об исследованиях структур ядер с помощью электронов высоких энергий.

Брошюра молодого ученого Ф. И. Далидчика *«Синтетические атомы»* знакомит читателей с одной из интереснейших научных проблем — с синтезом экзотических форм вещества, то есть молекул, атомов и ядер, в состав которых входят необычные для окружающего мира частицы: мезоны, гипероны, античастицы. Автор также пишет о новейших работах по поиску далеких трансурановых элементов и новых экзотических частиц, существование которых предсказывают теоретики.

Ф. Кедров

ИНФОРМАЦИЯ

Встречи с тремя неизвестными

Вот уже 9-й год на страницах журнала «Пионер» трое «неизвестных» Икс, Игрек и Зет дают задачи, разбирают математические теории, проводят олимпиады. Это как бы всесоюзный заочный математический кружок для учеников 4—7 классов. Подбирают материалы для «Встреч с тремя Неизвестными» и отвечают на письма ребят сотрудники Вечерней математической школы (ВМШ) при Московском математическом обществе (подробнее о ВМШ см. «Квант», 1973, № 9).

«Неизвестные» уже рассказали о высшей арифметике и теории вероятностей, поиске фальшивых монет и алгоритмах, программировании и комбинаторике, теории графов и задаче, из-за которой Пуассон стал математиком. Они выясняли, «как играть, чтобы не проиграть», что сказать вместо «не все футболисты учатся на двойки», чтобы не употреблять слово «не», как работать юному математику и что ему читать.

Игрек дает читателям «контрольные задачи» по разбираемым темам, а Икс предлагает им повозиться с «конкурсными задачами» и написать о результатах в «Пионер». Но больше всего писем приходит в ответ на олимпиаду, а в 1973 году в ней участвовало почти три тысячи ребят.

«Неизвестные» всегда печатают решения и ответы, разбор ошибок и список победителей. Приятно встречать фамилии отличившихся на олимпиадах «Пионера» в списках победителей конкурса «Кванта», всесоюзных и международных олимпиад.

Анкета показала, что почти все победители олимпиады 1972 года читают книги по математике, хотя больше любят решать задачи, $^4/_5$ из них занимаются в кружках, $^3/_5$ участвовали в очных олимпиадах, а две трети из них читают и изучают «Квант».

Вот задачи из отдела «Встречи с тремя неизвестными», которые больше всего запомнились победителям олимпиады.

1. Расшифруйте записи арифметических действий, в которых некоторые цифры заменены буквами (в каждой из трех записей по отдельности разные цифры заменены разными буквами, одинаковые — одинаковыми, а в первой шифровке А = Т):

а) КОРОВА + ТРАВА = МОЛОКО;

б) СТОЛ + СТУЛ = КЛАСС;

в) БЕ × РУ × 4 = БУЕР.

2. Рядом с большой бочкой с водой стоят два бидона. В один входит 12 литров, в другой — 17. Воду можно набирать из бочки и выливать обратно в бочку. Кто быстрее принесет нам 6 литров воды?

3. Верните сбежавшие цифры:

$$\begin{array}{r|l} -\,7{*}{*}0 & {*}{*} \\ \underline{{*}6{*}} & \overline{{*}4} \\ -\,{*}8{*} & \\ \underline{3{*}{*}} & \\ 0 & \end{array}$$

4. Начертите два шестиугольника, делящие плоскость на возможно большее число частей. А если дополнительно потребовать, чтобы шестиугольники были выпуклыми? Попробуйте доказать, что на большее, чем у вас, число частей разделить плоскость не удастся.

5. Нашли произведение 666 множителей, каждый из которых равен 777. Какая цифра стоит на конце?

6. В комнате 10 живых существ — людей, собак и мух, у них вместе 46 ног. У каждого человека 2 ноги, у каждой собаки 4 и у мухи 6 ног. Как это могло получиться? Найти все возможности.

7. Поле имеет форму четырехугольника. Шоссейные дороги — они идут по диагоналям — разбивают его на четыре участка. Площади трех из них — 2 гектара, 4 гектара, 6 гектаров. Какой может быть площадь четвертого?

8. В одной из московских школ есть удивительный шестой класс. Судите сами. В классе 35 учеников, и все они либо играют на скрипке, либо разводят хомяков, либо плавают в бассейне «Москва», либо занимаются сразу несколькими из этих дел. Плавают или разводят хомяков 28 человек. Разводят хомяков, но не играют на скрипке 22 ученика. И тем, и другим, и третьим занимаются 3 школьника. Есть по крайней мере один, который только плавает. Есть пловец и скрипач, ненавидящий хомяков. Есть и такой, который не плавает (просто не умеет), но зато прекрасный скрипач, а хомяков разводит еще с первого класса. Может быть, таких не по одному, а много. Сколько в классе скрипачей? Сколько пловцов, которые не разводят хомяков? Можно ли определить, сколько ребят разводят хомяков, а на скрипке не играют и не плавают? Если да, то сколько, если нельзя определить, то почему?

А. И. Орлов,
А. Л. Розенталь

XXIV Международный астронавтический конгресс

С 7 по 13 октября 1973 года в столице советского Азербайджана городе Баку происходил XXIV Международный астронавтический конгресс. Такие конгрессы ежегодно организуются Международной астронавтической федерацией и Международной академией астронавтики. Первая из этих организаций возникла в 1950 году, за несколько лет до запуска первого искусственного спутника Земли. Она представляет собой союз национальных научных обществ, занимающихся исследованием космических проблем. Сейчас в состав Федерации входит 56 организаций-членов из 36 стран. Советским членом Федерации является Комиссия по исследованию и использованию космического пространства Академии наук СССР. Вторая организация объединяет отдельных ученых, работающих в различных отраслях космических исследований. К моменту проведения конгресса в ее рядах состоял 491 член из 29 стран.

В работе конгресса участвовало более 1500 человек из 28 стран. Среди них — советские космонавты Г. Т. Береговой, Б. Б. Егоров, В. И. Севастьянов, В. А. Шаталов, а также американский астронавт Т. Стаффорд.

Конгресс прошел под девизом «Космические исследования: влияние на науку и технику». Чтобы сильнее подчеркнуть это влияние и отдать дань другим международным организациям, два заседания конгресса были посвящены столетию Всемирной метеорологической организации и еще два — 25-летию Всемирной организации здравоохранения.

На конгрессе было прочитано более 350 докладов по различным направлениям космических исследований. Широкому обсуждению подверглись практически все основные проблемы, с которыми человечество сталкивается на пути проникновения в космос. Космические методы изучения окружающей среды и природных ресурсов, технологические процессы в космосе, процессы в ракетных двигателях, газовая динамика космических полетов, научные космические аппараты, использование космической технологии для национального развития, астродинамика, космическая медицина — каждой из этих проблем посвящалось одно или несколько специальных заседаний. Отдельное заседание было посвящено проблемам безопасности в юношеских экспериментах по ракетной технике. Специалисты из Советского Союза, США, ФРГ, Италии и Испании рассказали на нем о работах молодых энтузиастов космических исследований над моделями ракет и ракетных двигателей.

Во время работы конгресса состоялись также VI Международный симпозиум по безопасности и спасанию в космосе, VII Международный симпозиум по истории астронавтики, XVI коллоквиум по космическому праву и III Международная студенческая конференция астронавтической федерации.

Характерной особенностью большинства докладов было то, что в них рассматривались задачи, еще далекие от окончательного решения. Участники конгресса стремились приоткрыть завесу времени, скрывающую от нашего взора будущие космические проблемы. Среди них — создание международной научной лаборатории на планете Марс, международной пилотируемой орбитальной лаборатории и проблемы космического транспорта. Космический транспорт связан с созданием космических кораблей многократного действия, которые, подобно самолетам, могли бы не раз стартовать в космос и возвращаться на Землю. Такие корабли могли бы обслуживать долговременные орбитальные станции — сменять экипажи и снабжать их всем необходимым. Транспортные корабли можно также использовать для инспектирования искусственных спутников — замены их оборудования и ремонта прямо на орбите.

В дискуссии по проблемам создания международной марсианской лаборатории участвовали академик А. А. Михайлов, члены-корреспонденты Академии наук СССР К. Я. Кондратьев и О. Г. Газенко, профессора В. Г. Курт и В. И. Мороз, американские ученые Дрейпер, Пикеринг, Страгхолд, ученые из Франции, Бельгии, Польши и других стран. Основной вывод, к которому пришли участники дискуссии, таков: в настоящее время человечество располагает техническими возможностями и знаниями, необходимыми для создания международной обитаемой станции на орбите, расположенной вблизи Марса, то есть для создания обитаемого искусственного спутника Марса.

Космические исследования постепенно приобретают международный характер. Советские ученые активно сотрудничают с учеными из других социалистических стран, а также с Францией, Индией и другими государствами. О научных результатах, полученных в результате запусков спутников «Интеркосмос», рассказал в первый же день работы конгресса директор Института спектроскопии Академии наук СССР профессор С. Л. Мандельштам.

По взаимной договоренности между правительствами СССР и США в 1975 году должен состояться первый совместный советско-американский космический эксперимент по стыковке кораблей «Союз» и «Аполлон». Времени до этого момента остается еще немало, но участники конгресса уже видели его на экране в научно-популярном фильме, представленном американской делегацией. А вслед за этим был показан наш фильм о совместных советско-американских исследованиях «Беринг». Они были предприняты для разработки методов изучения земных объектов (растительного покрова, характеристик почв, снежного и ледяного покрова) из космоса. Доклад об этих методах от имени большой группы ученых и космонавтов сделал В. И. Севастьянов.

В связи с предстоящими в будущем длительными космическими экспедициями к планетам Солнечной системы участники конгресса подробно обсудили многочисленные научные проблемы долгосрочного пребывания человека во враждебном ему космическом пространстве. Эти проблемы распадаются на две группы. Первая группа касается состояния человека в таком полете. Как скажется на его организме длительное воздействие невесомости? Как повлияет на него длительная разлука с привычным миром и пребывание в необычных условиях — не откажет ли его психика? Как перенесет организм неизбежную ограниченность движений, недостаток физических нагрузок — так называемую гиподинамию?

До сих пор пребывание человека в космосе в различных экспериментах продолжалось не более трех месяцев. Полученные при этом данные, казалось бы, убеждают нас в том, что человеческий организм способен приспосабливаться даже к таким необычным для него условиям. Космонавты обычно возвращались бодрыми и здоровыми. Но окончательный ответ на вопрос о том, насколько безопасным было их пребывание в космосе, могут дать только длительные физиологические и биохимические обследования. Недаром советский врач-космонавт Борис Егоров сказал на одной из пресс-конференций в Баку, что все полученные наукой сведения о влиянии невесомости и других необычных факторов характеризуют поведение либо всего организма в целом, либо отдельных его органов. Но до сих пор остается неясным, как эти факторы сказываются на жизнедеятельности отдельных живых клеток, из которых состоит наш организм. Потребуется еще немало времени, прежде чем мы сможем ответить на такие вопросы.

Вторая группа проблем связана с обеспечением космонавтов всем необходимым для длительных полетов — пищей, кислородом, водой. Если полет сравнительно недолгий, все это удается взять с собой в достаточных количествах. Но в более длительных полетах придется создавать особые замкнутые системы жизнеобеспечения космонавтов. Такие системы должны восстанавливать необходимые компоненты из продуктов жизнедеятельности, осуществлять своеобразный круговорот веществ в миниатюрном мире космического корабля. На конгрессе отмечалось, что американские ученые стремятся использовать для восстановления необходимых продуктов различные физико-химические методы — поглотители, реактивы и т. п. Советские ученые упорно ищут комбинации биологических систем, способные превращать отходы жизнедеятельности в новые полноценные продукты. Особенно большой интерес участников конгресса вызвал доклад красноярских ученых И. А. Терскова, И. И. Гительзона, Б. Г. Коврова и других, «Автономная по управлению система обеспечения жизнедеятельности человека, основанная на фотосинтезе высших и одноклеточных растений». В нем рассказывалось о результатах весьма необычного эксперимента. Группа исследователей несколько месяцев провела в земной модели космического корабля, не получая извне ни кислорода, ни воды. Эти продукты восстанавливались внутри корабля находившимися там растениями. Растения служили также пищей для участников эксперимента. Оранжерея общей площадью в 40 $м^2$ давала ежедневно 760 *г* пшеничных зерен и 6800 *г* свежих овощей, обеспечивая 25% потребности «космонавтов» в пище. Особенно важным в этом эксперименте было то, что весь контроль за работой системы жизнеобеспечения находился в руках «космонавтов» и происходил независимо от «земных наблюдателей», как если бы участники эксперимента действительно находились на огромном расстоянии от Земли.

Наибольшее количество докладов было посвящено влиянию космических исследований на земную науку и технику. В приветствии участникам конгресса президент Академии наук СССР академик М. В. Келдыш писал: «Развитие космонавтики оказывает значительное влияние на общий научно-технический прогресс, на интенсивное развитие многих областей прикладных наук и техники. В связи с запросами космической техники созданы десятки новых видов металлических и неметаллических конструкционных материалов, прочные свариваемые сплавы на основе титана, никеля, меди, молибдена, алюминия, специальные высококачественные стали, негорючие, жаропрочные, кислотостойкие и антикоррозийные материалы и покрытия, негазящие высокотемпературные электроизоляционные материалы и герметизирующие уплотнители, различные смазки, неорганические красители и лакокрасочные покрытия. Разработаны новые типы высокоэффективных источников и преобразователей электроэнергии. Большое развитие получили химия топлив и теория горения

...Потребности космонавтики содействовали решению многих вопросов в области автоматизации, совершенствования теории и средств дистанционного управления, систем оперативного контроля за функционированием сложных технических устройств, методов передачи и обработки информации».

Выход человека и научной аппаратуры в космическое пространство оказал революционное воздействие на астрономию. Открылась возможность исследовать все виды электромагнитных излучений далеких космических объектов. Гамма-излучение и рентгеновские лучи, ультрафиолетовое и инфракрасное излучения, радиоизлучения всех длин волн, словом все, что активно поглощается в верхних слоях атмосферы и не достигает поверхности Земли, стало доступно для непосредственного изучения.

Первый же метеорологический спутник революционизировал метеорологию, позволив ученым составлять карты мировой погоды и следить за ее изменениями в масштабах всей Земли. Метеорологические спутники и их помощники — быстродействующие электронные вычислительные машины, а также новая техника связи позволяют сделать реальностью не только точные долгосрочные прогнозы погоды, но и древнюю мечту человечества об управлении ею.

Физика Солнца, физика атмосферы, геомагнетизм, география, гидрология, геология — вот далеко не полный перечень наук, которым космические исследования несут небывалые возможности.

Хотя пора великих географических открытий давно уже прошла, но до сих пор половина поверхности земного шара не имеет точных карт. Даже аэрофотосъемка не может быстро решить эту проблему. Зато спутники, обозревающие огромные участки Земли, позволяют существенно ускорить картографирование земной поверхности.

Даже простые фотографии из космоса несут в себе массу ценной информации. В своем докладе «Применение телеметрических измерений для исследований земных ресурсов с помощью спутников» американский ученый Л. Джаффи показал, что если бы Бразилия воспользовалась снимками, сделанными из космоса, то гигантскую дорогу, которая строится сейчас через всю эту страну, можно было бы проложить по более выгодному маршруту, и стоила бы она намного дешевле.

В последний день работы конгресса был проведен второй Международный симпозиум по внеземным цивилизациям *). Основные доклады на нем были сделаны советскими учеными. В докладе У. Н. Закирова была обоснована принципиальная возможность создания искусственных спутников у некоторых близких к нам звезд — «эпсилон-Эридана», «тау-Кита», «эпсилон-Индейца» и «звезды Барнарда». Предполагается, что у этих звезд существуют свои естественные спутники, то есть они подобно Солнцу имеют планетные системы. В докладе Закирова показано, что для создания искусственных спутников этих звезд (межзвездных зондов) следует использовать ионные или плазменные двигатели, разрабатываемые в данное время. Эти двигатели позволяют отправлять межзвездные зонды на расстояния не более 16 световых лет **), то есть не более 15×10^{13} *км*! Для посылки межзвездных зондов в более далекие области Вселенной потребовались бы фотонные двигатели, возможность создания которых пока еще только обсуждается учеными.

Профессор В. С. Троицкий рассказал в своем докладе о поисках радиоизлучений, которые могли бы оказаться результатом технической деятельности внеземных цивилизаций. Систематические поиски таких излучений проводились в северной небесной полусфере с 1970 года. Исследования велись на радиоволнах дециметрового и сантиметрового диапазонов. Для устранения влияния земных радиопомех прием космического радиоизлучения производился одновременно в четырех далеко отстоящих друг от друга пунктах Советского Союза. Анализировались только те сигналы, которые были одновременно зарегистрированы во всех четырех пунктах. Об аналогичных работах другой группы советских ученых было рассказано в докладе Н. С. Кардашева, Л. М. Гинделиса и др. Поиски радиосигналов космических цивилизаций пока что не увенчались успехом, но их методики непрерывно совершенствуются, а масштабы расширяются.

В. А. Лешковцев

---

*) О первом таком симпозиуме мы рассказывали в статье: Гинделис Л. М. «CETI в вопросах и ответах» (см. «Квант», 1972, № 11).

**) Световой год — астрономическая единица расстояний, равная длине пути, который свет проходит в пустоте в течение года. Он составляет $9{,}5 \cdot 10^{12}$ *км*.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. На противоположных берегах реки напротив друг друга растут две пальмы. Высота одной из них 10 метров, другой — 15 метров, расстояние между основаниями пальм равно 25 метрам. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую на поверхность реки между пальмами. Птицы бросились к рыбе и достигли ее одновременно.

На каком расстоянии от основания более высокой пальмы выплыла рыба?

2. На улице идет дождь. В каком случае ведро, стоящее в кузове грузовика, быстрее наполнится: когда грузовик стоит или когда он движется?

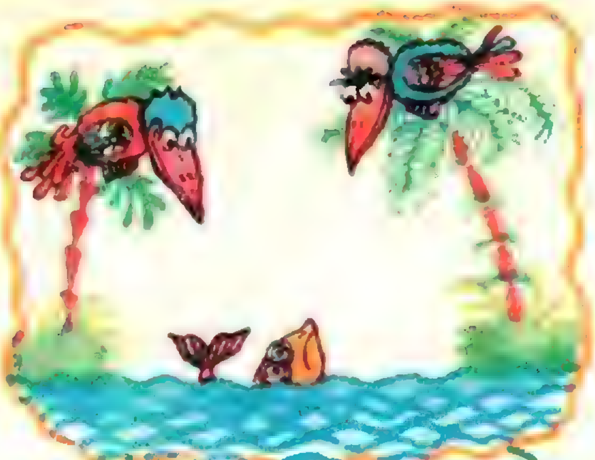
3. На лугу растет трава. Пустили на луг 9 коров, они опустошили луг за 4 дня. Если бы на луг пустили 8 коров, то они съели бы всю траву за 6 дней.

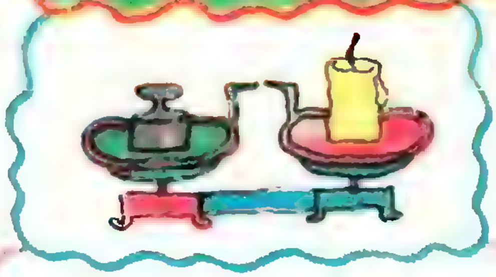
Сколько коров могут кормиться на лугу все время, пока растет трава?

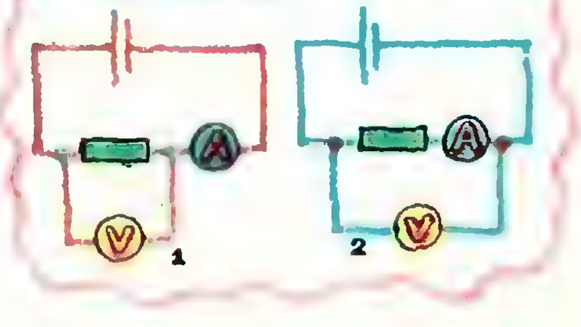
4. На чашечных весах уравновешена свеча. Нарушится ли равновесие, когда свечу зажгут? Если нарушится, то в какую сторону?

5. Для того чтобы определить неизвестное сопротивление, имея в своем распоряжении амперметр и вольтметр, один раз собрали схему, показанную на рисунке 1, другой раз — на рисунке 2. Измерили напряжение и ток. В каком случае полученное значение сопротивления будет ближе к истинному?

Художник Э. Назаров







Б. А. Кордемский

Топологические опыты своими руками

Лист Мёбиуса и переплетение колец

Поверхность кольца, надеваемого на палец, имеет две стороны (рис. 1). Одной стороной кольцо соприкасается с пальцем, вторая сторона — наружная. У этих сторон две границы (два края), каждая имеет форму окружности. Если какая-нибудь букашка захочет переползти с наружной стороны кольца на внутреннюю, то она при этом непременно должна пересечь ту или другую границу.

Легко приготовить простую модель поверхности совсем другого «фасона» — не двухсторонней, как поверхность кольца, а односторонней поверхности (рис. 2). Первым описал такую поверхность Август Мёбиус (в 1863 году). Перекрутите на полоборота один конец прямоугольной бумажной полоски и приклейте его к другому концу той же полоски. Получится модель поверхности, у которой нет двух сторон — «внутренней» и «внешней». Эту модель так и называют: «лист Мёбиуса».

Чтобы убедиться в том, что у поверхности листа Мёбиуса только одна сторона, возьмите цветной карандаш и начните последовательно закрашивать лист, не отрывая карандаша от его поверхности и не пересекая края листа. Вернувшись к тому месту, с которого начали, вы увидите, что окажется окрашенной вся поверхность листа, хотя его край вы и не пересекали ни разу.

Возьмите теперь несколько листов бумаги поплотней, клей, ножницы и проделайте несколько практических упражнений с листом Мёбиуса и другими моделями, изготовляемыми из прямоугольных полосок бумаги.

Опыт 1. Что получится, если обыкновенное (не перекрученное) бумажное колечко разрезать вдоль его средней линии? Очевидно — два колечка, причем длина окружности каждого будет такой же, как длина ок-

---

См. «Квант, 1974, № 2, с. 58.

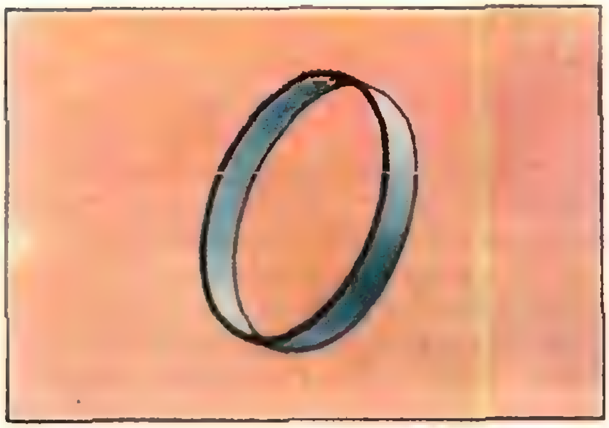


Рис. 1.

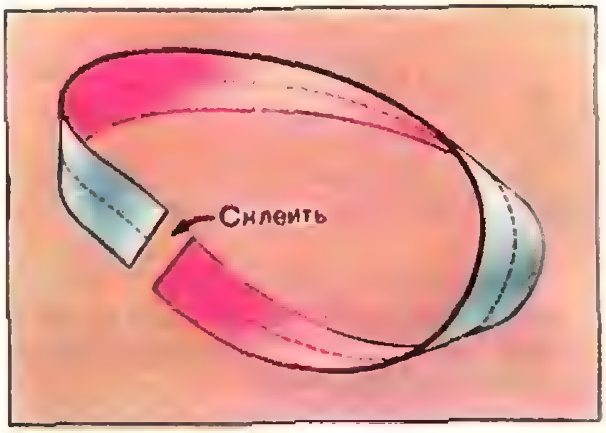


Рис. 2.

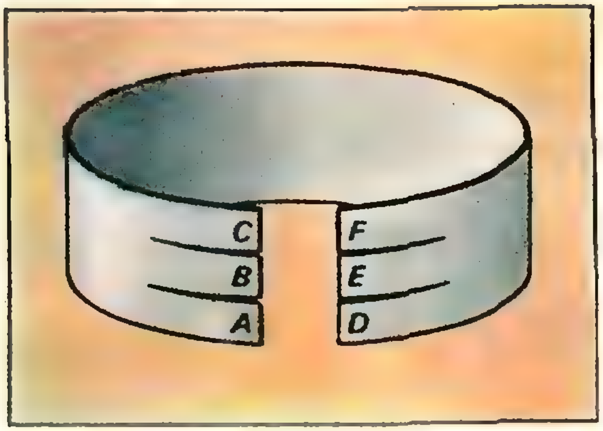


Рис. 3.

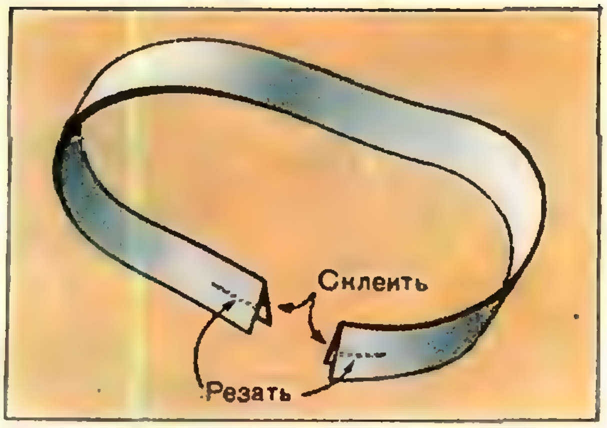


Рис. 4.

ружности первоначально взятого колечка. А если вы разрежете лист Мёбиуса вдоль его средней линии, то получится...

Проделайте и посмотрите, что получится.

Опыт 2. Приготовьте второй лист Мёбиуса из достаточно широкой полоски и разрезайте его ножницами так, чтобы линия разреза все время шла вдвое ближе к левому краю полоски, чем к правому (линия разреза сбойдет лист Мёбиуса дважды). Вот теперь образуется...

Тот же результат получится, если вновь взять бумажную полоску; один ее конец перекрутить на полный оборот (на 360°), приклеить к другому концу и разрезать получившуюся модель по средней линии.

Опыт 3. Надрежьте концы бумажной полоски, как показано на рисунке 3. Склейте концы *A* и *D*. Пропустите конец *B* под *A* и приклейте его к *E*. Пропустите конец *C* между *B* и *A*, а конец *F* между *D* и *E*, после чего склейте концы *C* и *F*. Все склеивания концов производите прямо, то есть без предварительного перекручивания.

а) Теперь каждый начатый разрез продолжайте вдоль всей модели. Получится...

б) Если вы ошибетесь и конец *C* приклеите к концу *F*, не пропустив *C* между *B* и *A*, то после указанного разрезания получится...

Опыт 4 (предложен Э. Стеньоном в 1930 году). Еще раз приготовьте бумажную полоску с надрезами (рис. 3). Поверните конец *E* направо (верхним концом от себя) и склейте с концом *C*. Поверните конец *F* направо и приклейте к концу *B*. Пропустите конец *A* под *B* и склейте его с концом *D* без перекручивания. Теперь продолжайте первый и второй разрезы вдоль всей модели — получится...

Опыт 5. Любопытно решение такой задачи: подготовить из бумажной полоски модель, из которой можно было бы получить переплетение (в частности, обычную цепь) *n* колец при помощи лишь одного сквозного разрезания. (Авторы темы M. Brooke and J. Madachy.)

Секрет решения заключен в первоначальном сгибании полоски по ее длине еще до разрезания и в способе склеивания надрезанных концов согнутой полоски.

Начните с полоски, перегнутой по длине один раз (рис. 4). Перекрутите ее на полный оборот (360°) и склейте концы, накладывая «домиком» один конец на другой. Теперь разрежьте двойной слой склеенной ленты по ее средней линии — получатся три кольца, сцепленные попарно.

Опыт 6. Согните бумажную полоску и сделайте надрезы, как показано на рисунке 5. Не перекручивая, склейте концы согнутой полоски, так, как показано на рисунке 6. Продолжайте разрез вдоль всей модели по двойному слою.

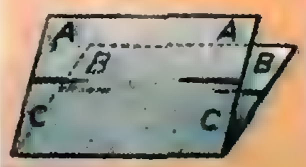


Рис. 5.

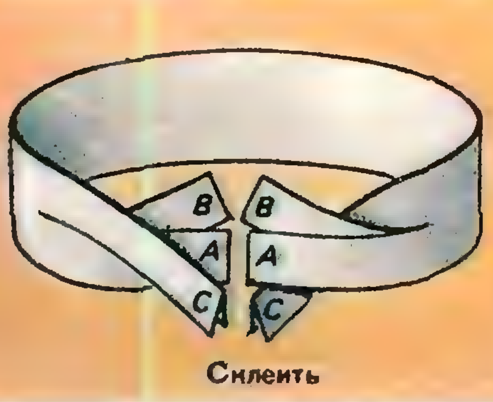


Рис. 6.

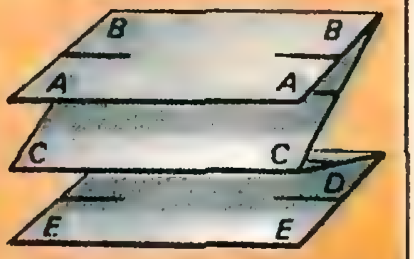


Рис. 7.

а) Если сделано все точно, то получится...

б) Если вы допустите некоторое отклонение от инструкции, то могут получиться...

Опыт 7. Чтобы получить цепь из колец с помощью всего лишь одного сквозного разреза, возьмите достаточно широкую полоску бумаги и согните ее «гармошкой» (рис. 7). Надрежьте концы, как показано на рисунке, придайте согнутой полоске форму кольца и склеивайте такие концы: *C* и *C*, *D* и *D*, *E* и *E* — прямо, как они соединялись бы при смыкании концов полоски для образования простого кольца; *B* и *B* — предварительно протащив один из этих концов под кольцами *CC* и *DD*; *A* и *A* — предварительно протащив один из этих концов под кольцами *CC* и *EE*.

а) Теперь продолжайте разрез вдоль модели по всем складкам — получится...

б) Если работа будет выполнена с некоторым отклонением от инструкции (по ошибке или преднамеренно), то все равно получится ...

Ответы к предыдущим задачам и опытам приведены в конце журнала. К следующим шести опытам указаний не будет. Придется самостоятельно искать пути решения. Ставим такое условие: добиться результатов с помощью одного сквозного разреза модели, сконструированной из бумажной полоски, некоторым образом согнутой, надрезанной и концы которой склеены.

Опыт 8. Изготовить цепь в 4 кольца.

Опыт 9. Изготовить две отдельные цепи в 2 и 3 кольца каждая.

Опыт 10. Изготовить цепь в 3 кольца с четвертым кольцом, зацепившимся за среднее кольцо.

Опыт 11. Изготовить цепь в 9 колец.

Опыт 12. Изготовить три отдельных куска цепи по 3 кольца в каждом куске (из одной бумажной полоски).

Опыт 13. Изготовить отдельный кусок цепи в 4 кольца и второй отдельный кусок цепи в 5 колец (из одной бумажной полоски).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Проективные шахматы»

1. 1. Фg4 — d1 — M_1! В распоряжении черных — ходы ладьей, слоном или конями. При ходе ладьи d6 или слона c4 на любое конечное поле доски их с матом берет белый ферзь с M_1. Если ладья d6 идет на поле O_y (через d8), то ее берет белая ладья с матом, а если слон c4 бьет ферзя на M_1, то этого слона с матом берет белый слон h3. Наконец, на любой ход коня h7 следует 2. Kf6 мат, а на любой ход коня g6 — 2. Ke7 мат.

2. 1. Cd4 — h8 — M_1! (с угрозой 2. c3 — c4 мат) 1...Ch3 — f1 2. Kh4 — g2! (с угрозой 2: Kg2 : e3 мат) 2...Cf1 : g2 3. c3 — c4 мат: 1...Ch3 — M_2 2. Kh4 — g2! Kg3 — f1 3. c3 — c4 мат!

К статье «Об одной интересной книге по математике»

1. Существуют две схемы.

3. Для одной схемы — изменить ориентацию лицевой матрицы. Для другой — разделить лицевую матрицу пополам горизонтальной осью, поменять местами половины, не изменяя ориентации.

К статье «Читатели советуют»

1. Убедиться, что требуемым свойством обладает значение $n = 4$, а роль p играет число 7.

2. Убедиться, что требуемым свойством обладает значение $n = 2$, а роль p играет число 3.

3. Показать, что $\log_4 60 < 3 < \log_3 30$.

4. Переписать предложенное неравенство в виде

$$\frac{\sqrt[m]{c+1}-\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c}-\sqrt[m]{c-1}}<1,$$

для дальнейшего доказательства использовать равенства

$$1=\left(\sqrt[m]{c+1}\right)^m-\left(\sqrt[m]{c}\right)^m,$$
$$1=\left(\sqrt[m]{c}\right)^m-\left(\sqrt[m]{c-1}\right)^m$$

и разложение их правых частей на множители (см. с. 49).

5. $B =$

$$=\frac{x}{m+\sqrt{m^2-x^2}}\,\frac{2m+\sqrt{m^2-x^2}}{2m-\sqrt{m^2-x^2}}.$$

Указание. Применить подстановку $x = m\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

6. Наибольшее значение равно 2 и достигается при $x = 1$, наименьшее значение равно 0 и достигается при $x = -1$.

7. Перегнуть лист бумаги так, чтобы положительное направление оси x совпало с положительным направлением оси y. Тогда линия сгиба будет биссектрисой $y = x$ первого координатного угла, пересекающейся с графиком $y = x^2$ в точке (1, 1). Перпендикуляр, опущенный из этой точки на ось, даст возможность установить единицу длины.

8. $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{-11\pm3\sqrt{11}i}{2}$.

Указание. Переписать уравнение в виде

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\right)^2}=11$$

и использовать замену $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{10}$.

9. $x_{1,2}=\left(1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^2$. Указание. Положив $\sqrt{x}=z$, переписать уравнение в виде $z^4+(z-2)^4=4$. Показать, что получающиеся действительные значения x являются корнями исходного уравнения.

10. $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -2$, $y_2 = 1$.

11. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Указание. Использовать замену $y = x - 2$.

12. $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. Указание. Использовать замену $y = x+\dfrac{3}{2}$.

К статье «О законе сохранения энергии в механике»

1. В процессе соударения на шарик со стороны стенки действует сила, направленная все время в одну сторону. Поэтому импульс меняется:

$$\Delta(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\Delta t.$$

Перемещение шарика в процессе соударения сначала происходит против силы **F**, а затем по направлению **F**. Поэтому работа

$$A = -F\Delta s + F\Delta s = \Delta K = 0.$$

Работа, а значит, и изменение кинетической энергии за время соударения равны нулю.

2. Давление воды у дна стакана больше, чем у поверхности. Поэтому кинетическая

энергия воды, втекающей в сосуд, открытый у дна, больше, чем кинетическая энергия воды, втекающей в сосуд у поверхности. В конце концов кинетическая энергия переходит в тепло. Следовательно, вода больше нагреется во втором случае, чем в первом.

3. В движущейся системе отсчета сила реакции плоскости не перпендикулярна скорости кубика. Она и совершает работу, уменьшающую энергию кубика.

4. Изменение импульса тела равно импульсу приложенной к нему силы. Так как силы тяготения, действующие на камень и Землю, равны по величине и действуют одинаковое время, то равны и изменения импульсов этих тел.

Изменение кинетической энергии тела равно работе силы, которая зависит от силы и от перемещения. Силы одинаковы, а перемещения камня и Земли, обратно пропорциональные их массам, различны. За время падения камня перемещение Земли будет столь малым, что им можно пренебречь. Поэтому закон сохранения энергии можно записать в форме, не учитывающей изменение кинетической энергии Земли.

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Математика

Химический факультет

1. 18 коп.

2. $x \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x < \log_3 5$. Указание. Ввести новое неизвестное $y = \log_2 (5 - 3^x)$.

3. $x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6}$.

4. $V = 4(1+\sqrt{10})^3, \ \alpha = \arccos(-1/10)$. Указание. Заметьте, что радиус первого шара равен трети высоты пирамиды.

5. Оба острых угла равны 45°.

Факультет биологии

1. 6 *час.*

2. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$; k, n — целые числа.

3. $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; k — целое число.

4. 5/12.

5. $a \geqslant 2$. Указание. Найти все действительные значения a, при которых трехчлен $y = z^2 - az - (a+3)$ имеет хотя бы один неотрицательный корень.

Геологический факультет

1. $x = 1, \ y = (-1)^k \frac{\pi}{6} - 1 + k\pi$; k — целое число.

2. $x > -2$.

3. $9 + \sqrt{11}$ *км/ч.*

4. $1/2 < x < 2, \ x \neq 1, \ x \neq 3/2$.

5. $\sqrt{2}$ *см.*

Факультет почвоведения

1. 9 юношей и 6 девушек.

2. Второе выражение больше.

3. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = (-1)^n \times \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{\pi}{4} + n\pi$; k, n — целые числа.

4. 7.

5. $x_1 = 1, \ x_2 = 7$.

Географический факультет

1. 14 *м/ч* и 18 *м/ч.*

2. Предложенное выражение равно 6.

3. $\sqrt{10}$.

4. $x = -2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}$.

5. $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; n — целое число.

Физика

1. Обозначим точки, где находились первоначально заряды q_1 и q_2, буквами P и Q. Пусть расстояние между этими точками равно L. Удалим временно заряд q_1 в бесконечность. При этом, согласно определению потенциала, нужно совершить работу $A_1 = -q_1(\varphi_{0P} + \varphi_{2P})$, где $\varphi_{0P} = q_0/4\pi\varepsilon_0 l_1$ и $\varphi_{2P} = q_2/4\pi\varepsilon_0 L$ — потенциалы в точке P, создаваемые зарядами q_0 и q_2. Переместим теперь заряд q_2 в точку P. Для этого потребуется совершить работу $A_2 = q_2(\varphi_{0P} - \varphi_{0Q})$, где $\varphi_{0Q} = q_0/4\pi\varepsilon_0 l_2$ — потенциал в точке Q, создаваемый зарядом q_0. Наконец, возвратив из бесконечности заряд q_1 в точку Q, мы совершим работу $A_3 = q_1(\varphi_{0Q} + \varphi_{2Q})$, где $\varphi_{2Q} = \varphi_{2P} = q_2/4\pi\varepsilon_0 L$ — потенциал в точке Q, создаваемый зарядом q_2, находящимся в точке P. Полная работа, совершенная при перемещении зарядов q_1 и q_2, равна

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{q_0(q_2 - q_1)(l_2 - l_1)}{4\pi\varepsilon_0 l_2 l_1} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ дж}.$$

2. Самолет спускается по прямой линии, составляющей с горизонтом угол α, причем $\sin\alpha = \frac{h_1 - h_2}{l}$. На самолет действуют: сила тяжести, направленная вертикально вниз и равная mg, подъемная сила, направленная перпендикулярно линии движения самолета, и сила f сопротивления воздуха, направленная в сторону, противоположную движению.

Так как самолет движется равномерно, то векторная сумма сил равна нулю. Следовательно, равна нулю и сумма проекций всех сил на направление движения. Из последнего условия легко найти, что $f = mg\sin\alpha = mg\frac{h_1 - h_2}{l}$. Когда самолет поднимается (по условию, вдоль линии, составляющей с горизонтом тот же угол α), то, кроме перечисленных выше сил, на него действует еще сила тяги F, создаваемая мотором и направленная в сторону движения. Сила сопротивления f имеет ту же величину, так как скорость самолета не изменилась. Так же, как и при спуске, сумма проекций сил на направление движения равна нулю, причем проекция $mg\sin\alpha$ силы тяжести и проекция f силы сопротивления направлены против движения, а проекция F силы тяги — в сторону движения. Следовательно, $F = mg\sin\alpha + f = 2mg\frac{h_1 - h_2}{l}$.

Как известно, мощность $N = Fv$. Таким образом, при подъеме мотор самолета развивает мощность

$$N = 2mgv\frac{h_1 - h_2}{l} = 200\ \text{квт} \approx 272\ \text{л. с.}$$

3. Давление воды на масло, согласно закону Паскаля, $p = p_1 + p_0$, где $p_1 = \rho_0 g(h + H)$ — гидростатическое давление столба воды, $\rho_0 = 10^3\ \text{кг/м}^3$ — плотность воды, $g \approx 10\ \text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения. С другой стороны, давление на воду со стороны масла также должно быть равно p, так как граница масла и воды неподвижна. Оно складывается из давления $p_2 = F/S$, которое оказывает на масло дно сосуда, и гидростатического давления столба масла $p_3 = \rho gh$. Таким образом, $p = p_1 + p_0 = p_2 + p_3$. Отсюда $F = S[p_0 + \rho_0 g(h + H) - \rho gh] \approx 1{,}22\cdot 10^4\ \text{н}$.

4. Пусть A — точка, а B — ее изображение, когда линза Л находится в первоначальном положении (рис. 1). Расстояние a от точки до линзы можно найти из формулы линзы $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$. Знаки «минус» в формуле стоят потому, что изображение и фокус в случае рассеивающей линзы мнимые. Отсюда $a = \frac{fb}{f - b}$. Когда линза сдвинута и занимает положение Л′, изображение находится на побочной оси линзы в плоскости, лежащей на том же расстоянии b от линзы (точка B'). Искомое расстояние $l = BB'$. Из подобия треугольников ABB' и AOO', где O и O' — центры линзы в начальном и конечном положениях, следует: $\frac{l}{L} = \frac{a - b}{a}$.

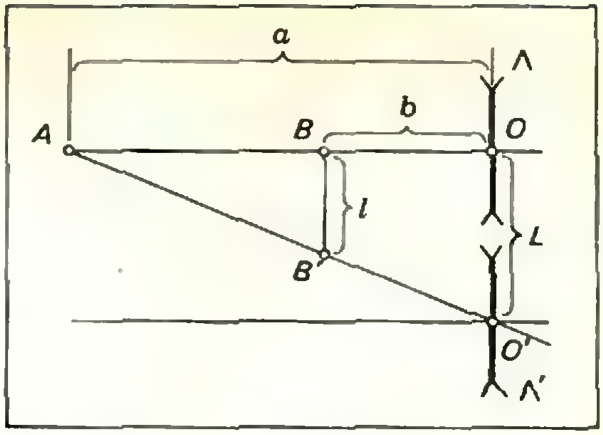


Рис. 1.

Отсюда, учитывая значение a, найдем $l = \frac{(a - b)\cdot L}{a} = \frac{Lb}{f} = 1{,}2\ \text{см}$.

К статье «Встречи с тремя неизвестными»

1. а) 186 859 + 96 959 = 283 818; 385 869 + 95 969 = 481 838; 387 869 + 97 969 = 485 838;

б) 6923 + 6943 = 13 866; 6943 + 6923 = 13 866; 6523 + 6543 = 13 066; 6543 + 6523 = 13 066;

в) БУЕР — это 1972, 5472 или 8632.

2. Будем производить следующий цикл действий:

а) наливаем воду в 17-литровый бидон;

б) наполняем из него 12-литровый; воду из 12-литрового выливаем в бочку;

в) то, что осталось в 17-литровом, переливаем в 12-литровый (если он наполнится, то выливаем содержимое в бочку и снова переливаем остаток из 17-литрового в 12-литровый).

Шесть раз наполнив большой сосуд, наберем в общей сложности 102 литра. Из малого бидона вода будет вылита 8 раз, всего 96 литров. Останется ровно 6 литров.

3. 7980 : 95 = 84 или 7030 : 95 = 74.

4. Два шестиугольника могут разделить плоскость на 38 частей (рис. 2), а два выпуклых — только на 14. Докажите, что число частей, на которые делят плоскость два многоугольника, равно числу точек пересечения их сторон, увеличенному на 2.

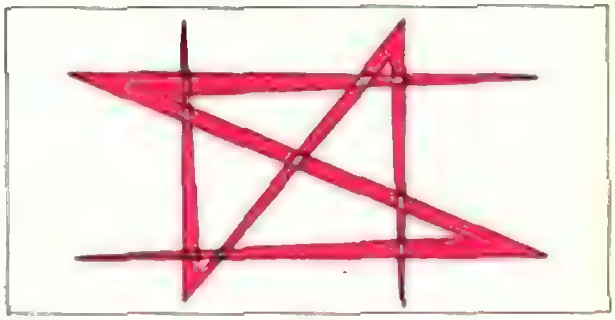


Рис. 2.

5. Последняя цифра произведения определяется по последним цифрам множителей: $7, 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7, 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7, \ldots$ Эти числа оканчиваются на 7, 9, 3, 1, 7, 9,... соответственно, последние цифры повторяются через три на четвертую. Ответ: 9.

6. Ноги естественно считать парами. Перевяжем красной ленточкой по одной паре ног у каждого из «присутствующих». Тогда неперевязанных ног останется 13 пар — по одной паре у каждой собаки, по две пары у каждой мухи. Понятно, что мух не больше шести. И если в комнате 1, 2, 3, 4, 5, 6 мух, то собак соответственно 11, 9, 7, 5, 3, 1. Первые три случая не подходят (люди-то есть!), остальные дают три решения — 1, 2, 3 человека соответственно.

7. Участки можно разбить на пары не имеющих друг с другом общих сторон. Докажите, что произведения площадей участков каждой пары равны между собой. Ответ: площадь четвертого участка может быть равна 4/3 *га*, 3 *га*, 12 *га* (участок, входящий в пару с четвертым, имеет площадь 6 *га*, 4 *га*, 2 *га* соответственно).

8. Ответ: в этом классе 12 скрипачей; плавают, но не разводят хомяков 2 ученика; ребят, разводящих хомяков, но не плавающих и не играющих на скрипке, может быть 0, 1, 2, . . . , 22. Для наглядности полезно нарисовать три пересекающихся круга — один для скрипачей, второй — для пловцов, третий — для разводящих хомяков. Тогда плавающие скрипачи будут стоять в пересечении первого и второго кругов, а 3 человека, занимающиеся всеми тремя видами полезной деятельности — в пересечении всех трех кругов и т. д.

К статье «Топологические опыты своими руками»

(*см. «Квант» 1974, №№ 2, 3*)

Задача 1. Например, так, как на рисунке 3.

Задача 2. Одна из карт изображена на рисунке 4.

Задача 3. Например, так, как на рисунке 5.

Опыт 1. . . . одно перекрученное кольцо.

Опыт 2. . . . 2 кольца, но они будут сцеплены.

Опыт 3. а) . . . переплетение трех колец.

б) . . . цепь из трех колец.

Опыт 4. . . . 2 сцепленных кольца: одно большое и одно маленькое.

Опыт 6. а) . . . цепь из 3 колец.

б) . . . три разрозненных кольца.

Опыт 7. а) . . . цепь из 5 колец.

б) . . . 5 колец, частично переплетенных, частично сцепленных.

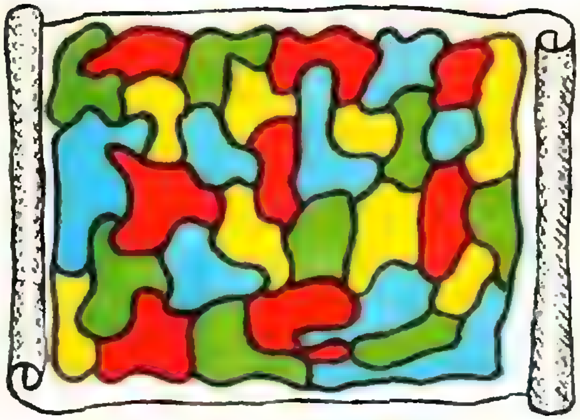


Рис. 3.

К статье «Игра в 15»

(*см. «Квант», 1974, № 2*)

1. а) Проверяется индукцией по n.

б) Если меняются местами соседние числа, то утверждение очевидно: прибавляется или исчезает один беспорядок. Если между числами i и j, которые меняются местами, стоят s чисел:

$$\ldots, i, k_1, k_2, \ldots, k_3, j, \ldots,$$

то транспозицию чисел i и j можно получить, последовательно выполнив $2s+1$ транспозицию соседних чисел.

в) Воспользуйтесь следующим предложением, которое доказывается индукцией по n: *все перестановки из n чисел можно выписать в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией* (*причем начинать можно с любой перестановки*), или заметьте, что четные и нечетные перестановки получаются друг из друга переменой мест первых двух чисел перестановки.

2. Перестановок из n чисел в n раз больше, чем перестановок из $(n-1)$ числа.

3. Раскрасим коробочку для игры в 15, как шахматную доску. При каждом передвижении шашки цвет свободной клетки меняется. На рисунках 1 и 2 в статье свободна одна и та же клетка. Значит, от одного из приведенных на них расположений к дру-

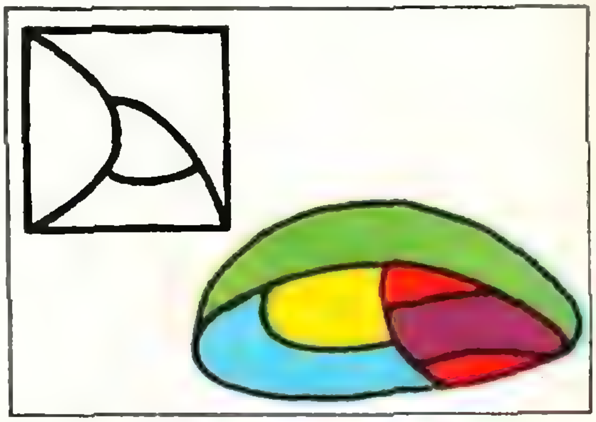


Рис. 4. Рис. 5.

тому нельзя перейти, сделав нечетное число передвижений шашек.

4. См. решение задачи 1, б).

6. При циклическом сдвиге строки, не содержащей пустых клеток, четность перестановки, соответствующей расположению шашек, меняется.

Кроме того, в этой игре можно делать то же, что и в игре в 15. Значит, любое расположение шашек можно перевести в любое другое (используя не более одного циклического сдвига).

7. а) Можно. Для доказательства каждому расположению шашек сопоставим перестановку из чисел 1, . . ., 16 по следующему правилу. Сначала выпишем номера шашек в 1-й строке, потом во 2-й, 3-й и 4-й (в каждой — слева направо). Проделаем над «нормальным» расположением следующие преобразования: сдвинем циклически 1-ю строку влево, потом 1-й столбец вверх, потом 1-ю строку вправо и, наконец, 1-й столбец вниз:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \\ \leftarrow & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \uparrow & & & \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & & & \\ 5 & 3 & 4 & 1 & \rightarrow \\ 9 & 6 & 7 & 8 & \\ 13 & 10 & 11 & 12 & \\ 2 & 14 & 15 & 16 & \end{array}$$

(а) (б) (в)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \\ 13 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 14 & 15 & 16 \\ \downarrow & & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & & \end{array}$$

(г) (д)

Эту серию преобразований коротко обозначим так: (1←, 1↑, 1→, 1↓). Наши 4 преобразования перевели перестановку 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . ., 16 в 2, 5, 3, 4, 1, 6, 7, . . ., 16: числа 1, 2, и 5 передвинулись циклически, остальные остались на месте. Применяя к расположению (д) аналогичные 4 преобразования (2→, 2↓, 2←, 2↑), получим расположение, характеризуемое перестановкой 2, 6, 3, 4, 5, 1, 7, . . ., 16. Серия (1←, 2↑, 1→, 2↓), примененная к полученному расположению, приводит к перестановке 2, 3, 1, 4, 5, 6, 7, . . ., 16. В результате 12 преобразований числа 1, 2, 3 передвинулись по циклу. Тройки чисел (1, 2, 3) и (4, 3, 2) в «нормальном» расположении (а) равноправны. Поэтому легко подобрать 12 преобразований, которые переводят расположение (а) в расположение, характеризуемое перестановкой 1, 4, 2, 3, 5, 6, 7, . . ., 16. Применяя к полученному расположению 12 преобразований, выписанных вначале, получаем: 4, 2, 1, 3, 5, 6, 7, . . ., 16. Циклический сдвиг 1-й строки приводит окончательно к 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 16 (числа 1 и 2 поменялись местами).

б) В игре в 16 на торе любые две соседние клетки равноправны. Поэтому в задаче 7, а) фактически доказано, что любые две соседние шашки можно поменять местами. Согласно упражнению 4 отсюда следует, что любое расположение шашек можно перевести в любое другое.

в) Разберитесь сначала с игрой в 9 на торе. Обратите внимание на то, что случаи четного и нечетного n принципиально различны.

К задачам «Квант» для младших школьников
(см. «Квант», 1974, № 2)

1. 5 школьников; 1, 4, 5, 6, [illegible] коп.

2. Одинаково.

3. 684 259 × 2 = 1 368 518.

4. См. рис. 6.

5. 317.

6. Нет. Замененная лампочка будет гореть слабее, так как ее сопротивление меньше, чем у остальных лампочек, а ток в цепи практически не изменится.

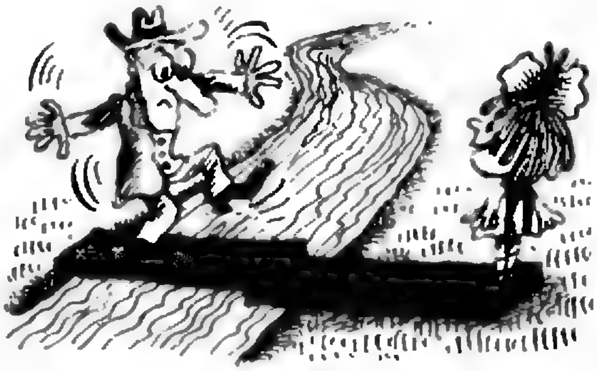


Рис. 6.

К «Чайнворду»
(см. «Квант», 1974, № 2, 4-ю с. обл.)

1. Понселе. 2. Евклид. 3. Дезарг. 4. Галуа. 5. Архимед. 6. Дюйм. 7. Монж. 8. Жирар. 9. Румб. 10. Бурбаки. 11. Интеграл. 12. Лудольф. 13. Фалес. 14. Софизм. 15. Мерсени. 16. Нигилистка. 17. Абак. 18. Каши. 19. Ибн-Сина. 20. Амбарцумян.

Корректор *Н. Б. Румянцева*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/XII-73 г.
Подписано в печать 7/II-74 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,60
Тир. 384 055 экз Т-02954
Цена 30 коп. Заказ 2543

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

UNITED STATES

ARGENTINA
1706 - 1956
40

12
AEREO
1706 1956
CUBA

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ БЕНДЖАМИНУ ФРАНКЛИНУ

Бенджамин (Вениамин) Франклин (1706—1790 гг.)— выдающийся американский политический и общественный деятель, дипломат, журналист, ученый; один из образованнейших людей своего времени.

Франклин основал в Филадельфии первую в США публичную библиотеку, организовал Американское философское общество, основал Пенсильванский университет.

Научные интересы Франклина были очень широки, но главной областью его исследований явилась физика. Наиболее известны исследования Франклина в области электричества. Он объяснил принцип действия лейденской банки, ввел общепринятое в настоящее время обозначение двух противоположных состояний заряженных тел знаками «+» и «—».

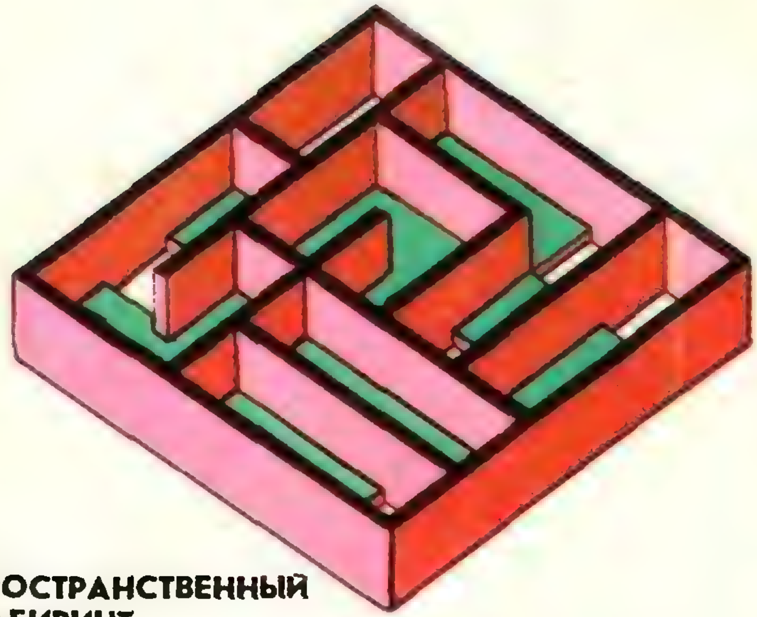
Франклин проделал блестящие эксперименты по изучению атмосферного электричества. Он продемонстрировал электрическую природу молнии, пришел к выводу о том, что грозовые облака заряжены большей частью отрицательно. Им также было предложено эффективное средство защиты от грозового разряда — громоотвод.

Марки, посвященные Бенджамину Франклину, выпускались неоднократно. На фото вы видите три марки с портретом Франклина, выпущенные на его родине в США, и пять марок, выпущенных к его 250-летию в СССР, Румынии, Болгарии, Аргентине, на Кубе и во Франции.

А. В. Алтыкис

Индекс 70465

3



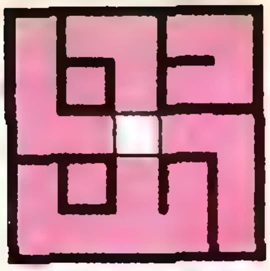
ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЛАБИРИНТ

Всем известны лабиринты, коридоры которых лежат в одной плоскости. Но в природе существуют и пространственные лабиринты, коридоры которых расположены на разных уровнях. Это пещеры. Исследователи пещер — спелеологи — обладают хорошо развитым пространственным воображением. Они сравнительно легко ориентируются в хитросплетениях переходов, поворотов, подъемов, спусков и тупиков. Станем и мы на некоторое время спелеологами.

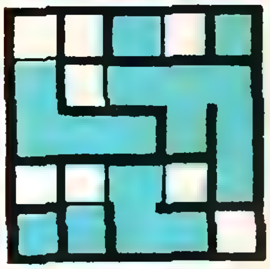
Перед вами план этажей пространственного лабиринта. Номера этажей помечены соответствующими цифрами, цифрой 6 обозначена крыша. Все планы ориентированы одинаково (направление «юг — север» на них одно и то же). Черными линиями обозначены непроницаемые перегородки, белым цветом — отверстия в полу, сквозь которые можно переходить с одного этажа на другой (вверх — через отверстие в потолке). Требуется, войдя в отверстие в крыше и пройдя по переходам, выйти сквозь отверстие в полу первого этажа. Можно двигаться и в противоположном направлении, входя с подпола первого этажа и выходя на крышу.

Лабиринт можно сделать из листового прозрачного плексигласа, и пропускать через него шарик для настольного тенниса. В таком случае ширина коридоров и высота этажей должна составлять 40—45 мм (не забудьте учесть толщину плексигласа!). На рисунке показан пол третьего этажа с установленными на нем внутренними перегородками и вырезанными в полу отверстиями (наружные стены делаются общими для всего лабиринта). При накладывании этажей нужно быть внимательным: не перепутать их друг с другом и не изменить ориентацию. Выходное отверстие в крыше обводится какой-нибудь краской, чтобы его не спутать с выходом в полу первого этажа. Запустив шарик, вы можете для облегчения работы переворачивать лабиринт.

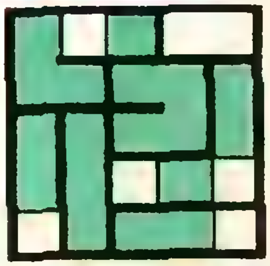
Ваш лабиринт будет интересным и полезным развлечением для друзей.



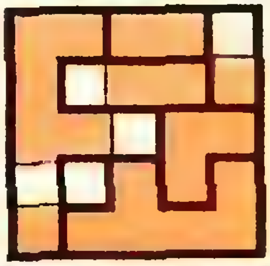
1



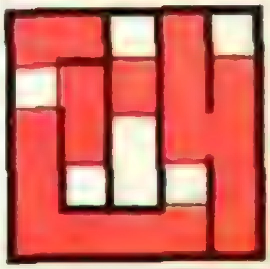
2



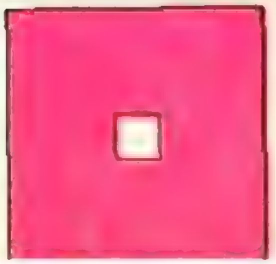
3



4



5



6

НОМЕР
4

Основан в 1970 году.
1974
4

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ

2 **Академии наук СССР 250 лет**
3 *Б. В. Гнеденко.* Академия наук и прогресс математики
12 *С. И. Вавилов.* Очерк развития физики в Академии наук
18 *А. К. Кикоин.* Свободное падение тел на вращающуюся Землю
23 *Э. Г. Белага.* Арифметика на географической карте

Задачник «Кванта»

30 Задачи М256—М260; Ф268—Ф272
32 Решения задач М211—М218; Ф223—Ф227

Практикум абитуриента

41 *Ю. В. Сидоров.* Аргумент комплексного числа
47 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
50 *А. Н. Борзяк, В. И. Давыдов, П. Т. Дыбов, И. А. Дьяконов, А. С. Иванов.* Телевидение готовит в вуз

Рецензии, библиография

52 *Г. В. Дорофеев.* Методическое пособие по разделу «Неравенства»?

«Квант» для младших школьников

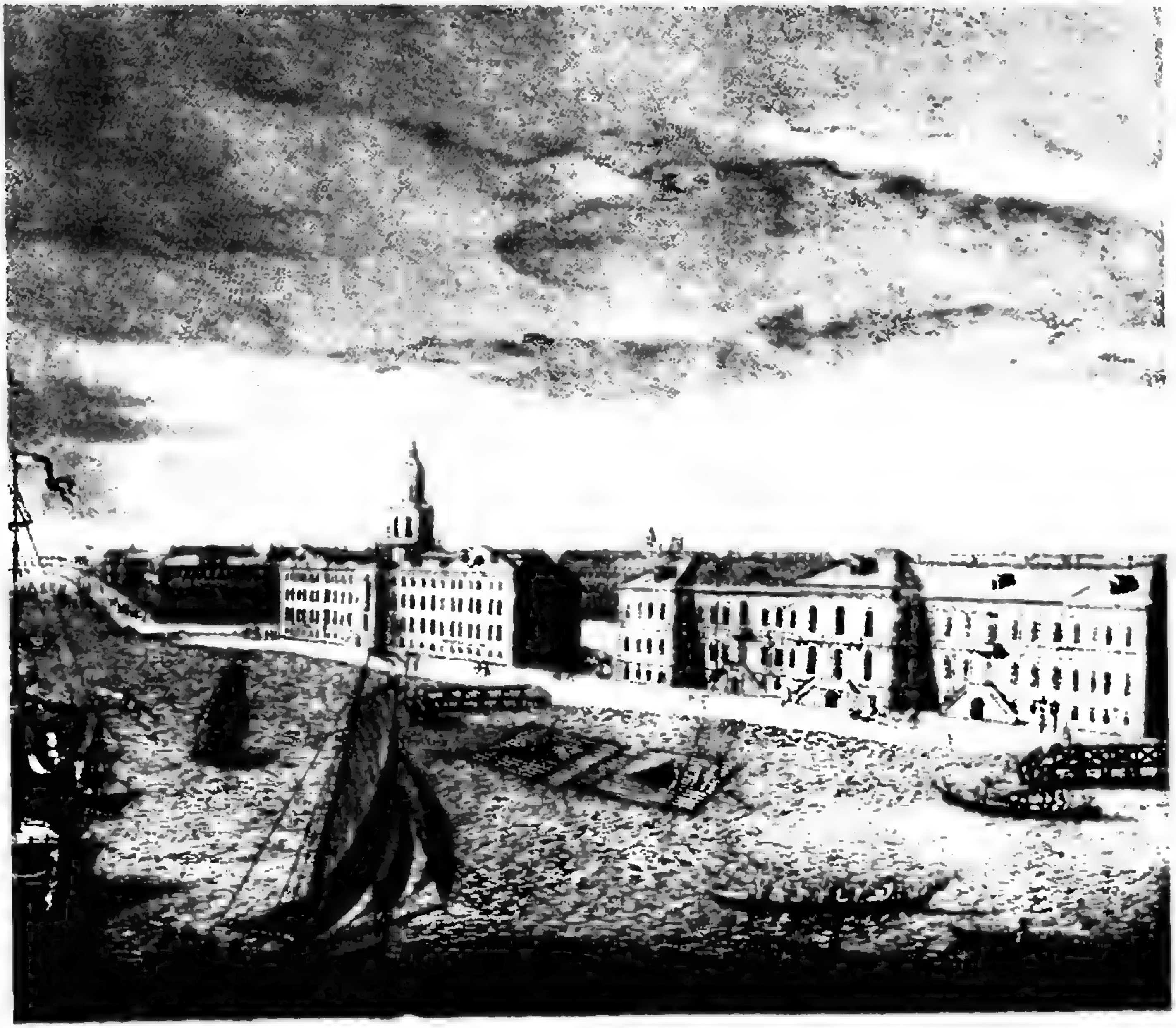
54 Задачи
55 *Б. А. Кордемский.* Турист в незнакомом городе
57 **Ответы, указания, решения**

Уголок коллекционера

В. А. Лёшковцев. В. И. Ленин — величайший ученый XX века (*3-я с. обложки*)

На первой странице обложки воспроизведена картина художника Иващенко «Прыжок»

© *«Квант», 1974 год.*



На приведенной здесь гравюре изображен бывший дворец царицы Прасковьи Федоровны (справа), в котором первоначально размещалась Академия наук, в том числе ее Физический кабинет. Рядом здание Кунсткамеры Петра I, также переданное Академии наук. Гравюра взята из книги «План столичного города Санкт-Петербурга с изображением знатнейших оного проспектов, изданый трудами Императорской Академии наук и художеств» в 1753 году.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
250

28 января (по старому стилю) 1724 года был опубликован сенатский указ об учреждении Академии наук. Указ извещал, что «Всепресветлейший державнейший Петр Великий... указал учинить Академию, в которой бы учились языкам, также протчим наукам и знатным художествам и переводили бы книги» *).

В соответствии с указом Академия являлась научно-исследовательским учреждением, при котором состояли университет и гимназия. Главная задача академиков определялась так: «Должность их: все тое, что уже в науках учинено — свидетельствовать, что к исправлению и размножению оных потребно есть — производить, что каждый в таком случае изобрел — сообщать и секретарю вручать. О всех декувертах, которые свидетельствованию и апробации их поданы будут, имеют они непристрастное рассуждение чинить: сиречь истины ли оные, великой ли или малой пользы суть и известны ли оные были прежде всего или нет!».

Со дня своего основания Академия наук стала играть выдающуюся роль в прогрессе всех отраслей знания, в изучении природных богатств страны. С Академией наук связаны как отдельные достижения в отечественной науке, так и создание новых направлений.

Особенно выдающуюся роль стала играть Академия наук после победы Великой Октябрьской социалистической революции.

Сквозь дым полыхающего пожара гражданской войны В. И. Ленин с гениальной прозорливостью видел контуры будущего социалистического советского государства. Он понимал, что в построении социализма наука должна играть выдающуюся роль. Этим объясняется большое внимание, которое В. И. Ленин уделял развитию Академии наук. Идя по пути, намеченному великим Лениным, Академия наук подчинила всю свою деятельность развитию социалистического общества. Выполняя свой патриотический долг перед Родиной, ученые Академии наук самоотверженно трудились и вместе с советским народом, его армией ковали победу в Великой Отечественной войне.

Крупные научные достижения советских ученых обеспечили высокий технический уровень развития промышленности и всего народного хозяйства страны. Академия наук СССР всемерно содействовала созданию национальных научных центров — Академий наук союзных республик, филиалов Академии наук. За последние годы возникли новые научные центры в Сибири, на Урале, Дальнем Востоке.

Успехи советских ученых сейчас получили всемирное признание.

---

*) Полное собрание законов, т. VII СПБ, 1830, № 4443.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
250

АКАДЕМИЯ НАУК И ПРОГРЕСС МАТЕМАТИКИ

Б. В. Гнеденко

В мае 1974 года будет торжественно отмечаться выдающееся событие в истории отечественной науки — 250-летие Академии наук СССР. В связи с этим мы помещаем в настоящем номере две статьи, рассказывающие о вкладе Академии наук в развитие математики и физики в дореволюционный период. В следующем номере мы расскажем о развитии советской математики и физики.

Советский народ отмечает знаменательный праздник в жизни нашей страны — двухсотпятидесятилетний юбилей высшего научного учреждения — Академии наук СССР. Большой и славный путь прошла Академия наук за четверть тысячелетия своего существования, и этот путь отмечен замечательными открытиями во всех областях научного знания, огромной помощью развитию народного хозяйства и культуры нашей Родины. С Академией наук тесно связан прогресс просвещения буквально с первых дней ее существования.

Указ об учреждении Академии наук был издан 28 января 1724 года по старому стилю. Этому предшествовала длительная переписка Петра I со многими выдающимися учеными того времени —Г. В. Лейбницем, Х. Вольфом и другими — по поводу путей быстрого приобщения России к научному прогрессу. И еще в 1718 году, когда в России не было не только Академии наук и университетов, но и налаженной системы школьного образования, Петр писал: «Сделать Академию, а ныне приискать из русских кто учен и к тому склонность имеет . . .»

По планам Петра Петербургская Академия должна была значительно отличаться от академий, уже имевшихся в Западной Европе. И если иностранные академии были лишь местом, где подводились итоги научных исследований, проводившихся в университетах, частных лабораториях, домашней обстановке, то высшее научное учреждение России должно было стать основным источником науки в России, принимать участие в обучении молодых людей и приобщении их к научным исследованиям, а также играть основную роль в популяризации научных знаний. Тем самым, как тогда было сказано, «. . . одно здание с малыми убытками, тое же бы с великой пользою чинило, что в других странах разные собрания чинят».

По проекту, который был одобрен Петром, академики обязывались обучать молодых людей и готовить себе научную смену. И эти обязанности большинством ученых Академии выполнялись в действительности. Уже с первых дней существования Академии в ней начали воспитываться молодые люди, многие их которых впоследствии стали выдающимися деятелями науки, культуры и просвещения России. Вспомним сейчас, что студентами Академии были поэт В. К. Тредиаковский, путешественник и географ С. П. Крашенинников, ученый и литератор М. В. Ломоносов.

При Академии первоначально были организованы гимназия и университет, поскольку в ту пору не было других источников, откуда Академия могла бы получать научно подготовленную молодежь. Контингент студентов был определен в 30 человек, был разработан учебный план для их обучения. При этом подчеркивалось специально «. . . смотреть, чтоб один студент вдруг многими лекциями отягчен не был» Чтобы была реальная возможность поддерживать число студентов университета, была учреждена гимназия, при которой предписывалось 20 человек «содержать на коште академическом и годных производить в студенты, а негодных отдавать в Академию художеств».

Академия была основана, но в России не было ученых. Вот почему первые академики были приглашены из-за пределов страны. Всего были приглашены 23 академика. Их выбор был исключительно удачен, подавляющее большинство из них энергично принялись за организацию работы и научные исследования. И уже очень скоро Академия имела превосходную для своего времени химическую лабораторию, астрономическую обсерваторию, физический кабинет, механическую и оптическую мастерские, типографию, библиотеку и ряд других учреждений.

Математика с первых дней существования Академии играла в ней значительную роль. Среди 23 приглашенных академиков семь были математиками. Имена многих из них прочно вошли в историю математики: Николай и Даниил Бернулли, Леонард Эйлер, Христиан Гольдбах.

Петр I не дожил до торжества открытия Академии: ее первое собрание состоялось лишь в августе 1725 года, спустя полгода после его смерти. Но начало работы было достаточно успешным: регулярно проходили собрания, началось бурное изучение страны и ее природных ресурсов, проводилось систематическое изучение важнейших явлений природы, выполнялись первоклассные математические исследования. Начиная с 1728 года Академия стала выпускать научный журнал «Комментарии Петербургской Академии», а через шесть лет после этого Даниил Бернулли, к тому времени возвратившийся в Швейцарию, писал Л. Эйлеру: «Не могу Вам довольно объяснить, с какой жадностью повсюду спрашивают о Петербургских мемуарах . . . Желательно, чтобы их печатание было ускорено». Речь шла при этом о математических работах, которые были опубликованы в этом первом научном русском журнале. Так уже на заре своего существования Академия превратилась в один из крупнейших научных центров мира, в которых проводились математические исследования.

Д. Бернулли (1700—1782) проработал в России всего лишь несколько лет, но и за этот срок он оставил заметный след в истории русской науки. Именно ему Академия обязана приглашением в свой состав Л. Эйлера. В изданиях Академии Д. Бернулли опубликовал ряд работ, положивших начало таким важным областям математических исследований, как математическая гидродинамика, математическая теория колебаний, механика газов, а также теория тригонометрических рядов. Теория тригонометрических рядов спустя сто лет была подробно развита французским математиком Фурье в связи с развитием математической теории распространения тепла. Однако впервые тригонометрические ряды были использованы при решении задач механики и математической физики еще Д. Бернулли.

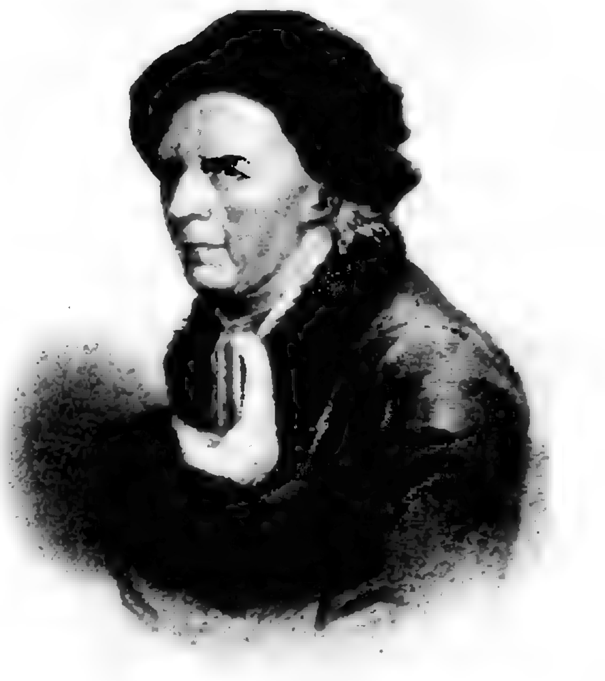
В заключение этого краткого рассказа о Д. Бернулли мне хотелось бы здесь упомянуть еще об одном его результате, который теперь известен каждому, кто знакомится с элементами математического анализа. На заседании Академии наук 30 января 1729 года он сообщил доказательство следующего (теперь элементарного) факта (существование числа e):

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots{}^{*})\cdot$$

В ту пору это было серьезной научной новостью. Впрочем, заметим, что все действительно серьезные открытия постепенно становятся широко известными, входят в программы университетского и школьного обучения.

Х. Гольдбах (1690—1764) был юристом по образованию и как математик проработал в Академии очень короткий срок. Основная его деятельность в России прошла в ведомстве иностранных дел, где он занимал крупный пост. В математику он вошел в первую очередь как автор знаменитой задачи Гольдбаха. Этой задаче можно дать несколько почти эквивалентных формулировок, мы приведем одну из них: *любое четное число, большее двух, представимо в виде суммы двух простых чисел.* Этот факт был замечен Гольдбахом на четных числах первых десятков. На протяжении двухсот лет к решению проблемы Гольдбаха не было видно и пути подхода. И лишь в тридцатые годы нашего века такие пути были найдены в работах Л. Г. Шнирельмана и И. М. Виноградова.

Несомненно, что самый яркий след из всех членов Петербургской Академии в области математики в XVIII веке оставил в истории науки Л. Эйлер. Продукция его была огромна: сейчас известны 865 его работ, в том числе 43 отдельных тома. Печатание его исследований продолжалось до 1862 года. Наша страна благодарна Эйлеру и за подготовку ряда учеников, внесших позднее большой вклад в развитие науки и культуры. Назовем несколько имен — С. К. Котельников, А. И. Лексель, Ф. И. Шуберт, С. Я. Румовский, М. Софронов, Н. И. Фусс, М. Е. Головин, С. Е. Гурьев, В. И. Висковатов. Они работали впоследствии во многих областях математики, механики, астрономии, физики, преподавания. Не малую помощь и поддержку оказал Л. Эйлер и М. В. Ломоносову в научных начинаниях последнего.



Л. Эйлер

Нет возможности в краткой статье даже просто перечислить те вопросы, которыми занимался в математике Л. Эйлер и получил в них основополагающие результаты. Им были усовершенствованы и развиты дифференциальное и интегральное исчисления, в значительной мере созданы методы решения дифференциальных уравнений, существенно продвинуто решение сложнейших задач теории чисел, созданы основы вариационного исчисления, исследованы задачи страхования и теории ошибок наблюдений, изучен ряд задач небесной механики и в том числе разработана теория движения Луны, фактически создана теория движения твердого тела, решены многочисленные задачи внешней баллистики. Многие из областей исследования, которые заинтересовали Л. Эйлера, находились в непосредственной связи с актуальными вопросами практики того времени. Эйлер ввел в науку ряд понятий, которые стали на многие десятилетия основным объектом ее изучения. Так, к Эйлеру восходит рассмотрение знаменитой в теории чисел функции дзета, с помощью которой до сих пор изучаются свойства распределения простых чисел в ряду целых положительных чисел.

---

*) См. «Квант», 1972, № 5, с. 17.

Ко времени Эйлера в математике было изучено несколько задач, в которых требовалось найти максимум или минимум некоторой величины в зависимости от выбора некоторой линии. Вот классические примеры этого рода: *среди всех плоских линий данной длины l найти ту, которая ограничивает максимальную площадь. Среди всех кривых, соединяющих точки A и B (кривые предполагаются плоскими, находящимися в вертикальной плоскости, точка A находится выше точки B), найти ту, по которой тяжелая точка, двигаясь под действием силы тяжести, из точки A попадает в B в кратчайший срок. Начальная скорость предполагается равной нулю.* Это известная задача о брахистохроне, поставленная известным швейцарским математиком Иоганном Бернулли и одновременно решенная тремя знаменитыми математиками того времени — Ньютоном, Яковом Бернулли и Лопиталем.

Эйлер уловил важность подобного типа задач и создал общий метод их решения — вариационное исчисление, которой в полной мере используется в науке и в наши дни.

Эйлер оказал исключительное влияние и на систему преподавания математики от самых ее начал до известных в ту пору ее вершин. Им были написаны учебники арифметики, элементарной алгебры, введение в математический анализ и аналитическую геометрию, создана система изложения тригонометрии, дошедшая до нас в почти неизмененном виде. Им были введены принятые теперь обозначения тригонометрических функций. Ему же принадлежат обозначения чисел e, π, $i=\sqrt{-1}$.

Многие ученики Л. Эйлера впоследствии стали академиками. Особого упоминания заслуживает С. Е. Гурьев (1764—1813), который за четверть века до французского математика О. Коши обратил внимание на необходимость строгости при изложении математического анализа. Вопросам обоснования математики, в том числе и математического анализа, и были посвящены основные его труды. Основным трактатом Гурьева в указанном направлении следует считать книгу «Опыт усовершенствования элементов геометрии» (СПб., 1798). Я приведу слова Гурьева, которыми он начал свой трактат: «Читая математические откровения нынешних времен и обращаясь к началам, на коих оные обыкновенно утверждаются, всегда я представляю себе огромное здание, непрестанно возвышающееся на слабых основаниях, всегда сокрушался о преклонности к падению сей чрезвычайной громады полезнейших роду человеческому знаний». Заметим, что вопросы обоснования математики, построения ее прочного фундамента, начиная с XIX века занимают видное место в математических исследованиях, и наша наука может гордиться тем, что одним из зачинателей этого движения был наш соотечественник.

Следующий этап в развитии математики в Академии наук связан с именами М. В. Остроградского (1801—1862) и В. Я. Буняковского (1804—1889).

М. В. Остроградский*) оставил значительный след в развитии математического анализа, математической физики, механики, вариационного исчисления. Знаменитая формула Остроградского в теории кратных интегралов до сих пор излагается в математическом анализе и служит основным орудием математической физики. В самой математической физике исследования Остроградского касались вопросов распространения тепла в твердых телах и в жидкости, распространения волн на поверхности жидкости, уравнений теории упругости, теории удара, вопросов магнетизма и электричества.

---

*) Более подробно об М. В. Остроградском рассказано в «Кванте», 1971, № 9, с. 11.

Остроградский оставил также значительный след в истории математического образования. Он сам был превосходным педагогом, стремившимся опоэтизировать изложение математики, сделать его идейно насыщенным и в то же время тесно связанным с задачами практики. Он создал учебники для школы, являлся организатором математического образования в военных учебных заведениях, выступил со своим педагогическим кредо в очень интересной и теперь монографии «Размышления о преподавании» (Париж, 1860), написанной им совместно с французским педагогом А. Блюмом.

Интересно заметить, что в ту пору, когда Россия была еще далека от освобождения крестьян от крепостной зависимости, Остроградский считал возможным и полезным приглашение в качестве инструкторов по трудовому воспитанию «. . . уважаемых и опытных рабочих, которые осторожно будут руководить ручными работами учеников».

Профессию учителя Остроградский ценил очень высоко и стремился показать молодым людям высокое призвание педагогического труда. Он мечтал о том времени, когда люди науки «с воодушевлением займутся жизненно важными вопросами преподавания наук.

Все упростится тогда в жизни нации, и наука станет деятельным, настойчивым помощником, соучастником всех моральных и материальных достижений».

М. В. Остроградский

Современник и большой друг Остроградского — В. Я. Буняковский — скорее был просветителем, чем оригинальным исследователем. Впрочем, некоторые его результаты до сих пор живут в науке. Вспомним знаменитое неравенство Буняковского — Коши — Шварца, найденное независимо друг от друга тремя названными учеными и широко используемое в современной математике. Большую роль в истории математической культуры России сыграл его превосходный для своего времени курс теории вероятностей.

В первой половине XIX века в России жил и трудился один из величайших математиков прошлого — создатель неевклидовой геометрии — Н. И. Лобачевский*) (1792—1856). По образному выражению английского геометра конца прошлого века, Лобачевский был Коперником геометрии, тем ученым, который смог пересилить освященные тысячелетиями традиционные взгляды и предложить свои новые. Его взгляды оказались для современников настолько новыми и необычными, что они их не понимали, а многие и издевались над их автором. В результате Н. И. Лобачевский остался вне Академии наук.

---

*) См. «Квант», 1972, № 12, с. 7.

Вторая половина прошлого века в Академии наук и в математической жизни всей страны прошла под огромным влиянием идей и результатов замечательного математика П. Л. Чебышева*) (1821—1894). Под его влиянием выросла превосходная по составу и силе полученных результатов петербургская математическая школа. Она работала с большим успехом в ряде областей математики и в первую очередь в теории функций, математическом анализе, теории чисел и теории вероятностей. Эта школа была тесно связана с запросами практики, и сам Чебышев не уставал говорить о том, что практика является исходным пунктом для математических теорий и одновременно на ней проверяется их научная и общественная ценность.

Научное творчество П. Л. Чебышева началось еще в бытность его студентом Московского университета. За работу «Вычисления корней уравнения» физико-математический факультет присудил ему в 1841 году серебряную медаль. В 1847 году Чебышев переехал в Петербург, и вся дальнейшая его жизнь была связана с Петербургским университетом, а также с Академией наук, куда он был привлечен для подготовки к изданию рукописей Л. Эйлера по теории чисел. Работа была закончена исключительно быстро — уже через два года вышли из печати два тома работ Л. Эйлера по теории чисел, снабженные подробными указателями. В эти два тома вошли многие неопубликованные результаты, хранившиеся в рукописях и в записных книжках Л. Эйлера. Несомненно, что интерес П. Л. Чебышева к теории чисел в значительной мере был связан с этой его издательской деятельностью.

П. Л. Чебышев

В том же 1849 году вышла из печати и была защищена в качестве докторской диссертации книга П. Л. Чебышева «Теория сравнений». В течение многих лет эта книга служила основным учебником по теории чисел для университетов. Но, пожалуй, еще важнее то обстоятельство, что в качестве приложения к этой книге было опубликовано замечательное исследование «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», оказавшее решающее влияние на направление дальнейших работ по теории чисел. Это дополнение было быстро переведено на французский язык и издано во французском журнале. Внимание математической общественности к результату П. Л. Чебышева было вполне естественным, поскольку ему удалось сделать фундаментальный шаг в изучении закономерностей распределения простых чисел в ряду натуральных впервые после Евклида. Знаменитому древнегреческому геометру принадлежит доказательство того факта, что простых чисел существует бесконечно много, Чебышев же открыл замечательную асимптотическую закономерность их распределения среди всех целых положительных чисел. Мы приведем этот результат в формулировке, которая была опубликована Чебышевым во второй его статье «О простых числах»: *Обозначим через* $\pi(x)$ *число простых чисел, меньших по величине, чем* x. *Тогда для всех достаточно больших* x *выполняются неравенства*:

---

*) См. «Квант», 1971, № 5, с. 1.

$$0{,}92149 \leqslant \pi(x) : \frac{x}{\ln x} \leqslant 1{,}10555,$$

где $\ln x$ *означает логарифм по основанию* $e = 2{,}7128\ldots$ *числа* x.

Далее Чебышев доказал, что *если при* $x \to \infty$ *отношение* $\pi(x) : \frac{x}{\ln x}$ *стремится к некоторому пределу, то этим пределом может быть только число 1.*

Доказательство существования этого предела потребовало более громоздких и сложных рассуждений и появилось лишь спустя пятьдесят лет после открытия Чебышева. Это доказательство было получено одновременно двумя математиками: французским ученым Ж. Адамаром и бельгийским — Ш. Ж. де ла Валле Пуссеном. Метод Чебышева вполне элементарен и, нужно думать, его возможности еще далеко не исчерпаны.

Второе направление математических исследований, в котором Чебышев оставил яркий след, связано с теорией вероятностей. Здесь он указал на новый важный объект исследований и разработал простые и в то же время очень сильные методы исследования. В первую очередь мы должны указать на знаменитый *закон больших чисел* в форме Чебышева, который до сих пор излагается в неизмененном виде во всех, даже самых коротких учебниках теории вероятностей, и при этом его доказательство приводится в предложенной им форме. Этот результат Чебышева дает весьма общие условия, при которых суммарное воздействие большого числа случайных ингредиентов оказывается почти постоянным. Значение открытой Чебышевым закономерности представляет не только общетеоретический интерес, но и имеет большое практическое значение.

Третье направление исследований, в котором Чебышеву принадлежит сама идея его возникновения, связано с так называемым наилучшим приближением функций. Эта область математической мысли, целиком являясь в своих основах изобретением Чебышева, превратилась в наши дни в богатую результатами и связями с другими ветвями знания часть математики. Исходным пунктом для построения этой теории явилась чисто практическая задача, возникшая у Чебышева в связи с поручением факультета Петербургского университета подготовить и прочитать курс практической механики.

Перед Чебышевым возник вопрос об уменьшении возможных отклонений движения штока от прямолинейного в так называемом параллелограмме Уатта, а уже этот чисто практический вопрос привел его к постановке ряда новых математических задач. Простейшая из них широко известна: *среди всех многочленов степени* n

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

найти тот, для которого $\max |P_n(x)|$ *при* $|x| \leqslant 1$ *имеет минимальное значение.*

Ответ был найден П. Л. Чебышевым еще в 1859 году; оказалось, что искомый многочлен (теперь его называют многочленом Чебышева) имеет следующий вид:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

А. М. Ляпунов

Упражнение. Напишите в явном виде многочлены Чебышева при $n = 1, 2, 3$ и 4.

Остановимся еще на результатах двух выдающихся учеников П. Л. Чебышева — А. М. Ляпунова (1857—1918) и А. А. Маркова (1856—1922).

А. М. Ляпунов еще в Петербургском университете получил от П. Л. Чебышева тему самостоятельной работы, которую успешно завершил. Эта тема была связана с одним из труднейших вопросов механики: устойчивостью форм у жидких вращающихся масс. Она получила дальнейшее развитие в его магистрской диссертации.

После успешной защиты диссертации А. М. Ляпунов был приглашен для преподавания в Харьковский университет. Естественно, что первые годы преподавания требовали от Ляпунова большой затраты времени на подготовку, тем более, что преподавать приходилось ряд математических дисциплин и теоретическую механику. Но эта подготовка и последующая необходимость осмысливать материал для изложения приводили к постановке новых научных вопросов, требующих тщательного исследования. В Харьковском университете Ляпунов занялся таким новым направлением математики, которое получило позднее название теории устойчивости движения.

К изучению поведения решений систем дифференциальных уравнений при неограниченном возрастании аргумента сводятся многочисленные задачи теории и практики. Ляпунов разработал эффективные методы их исследования. В ту пору работы Ляпунова представляли интерес в первую очередь для задач небесной механики (вопросы устойчивости солнечной системы и т. п.). Однако, начиная с тридцатых годов нашего века, идеи и методы Ляпунова получили непосредственное практическое значение для задач авиации, радиотехники, машиностроения и т. д. Ляпунов заложил основы теории устойчивости движения, разработал методы исследования и рассмотрел важнейшие частные случаи. Эти идеи были разработаны им в ряде работ и объединены в 1892 году в докторской диссертации «Общая задача устойчивости движения», принесшей ему мировую известность.

В 1900 году А. М. Ляпунов был избран членом-корреспондентом Академии наук, а через год — ее действительным членом. После избрания Ляпунов переехал в Петербург, и, бросив преподавание, целиком отдался научным изысканиям.

На рубеже двух столетий Ляпунов обратился к вопросам теории вероятностей и изучил одну из задач своего учителя — разыскание наиболее общих условий, при выполнении которых нормированные суммы независимых случайных величин при большом числе слагаемых имеют почти нормальное распределение. Доказанная им теорема получила название центральной предельной теоремы теории вероятностей.

А. А. Марков

После 1901 года Ляпунов полностью отдал свои силы решению задачи Чебышева о равновесии жидких вращающихся масс. Он был недоволен своими первоначальными результатами, поскольку в них он исследовал лишь первые приближения. Согласно же его мнению, решение естественнонаучной задачи требует полного и строгого решения, поскольку иначе можно прийти к ошибочным выводам. Современник Ляпунова французский математик А. Пуанкаре занимался той же задачей, но при этом он довольствовался лишь первым приближением. В результате они пришли к противоположным выводам, приведшим к длительному научному спору. Астроном Дарвин (сын известного естествоиспытателя Чарльза Дарвина) выступил с космогонической теорией, построенной на приближенных результатах Пуанкаре. В конце концов спор закончился полной победой результатов Ляпунова.

С именем А. А. Маркова связаны крупные сдвиги в развитии теории дифференциальных уравнений, теории непрерывных дробей и их применения к вопросам теории функций, теории квадратичных форм и теории вероятностей. Особенно важные результаты были получены А. А. Марковым в теории вероятностей, где он заслуженно считается одним из основоположников современного состояния этой науки. Он ввел новый объект исследования в теории вероятностей, получивший наименование «цепей Маркова». Речь при этом идет о последовательностях случайных событий, вероятность появления или непоявления которых зависит от того, появилось или нет в предыдущем месте соответствующее событие. Для цепей Маркова самим автором был получен ряд глубоких результатов. Были рассмотрены, используя цепи Маркова, закономерности чередования гласных и согласных на примерах двух классических произведений русской литературы — «Евгений Онегин» А. С. Пушкина и «Детские годы Багрова внука» С. Т. Аксакова.

А. А. Марков не дожил до того периода, когда понятие цепи и процесса Маркова стало центральным не только в теории вероятностей, но также в физике, теории автоматического управления, разнообразных применениях теории вероятностей в биологических и производственных задачах, в теории информации.

Большое значение для развития отечественной общественной мысли сыграли многочисленные выступления А. А. Маркова против произвола царского режима и церкви. Он не прошел мимо событий 1905 года, отлучения Л. Н. Толстого от церкви, отказа царского правительства утвердить избрание Максима Горького в Академию.

Мы продолжим наш очерк в следующем номере, где расскажем о достижениях Академии в советское время.

ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ФИЗИКИ В АКАДЕМИИ НАУК

С. И. Вавилов

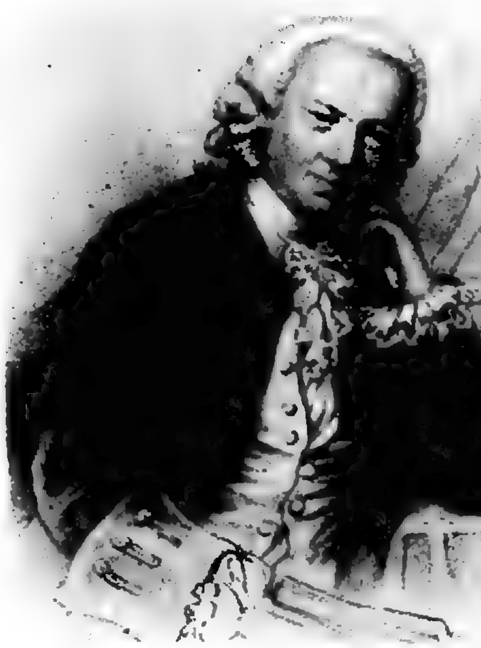
Выдающийся советский физик академик Сергей Иванович Вавилов, бывший с 1945 по 1951 год Президентом Академии наук СССР, много внимания уделял вопросам истории физики. Среди его работ есть статья под названием «Очерк развития физики в Академии наук за 220 лет». Она была напечатана в 1945 году, к юбилею Академии, в «Очерках по истории Академии наук», выпущенных Издательством АН СССР. В этой статье С. И. Вавилов охарактеризовал вклад членов Академии в развитие отечественной физики. Небольшие редакционные дополнения к статье приводятся в квадратных скобках.

«... собирая Академию в России, где не было еще университетов и даже средних школ, Петр, несомненно, понимал, что она не может быть копией Парижской Академии наук и Лондонского Королевского общества. Русская Академия не могла быть вершиной ученой пирамиды, как во Франции и в Англии, по причине отсутствия самой этой пирамиды. В задачу новой Академии прежде всего входило ее создание. По этой причине на берегах Невы возникла Академия совсем особого рода. Наряду с учеными заседаниями, на которых... Бернулли, Эйлером и другими делались сообщения по самым острым вопросам европейской науки, все академики занимались университетским и гимназическим преподаванием и прежде всего были профессорами. На академиков возлагалась, помимо того, большая и трудная работа по разностороннему изучению России, ее природы, истории, народов, языка; академики постоянно привлекались к техническим экспертизам, к организации производства. Это необходимо иметь в виду, рассматривая первый период физики в Академии до самого конца XVIII века. Число лиц, причастных к развитию физики в Академии наук в течение всего XVIII века, очень невелико; это — академики, официально занимавшие кафедру физики или фактически работавшие в этой области, небольшой технический персонал механиков, оптиков и отдельные изобретатели, вроде знаменитого Кулибина.

Научная жизнь Академии долгое время, до недавнего прошлого, целиком определялась личным составом ее членов. Поэтому, естественно, наш очерк строится на комментированном списке членов Академии...

Даниил Бернулли (1700—1782)... в своем знаменитом трактате по гидродинамике (который он писал в Петербурге) и длинном ряде мемуаров по механике и акустике проявил себя как один из самых замечательных представителей математической физики. В Петербурге он пробыл 8 лет (1725—1733), но до конца жизни сохранил тесную связь с Академией...

[Даниил Бернулли ввел в механику принцип сохранения «живой силы» (суммы произведений масс тел на квадраты скоростей). Исходя из


Д. Бернулли

этого принципа, он получил знаменитый закон, характеризующий движение жидкостей по трубам.]

Иоганн Лейтман (1667—1736)... занял в Академии кафедру механики и оптики, и его по праву можно назвать отцом оптотехники и точной механики в России. Он был известен Петру I как автор книг о часах и шлифовании стекол, и Петр стремился пригласить его в Россию еще до основания Академии. Прибыв в Петербург в 1726 году, он вскоре взялся за налаживание работ по точной механике и оптике... Есть достаточные основания думать, что особое внимание и успехи в практических областях оптики в Петербурге в XVIII веке в работах Ломоносова, Кулибина, Эпинуса, Эйлера и других были в значительной мере определены деятельностью академика Лейтмана.

Великий Леонард Эйлер (1707—1783)... был в Петербургской Академии сначала профессором физиологии, затем физики и, наконец, математики... Вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность. Физика Эйлера, конечно, блекнет в лучах его математической славы, но сама по себе она очень импозантна и заслуживает гораздо большего внимания, чем ей уделяется до сих пор. Несмотря на роковые ошибки волновой оптики Эйлера, именно она подготовила оптику Френеля. Диоптрические фолианты *) Эйлера, написанные в Петербурге, знаменовали поворотный пункт в развитии геометрической оптики. Его «Письма о некоторых физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе» — великолепная популярная и полная оригинальных идей энциклопедия физики XVIII века. По отличному русскому переводу «Писем», сделанному учеником Эйлера академиком Румовским, учились физике многие поколения русских людей.

Георг Рихман (1711—1753)... навеки запечатлел свое имя в истории физики как экспериментатор, трагически погибший на посту во имя науки... Занимался он вопросами о парообразовании, воздушными насосами и машинами для подъема воды, а также другими разнообразными естественно-научными и техническими явлениями и задачами. К электрическим опытам Рихман перешел задолго до знаменитой публикации Франклина... Известие об опытах Франклина в 1752 году произвело во всем мире такое же впечатление, как в свое время первые наблюдения Галилея с телескопом, а в конце XIX века — опыты Рентгена. Всюду, в том числе и в Петербурге, лихорадочно принялись за их повторение. Рихман с громадным увлечением занялся наблюдениями над грозами и атмосферным электричеством у себя на дому, на углу 5-й линии и Большого проспекта Васильевского острова. Хорошо известны

[*) Имеется в виду сочинение Эйлера под названием «Диоптрика».]

обстоятельства гибели Рихмана во время опыта 26 июля 1753 года [он погиб от удара молнии]. Работа Рихмана в Академии — одна из трагических, но славных страниц академической физики.

Михаил Васильевич Ломоносов (1711—1765)... Во всех областях науки и «художеств», которыми занималась Петербургская Академия в XVIII веке (за исключением математики), Ломоносов был, бесспорно, самым замечательным и наиболее самобытным представителем. Для русского государства Ломоносов стал воплощенным доказательством талантов, склонностей и умения русского народа в деле науки и культуры... Известно, что Ломоносов считал основной «профессией» своей химию, но в химии Ломоносов по преимуществу был великим физико-химиком. Вместе с тем, и в областях чисто физических Ломоносов проявил себя с поразительной широтой и оригинальностью. Заслуги Ломоносова в физике начинаются с создания необходимых условий для развития ее в России...

Во втором издании [переведенной М. В. Ломоносовым] «Вольфианской экспериментальной физики», в 1760 году, Ломоносов поместил «Прибавления к экспериментальной физике», заключающие краткие упоминания о некоторых результатах в области физики, полученных им самим. Это, прежде всего, его кинетическая теория теплоты, или, как он говорит, «моя система теплотворного движения», одна из замечательных предшественниц современной кинетической теории; далее, его оригинальная и, несмотря на ошибочность, весьма остроумная и глубокая «новая теория о цветах», в которой впервые делается конкретная попытка связать учение о свете и веществе; наконец, его теория атмосферного электричества...

Опубликование научных рукописей Ломоносова, а также изучение его забытых печатных научных мемуаров открыло перед нами Ломоносова как замечательного оптика, изобретателя и конструктора новых телескопов, микроскопов, фотометров, перископов, строившего их в лаборатории-мастерской вместе с подручными мастерами...

Глубиной и своеобразием поражают многие записи и афоризмы Ломоносова, касающиеся законов сохранения движения и вещества, теории атомов и эфира, вопроса о соотношении тяжелой и инертной масс...

Франц Эпинус (1724—1802) явился в Академии представителем нового поколения и существенно нового направления в физике. Для этого поколения ньютоновский метод решения задач о притягательных и отталкивательных силах становится бесспорным, хотя еще недавно для Бюльфингера, Эйлера, Ломоносова он был сомнительным. Утверждая с самого начала в своем знаменитом трактате «Опыт теории электричества и магнетизма» (Петербург, 1755): «Полагаю несомненной аксиомой, что тело не может действовать там, где его нет», Эпинус фактически пользуется ньютоновской схемой в своей теории электростатических взаимодействий и индукции. Имя Эпинуса связано и с другими важными физическими результатами. Ему принадлежит открытие пироэлектрических свойств турмалина, реализация первого ахроматического микроскопа *), построенного в Петербурге и долгое время хранившегося в Физическом кабинете Академии наук...

Беглый просмотр деятельности [некоторых] академиков-физиков дает довольно ясную картину состояния и развития физики в Петербургской Академии в XVIII веке. По своему качеству эта физика занимала од-

---

[*) Ахроматический микроскоп имеет сложный объектив, в котором изображения предметов, образованные световыми волнами различной длины, практически совпадают и потому не искажаются.]

Михаил Васильевич
Ломоносов

но из первых мест, если не первое в Европе. Нужно иметь в виду при этом общее состояние физики в Европе в эту эпоху. Это было время разработки ньютоновского наследства, с одной стороны, его укрепления, с другой — критики. Сам XVIII век в физике не дал результатов, по значению своему хотя бы приближенно равноценных ньютоновским. Очень сильно продвинулась электростатика, оптика, главным образом геометрическая; большая подготовительная работа в XVIII веке была сделана в учении о теплоте, но все же принципиально новое и большое в электромагнетизме, оптике и теплоте суждено было сделать физикам XIX века. На общем фоне физики в XVIII веке работам Эйлера, Ломоносова, Эпинуса принадлежит очень почетное место. При этом в области оптики Эйлер и Ломоносов подготовили почву для развития теории световых волн.

Таково общее научное значение нашей академической физики в XVIII веке. Но у нее была и своя особая черта, имевшая значение по преимуществу для России. Академические физики почти до конца века большое внимание уделяли техническим вопросам. Практическая оптика, оптическое приборостроение на Васильевском острове в XVIII веке находились на такой высоте, которой могла позавидовать любая страна мира. Работы Лейтмана с учениками, оптическая мастерская Ломоносова, работы по геометрической оптике Эйлера и его учеников, ахроматический микроскоп Эпинуса, телескопы, рефлекторы Кулибина — все это было самым передовым для своего времени... Петербургские академики-физики вели систематические метеорологические и магнитные наблюдения, давали консультации по техническим вопросам и непрерывно занимались учебной работой. У них был и свой центр — Физический кабинет с «инструментальной палатой», т. е. мастерской. В Кабинете велись опыты, подготавливались демонстрации для студентов и для показов на заседаниях Академии и при дворе...

Василий Владимирович Петров (1761—1834)... В 1795 году В. В. Петров стал экстраординарным профессором только что образованной Медико-хирургической академии. Здесь он собрал образцовый для своего времени физический кабинет, где и были произведены основные его экспериментальные работы. Они собраны в трех книгах: 1) «Собрание физико-химических новых опытов и наблюдений», 1801; 2) «Известие о Гальвани — Вольтовских опытах», 1803; 3) «Новые электрические опыты», 1804. В этих томах перед нами очень большой опытный материал... по выяснению природы различных случаев люминесценции*), по знаменитым опытам с вольтовой дугой, открытой Петровым, и по электростатике. В отличие от Ломоносова, Петров совсем не был склонен к широким обобщениям, он был эмпириком, строившим, однако, свои опыты весьма рационально и продуманно. Среди русских ученых и иностранцев, работавших в России в то время, В. В. Петров был, несомненно, крупным явлением...

Э. Х. Ленц

Эмилий Христианович Ленц (1804—1865)... прочно вписал свое имя в историю электромагнетизма наряду с Омом и Джоулем и стал основателем направления русской физики, концентрировавшего внимание на электромагнетизме и развитии прецизионных измерений в этой области.

[Среди многочисленных научных работ Ленца особенно известны две: «Об определении направления гальванических токов, возбуждаемых электродинамической индукцией» и «О законах выделения тепла гальваническим током». В первой из них он установил правило, определяющее направление индуцированных токов (знаменитое правило Ленца), во второй — открыл закон теплового действия тока (закон Джоуля—Ленца).]

Борис Семенович Якоби (1801—1874)... Говоря современным языком, Якоби во многих областях своей деятельности, какова открытая и развитая им гальванопластика, электрические машины, электрический телеграф, электрические эталоны, был техническим физиком, но наряду с этим он занимает вместе

[*) Люминесценция — особый вид свечения. Так светятся светлячки и гнилушки, циферблаты часов и стрелки компасов, покрытые особым веществом — люминофором.]

с Ленцем видное место в чисто физическом исследовании законов электромагнетизма.

Якоби был одним из самых замечательных представителей той новой фазы в истории физики, когда ее результаты сразу в виде важнейшего фактора переходили в технику, электромагнетизм превращался в электротехнику. Физики Якоби и Ленц в 1839 году катались по Неве на построенной ими моторной лодке с двигателем, развивавшим от 64 элементов Грова одну лошадиную силу. В физическом кабинете строились и испытывались различные новые телеграфные аппараты и в разных видах развивалась гальванопластика, замечательные образцы которой служат украшением Физического института Академии наук. Физик Якоби вместе с Ленцем составляет проект громоотвода для порохового погреба, является изобретателем электрических минных взрывателей.

Имя академика Якоби, выдающегося физика, гениального электротехника и изобретателя, по праву должно быть поставлено наряду с другими славными именами академиков-физиков — Эйлера, Ломоносова, Петрова...

Генрих Иванович Вильд (1833—1902)— организатор швейцарской и русской метеорологической сети, автор замечательных фотометрических и поляризационных приборов, выдающийся исследователь земного магнетизма. России Г. И. Вильд отдал 27 лучших творческих лет своей жизни. Русская метеорологическая сеть до работы Вильда насчитывала всего 31 станцию, при его отъезде она имела 650 станций, оборудованных новыми приборами...

Аксель Вильгельмович Гадолин (1828—1892)... особенно известен своей работой 1867 года «Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала»...

Б. С. Якоби

Борис Борисович Голицын (1862—1916)... Научная работа Голицына сначала протекала в разнообразных направлениях (критические состояния вещества, лучи Рентгена, спектроскопия, физиологическая оптика). Очень интересны и важны оптические работы Б. Б. Голицына... Среди них особенное значение получило экспериментальное доказательство спектроскопического явления Допплера *), продолжающее и в высокой степени уточняющее опыты А. А. Белопольского. С начала нового столетия интересы Голицына сконцентрировались на новой геофизической дисциплине — сейсмологии, одним из основателей которой Голицын по праву и может считаться. Голицын дал первые эскизы теории, разработал аппаратуру, организовал довольно обширную сеть сейсмологических станций...»

[*) При движении источника излучения и принимающего устройства относительно друг друга частота принимаемого излучения не совпадает с частотой испускаемого излучения. Таким образом, спектральные линии регистрируемого излучения оказываются смещенными по сравнению со спектром испускаемого излучения.]

А. К. КИКОИН

СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛ НА ВРАЩАЮЩУЮСЯ ЗЕМЛЮ

Иногда можно встретить утверждения о том, что из-за того, что Земля вращается вокруг своей оси, в разных местах на поверхности Земли различна *сила тяжести*, действующая на какое-нибудь тело. Говорят также, что в разных местах Земли различен *вес* тела. И то, и другое связано с тем, что в различных местах на вращающейся Земле различно *ускорение свободного падения* тел. Верно ли все это? В этой статье мы постараемся ответить на этот вопрос.

1. Механическое движение, как известно, относительно. Это значит, что, если пользоваться различными системами отсчета, то относительно этих систем движение одного и того же тела окажется различным. Если, например, связать систему координат с летящим с постоянной скоростью в горизонтальном направлении самолетом, то в этой системе координат сброшенный (вернее, выпавший) с самолета груз движется вниз по вертикальной прямой (рис. 1). Но в системе координат, связанной с какой-нибудь точкой на поверхности Земли, например, с точкой O (см. рис. 2), тот же груз движется по кривой, называемой параболой. Различны, следовательно, траектории движения. Различны и скорости движения. Если условно считать систему координат, связанную с Землей, неподвижной, то при скорости движения самолета (и связанной с ним системы координат) относительно Земли, равной $\mathbf{v}_с$, скорость $\mathbf{v}$ груза относительно Земли в любой момент времени равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_с + \mathbf{v}_г, \qquad (1)$$

где $\mathbf{v}_г$ — скорость движения груза относительно самолета в рассматриваемый момент времени. Так как скорость $\mathbf{v}_г$ — это скорость свободного падения, то

$$\mathbf{v}_г = \mathbf{g}t,$$

где $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, а t — время, отсчитанное от

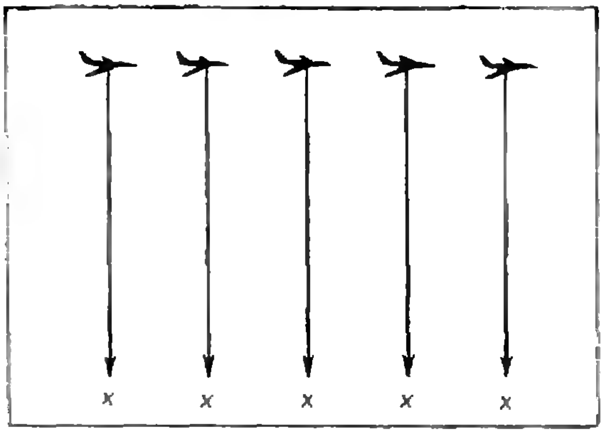


Рис. 1.

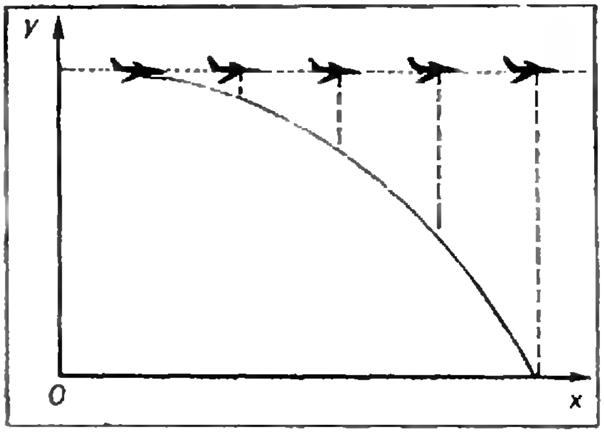


Рис. 2.

того момента, когда груз отделился от самолета. Таким образом,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \mathbf{g}t.$$

Следовательно, и скорости в неподвижной и движущейся системах координат различны.

В рассмотренном примере скорость движущейся системы координат, то есть скорость самолета относительно Земли, была постоянной. Но бывает и так, что с ускорением движется не только тело относительно подвижной системы координат, но и сама эта подвижная система координат движется ускоренно относительно неподвижной. Скорость тела относительно неподвижной системы в *любой момент времени* (скорости со временем изменяются!) и в этом случае равна сумме скорости тела относительно подвижной системы и скорости этой системы координат относительно неподвижной. Если, например, подвижная система координат движется относительно неподвижной с постоянным ускорением $\mathbf{a}_1$, а тело относительно подвижной системы координат движется с постоянным же ускорением $\mathbf{a}_2$, то правило сложения скоростей в этом случае имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\, t,$$

где t — время, отсчитанное от одного и того же начального момента.

Из этой формулы видно, что относительно неподвижной системы координат тело движется с ускорением $\mathbf{a}$, которое равно

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2. \qquad (2)$$

2. Любопытным примером такого случая может служить свободное падение тел на Землю. Надо учесть, что Земля вращается вокруг своей оси. Поэтому система координат, связанная с какой-нибудь точкой поверхности Земли (кроме ее полюсов), движется с ускорением. Согласно формуле (2) ускорение падающего тела, измеренное относительно неподвижной системы координат, складывается из ускорения движущейся системы относительно неподвижной и ускорения самого тела относительно движущейся системы координат. Но что это за неподвижная система отсчета? Где взять такую систему на вращающейся Земле? С чем должна быть связана та система координат, которую в данном случае можно было бы считать неподвижной?

Прежде всего, это может быть система координат, связанная с каким-нибудь телом отсчета *вне* Земли, не участвующим в ее вращении. Таким телом отсчета, условно неподвижным, могло бы, например, служить Солнце. Тогда ускорение а падающего на Землю тела в системе координат, связанной с Солнцем, равно сумме ускорения тела относительно системы, связанной с выбранной точкой на Земле, и ускорения этой точки относительно Солнца. Но можно поступить и проще, не покидая Землю. Ведь и на поверхности Земли есть точки, не участвующие в ее вращении. Это — точки полюсов Земли, через которые проходит ось ее вращения. Вот мы и можем сравнить результаты измерения ускорения свободного падения тела на полюсе и в любой другой точке поверхности Земли, например, на экваторе*).

Так как свободное падение тела в неподвижную точку Земли (на полюс) — это движение прямолинейное, то для описания этого движения достаточно одной координатной оси. На полюсе эту ось естественно направить вдоль оси вращения Земли, вдоль линейки со шкалой, которая должна быть установлена на полюсе (рис. 3) для измерения ускорения (см. учебное пособие «Физика-8», 1973, с. 55).

Результат такого измерения легко предсказать: согласно второму закону

---

*) В действительности и точки полюсов участвуют в годовом движении Земли вокруг Солнца. Однако угловая скорость этого движения гораздо меньше угловой скорости суточного вращения Земли; поэтому в большинстве случаев систему координат, связанную с полюсами, можно считать неподвижной.

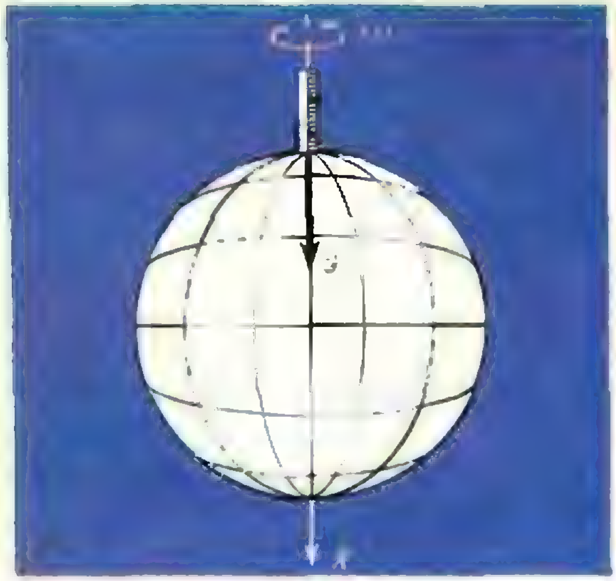


Рис. 3.

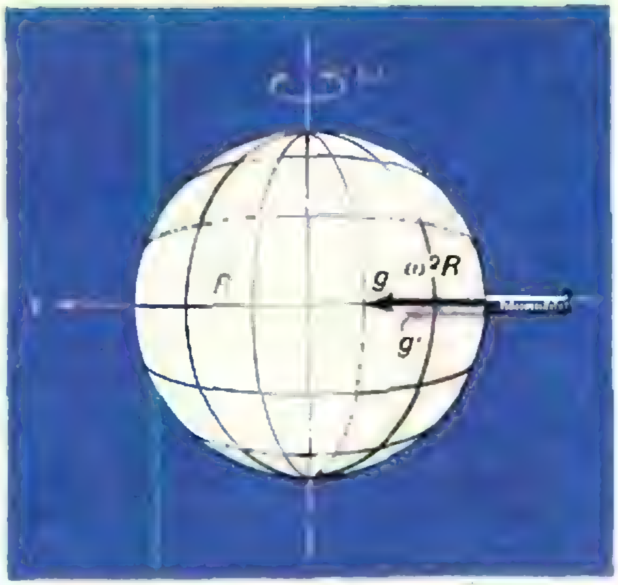


Рис. 4.

Ньютона и закону всемирного тяготения абсолютное значение этого ускорения равно

$$g = \gamma \frac{M}{R^2},$$

где γ — гравитационная постоянная, M — масса Земли и R — ее радиус. Направлено это ускорение по полярному радиусу к центру Земли. Величина $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ — значение ускорения свободного падения относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета.

А какое значение ускорения падающего тела будет получено при измерениях на экваторе? Для этих измерений и здесь нужно установить линейку со шкалой (рис. 4). Координатную ось мы и здесь направим к центру Земли вдоль экваториального радиуса. Разумеется, и на экваторе абсолютное значение ускорения, вызванного притяжением Земли, будет таким же, как и на полюсе. Вращение Земли не влияет на силу, с которой она притягивает тела *). Но измерение ускорения на экваторе производится относительно системы отсчета, которая сама движется с ускорением относительно выбранной нами неподвижной системы. Ведь наша линейка движется вместе с Землей по окружности экватора и, следовательно, движется с центростремительным ускорением, равным $\omega^2 R$, где ω — угловая скорость суточного вращения Земли и R — ее радиус. Направлено это ускорение тоже к центру Земли и тоже по экваториальному радиусу. Значение ускорения, полученное при измерении на экваторе относительно ускоренно движущейся системы координат (линейки), будет поэтому несколько иным по сравнению с измеренным на полюсе. Обозначим это значение ускорения через g'. Тогда, согласно формуле (2), мы можем написать

$$g = g' + \omega^2 R \qquad (3)$$

(ускорение свободно падающего тела относительно неподвижной системы координат (g) равно сумме ускорения тела относительно подвижной системы (g') и ускорения самой подвижной системы относительно неподвижной ($\omega^2 R$)).

Иначе говоря, ускорение g' свободного падения, измеренное на экваторе, то есть относительно ускоренно движущейся системы отсчета, не равно ускорению g, измеренному на полюсе. Оно меньше g на величину $\omega^2 R$:

$$g' = g - \omega^2 R. \qquad (4)$$

---

*) Мы пренебрегаем различием в силе тяготения на экваторе и на полюсе, вызванным нестрогой сферичностью Земли.

3. Мы рассмотрели случай свободного падения тел на полюсе и на экваторе Земли. Рассмотрим теперь свободное падение тела в произвольном месте (где-то между экватором и полюсами Земли).

Из рисунка 5 видно, что теперь центростремительное ускорение, связанное с вращением Земли, направлено не к центру Земли, как на экваторе, а к той точке на оси вращения Земли, которая является центром соответствующего параллельного круга. (Радиус этого круга на рисунке 5 обозначен буквой r.) Повторяя приведенные выше рассуждения, мы придем к выводу, что ускорение свободного падения g', измеренное в любом месте, будет меньше, чем ускорение g, измеренное на полюсе. Надо учесть центростремительное ускорение соответствующей точки земной поверхности. Но теперь направления ускорений g и $\omega^2 r$, входящих в формулу (4), образуют угол φ, представляющий собой широту точки, в которой измеряется ускорение g'. Пользуясь правилом сложения векторов, мы найдем, что вектор g' направлен уже не к центру Земли, а несколько отклонен к экватору (см. рис. 5).

Понятно, что ускорение $\omega^2 r$ на широте φ меньше, чем ускорение $\omega^2 R$ на экваторе. Легко видеть, что на любой широте φ отношение r/R равно $\cos\varphi$, так что $r = R\cos\varphi$ и $\omega^2 r = \omega^2 R \cos\varphi$. Соответственно,

$$g' = g - \omega^2 R\cos\varphi \text{ *)}.$$

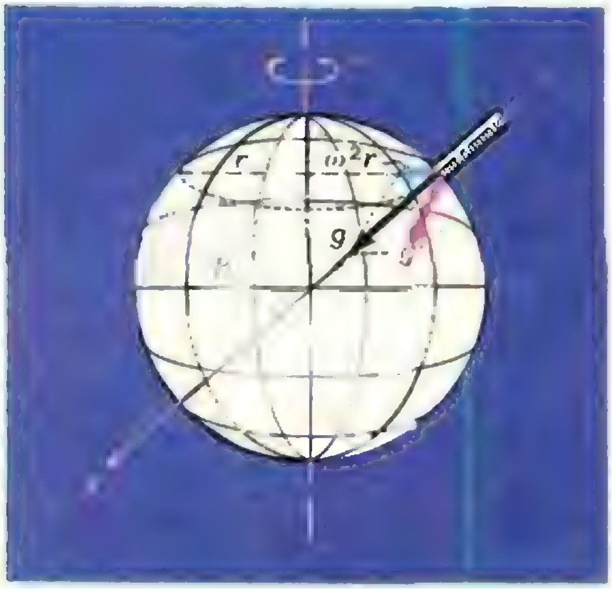


Рис. 5.

4. Посмотрим теперь, насколько численно отличается значение g' для данной широты φ от g. Для этого нужно, очевидно, только вычислить величину $\omega^2 R$.

Угловая скорость ω вращения Земли невелика, так как период вращения Земли равен одним суткам, то есть 86164 *с*. Следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\ \textit{рад/с}.$$

Радиус Земли на экваторе равен 6378 *км*, или $\approx 6{,}38\cdot 10^6$ *м*. Таким образом, на экваторе ($\varphi = 0$)

$$\omega^2 R = (7{,}3\cdot 10^{-5})^2\cdot 6{,}38\cdot 10^6 = 3{,}4\cdot 10^{-2}\ \textit{м/с}^2.$$

На столько и отличается ускорение свободного падения на экваторе от того ускорения, которое наблюдалось бы, если бы Земля не совершала своего суточного движения. В любом другом месте это различие еще меньше. Разница настолько мала, что об этом не стоило бы и статью писать, если бы не принципиальная важность самого́ вопроса о движении тел относительно ускоренно движущихся систем координат. Впрочем, стоит, может быть, добавить, что как ни мала разница между g' и g, она иногда играет и существенную роль. Так, например, часы с маятником (период колебаний маятника зависит от ускорения свободного падения) на экваторе отстают от совершенно таких же часов на полюсе больше, чем на 3 минуты за сутки. В большинстве же случаев разницей между g' и g можно пренебречь.

---

*) Мы не учли, что в верхней точке траектории тело обладало линейной скоростью вращения вокруг земной оси, большей скорости вращения точки отсчета на Земле (поскольку угловая скорость суточного вращения одна и та же, а расстояние до центра вращения от начальной точки падения тела больше, чем от точки отсчета на Земле). Следовательно, упавшее тело окажется смещенным к востоку относительно основания линейки. Вследствие этого при падении тела с верхнего конца линейки на Землю появляется дополнительное ускорение — так называемое ускорение Кориолиса, — которое мы и не учитываем.

5. Теперь обсудим вопрос о силе тяжести, действующей на вращающейся Земле, и о весе тел на ней.

Сила тяжести, приложенная к какому-нибудь телу массой m на поверхности Земли, — это сила всемирного тяготения между этим телом и Землей. Абсолютное значение этой силы равно

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

и направлена она к центру Земли. Ясно, что на эту силу вращение Земли никаким образом влиять не может.

По второму закону Ньютона эта сила равна произведению массы тела на ускорение, сообщаемое этой силой:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = mg. \qquad (5)$$

Следовательно,

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Ускорение g, входящее в выражение для силы тяжести, — это ускорение в «неподвижной», или, как говорят, в инерциальной системе отсчета. Как известно, только для таких систем верны законы движения Ньютона, которыми мы пользовались, записывая формулу (5). Иначе обстоит дело с величиной, называемой весом тела.

Вес тела — это сила, с которой тело действует на опору, на которой оно помещено, или на подвес, к которому оно подвешено. Сила эта может быть любой, в зависимости от того, с каким ускорением относительно неподвижной системы координат движется опора или подвес вместе с телом.

Если опора или подвес покоятся относительно неподвижной системы координат или движутся относительно нее без ускорения, то вес тела просто равен силе тяжести, действующей на него.

Но весы, при помощи которых измеряется вес тела в любом месте Земли, кроме ее полюсов, движутся с ускорением (из-за вращения Земли). Поэтому везде, кроме полюсов, *вес тела не равен силе тяжести*. Вес тела P, измеряемый весами, движущимися с ускорением a относительно неподвижной Земли, равен

$$P = m(g - a). \qquad (6)$$

В нашем случае роль ускорения a играет ускорение $\omega^2 R \cos\varphi$. Поэтому

$$P = m(g - \omega^2 R \cos\varphi). \qquad (6a)$$

Так как ускорение $\omega^2 R \cos\varphi$ различно на разных широтах, то различен и измеренный на разных широтах вес тела. Наименьшим вес тела будет на экваторе. Впрочем, величины веса тела на экваторе и на полюсе различаются так же мало, как и величины ускорения свободного падения, измеренные в этих точках.

Мы видим, таким образом, что когда мы пользуемся «неподвижной», то есть инерциальной системой координат, то для веса тела мы можем написать выражение

$$P = mg.$$

Но когда мы пользуемся неинерциальной системой координат, то есть системой координат, движущейся с ускорением, то вторым законом Ньютона пользоваться нельзя. Нельзя, значит, пользоваться и формулой $P = mg'$, которая получается именно из второго закона Ньютона. Тем не менее, мы написали формулы (6) и (6а), которые как раз и означают, что $P = mg'$, где g' — ускорение относительно неинерциальной системы координат. Но ведь это же «незаконно»? Да, незаконно. Но о том, почему такие «незаконные» формулы пишутся, будет рассказано в другой статье.

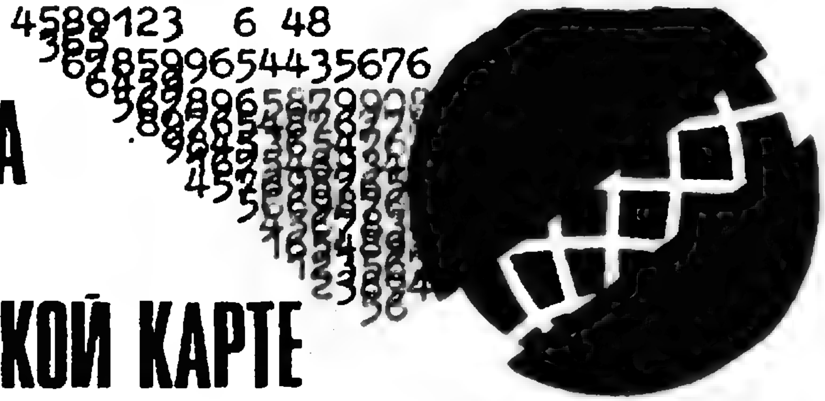
Упражнения

1. В северном полушарии падающий камень из-за вращения Земли слегка отклоняется в сторону экватора. Куда отклонится падающий камень в южном полушарии?

2. С какой угловой скоростью должна была бы вращаться Земля, чтобы ускорение свободного падения тела на экваторе было равно нулю? Каков был бы в этом случае вес тела? Какая сила тяжести действовала бы на него?

Э. Г. БЕЛАГА

АРИФМЕТИКА НА ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ КАРТЕ



Одна из глав превосходной книги по теории графов *) начинается с описания . . . болезни:

«Гипотезу четырех красок можно с полным основанием назвать еще «болезнью четырех красок», так как она во многом похожа на заболевание. Она в высшей степени заразна. Иногда она протекает сравнительно легко, но в некоторых случаях приобретает затяжной или даже угрожающий характер. Никаких прививок против нее не существует . . .»

Это высказывание американского математика Ф. Харари, очень похожее на памятку врача-эпидемиолога, стоит дополнить мнением известного математика и педагога О. Оре:

«Наиболее знаменитая среди этих задач **) — проблема четырех красок, впервые поставленная перед математиками Де Морганом около 1850 года. Никакая другая проблема не вызывала столь многочисленных и остроумных работ в теории графов. Благодаря своей простой формулировке и раздражающей неуловимости она до сих остается мощным стимулом исследований различных свойств графов» ***).

По-видимому, именно «раздражающая неуловимость» этой проблемы-гипотезы и есть главный возбудитель болезни, описанной Ф. Харари; что же касается «простой формулировки», то она, вероятно, известна большинству читателей: *всякую карту на сфере можно раскрасить не более чем в четыре цвета так, чтобы любые две соседние страны были окрашены в разные цвета.*

Имеется в виду, конечно, идеализированная карта: на географических картах один (синий) цвет всегда соответствует водным поверхностям. Мы будем считать, что на наших картах их нет, как нет и стран, состоящих из двух и более не связанных между собой частей (так обстоит дело, например, с Данией и ее заморской провинцией Гренландией). Эти примеры показывают, что понятие карты нуждается в уточнении.

Наша цель — рассказать об одном из наиболее ранних и, пожалуй, наиболее остроумных походов к решению этой проблемы — условно его можно назвать арифметическим: работа в этом направлении продолжается и поныне, и наш рассказ не будет почти ничем напоминать первоначального изложения первооткрывателей.

Условия заданий, решения которых приведены в конце номера, являются фактически частью текста; некоторые из них не сложнее картинок из альбомов «Раскрась сам».

---

*) Ф. Харари, Теория графов, перевод с англ. изд-во «Мир», М., 1973.

**) Имеются в виду задачи теории графов. — *Прим. ред.*

***) О. Оре, Теория графов, перевод с англ., изд-во «Наука», М., 1968.

Карты на сфере

Картой на сфере мы будем называть всякое разбиение сферы отрезками гладких кривых на конечное число областей — *стран* карты. Относительно этих отрезков кривых естественно предполагать следующее:

1) каждый из них не имеет самопересечений;

2) любые два из них либо совсем не пересекаются, либо пересекаются в концевых точках;

3) концевые точки любого из них входят в число концевых точек одного или нескольких других отрезков, то есть не являются «висячими».

Ясно, что всякий из этих отрезков, составляющих в совокупности *границу карты*, является частью *границы двух стран* (или всей этой границей); такие страны мы и будем называть *соседними*. Отметим, кстати, что строгое доказательство утверждения, начинающегося выше словами «ясно, что...» и называемого теоремой Жордана, чрезвычайно громоздко, несмотря на всю его очевидность.

Сферические карты удобно рисовать в виде разделенного на страны «континента», окруженного «океаном» — одной из стран (на рисунке 1 страной *A*; «континентов» может быть и несколько, как на рисунке 2). Страны *M* и *E* на рисунке 1 — не соседние, хотя и имеют общую точку границы; страны *D* и *E* обладают даже двумя разрозненными участками общей границы.

Потребуем еще, чтобы на карте не было стран, имеющих только одного соседа («острова» в «океане»); карты с такими странами раскрашивать, конечно, ничуть не труднее, но изложение осложняется исключениями и уточнениями.

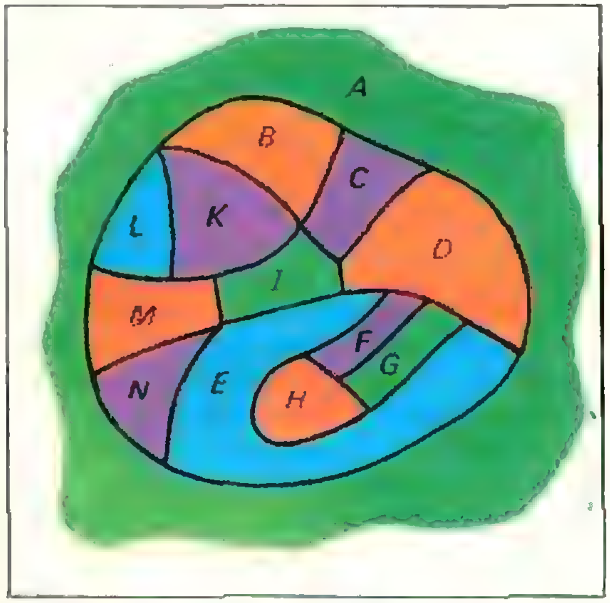


Рис. 1. Карта (страны от *A* до *N*), правильно раскрашенная в четыре цвета.

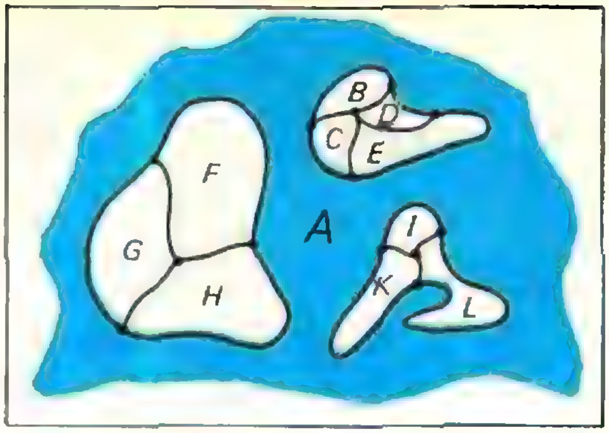


Рис. 2. Карта, для которой число не связанных между собой кусков графа границ (число «островов» в «океане» *A*) равно трем ($K_{\text{гр}} = 3$).

Раскраски карт

Раскраску карты в *n* цветов назовем *правильной n-раскраской*, если любая пара соседних стран окрашена в разные цвета. Нарисовав несколько сферических карт и раскрасив их, вы легко убедитесь в том, что хотя есть карты, для правильной раскраски которых достаточно трех или даже двух красок, но такие карты «нетипичны» — обычно нужны четыре краски.

Задание 1. *Нарисуйте карту из четырех стран, которую нельзя было бы правильно раскрасить двумя или тремя красками.*

Задание 2. а) *На плоскости даны n окружностей. Докажите, что при любом расположении этих*

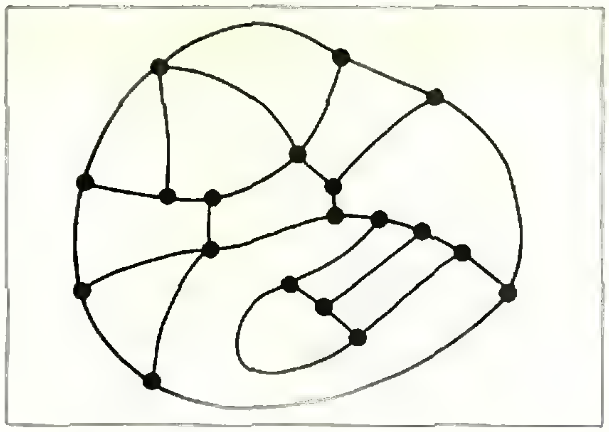


Рис. 3. Граф границ карты.

окружностей образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.

б) *Сформулируйте условия, необходимые и достаточные для того, чтобы карту можно было правильно раскрасить двумя красками.*

В результате многолетней кропотливой работы было доказано, что любая карта, содержащая не более 41 страны, имеет правильную 4-раскраску. Из этого ясно, что если и существует пример, опровергающий нашу гипотезу, то построить его трудно. Вместе с тем правильная 5-раскраска существует для любой сферической карты. Попытайтесь самостоятельно найти доказательство этого факта, установленного еще в конце XIX века.

Графы карты

Всякую систему точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек и попарно не пересекающихся, называют *графом*; точки называют *вершинами*, линии — *ребрами* графа.

Как видно из определения и свойств 1) — 3) карты на сфере, она характеризуется своим *графом границ*; его вершины — точки, в которых сходятся не менее трех стран, ребра — участки границ между вершинами (рис. 3). Мы определим также *граф столиц и дорог карты*; его вершины — «столицы» стран (произвольные, но фиксированные точки, выбранные по одной внутри каждой страны), ребра — «дороги», соединяющие столицы соседних стран (по одной на каждую пару соседей) и проходящие через участок границы между ними (рис. 4, 5).

Раскраску карты можно заменить раскраской вершин графа столиц и дорог этой карты; *правильность* раскраски имеет тот же смысл, если условиться две вершины любого гра-

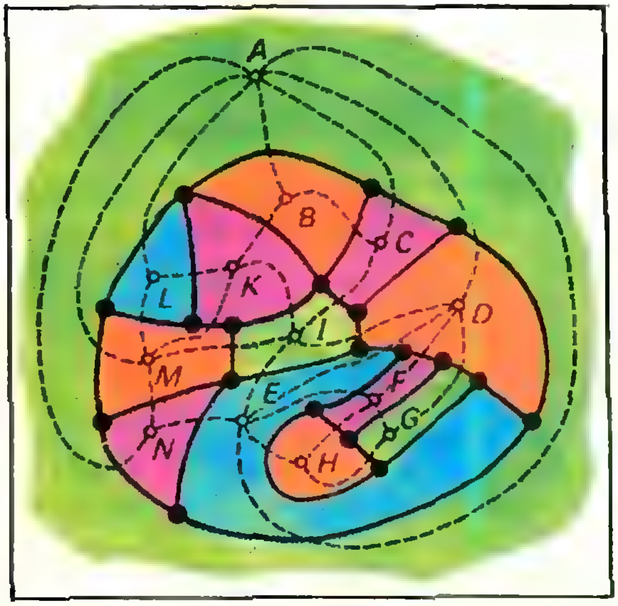


Рис. 4. Страны от *A* до *N*, их столицы и дороги.

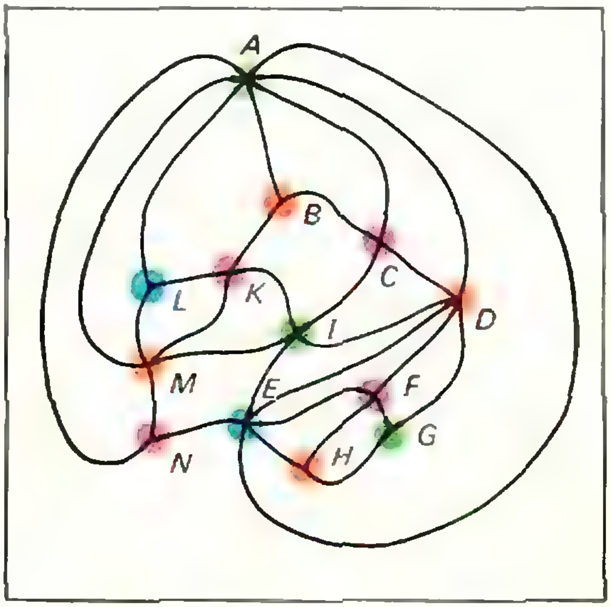


Рис. 5. Граф столиц и дорог карты и его правильная 4-раскраска.

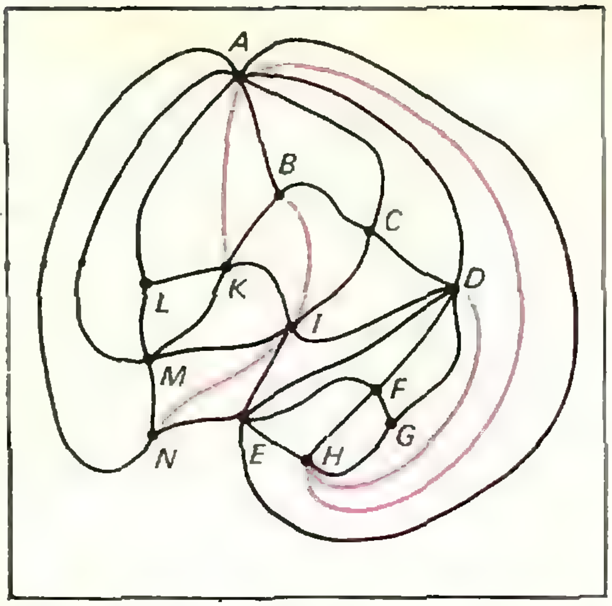


Рис. 6. Красными линиями изображены ребра, достраивающие граф столиц и дорог карты рисунка 1 до графа триангуляции; ребра эти можно было бы строить и по-другому (например, ME вместо NI и т. п.).

фа считать соседними, когда они соединены ребром.

Приступая к раскраске вершин графа столиц и дорог карты на сфере, проверим, можно ли его дополнить ребром, не пересекающим других ребер графа, и если можно, то дополним (например, граф на рисунке 5 — ребром AK). Любая правильная 4-раскраска вновь полученного графа будет правильной и для исходного графа; обратное, вообще говоря, неверно — две несоседние вершины стали соседними и должны быть разноцветными. Мы продолжим этот процесс добавления ребер.

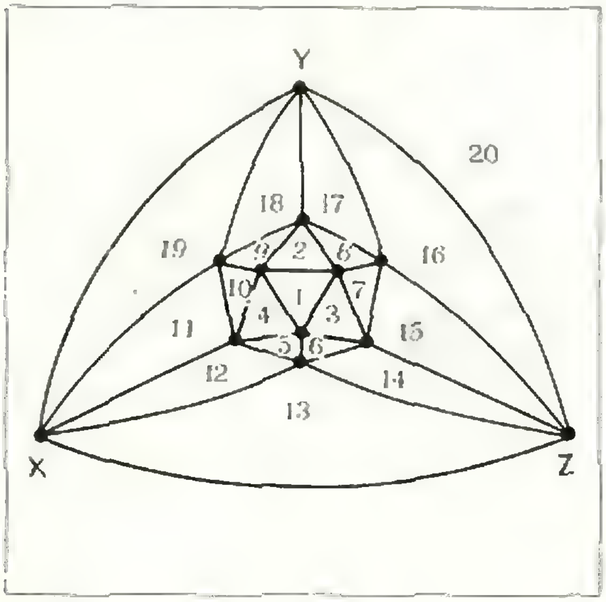


Рис. 7. Граф икосаэдра.

Задание 3. *Докажите, что этот процесс завершится в тот момент, когда граф будет разбивать сферу на криволинейные треугольники.* (На рисунке 6 изображен граф, полученный из графа рисунка 5.)

Такой граф называют графом триангуляции сферы *), а треугольники называют гранями графа. На рисунке 7 изображен граф вершин и ребер (в привычном геометрическом понимании этих слов — «вершина тетраэдра», «ребро куба») правильного двадцатигранника — икосаэдра; грань 20 выглядит как внешняя часть треугольника XYZ.

Задание 4. *Какой должна быть карта, чтобы ее граф столиц и дорог был графом триангуляции?*

Задание 5. *а) Докажите, что граф вершин и ребер правильного восьмигранника — октаэдра — может быть правильно раскрашен тремя красками.*

б) Сформулируйте условия, необходимые и достаточные для того, чтобы граф триангуляции обладал правильной 3-раскраской.

Геометрия раскраски

Правильной 4-раскраске вершин любого графа триангуляции сферы можно придать простой и красивый геометрический смысл. Этим и объясняется наше желание перейти от графа столиц и дорог карты к его графу триангуляции, хотя сама задача раскраски на первый взгляд усложняется.

Рассмотрим некоторый тетраэдр, каждая из четырех вершин которого раскрашена в свой цвет (рис. 8, *д*). Предположим теперь, что некоторый граф триангуляции сферы правильно

---

*) Триангуляция (геодезический термин) — разбиение местности на треугольники.

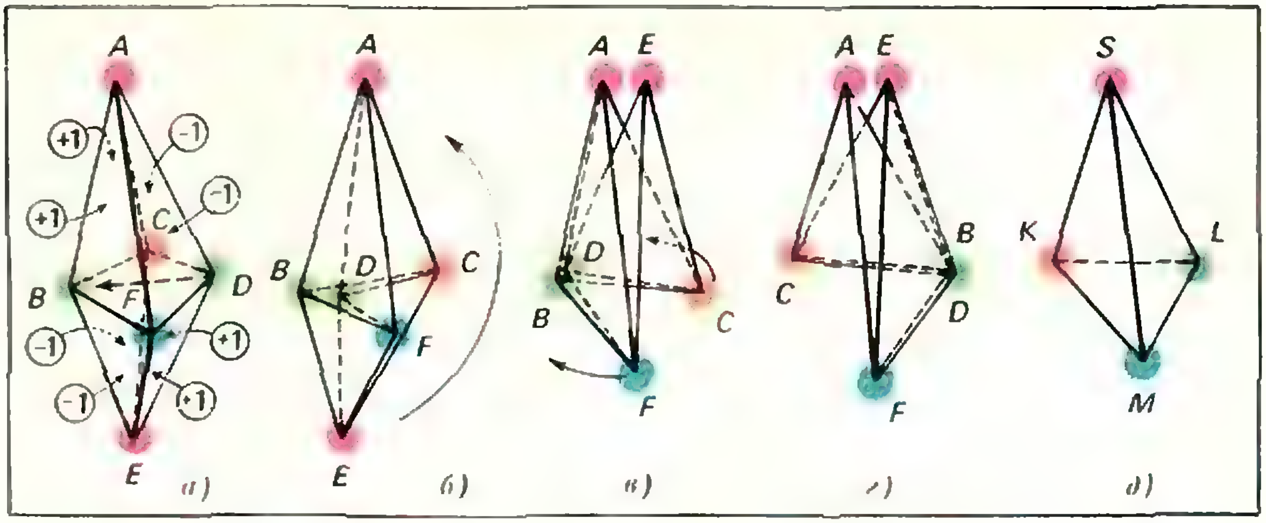


Рис. 8. Процесс наложения поверхности октаэдра на поверхность тетраэдра.

раскрашен в те же четыре цвета. Тем самым каждой его вершине соответствует вершина тетраэдра, причем любым двум соседним — разные. А это означает, что каждому ребру и каждой грани графа соответствует *некоторое ребро и некоторая грань* тетраэдра: ребру графа — то ребро тетраэдра, вершины которого окрашены в те же два цвета, что и вершины ребра графа, а грани графа — подобным же образом определяемая грань тетраэдра. Мы можем представлять себе это соответствие как наложение раскрашенной триангулированной поверхности сферы на четырехгранную поверхность тетраэдра, вершины которого символизируют четыре цвета раскраски. Это наложение можно начинать с любой окрашенной в некоторый цвет вершины триангуляции, совместив ее с вершиной тетраэдра того же цвета. Переходя к соседней вершине триангуляции и совмещая ее с соответствующей по цвету вершиной тетраэдра (которая всегда отлична от первой!), мы одновременно получим совмещение ребра триангуляции с ребром тетраэдра. Подобным же образом совместим грань триангуляции с гранью тетраэдра, и затем, шаг за шагом добьемся нужного наложения.

Описанный процесс наложения изображен на рисунке 8 (*а* — *д*) для поверхности правильного восьмигранника — октаэдра. Внимательно проследив детали этого процесса на примере рисунка 8, нетрудно уяснить себе, *почему* такое наложение при правильной 4-раскраске возможно *и как оно происходит* (*в частности*, поверхность сферы приходится считать гибкой и допускающей в случае необходимости самопересечения).

Арифметика раскраски

Если при наложении конкретной вершины триангуляции достаточно указать вершину тетраэдра, в которую она переходит (то есть цвет этой вершины), а при наложении конкретного ребра — ребро тетраэдра (то есть два цвета), то при наложении конкретной грани недостаточно указать грань тетраэдра — нужно еще знать, какой стороной она накладывается на эту грань — «лицевой» или «тыльной». Проследить это можно на примере наложения, изображенного на рисунке 8. Сформулируем теперь следующее правило.

(*) *Если при наложении грани графа триангуляции на грань тетраэдра ее внешняя сторона легла на внешнюю сторону грани тетраэдра, то сопоставим этой грани графа триангуляции число* +1; *если же на внутреннюю, то* — 1 (см. рис. 8, *а*).

Эти числа называют *числами Хивуда* раскраски — в честь английского математика П. Хивуда, пионера задач о раскрасках и первооткрывателя «арифметических» законов в проблеме четырех красок.

Основное, хотя и вполне очевидное свойство чисел Хивуда состоит в следующем:

Лемма. *Если числа Хивуда двух соседних граней триангуляции равны, то эти грани отображаются на разные (но, конечно, всегда соседние) грани тетраэдра, если же они не равны, то эти грани отображаются на одну грань тетраэдра, одна «лицевой» стороной, другая — «тыльной».*

Эта лемма только детализирует определение чисел Хивуда; а вот следующие три арифметические свойства этих чисел на первый взгляд довольно неожиданны:

1) Сумма всех чисел Хивуда правильной раскраски вершин графа триангуляции делится на 4 (это свойство стало известно недавно).

2) Возьмем любую вершину триангуляции; сумма чисел Хивуда граней, сходящихся в этой вершине, делится на три (этот фундаментальный факт был открыт Хивудом в 1898 году).

3) Наоборот, если нам удастся *подобрать числа ±1 для граней графа* триангуляции так, чтобы они удовлетворяли условию 2), то задача о раскраске решена — можно накладывать триангуляцию на поверхность тетраэдра, соблюдая правило (*); условие 2) обеспечит выполнимость такого наложения.

Иллюстрацией утверждений 1), 2), 3) может служить рисунок 9, где изображен граф икосаэдра и его правильная 4-раскраска.

Мы докажем только утверждение 1); доказательство утверждения 2) аналогично и составляет содержание задания 6; доказательство 3) не совсем элементарно, и мы его не приводим. Отметим только, что делимость на три связана с тем, что в

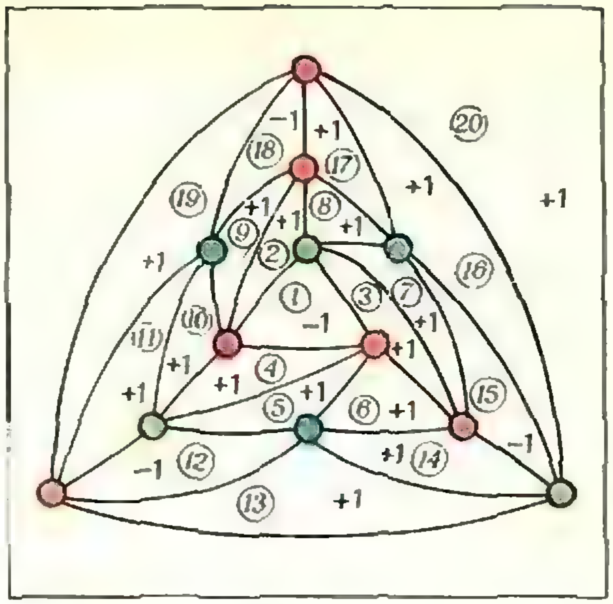


Рис. 9. Граф икосаэдра и его числа Хивуда. Правильная 4-раскраска была построена из чисел Хивуда наложением на поверхность тетраэдра (см. рис. 8, *д*); центральная грань раскрашивается случайным образом; раскраска остальных вершин определяется условием 3).

каждой вершине тетраэдра сходятся *три* грани, а делимость на четыре — с тем, что у тетраэдра *четыре* грани.

Делимость на четыре

Итак, пусть вершины некоторого графа триангуляции правильно раскрашены в четыре цвета и каждой грани графа сопоставлено число Хивуда. Докажем, что сумма всех чисел Хивуда делится на четыре.

Разобьем совокупность граней триангуляции на четыре группы: все грани каждой из этих групп отображаются в одну и ту же грань тетраэдра, и любая пара граней из разных групп — в разные грани тетраэдра. Может случиться, что на некоторые *из граней тетраэдра не наложится ни* одна из граней графа триангуляции (к примеру, на рисунке 8, *д* такими гранями оказываются грань *KLM* и грань *KSM*). В таком случае соответствующие группы не будут содержать ни одной грани графа триангуляции.

Мы докажем, что суммы чисел Хивуда граней, входящих в каждую их этих групп, равны между собой (если какая-то из групп пуста, то есть не содержит ни одной грани, то естественно считать соответствующую сумму равной нулю; тогда и другие суммы будут равны нулю). Так как сумма всех чисел Хивуда распадается на суммы по четырем группам граней, то из равенства этих сумм по группам и будет следовать делимость на четыре.

Выберем произвольным образом две грани тетраэдра. Рассмотрим соответствующие им группы граней триангуляции и составим суммы чисел Хивуда граней по каждой из этих групп. Возьмем теперь любую грань графа триангуляции, входящую в одну из этих групп, и то ее ребро, которое отображается на общее ребро двух граней тетраэдра, выбранных нами вначале. Рассмотрим ту грань триангуляции, которая имеет с первой именно *это* общее ребро; понятно, что такая соседняя грань определяется однозначно. При этом она может отображаться лишь на одну из выбранных граней тетраэдра и поэтому либо входит в ту же группу граней, что и первая, — тогда по лемме числа Хивуда этих граней не равны, либо входит во вторую из этих групп — и тогда по той же лемме числа Хивуда этих двух граней равны. Отсюда следует, что если в одну из двух рассматриваемых нами сумм входит какое-то слагаемое (число Хивуда некоторой грани), то либо в другую сумму входит равное слагаемое (число Хивуда единственной соседней грани из второй группы), либо в ту же сумму входит равное по величине, но противоположное по знаку слагаемое (число Хивуда опять единственной соседней грани, но на этот раз из той же группы). Этим равенство двух сумм доказано.

Задание 6. *Докажите тем же методом свойство 2) чисел Хивуда.*

Не раскрашивать, а вычислять

Свойство 3) чисел Хивуда позволяет заменить задачу нахождения правильной 4-раскраски некоторой арифметической задачей на графе: ищутся значения неизвестных x (чисел Хивуда), удовлетворяющих условиям $x = \pm 1$ и соотношениям 2) делимости на 3. Подсчитаем число неизвестных и число соотношений.

С каждым графом на сфере связаны четыре целых числа: число его вершин — $В$, ребер — $Р$, областей, на которые граф разбивает сферу, — $Г$ и число $К$ связных компонент, на которые распадается граф (из одной вершины такой компоненты можно попасть в любую другую вершину той же компоненты, «путешествуя» по ребрам графа; в вершину же другой компоненты попасть так невозможно).

Задание 7. *Докажите, что для любого графа на сфере*

$$В - Р + Г - К = 1.$$

Задание 8. *Докажите, что для любой карты число компонент ее графа столиц и дорог равно* 1.

Следствием заданий 7 и 8 является знаменитая **теорема Эйлера**: *Числа $В$, $Р$ и $Г$ графа столиц и дорог любой карты удовлетворяют равенству* $В - Р + Г = 2$.

Задание 9. *Докажите, что для любого графа триангуляции сферы справедливо равенство:* $2В = Г + 4$.

Итак, вернемся к нашим неизвестным — числам Хивуда. Количество неизвестных равно числу $Г$ граней триангуляции, число соотношений 2) равно числу $В$ вершин триангуляции. Как следует из равенства задания 9, число неизвестных почти вдвое превосходит число соотношений делимости (каждое из этих неизвестных может принимать только два значения: +1 и —1). Поэтому и кажется обоснованной (вот уже более 70 лет!) надежда, что такие числа всегда могут быть найдены. Вероятно, теперь читатели смогут лучше оценить слова О. Оре о «раздражающей неуловимости» проблемы четырех красок.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июня 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М256, М257» или «...Ф268». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные отмечены звездочкой.

Задачи

М256—М260; Ф268—Ф272

М256. Около окружности описан многоугольник. Точки касания его сторон с окружностью служат вершинами второго, вписанного в эту окружность многоугольника. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки M окружности до сторон одного многоугольника равно произведению расстояний от этой точки до сторон второго.

(Под расстоянием от точки M до стороны понимается расстояние до прямой, на которой лежит эта сторона.)

А. Н. Черныщев

М257. При каких натуральных $n \geqslant 2$ неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant$$
$$\geqslant p\,(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)$$

выполняется для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если а) $p = 1$; б) $p = {}^4/_3$; в) $p = {}^6/_5$?

Нгуен Конг Кви (Ханой, ДРВ)

М258. На плоскости даны три точки K, L, N. Про четырехугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трех его сторон лежат в данных точках K, L, N. Найдите множества точек, в которые может попасть:

а) середина четвертой стороны;

б) вершина этого четырехугольника.

А. П. Савин

М259. Назовем *квартетом* четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. (Например, на рисунке 1 нарисовано три квартета.)

Какое наибольшее число квартетов, не имеющих общих клеток, можно разместить:

а) в квадрате 5×5?

б) в прямоугольнике $m \times n$ клеток?

А. Григорян, ученик 10 класса

М260*. Окружность разбита точками A_1, A_2, . . ., A_n на n равных частей, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Две дуги (с концами в точках разбиения) называются *одинаково окрашенными*, если при некотором повороте окружности одна из них полностью, включая цвет каждой части, совпадает с другой. (Например, на рисунке 2 дуги A_2A_6 и A_6A_{10} одинаково окрашены.)

Докажите, что если для каждой точки разбиения A_i можно указать две непересекающиеся одинаково окрашенные дуги с общим концом A_i, то всю окружность можно разбить на несколько одинаково окрашенных дуг, то есть окраска «периодическая». Рассмотрите сначала случай, когда красок всего две: скажем, красная и черная.

Г. А. Гуревич

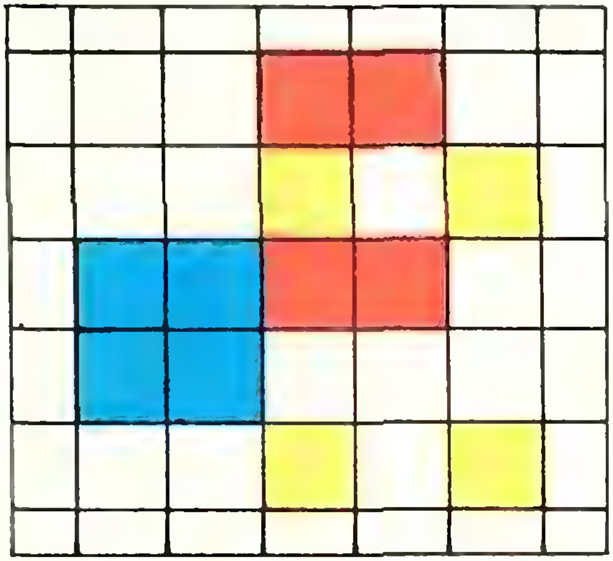


Рис. 1.

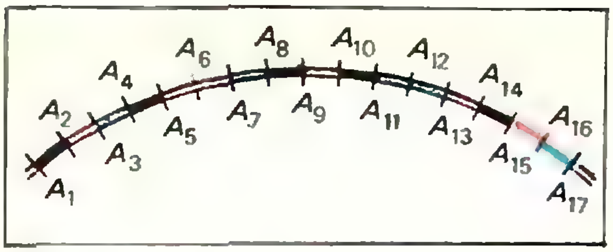


Рис. 2.

Ф268. Для определения отношения теплоемкостей газа при постоянном давлении и при постоянном объеме иногда применяется следующий метод. Определенное количество газа, начальная температура, объем и давление которого равны соответственно T_0, V_0 и p_0, нагревается платиновой проволокой, через которую в течение определенного времени проходит электрический ток: один раз при постоянном объеме V_0, причем газ достигает давления p_1, другой раз при постоянном давлении p_0, причем объем газа становится равным V_1. Показать, что $\frac{c_p}{c_V} = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{(V_1 - V_0)p_0}$.

Ф269. Математический маятник, который состоит из тяжелого металлического шара массы m и тонкой проводящей нити длины l, совершает малые колебания в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией **B**, направленной перпендикулярно к плоскости колебаний маятника. Максимальный угол, на который отклоняется маятник от вертикали, равен α_0. Как изменится этот угол, если в тот момент, когда маятник проходит положение равновесия, к нему подсоединить с помощью гибких тонких проводов конденсатор емкостью C (рис. 3), причем за время контакта, которое очень мало, конденсатор успевает полностью зарядиться?

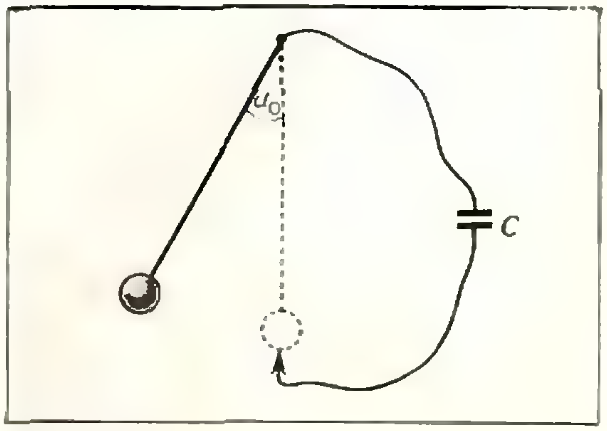


Рис. 3.

Ф270. В длинной пробирке на расстоянии l_1 от запаянного конца имеется короткий столбик ртути (рис. 4). Масса ртути m. С какой угловой скоростью ω нужно вращать пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы ртуть достигла конца пробирки? Длина пробирки l, температура воздуха в пробирке не меняется. Атмосферное давление равно p_0.

Ф271. Подсчитать среднюю плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна 100 $в \cdot м^{-1}$, а на высоте $h = 1{,}5$ *км* эта напряженность падает до 25 $в \cdot м^{-1}$.

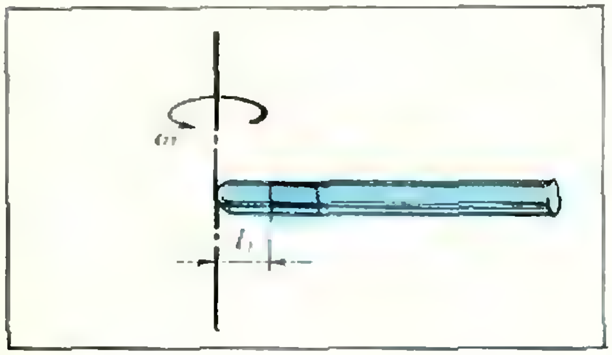


Рис. 4.

Ф272. К стенке, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длины l (рис. 5). Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной к стенке, на небольшой угол β от вертикального положения и отпустили. Найти период колебаний маятника, если $\beta > \alpha$ и удар шарика о стенку абсолютно упругий.

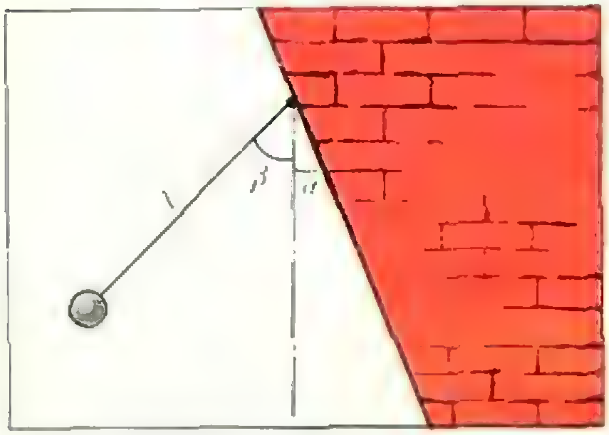


Рис. 5.

Решения задач

М211—М218; Ф223—Ф227

М211. *Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).*

При $n = 5$ требуемый граф (так называется система точек, соединенных стрелками) представлен рисунком 1. Теперь произведем индукционный переход: докажем, что, если можно соединить стрелками n точек так, как требуется в условии, то можно соединить и $n+1$ точку. Пусть n точек уже соединены — получился граф с n вершинами. Можно считать, что любые две из этих n точек соединены стрелкой: иначе мы проведем все недостающие стрелки (направив их в любую сторону), и условие задачи тем более будет выполняться. Обозначим новую точку через C.

Рассмотрим два случая.

а) n — четное. Тогда эти n точек разобьем на пары. Пусть точки $A_k B_k$ — одна из пар ($1 \leqslant k \leqslant n/2$) и из A_k идет стрелка в B_k. Тогда проведем из C стрелку в A_k и из B_k проведем стрелку в C (см. рис. 2). Так проделаем для каждой пары. Новый граф с $n+1$ вершиной построен. Докажем, что он удовлетворяет условию задачи. Пусть X, Y — две любые различные его вершины. Нам надо доказать, что из X в Y можно прийти, пройдя одну или две стрелки. Если и X и Y не совпадают с C, то это так по индукционному предположению. Пусть X или Y совпадает с C. Тогда другая из этих точек (Y или X) входит в какую-то пару из тех, на которые мы разбили первые n точек. Таким образом, X и Y — это какие-то две из трех точек, изображенных на рисунке 2. Глядя на этот рисунок, легко перебрать все возможные при этом варианты и убедиться, что требование выполняется.

б) n — нечетное. В этом случае разобьем первые n вершин на несколько пар и одну тройку. Сделаем это следующим образом. Выберем любую вершину A_1. Она

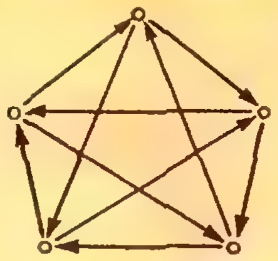


Рис. 1.

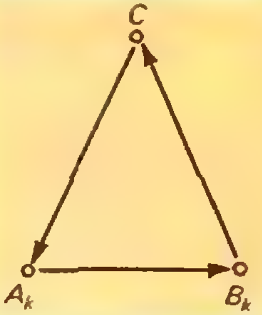


Рис. 2.

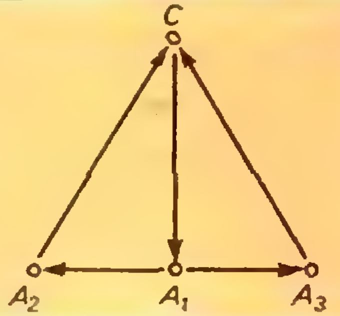


Рис. 3.

соединена стрелками со всеми остальными $n-1$ вершинами: $A_2, \ldots, A_n$. Из A_1 выходят не менее чем две стрелки или в A_1 входят не менее чем две стрелки. Действительно, в противном случае n было бы меньше четырех.

Пусть из A_1 выходят не менее чем две стрелки (другой случай аналогичен) и приходят в вершины A_2, A_3. Остальные вершины разобьем на пары. Теперь соединим стрелками новую вершину с тройкой A_1, A_2, A_3 — как показано на рисунке 3, а со всеми парами — как показано на рисунке 2. Как и в случае а), легко доказать, что полученный граф удовлетворяет условию задачи. Индукционный переход закончен. Итак, мы доказали по индукции, что n точек можно соединить так, как требуется в условии, при $n \geqslant 5$. Если вы поняли доказательство, то без труда разберетесь в следующем парадоксе. При $n=3$ требуемый граф тоже существует (рис. 2), а при $n=4$ такого графа нет (в этом легко убедиться перебором). Но, применив индукционный переход к частному случаю $n=3$, получаем: если такой граф существует при $n=3$, то он существует и при $n=4$. Получилось противоречие *). В чем дело?

М212. *На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что семь из них — фальшивые, остальные — настоящие, причем узнал, какие именно фальшивые, и какие — настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно являются фальшивыми, а остальные — настоящими. Сможет ли он это сделать?*

На рисунках 4, *а*, *б*, *в* показано, какими тремя взвешиваниями эксперт может убедить суд, что монеты $Ф_1$, $Ф_2$, ..., $Ф_7$ — фальшивые, а $Н_1$, $Н_2$, ..., $Н_7$ — настоящие. Каждый раз правая чашка перевешивает, а это возможно лишь в том случае, если фальшивых монет больше на левой чашке, чем на правой (а настоящих — на правой больше, чем на левой).

Этот способ легко обобщить, и тогда тот факт, что данные n монет — фальшивые, а другие n — настоящие, удается доказать, произведя $[\log_2 n]+1$ взвешиваний. Несмотря на то, что такая система взвешиваний очень экономна (при $n=1000$ достаточно 10 взвешиваний), мы не можем доказать, что она оптимальна. Интересно было бы доказать, что минимальное число взвешиваний все же растет неограниченно при $n \to \infty$ (или опровергнуть это).

А. Л. Тоом

М213. *Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч,*

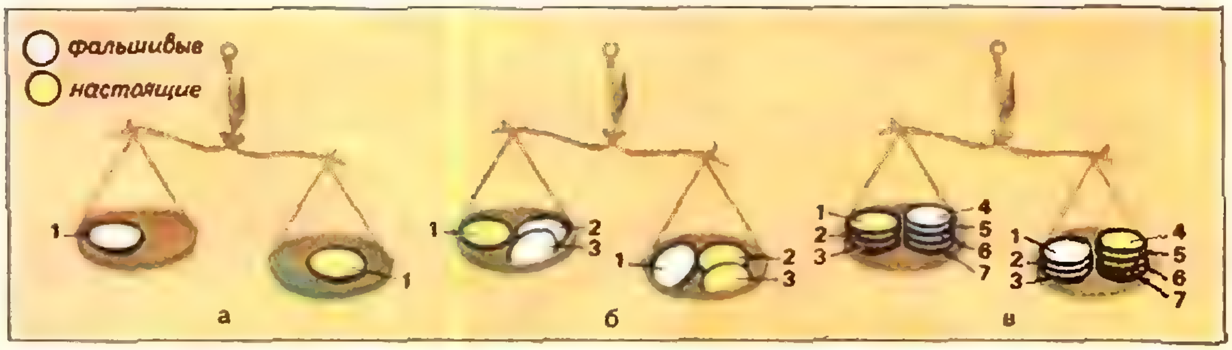


Рис. 4.

---

*) Почти как в §§ 2 и 3 статьи М. Милта «Что сказал проводник» («Квант», 1973, № 8).

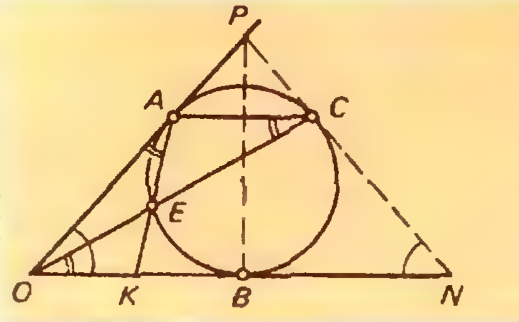


Рис. 5.

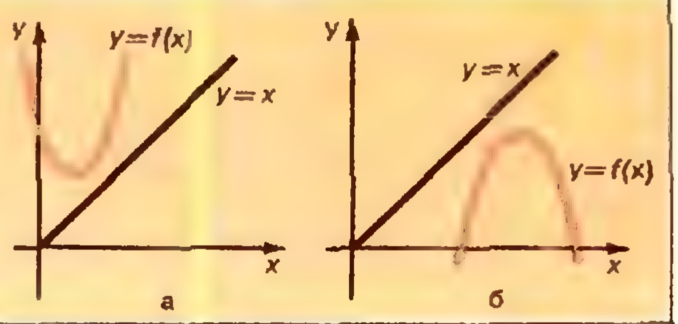


Рис. 6.

пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$.

Мы получили много различных решений этой задачи, в которых используются теоремы о касательных и секущих, о подобии треугольника, о вписанных углах и т. п. Приведем одно из самых коротких и красивых.

Проведем касательную к окружности в точке C; пусть P и N — точки ее пересечения со сторонами AO и OB угла AOB (рис. 5). Ясно, что PB — ось симметрии треугольника OPN, поэтому все четыре касательные равны:

$$OA = OB = BN = CN.$$

Треугольники NOC и OAK подобны, поскольку

$$\angle CNO = \angle AOK, \quad \angle NOC = \angle ACO = \angle OAK$$

(каждый из последних двух углов измеряется половиной дуги AE). Отсюда

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OK}{OA} = \frac{CN}{ON} = \frac{1}{2}.$$

М214. *Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней.*

Эту задачу можно решить чисто алгебраически, воспользовавшись тем, что если $f(x)$ — многочлен, то $f(f(x)) - x$ всегда делится (как многочлен) на $f(x) - x$, то есть

$$f(f(x)) - x = (f(x) - x)g(x).$$

Здесь $g(x)$ — многочлен второй степени. Несложные выкладки показывают, что дискриминант этого многочлена отрицателен. Большинство читателей прислали, однако, более красивое решение, использующее наглядные соображения, связанные с графиками.

Условие, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней, означает, что парабола $y = f(x)$ целиком расположена выше или целиком — ниже прямой $y = x$ (рис. 6). Другими словами, для всех x

$$f(x) > x,$$

но тогда для всех x

$$f(f(x)) > f(x) > x,$$

или для всех x

$$f(x) < x,$$

а тогда для всех x

$$f(f(x)) < f(x) < x.$$

Таким образом, в обоих случаях уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет решений.

М215*. *На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки k и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то k становится белой, если две или три из них были черными, — то черной).*

а) Доказать, что через конечное время на листе не останется черных клеток.

б) Доказать, что черные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$.

Пусть Ч — какое-то множество черных клеток. Обозначим буквой Г (от слова «голосование») оператор перекрашивания, то есть через Г (Ч) будем обозначать множество клеток, которые получатся из Ч, через $Г^2$(Ч) — множество Г(Г(Ч)), в которое перейдет Ч за два шага, через $Г^3$(Ч) — за три шага и т. д. (см. рис. 7; кстати, этот рисунок опровергает предположение, что общее количество клеток в Г(Ч) всегда меньше, чем в Ч).

Утверждение а) сразу следует из двух таких почти очевидных предложений.

(1) Если к множеству Ч добавить еще черных клеток, то к множеству Г(Ч) тоже могут только добавиться черные клетки, но ни одна не пропадет. Используя знак $\subset$ ($A \subset B$ означает, что множество A целиком содержится в B, в частности, может с ним

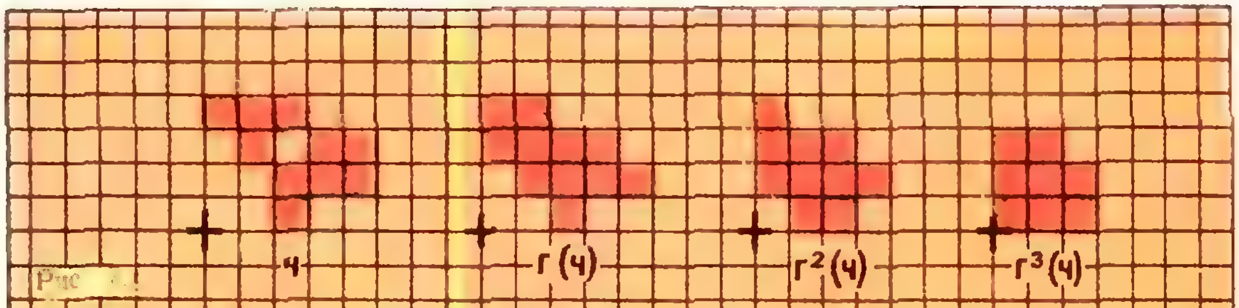


Рис. 7

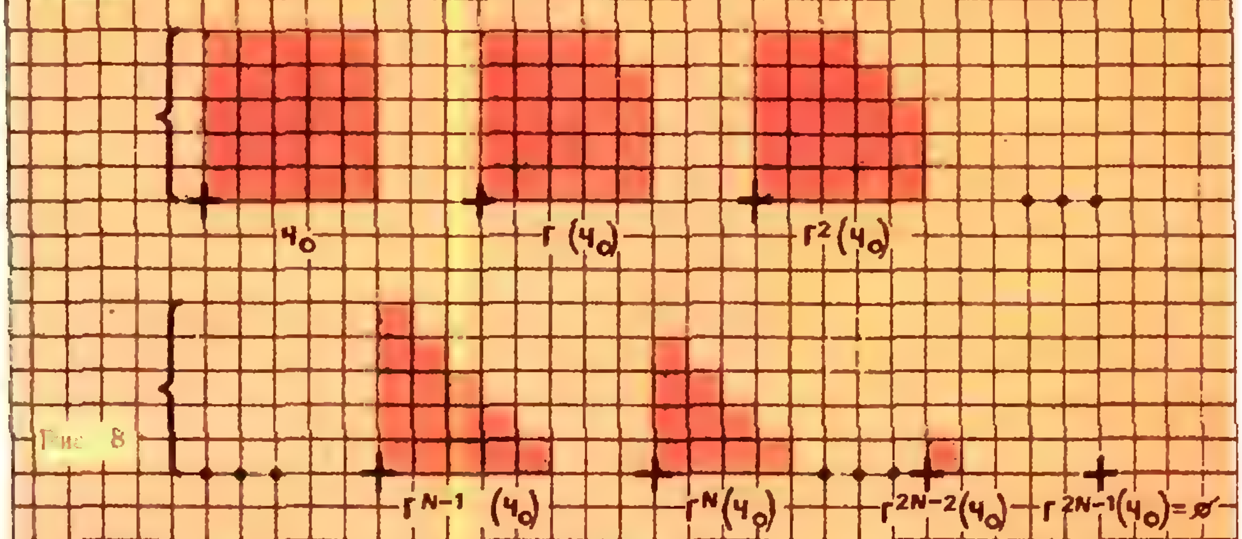


Рис. 8

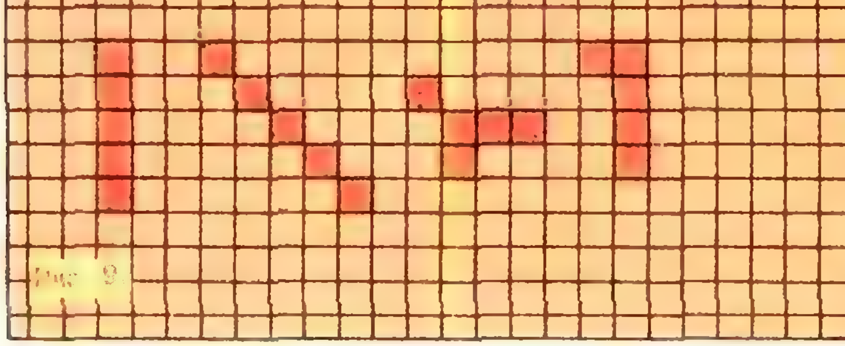


Рис. 9

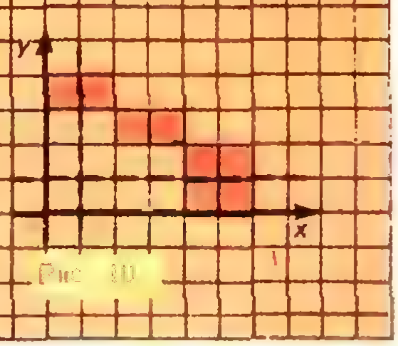


Рис. 10

совпадать), это можно записать так:

$$Ч \subset Ч' \Rightarrow Г(Ч) \subset Г(Ч').$$

(2) Если $Ч_0$ — множество всех клеток внутри квадрата на клетчатой бумаге (со стороной N клеток), то через конечное число шагов от $Ч_0$ ничего не останется (рис. 8); точнее, уже через $(2N-1)$ шагов получится *пустое* множество черных клеток: $Г^{2N-1}(Ч_0) = \varnothing$.

Ясно, что любое множество Ч можно заключить в достаточно большой квадрат $Ч_0$; согласно (2) этот черный квадрат $Ч_0$ за конечное число шагов «вымрет», а согласно (1) и множество Ч не может просуществовать дольше, чем $Ч_0$. Тем самым задача а) решена.

Доказать б) значительно труднее.

Приведем решение задачи б), придуманное на олимпиаде десятиклассником *А. Гомилко* из Хмельницкого (за это он получил специальный приз).

Кстати говоря, то, что решение б) не может быть очень простым, показывает разнообразие примеров множеств из n клеток, вымирающих ровно за n шагов (рис. 9).

Докажем утверждение б) индукцией по n — количеству клеток в начальном множестве Ч; для $n = 1$ оно очевидно.

Пусть уже доказано, что если в Ч меньше n клеток, то

$$Г^{n-1}(Ч) = \varnothing.$$

Рассмотрим теперь Ч, состоящее из n клеток. Заключим его в прямой угол $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (оси координат Ox и Oy направим вправо и вверх по линиям сетки, сторона клетки равна 1) так, чтобы в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ лежала хоть одна черная клетка и в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$ — тоже (рис. 10).

Пусть $Ч^1$ — часть Ч, лежащая в полуплоскости $x \geqslant 1$. По предположению индукции, $Г^{n-1}(Ч') = \varnothing$. А клетки из $0 \leqslant x \leqslant 1$ не оказывают никакого влияния на то, что происходит выше прямой $x = 1$. Следовательно, $Г^{n-1}(Ч)$ целиком лежит в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ (очевидно, что в

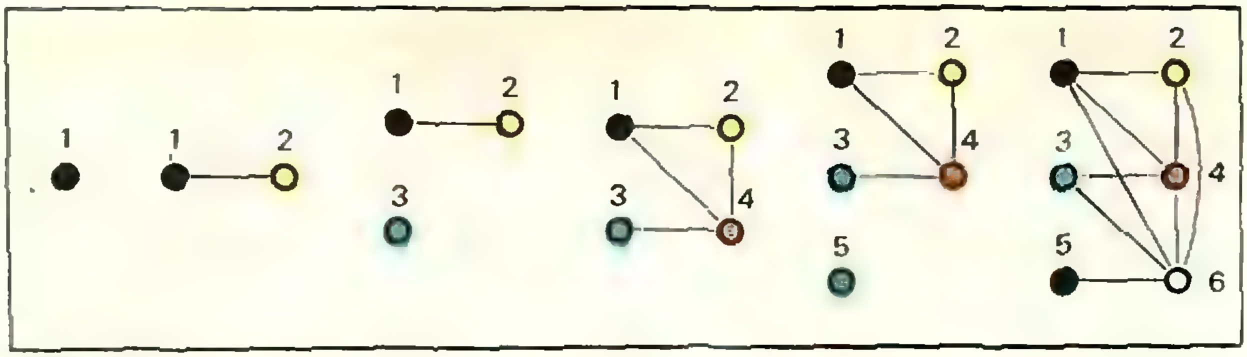


Рис. 11.

полуплоскости $x < 0$ черные клетки возникнуть не могут).

Точно так же доказывается, что $\Gamma^{n-1}(\text{Ч})$ содержится в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отсюда следует, что $\Gamma^{n-1}(\text{Ч})$ может содержать максимум одну клетку: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и, значит, $\Gamma^{n}(\text{Ч}) = \varnothing$.

И. Б. Васильев

М216. *N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.*

Решим задачу методом математической индукции. При $N < 3$ утверждение задачи очевидно.

Предположим, что удалось познакомить k человек, так, что никакие трое из них не имеют равного числа знакомых. Присоединим $k+1$-го. Укажем способ, как познакомить $(k+1)$-го чтобы в группе из $(k+1)$-го человека по-прежнему никакие трое не имели равного числа знакомых. Если среди первых k человек найдется человек, знакомый со всеми остальными, то $k+1$ не будем ни с кем знакомить. Если же такого нет, то познакомим $(k+1)$-го со всеми.

В первом случае $(k+1)$-й не имеет знакомых, а каждый из остальных имеет хоть одного знакомого — того, который был знаком со всеми. Во втором случае $(k+1)$-й имеет k знакомых, количество знакомых у каждого из первых k человек возросло на единицу, но ни у одного из них не стало k знакомых.

На рисунке 11 показаны схемы знакомств при $k = 6$, получающиеся описанным способом.

Существует и много других решений этой задачи. Например, если занумеровать n человек числами от 1 до n и познакомить i с j, если

$$|i-j| \leqslant \frac{n}{2},$$

то равное количество знакомых имеют только пары людей с номерами k и $n-k$ (при $k \leqslant \frac{n}{2}$ человек с номером $(k-1)$ имеет, очевидно, на одного знакомого меньше, чем его сосед k).

Г. А. Гальперин

М217. *Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Доказать, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.*

Если через точку O проходят две прямые, каждая из которых делит площадь многоугольника M пополам, то в симметричных друг другу углах между этими прямыми лежат одинаковые по площади куски многоугольника M (они закрашены на рис. 12).

Рассмотрим вместе с M еще и многоугольник M', симметричный ему относительно точки O (рис. 13). Внутри любого из углов, образованных двумя нашими прямыми, контуры многоугольников M и M' должны пересекаться (в противном случае площадь одного из кусков больше площади другого; совпадать даже частично контуры M и M' не могут, поскольку у M по условию нет параллельных сторон). Пусть всего таких прямых k штук. Тогда существует $2k$ углов, в каждом из которых должны лежать различные точки пересечения контуров M

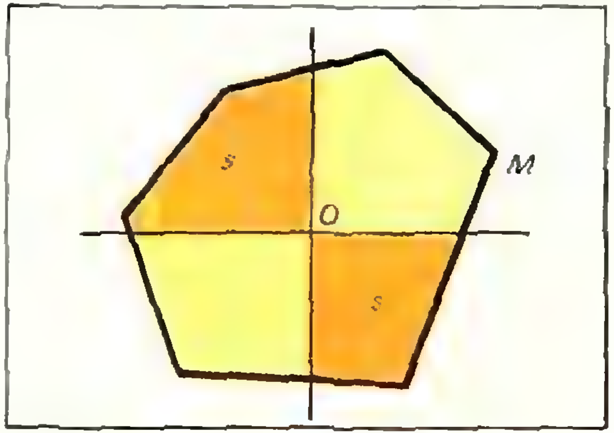


Рис. 1

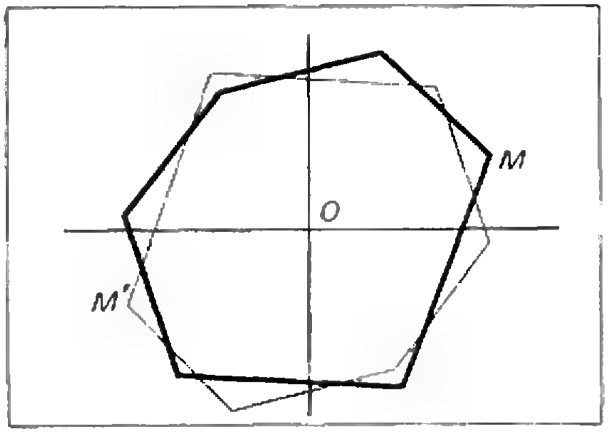


Рис. 13.

и M' (на рис. 13 $k = 3$). Но на каждой стороне многоугольника M, очевидно, лежит не более двух таких точек: M' — выпуклый, а контур выпуклого многоугольника пересекается с прямой не более чем в двух точках. Следовательно, всего точек пересечения не более $2n$ (на рисунке 13 их как раз $2\cdot 6 = 12$). Поэтому $2k \leqslant 2n$, и значит $k \leqslant n$. Задача решена.

Заметим еще следующее. Будем вращать направленную прямую l, проходящую через O, вокруг точки O и рассмотрим разность площадей слева и справа от l, как функцию от угла поворота φ (φ меняется от 0 до π; при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ прямая l совпадает сама с собой, но имеет противоположное направление); положим

$$S_л(\varphi) - S_п(\varphi) = f(\varphi).$$

Тогда f меняется монотонно на каждом интервале, на котором прямая l не проходит через вершины M или точки пересечения контуров M и M' (докажите это). Конечно, эта функция непрерывна и

$$f(0) = -f(\pi).$$

Отсюда следует, что хотя бы одна прямая, проходящая через O и делящая площадь M пополам, существует. Докажите, что если ни одна из этих прямых не проходит через «особую точку» — вершину M или точку пересечения контуров M и M', — то всего таких прямых нечетное число.

Н. Б. Васильев

М218. *Доказать, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то*

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

Поскольку $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, то

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 -$$
$$- (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 =$$
$$= (2x_1 + 2x_3 + 2x_5)(2x_2 + 2x_4) =$$
$$= 4p + 4x_1x_4 + 4x_5(x_2 - x_1),$$

где $p = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$.

Отсюда

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4p + 4x_5(x_2 - x_1). \quad (1)$$

Аналогично доказывается, что

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4p + 4x_3(x_1 - x_2). \quad (2)$$

Нужное неравенство следует из (1), если $x_2 \geqslant x_1$, и из (2), если $x_1 \geqslant x_2$.

Подумайте, при каком наибольшем c_n для всех положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно неравенство

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2 \geqslant$$
$$\geqslant c_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1).$$

Б. Д. Гинзбург

Ф223. *Модели корабля толчком сообщили скорость $v_0 = 10$ м/с. При движении модели на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости:* $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. *а) Найти путь, пройденный моделью за время, в течение которого ее скорость уменьшилась вдвое. б) Найти путь, пройденный моделью до полной остановки. Считать $k = 0{,}5$ кг/с. Масса модели $m = 0{,}5$ кг.*

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса корабля за малое время Δt равно импульсу силы F, действующей на корабль:

$$m\Delta v = F\Delta t.$$

Сила F переменна, поэтому изменение импульса корабля за большой промежуток времени t равно импульсу средней силы $F_{ср}$:

$$mv - mv_0 = F_{ср}t.$$

Так как сила F пропорциональна скорости корабля, то

$$F_{ср} = -kv_{ср} \text{ и } mv - mv_0 = -kv_{ср}t.$$

Но произведение $v_{ср}t$ равно пути s, пройденному кораблем. Поэтому

$$m(v - v_0) = -ks,$$

откуда

$$s = \frac{m}{k}(v_0 - v).$$

Теперь легко найти путь, пройденный кораблем за время, в течение которого скорость корабля уменьшилась вдвое:

$$s_1 = \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{1}{2}v_0\right) = \frac{m}{2k}v_0 = 5 \text{ м},$$

и путь, пройденный кораблем до полной остановки:

$$s_2 = \frac{m}{k}(v_0 - 0) = \frac{m}{k}v_0 = 10 \text{ м}.$$

Итак, задача решена, однако интересно рассмотреть еще вопрос о том, какое время пройдет до полной остановки корабля. Для этого найдем, как меняется со временем скорость корабля.

Так как $m\Delta v = F\Delta t$ и $F = -kv$, то

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{k}{m}v.$$

Мы получили, что скорость изменения скорости корабля пропорциональна самой скорости. Но, как известно (см., например, статью С. Д. Осятинского и Л. З. Руминского «Экспонента», «Квант», 1972, № 12), если изменение какой-либо величины пропорционально самой этой величине, то такая величина изменяется по экспоненциальному закону, поэтому

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Из этой формулы следует, что $v = 0$ при $t \to \infty$! То есть путь s_2 корабль мог бы пройти за бесконечно большое время! Это означает, что второй вопрос задачи при условии $F \sim v$ следует уточнить. Будем считать, что тело остановилось, если его скорость уменьшилась, например, в тысячу раз (число может быть, конечно, и другим; все зависит от цели эксперимента).

Ф224. *По деревянным сходням, образующим угол* α *с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни* μ. *Под каким углом к горизонту следует направить веревку, чтобы с наименьшим усилием втаскивать ящик: а) равномерно, б) с заданным ускорением* a?

Рассмотрим силы, действующие на ящик (рис. 14). Это — сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила натяжения веревки $\mathbf{F}$, сила реакции сходней $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, величина которой $F_{\text{тр}} = \mu N$. Спроектируем все силы на направление вдоль сходней и перпендикулярно к ним и запишем соответствующие уравнения движения.

Так как ящик не перемещается в направлении, перпендикулярном к сходням, то сумма проекций сил на это направление должна быть равна нулю, то есть

$$N + F\sin(\beta - \alpha) - mg\cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Вдоль сходней ящик движется с ускорением a (в частном случае при равномерном движении $a = 0$), поэтому сумма проекций сил должна быть равна ma:

$$F\cos(\beta - \alpha) - mg\sin\alpha - \mu N = ma. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2)

$$F = \frac{ma + mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha)}. \qquad (3)$$

В полученное выражение для силы F угол β входит только в знаменатель. Следовательно, величина силы F будет минимальной при таком значении угла β, при котором знаменатель в формуле (3) максимален, то есть максимальна величина

$$\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha).$$

Сделаем некоторые преобразования. Представим коэффициент трения μ как тангенс некоторого угла γ:

$$\operatorname{tg}\gamma = \mu; \qquad \gamma = \operatorname{arctg}\mu;$$

$$\sin\gamma = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Тогда можно записать:

$$\cos(\beta - \alpha) + \mu\sin(\beta - \alpha) = \sqrt{1 + \mu^2}\cos(\beta - \alpha - \gamma).$$

Последнее выражение максимально и равно $\sqrt{1 + \mu^2}$ при $\beta - \alpha - \gamma = 0$, то есть при

$$\beta = \alpha + \gamma = \alpha + \operatorname{arctg}\mu. \qquad (4)$$

При таком значении угла β и минимальна сила F. Причем, если ящик движется равномерно ($a = 0$), то

$$F_{\min} = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2}},$$

а при движении с ускорением a

$$F_{\min} = \frac{ma + mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Однако это решение верно не для любого ускорения. Так как направление силы $\mathbf{F}$ не зависит от a, а абсолютная величина силы $\mathbf{F}$ увеличивается с увеличением ускорения, то при некотором значении ускорения $a = a_0$ сила $\mathbf{F}$ станет такой, что ее составляющая $F\sin(\beta - \alpha)$, перпендикулярная к наклонной плоскости, будет равна по абсолютной величине составляющей силы тяжести $mg\cos\alpha$. При этом обратятся в нуль как сила $\mathbf{N}$, так и сила $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. В дальнейшем (при $a > a_0$) для того чтобы ящик не оторвался от полозьев, направление силы $\mathbf{F}$ должно меняться с увеличением ускорения a так, чтобы составляющая силы $\mathbf{F}$, перпендикулярная

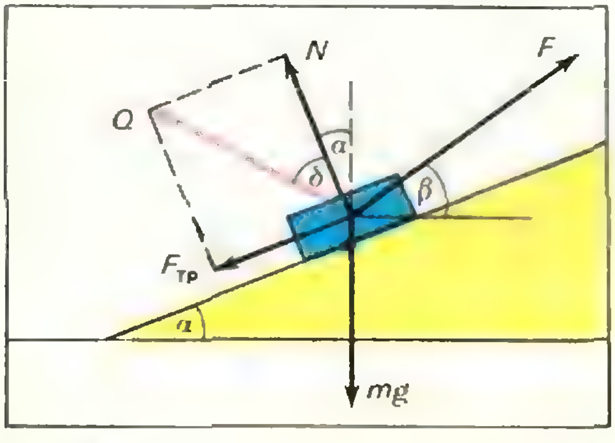


Рис. 14

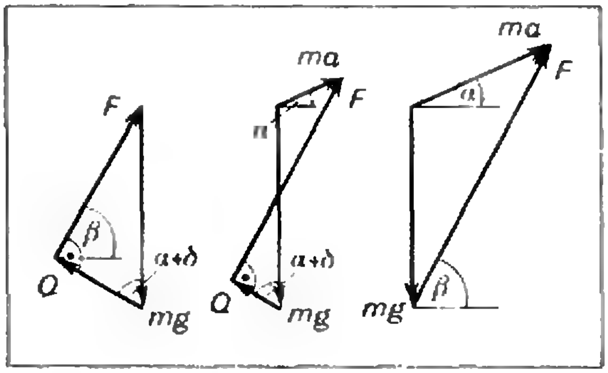


Рис. 15. Рис. 16. Рис. 17

к наклонной плоскости, оставалась равной составляющей силы тяжести, то есть

$$F\sin(\beta-\alpha)=mg\cos\alpha.$$

Для составляющих этих сил, параллельных наклонной плоскости, можно записать

$$F\cos(\beta-\alpha)-mg\sin\alpha=ma.$$

Из двух последних равенств найдем:

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a},$$

откуда

$$\beta=\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a}. \qquad (5)$$

Величину a_0 можно найти из тех соображений, что при $a=a_0$ значения угла β из (4) и (5) совпадают:

$$\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a_0}=\alpha+\operatorname{arctg}\mu,$$

откуда

$$a_0=g\left(\frac{\cos\alpha}{\mu}-\sin\alpha\right).$$

Итак,

при $a\leqslant a_0$ (следовательно, и при равномерном движении тоже)

$$\beta=\alpha+\operatorname{arctg}\mu,$$

при $a>a_0$

$$\beta=\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a}.$$

Мы решили задачу. Однако, приведем еще одно решение. Это — красивое геометрическое решение.

При равномерном движении вдоль сходней сумма всех сил должна быть равна нулю. Заменим силы **N** и **F**$_{тр}$ их равнодействующей **Q** = **N** + **F**$_{тр}$ (рис. 14) и будем складывать силы **Q**, **F** и $m\mathbf{g}$. Они должны образовать замкнутый треугольник.

Заметим, что направление силы **Q** составляет с перпендикуляром к наклонной плоскости угол δ такой, что

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{F_{тр}}{N}=\frac{\mu N}{N}=\mu,$$

то есть при изменении величины и направления силы **F** направление силы **Q** остается неизменным. Следовательно, абсолютная величина вектора **F** будет минимальна, если он перпендикулярен к вектору **Q** (рис. 15) (так как величина и направление вектора $m\mathbf{g}$ не меняются). При этом с горизонтом сила **F** будет составлять угол

$$\beta=\alpha+\delta=\alpha+\operatorname{arctg}\mu$$

(углы β и $\alpha+\delta$ равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Точно так же решается задача, когда ящик движется с ускорением $a<a_0$. В этом случае сумма векторов $m\mathbf{g}$, **Q** и **F** должна быть равна $m\mathbf{a}$ (рис. 16). Это изменит абсолютную величину силы **F**, но не изменит ее направления.

При $a>a_0$, когда силы **N**, **F**$_{тр}$, а, следовательно, и **Q** равны нулю, сила **F** должна соединять концы векторов $m\mathbf{g}$ и $m\mathbf{a}$ (рис. 17). Легко видеть, что в этом случае

$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{g+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}=\alpha+\operatorname{arctg}\frac{g\cos\alpha}{g\sin\alpha+a}.$$

Ф225. *В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод* CCl_4 *и вода. При нормальном атмосферном давлении* CCl_4 *кипит при 76,7° С, вода — при 100° С. При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5° С. Определить, какая из жидкостей быстрее выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенных паров воды при 65,5° С составляет 192 мм рт. ст.*

Для кипения однородной жидкости необходимо, чтобы давление насыщенного пара в пузырьках, образующихся по всему объему жидкости, было равно внешнему атмосферному давлению *).

При «пограничном» кипении в пузырьках, находящихся на границе воды и четыреххлористого углерода, содержится как

---

*) В действительности давление насыщенного пара должно быть больше атмосферного на величину $\Delta p=\rho gh+\frac{2\sigma}{R}$, где ρgh — гидростатическое давление на глубине h, $\frac{2\sigma}{R}$ — добавочное давление под изогнутой поверхностью жидкости (σ — коэффициент поверхностного натяжения, R — радиус пузырька). Обычно этой величиной можно пренебречь по сравнению с внешним атмосферным давлением.

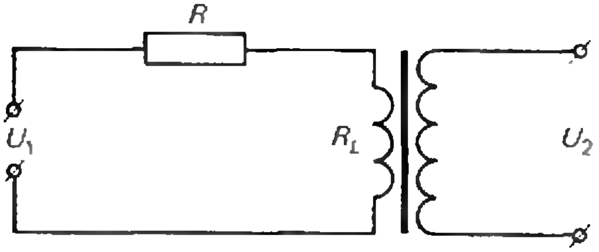


Рис. 18.

водяной пар, так и газообразный CCl_4, причем сумма их парциальных давлений равна атмосферному давлению:

$$p_{атм} = p_1 + p_2.$$

Здесь $p_1 = 192$ *мм рт. ст.* — парциальное давление насыщенного водяного пара, p_2 — парциальное давление насыщенного CCl_4. Поскольку $p_{атм} = 760$ *мм рт. ст.*, то

$$p_2 = p_{атм} - p_1 = 568 \text{ мм рт. ст.}$$

Во время кипения пузырьки поднимаются вверх, доходят до поверхности жидкости и лопаются. Следовательно, отношение масс жидкостей m_1 и m_2, испарившихся за некоторое время, равно отношению плотностей паров воды (ρ_1) и CCl_4 (ρ_2) в пузырьке.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона плотность насыщенного пара

$$\rho_н = \frac{p_н \mu}{RT},$$

где $p_н$ — давление насыщенного пара, μ — молекулярная масса пара, T — температура и R — газовая постоянная. Поэтому

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1\mu_1}{p_2\mu_2} = \frac{192 \cdot 18}{568 \cdot 154} \approx \frac{1}{25}.$$

Отсюда следует, что CCl_4 при «пограничном» кипении испаряется в 25 раз быстрее воды.

Ф226. Решение этой задачи см. в статье И. А. Зайцева «Электрические машины постоянного тока», которая будет опубликована в следующем номере нашего журнала.

Ф227. *На тороидальный сердечник из феррита с магнитной проницаемостью $\mu = 2000$ намотаны две катушки: первичная, содержащая $n_1 = 2000$ витков, и вторичная с $n_2 = 4000$ витков. Когда на первичную катушку было подано напряжение $U_1 = 100,0$ в, на разомкнутой вторичной было $U_2 = 199,0$ в. Найти, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной катушке, если сердечник заменить на сердечник того же размера, но из феррита с $\mu' = 20$. Рассеяние магнитного потока и потери в сердечнике не учитывать.*

Сердечник с катушками представляет собой повышающий трансформатор с отношением числа витков

$$k = \frac{n_2}{n_1} = 2. \qquad (1)$$

Напряжение на разомкнутой вторичной катушке U_2 равно э. д. с. E_2, наводимой на ее концах. Величину E_2 можно связать с величиной э. д. с. E_1, возникающей в первичной катушке, таким соотношением:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (2)$$

Нарисуем схему этого трансформатора, учитывая активное сопротивление первичной цепи и, как обычно, разделяя активное и реактивное сопротивления (рис. 18). По первичной цепи трансформатора идет переменный ток, действующее значение которого

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + R_L^2}}, \qquad (3)$$

где R — активное сопротивление катушки, а R_L — ее индуктивное сопротивление. При разомкнутой вторичной обмотке э. д. с. индукции в первичной обмотке E_1 равна напряжению на индуктивном сопротивлении, то есть

$$E_1 = IR_L = U_1 \frac{R_L}{\sqrt{R^2 + R_L^2}}. \qquad (4)$$

Тогда из (1) — (4) получаем

$$U_2 = \frac{kU_1}{\sqrt{(R/R_L)^2 + 1}}. \qquad (5)$$

Аналогичное соотношение можно написать и для трансформатора с сердечником, имеющим магнитную проницаемость μ'. Так как $R_L = \omega L$, а $L \sim \mu$, то при замене сердечника изменится индуктивное сопротивление первичной обмотки, причем

$$\frac{R_L'}{R_L} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Таким образом,

$$U_2' = \frac{kU_1}{\sqrt{(R/R_L')^2 + 1}} = \frac{kU_1}{\sqrt{(R/R_L)^2 \cdot (\mu/\mu')^2 + 1}}.$$

В этой формуле нам неизвестна только величина $(R/R_L)^2$. Найдем ее из равенства (5):

$$(R/R_L)^2 = \left(k\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1.$$

Поэтому окончательно

$$U_2' = \frac{kU_1}{\sqrt{(\mu/\mu')^2\left[\left(k\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1\right] + 1}} \approx 20 \text{ в}.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Аргумент комплексного числа

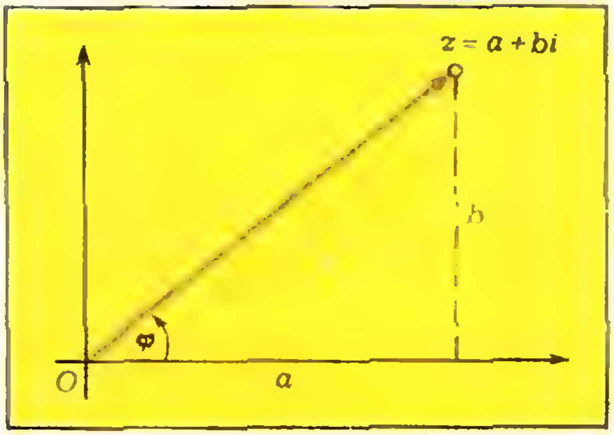
Ю. В. Сидоров

В этой статье рассматривается понятие аргумента комплексного числа и тригонометрическая форма записи комплексного числа. При этом предполагается, что читатель знает определение комплексного числа, понятие модуля и геометрическую интерпретацию комплексного числа *).

Определения

Начнем с определения аргумента комплексного числа. Чаще всего встречаются два определения.

Определение 1. *Аргументом комплексного числа* $z \neq 0$ *называется угол между действительной осью и вектором* $\vec{Oz}$, *отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом, если отсчет ведется против хода часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по ходу часовой стрелки, то отрицательной* (см. рисунок).



Определение 2. *Аргументом комплексного числа* $a + bi \neq 0$ *называется угол* φ, *который удовлетворяет одновременно двум равенствам:*

$$\left\{\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Чтобы до конца понять определение аргумента, необходимо усвоить следующее.

1°. В обоих определениях угол может выражаться и в градусах, и в радианах. В школьном курсе математики равноправны обе записи. Для определенности договоримся в этой статье измерять углы только в *радианах*, причем слово «радиан», как обычно, будем опускать. Такой выбор не случаен — в высшей математике чаще всего применяется именно радианное измерение углов. Поэтому *аргумент комплексного числа следует считать отвлеченным числом.*

Таким образом, в определении 1 слово «угол» надо понимать как «алгебраический угол», то есть отвлеченное число, выражающее число радиан величины «геометрического угла». Аналогично, в определении 2 число φ означает число радиан, а не градусов.

---

*) См., например, В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, «Лекции и задачи по элементарной математике», М., «Наука», 1971, а также В. В. Пекарскас, «Геометрия комплексных чисел», «Квант», 1973, № 6, с. 54.

2°. *Определения 1 и 2 эквивалентны*: если φ является аргументом числа $z = a + bi \neq 0$ в смысле определения 1, то выполняются равенства (1); наоборот, если φ — аргумент комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ в смысле определения 2, то φ — угол между положительным направлением действительной оси и вектором z. Это утверждение при $a > 0$, $b > 0$ вытекает непосредственно из рисунка (см. с. 41) и определений синуса и косинуса. Для остальных чисел z доказательство аналогично (проверьте!).

Таким образом, не имеет значения, какое из определений 1 или 2 выбрано за исходное — другое будет являться необходимым и достаточным критерием.

3°. *Для числа $z = 0$ понятия аргумента не существует.* Поэтому для краткости во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, будем предполагать (и этого нельзя забывать!), что $z \neq 0$.

4°. Для фиксированного комплексного числа $z \neq 0$ аргумент определяется *неоднозначно*: если φ_0 — некоторый аргумент числа z, то каждое из чисел

$$\varphi_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad (2)$$

тоже является аргументом этого же числа z, и никакое число, не совпадающее ни с одним из чисел, указанных в (2), не является аргументом числа z (докажите!).

Таким образом, *для каждого фиксированного числа $z \neq 0$ имеется бесконечное множество аргументов, из которых каждые два отличаются друг от друга на число, кратное 2π.*

5°. Многозначность аргумента, описанная в 4°, затрудняет понимание действий над аргументом комплексного числа. Но часто именно благодаря этой многозначности удается решать довольно трудные задачи.

В некоторых пособиях по элементарной математике в определение аргумента включается ограничение вида $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то есть считается, что аргумент комплексного числа z — это наименьший неотрицательный угол между положительным направлением действительной оси и вектором z. Тогда для каждого числа z аргумент определяется однозначно, и на первый взгляд кажется, что вся теория должна быть проще. Однако такое ограничение лишь еще больше усложняет правила действий над аргументами (например, сумма аргументов двух комплексных чисел уже не всегда является аргументом какого-либо комплексного числа). Иногда это приводит к значительным неточностям*), поэтому лучше придерживаться общепринятого определения (1 или 2).

Аргумент комплексного числа

Рассмотрим вопрос о нахождении аргумента комплексного числа. Но сначала договоримся об обозначениях.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом комплексного числа z, пишут

$$\varphi = \arg z \text{ или } \arg z = \varphi. \quad (3)$$

Например, каждое из соотношений

$$\frac{\pi}{2} = \arg i$$

и

$$\arg i = \frac{\pi}{2}$$

означает только то, что число $\pi/2$ является аргументом числа i.

Заметим, что соотношения (3), хотя и выглядят формально как равенства, являются *необычными* равенствами. Одним из свойств обычных равенств является, например, следующее: если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ (A, B, C — числа или геометрические фигуры). А равенства (3) таким свойством не обладают. Например, можно записать, что

$$\frac{\pi}{4} = \arg(1 + i), \quad \arg(1 + i) = \frac{9\pi}{4},$$

---

*) См., например, В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, И. М. Сканави, «Элементарная математика», М., «Наука», 1967, с. 41: в формуле (15.1) сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ может быть больше 2π, и поэтому смысл формулировки теоремы после этой формулы непонятен. Аналогичная неточность допущена на той же странице в формуле (15.2) и в тексте после нее.

Примечание редактора. Сейчас готовится новое, переработанное издание этой книги, оно выйдет из печати в 1974 году.

но

$$\frac{\pi}{4} \neq \frac{9\pi}{4}.$$

Таким образом, соотношения (3) можно читать так: «φ равняется аргументу числа z» или «аргумент числа z равняется φ», но смысл этих фраз только один: φ *является аргументом числа* z или, другими словами, φ *является одним из аргументов числа* z.

Символ $\arg z$ применяется также в следующем случае. Если $\varphi_0 = \arg z$, то есть φ_0 является одним из аргументов числа z, то все значения аргумента этого числа z, как отмечалось в 4°, указаны в (2). Этот факт записывают в виде формулы

$$\arg z = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (4)$$

Например, все значения аргумента числа i содержатся в формуле

$$\arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отметим, что «равенства» вида (4) часто встречаются при решении тригонометрических уравнений. Например, решение уравнения $\sin x = 1$ записывается так:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Смысл последнего «равенства» такой же, как и соотношения (4): для каждого целого k число $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ удовлетворяет уравнению $\sin x = 1$ и только эти числа являются корнями уравнения $\sin x = 1$.

Для нахождения всех значений аргумента комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ нужно найти все числа φ, удовлетворяющие обоим равенствам (1), то есть решить совместно уравнения (1).

Пример 1. *Найти все значения аргумента числа* $z = -5$.

Так как $a = \operatorname{Re} z = -5$, $b = \operatorname{Im} z = 0$, то решениями первого уравнения $\cos\varphi = -1$ из системы (1) являются числа $\varphi = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а решениями второго уравнения $\sin\varphi = 0$ — числа $\varphi = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Общими корнями обоих уравнений являются числа

$$\varphi = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ответ: $\arg(-5) = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Заметим, что ответ в примере 1 можно записать и в другом виде, например:

$$\arg(-5) = -\pi + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или

$$\arg(-5) = 3\pi + 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Нужно иметь в виду, что все эти формально различные записи эквивалентны (в каждом из этих ответов содержатся все значения аргументов числа -5), то есть это *одинаковые ответы, написанные разными формулами*.

Аргумент комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ можно находить проще: сначала определить, в какой четверти находится точка $z = a + bi$ (например, используя геометрическую интерпретацию комплексного числа), а затем воспользоваться одним (любым) из уравнений (1) (докажите!).

Пример 2. *Найти все значения аргумента числа* $z = -1 + i$.

Так как $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 1$, то точка $z = -1 + i$ лежит во второй четверти. Второе из уравнений (1) имеет вид $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$. Одним из решений этого уравнения, лежащим во второй четверти, является число $\varphi_0 = 3\pi/4$. Окончательный ответ получаем по формуле (4).

Ответ: $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a + bi)$, $a \neq 0$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \quad (5)$$

Однако *обратное утверждение неверно*: из равенства (5) нельзя заключить, что $\varphi = \arg(a+bi)$. Например, для числа $-1+i$ значение $\varphi = -\pi/4$ является решением уравнения (5), но не является аргументом этого числа.

Но если сначала определить, в какой четверти находится точка $a+bi$, и затем найти такое решение уравнения (5), которое является углом в этой четверти, то получим аргумент числа $a+bi$ (докажите!).

Пример 3. *Найти один из аргументов числа* $1-i\sqrt{3}$.

Точка $1-i\sqrt{3}$ лежит в четвертой четверти. Находим какое-нибудь решение уравнения (5), то есть $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, которое является углом в этой четверти, например: $\varphi = -\pi/3$.

Ответ: $\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

В этом примере по смыслу вопроса ответ неоднозначен. Являются верными также следующие ответы:

$$\arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3},$$

$$\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{7\pi}{3},$$

$$\arg(1-i\sqrt{3}) = \frac{41\pi}{3}$$

и другие.

Пример 4. *Найти аргумент числа* $\sqrt{3}+i$.

Аналогично тому, как это сделано в примерах 2 или 3, находим (найдите!):

$$\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$$

(то есть $\pi/6$ является одним из аргументов числа $\sqrt{3}+i$). Остается выяснить, как писать ответ: достаточно указать одно значение аргумента или нужно найти все?

Вспомним, например, задачу: решить уравнение $x^2 = 1$. Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Чтобы ответ был полным, в него необходимо включить оба корня. Часто и в геометрических задачах встречаются неоднозначные ответы. Например: найти сторону AB треугольника ABC, если $AC = 8$ *см*, $BC = 7$ *см*, $\angle A = \pi/3$. Полный ответ должен быть таким: $AB = 3$ *см* или $AB = 5$ *см* (докажите!).

Так же и в нашем примере 4: чтобы ответ был полным, нужно найти *все* значения аргумента числа $\sqrt{3}+i$. Так как один аргумент $\pi/6$ уже найден, то все значения аргумента этого числа находим по формуле (4).

Ответ: $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Таким образом, вопрос примера 4 является просто короткой формулировкой вопроса примера 2.

Обратим внимание на одну распространенную ошибку. Иногда абитуриенты пытаются находить аргумент числа $a+bi$ по формуле $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, а некоторые даже принимают эту формулу за определение аргумента. Однако для каждого x функция $\operatorname{arctg} x$ имеет только одно значение, причем $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Значит, формула $\arg(a+bi) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ верна только при $a > 0$, причем дает только одно из значений аргумента.

Можно доказать (докажите!) справедливость следующей формулы:

$$\arg(a+bi) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0,\ b > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } a = 0,\ b < 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если } a > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{если } a < 0. \end{array}\right.$$

По этой формуле можно находить одно из значений аргумента, но часто проще поступать так, как сделано в примерах 2 или 3.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим понятие тригонометрической формы комплексного числа. Вспомним, что *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ называется число

$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Пусть $\varphi = \arg(a+bi)$, перепишем формулы (1) так:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$

откуда $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, и поэтому

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (6)$$

Таким образом, *любое комплексное число $a+bi\neq 0$ можно записать в виде* (6), *где r — модуль числа $a+bi$, а φ — один из аргументов этого числа:*

$$r = |a+bi|, \quad \varphi = \arg(a+bi).$$

Верно и обратное утверждение (докажите!): *если комплексное число $a+bi$ представлено в виде* (6), *где $r>0$, то*

$$r = |a+bi|, \quad \varphi = \arg(a+bi).$$

Определение. *Представление комплексного числа z в виде*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (7)$$

где $r>0$, называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Сказанное выше означает, что *каждое комплексное число $z\neq 0$ можно представить в тригонометрической форме* (7), *причем*

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Для того, чтобы найти тригонометрическую форму заданного комплексного числа, нужно найти модуль этого числа, какой-нибудь аргумент этого числа, а затем записать это число в виде (7). Если при этом $|z| = r = 1$, то множитель r в формуле (7), как обычно, опускается, то есть в этом случае тригонометрическая форма записи имеет вид

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Например, для числа i запись

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

является тригонометрической формой записи этого числа.

Заметим, что в силу многозначности $\arg z$ тригонометрическая форма фиксированного комплексного числа также неоднозначна. Например, для числа i тригонометрической формой являются также записи

$$i = \cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2},$$

$$i = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

и другие.

Необходимо подчеркнуть, что не всякая запись комплексного числа через тригонометрические функции является тригонометрической формой этого числа. Например, запись числа i в виде $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}$ или $i = (-1)\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ не является тригонометрической формой числа i. Так как аргументами числа i являются числа

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и только они, то и тригонометрическая форма числа i обязательно имеет вид

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$$

где k — любое целое число.

Рассмотрим еще один пример. Число

$$z = 1 + \cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}$$

можно представить в виде (проверьте!)

$$z = 2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right) = 2\cos\frac{14\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Вторая из этих записей является

тригонометрической формой данного числа, а первая — нет, так как $\cos\frac{5\pi}{9} < 0$.

Итак, *если* $r = |z|$, $\varphi_0 = \arg z$ (*то есть* φ_0 *является одним из аргументов числа* z), *то для каждого целого* k *запись*

$$z = r[\cos(\varphi_0 + 2k\pi) + i\sin(\varphi_0 + 2k\pi)]$$

является тригонометрической формой комплексного числа z, *и никакая другая запись не является тригонометрической формой этого числа.*

На этом в школьном курсе математики заканчивается рассмотрение свойств аргумента комплексного числа.

Одно свойство аргумента

С помощью тригонометрической формы легко выводится следующее правило умножения и деления комплексных чисел (проверьте!): *если*

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Из этого правила непосредственно вытекает следующая важная

Теорема. *Пусть* $\varphi_1 = \arg z_1$ и $\varphi_2 = \arg z_2$. *Тогда*

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1z_2),$$
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \arg\frac{z_1}{z_2}.$$

Вспомним, что запись $\varphi = \arg z$ означает только тот факт, что число φ является одним из аргументов комплексного числа z. Значит, формулы в теореме следует читать так: *сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.*

Обратим внимание на одну распространенную ошибку. Иногда первую часть теоремы записывают в виде «формулы» $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, которая *не имеет смысла*, так как $\arg z$ — многозначная функция, а в школьном курсе математики не рассматриваются понятия суммы и равенства двух многозначных функций.

Следует иметь в виду, что если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$ и $\varphi = \arg(z_1z_2)$, то может оказаться, что $\varphi \neq \varphi_1 + \varphi_2$. Например, $2\pi = \arg 3$, $\frac{\pi}{2} = \arg i$, $\frac{\pi}{2} = \arg 3i$, но $\frac{\pi}{2} \neq 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Поэтому необходимо правильно понимать формулировку теоремы.

Отметим одно следствие из теоремы — формулу возведения комплексных чисел в целую степень (докажите ее!): *если* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *то*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$
$$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Упражнения

1. Доказать формулу

$$\arg(a+bi) = \begin{cases} \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}, & \text{если } a \geqslant 0; \\ \pi - \arcsin\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

2. Найти аргументы следующих чисел: а) $(1+i)^2$; б) $\frac{i}{1+i}$; в) $1+\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}$; г) $1+\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}$.

3. Записать в тригонометрической форме следующие числа: а) -3; б) $-i$; в) $\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$; г) $\sin\frac{2\pi}{5} + i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)$; д) $\sin\frac{6\pi}{5} + i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)$.

4. Пусть $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$. Доказать, что $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $|z_1| = |z_2|$ и существует такое целое число k, что $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$.

5. Пусть $\varphi = \arg z$. Найти $\arg(zi)$ и доказать, что геометрически произведение zi означает поворот вектора z на угол $\frac{\pi}{2}$.

6. Доказать, что если $\varphi = \arg z$, то $\arg\frac{1}{z} = -\varphi$ и $\arg\bar{z} = -\varphi$.

7. Пусть $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$ и $\varphi = \arg(z_1z_2)$. Доказать, что $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi$, где k — некоторое целое число.

8. Доказать, что если $\varphi = \arg(z_1z_2)$, то существуют такие числа φ_1 и φ_2, что $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$ и $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

Мы уже рассказывали о факультетах физико-математического профиля Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова *). Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов 1973 года по математике и физике на этих факультетах.

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2(\cos x)^{6+2} - \cos 2x = 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{3}}\left(1 - \sqrt{\cos x}\right).$$

2. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, точка M — середина основания CD. Найти площадь трапеции, если известно, что DK есть биссектриса угла D трапеции, BM есть биссектриса угла B трапеции, наибольший из углов при нижнем основании трапеции равен 60°, а ее периметр равен 30.

3. Решить неравенство

$$5x - \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4}\,\log_2 x > (x^2 - x)\log_2 x + 5 + 5\sqrt{6 + x - x^2}.$$

4. Точки K и M являются соответственно серединами ребер AB и AC треугольной пирамиды $ABCD$, площадь основания ABC которой равна p. Найти площадь грани BDC, если сечение MDK имеет площадь q, а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан треугольника ABC.

5. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = y^6 + x^2(1 - x), \\ \sqrt{1 + (x + y)^2} + x(2y^3 + x^2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$1 + \cos 2x + \cos^2 x \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^2 x + 3\sin x = 2\sin x \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^3 x.$$

2. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований AB и CD. Известно, что $AM \perp DK$ и $CK \perp BM$, а угол CKD равен 60°. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 2x > 2x \times 3^x\sqrt{2 - 5x - 3x^2} + 4x^2 \cdot 3^x.$$

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ через ребро AD, равное a, и точку E — середину ребра BC — проведено сечение, образующее с гранями ACD и ABD соответственно углы α и β. Найти объем пирамиды, если площадь сечения ADE равна S.

5. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 4y^2 - 2x^2 = \sqrt{2(x + 2y)^2 - (x + 2y)^4}, \\ x^4 - 2 \leqslant 4y(x^2 - 1). \end{cases}$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y \cos x + \sin x = 0, \\ 2\cos^2 y + \sin y \sin x = \cos 2y \cos x. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\log_{2x - \frac{4}{25}}\left(\frac{x^2 - 14x + 51}{50}\right) \leqslant 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике ACB из вершины прямого угла C проведены биссектриса $CL = a$ и медиана $CM = b$. Найти площадь треугольника ACB.

4. Точки A, B, C, D, E, F лежат на поверхности шара радиуса $\sqrt{2}$.

---

*) См. «Квант», 1973, № 4.

Отрезки AD, BE и CF пересекаются в одной точке S, которая находится на расстоянии 1 от центра шара. Известно, что объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как 1 : 9, объемы пирамид $SABF$ и $SDEC$ относятся как 4 : 9, а объемы пирамид $SAEC$ и $SDBF$ относятся как 9 : 4. Найти длины отрезков SA, SB, SC.

5. Из пункта A одновременно стартуют три бегуна и через некоторое время одновременно финишируют в том же пункте, пробежав по маршруту, состоящему из прямолинейных отрезков AB, BC, CA, образующих треугольник ABC. На каждом из указанных отрезков скорости бегунов постоянны и равны у первого бегуна 10 *км/ч*, 16 *км/ч* и 14 *км/ч* соответственно, а у второго бегуна 12 *км/ч*, 10 *км/ч* и 16 *км/ч* соответственно. Третий бегун в пунктах B и C оказывался не один и менял скорость на всем маршруте лишь один раз. Треугольник ABC — остроугольный или тупоугольный?

Физический факультет

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$2\sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 = 0.$$

3. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

4. Прямой круговой конус с вершиной S вписан в треугольную пирамиду $SPQR$ так, что окружность основания конуса вписана в основание PQR пирамиды. Известно, что $\angle PSR = \pi/2$, $\angle SQR = \pi/4$, $\angle PSQ = 7\pi/12$. Найти отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания PQR пирамиды.

5. Дан круг с центром O. Через точку внутри круга проведены диаметр AB и хорда CD. Из точки D опущен перпендикуляр DF на хорду AC (F — между A и C), а из точки F опущен перпендикуляр FH на AB. Точка M — середина хорды CD. Известно, что $AM = 2MO$, $8AH = 5AB$. Найти $\angle AMO$.

Физика

Факультеты механико-математический, вычислительной математики и кибернетики

Билет 1

1. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с гладкой наклонной плоскости, длина которой $l = 16$ *см*, а угол наклона $\alpha = 30°$. Затем оно падает на гладкую горизонтальную плоскость, находящуюся на расстоянии $h = 20$ *см* от нижнего конца наклонной плоскости. На какую наибольшую высоту H от горизонтальной плоскости поднимется тело после удара об нее, если этот удар абсолютно упругий?

2. Электролиз. Законы Фарадея.

3. Собирающие и рассеивающие линзы. Формула линзы. Построение изображения в линзах.

Билет 2

1. Маленький шарик массы $m = 1{,}3$ *г*, имеющий заряд $q = 2\cdot 10^{-5}$ *к*, подвешен на нити внутри заряженного плоского конденсатора, пластины которого горизонтальны. Период малых колебаний этого шарика $T_1 = 1$ *с*. Если же поменять знаки зарядов пластин конденсатора на обратные, сохраняя величину зарядов, то период колебаний шарика станет $T_2 = 1{,}5$ *с*. Найти напряженность E электрического поля внутри конденсатора.

2. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

3. Световой поток, сила света, освещенность.

Билет 3

1. Над столом подвешена маленькая лампочка, расположенная в вершине конусообразного абажура, у которого угол между осью и образующей $\alpha = 30°$. На пути лучей параллельно поверхности стола поместили плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1{,}5$. При этом диаметр светового пятна на столе уменьшился на величину $d = 2$ *см*. Какова толщина h пластинки?

2. Примеры колебательных движений. Гармонические колебания. Период, частота и амплитуда колебаний. Период колебаний математического маятника (без вывода).

3. Поток магнитной индукции. Электромагнитная индукция. Электродвижущая сила индукции. Закон Ленца. Явление самоиндукции. Индуктивность.

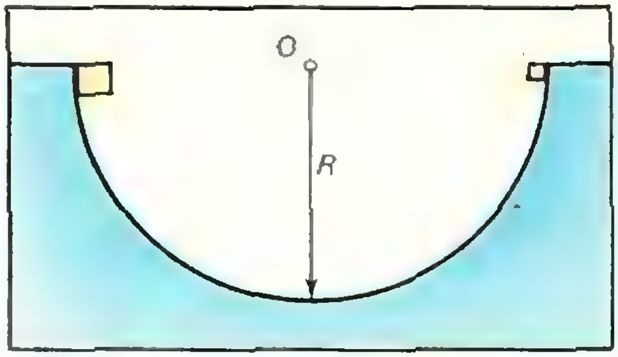


Рис. 1

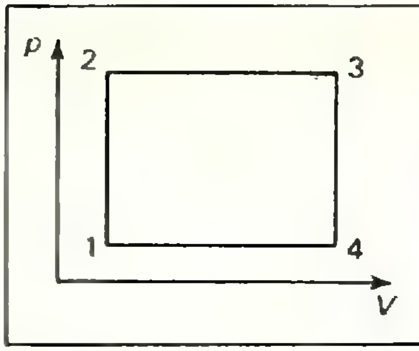


Рис. 2.

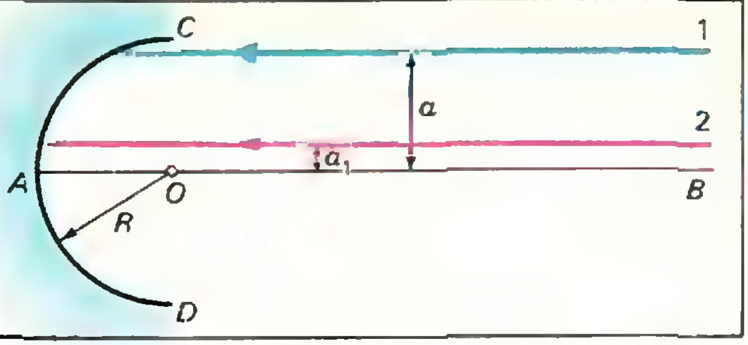


Рис. 3.

Билет 4

1. Горизонтальный цилиндр объемом $V = 5{,}5$ *л* разделен на две части тонким подвижным поршнем. Оба конца цилиндра закрыты. С одной стороны поршня находится азот при температуре $t_1 = 77°$ C, а с другой — гелий при температуре $t_2 = -23°$ C. Массы газов одинаковы. Найти объемы V_1 и V_2, занимаемые азотом и гелием. Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует.

2. Упругие силы. Закон Гука.

3. Закон преломления света. Относительный и абсолютный показатели преломления. Ход лучей в призме. Полное отражение. Предельный угол.

Физический факультет

Ниже приводятся некоторые задачи из вариантов вступительных экзаменов на физический факультет.

1. Два малых тела, массы которых относятся как 1 : 2, одновременно начинают соскальзывать без трения по внутренней поверхности полусферы радиуса R (рис. 1). Удар тел абсолютно неупругий. На какой угол α от вертикали отклонятся тела после удара?

2. На краях подвижной платформы, длина которой $l = 10$ *м*, вес $P = 500$ *кГ*, стоят два человека: вес первого $P_1 = 60$ *кГ*, а второго $P_2 = 40$ *кГ*. В момент $t = 0$ они начинают бежать по платформе навстречу друг другу, причем скорость первого в два раза больше скорости второго. На какое расстояние x откатится платформа, когда первый человек добежит до ее конца? Трением платформы о рельсы пренебречь.

3. В сосуде с водой плавает кусок льда, в который вмерзла свинцовая дробинка. Масса льда M, масса дробинки m, температура воды в сосуде 0° C. Какое наименьшее количество тепла нужно затратить, чтобы дробинка начала тонуть? Плотность льда ρ_1, скрытая теплота плавления льда λ, плотность свинца ρ_2.

4. Цикл состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры газа в точках *1* и *3* равны соответственно T_1 и T_3. Определить работу, совершенную одной грамм-молекулой газа за цикл, если известно, что точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

5. При включении лампочки в сеть с напряжением $U = 200$ *в* она потребляет мощность $W_1 = 40$ *вт* и ярко горит, причем температура нити $t_1 = 3000°$ C. При включении в сеть с $U = 100$ *в* лампочка потребляет мощность $W_2 = 25$ *вт* и еле светится, так как температура нити при этом равна $t_2 = 1000°$C. Найти величину сопротивления нити лампочки R_0 при температуре $t = 0$ °C.

6. Определить концентрацию электронов в пучке электронно-лучевой трубки осциллографа вблизи экрана. Сечение пучка $S = 1$ *мм*^{2}, сила тока $I = 1{,}6$ *мка*. Электроны вылетают из катода без начальной скорости и ускоряются между катодом и анодом электрическим полем с разностью потенциалов $U = 28\,500$ *в*.

Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*.

7. На зеркало-полусферу CAD радиуса $R = 30$ *см* падают два луча, параллельных линии AB, которая проходит через центр O и перпендикулярна к CD (рис. 3).

Один луч проходит на расстоянии $a = 24$ *см*, а другой на расстоянии $a_1 = 1$ *см* от линии AB. После отражения от зеркала эти лучи пересекут AB в каких-то двух точках. Найти расстояние x между этими точками.

8. На столе поставлены стеклянная призма с преломляющим углом $\alpha = 45°$ и показателем преломления стекла n и тонкая линза с фокусным расстоянием f. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна к вертикальной грани призмы, на которую направлен горизонтальный параллельный пучок света определенной длины волны. На каком расстоянии x от главной оптической оси будет находиться точка, в которой сойдутся лучи, прошедшие сквозь призму и линзу?

ПОПРАВКА

В «Кванте» № 2 за 1974 год на с. 61 конец решения задачи 1 (НГУ, вариант 1) должен выглядеть так: $n = 22$, $|1 - y^4| = 3^n$, откуда с учетом ОДЗ получаем $y = -\sqrt[4]{3^n + 1}$.

Редакция благодарит читателя В. С. Марочкина (Пермь), обратившего наше внимание на ошибку в решении.

Телевидение готовит в вуз

Математика

В апреле на математическом отделении телекурсов читаются лекции на темы: «Комплексные числа», «Задачи на составление уравнений», «Прямые и плоскости в пространстве», «Многогранники», «Поверхности и объемы тел». Некоторые задачи из домашних заданий по этим темам предлагаются читателям «Кванта» для самостоятельного решения.

1. Найти действительные значения x, при которых комплексные числа

$$z_1 = \sqrt{x^2 - 3} + 3 - i \sin \frac{\pi x}{4}$$

и

$$z_2 = \sqrt{x^2 + 5} + 1 - i \sin^2 \frac{\pi x}{4}$$

являются сопряженными.

2. Произведение некоторого натурального числа на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 1008. Найти исходное число.

3. В котлован равномерно поступает вода. 10 одинаковых насосов, действуя одновременно, могут откачать воду из наполненного котлована за 12 часов, а 15 таких же насосов, действуя одновременно,— за 6 часов. За сколько часов могут откачать воду из наполненного котлована 25 таких же насосов, действуя одновременно?

4. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 192 *см*^{2}; если уменьшить каждое из ребер на один сантиметр, то полная поверхность уменьшится на 70 *см*^{2}. Найти длину диагонали параллелепипеда.

5. В наклонном параллелепипеде две смежные боковые грани имеют площади S_1 и S_2 и образуют двугранный угол, равный 150°. Найти объем параллелепипеда, если его боковое ребро равно a.

6. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, основания которой равны a и $2a$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания; высота пирамиды равна a. Найти боковую поверхность пирамиды.

7. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, высота пирамиды равна h. Через сторону основания пирамиды и середину бокового ребра, не пересекающегося с этой стороной, проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

8. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α. Определить двугранный угол при основании пирамиды.

В этом номере мы публикуем также контрольные работы № 4, 5 по темам, пройденным в феврале и марте. Решения задач контрольных работ можно присылать по адресу: 113162, Москва, Шаболовка, 53, Московские подготовительные телекурсы, математика, КР № 4, 5. К решению приложите незаклеенный конверт с Вашим адресом.

Контрольная работа № 4

1. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = \lg (2 \cdot 5^{\log_{25} 2500}), \\ \lg (x + y) - \lg (x - y) = \dfrac{\log_5 49}{\log_5 100}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{x} < 1.$$

4. Решить уравнение

$$2 \cos^2 x + \sin \frac{x}{3} + 1 = 0.$$

5. Решить неравенство

$$\log_x (3x) \leqslant \sqrt{\log_x (3x^3)}.$$

Контрольная работа № 5

1 (МГУ, 1972). Из двух расположенных на реке пунктов A и B (B по течению ниже A), расстояние между которыми равно 36 *км*, одновременно выходят навстречу друг другу две лодки (первая выходит из пункта A) и встречаются через 3 часа после выхода. Скорость второй лодки в стоячей воде в четыре раза больше скорости течения реки. Расстояние от пункта A до пункта B и обратно первая лодка проходит за 24 часа. Найти скорость течения реки.

2 (МИФИ, 1972). Коллекция марок состоит из трех альбомов. В первом из альбомов находится одна пятая всех марок, во втором — несколько седьмых и в третьем — 303 марки. Сколько марок в коллекции?

3 (МГУ, 1972). В прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$, а AA', BB', CC', DD' — боковые ребра, вписан шар радиуса R. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B и C', если известно, что $\measuredangle BAD = \alpha$.

4 (МИФИ, 1973). В треугольной пирамиде $SABC$ длина ребра SC равна a. Это ребро наклонено к плоскости основания ABC под углом α. Двугранный угол при ребре SC равен β, а двугранный угол при ребре AB — прямой; $SA = SB$, $AC = BC$. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

5 (МИФИ, 1972). Найти объем наименьшего по объему конуса среди всех тех конусов, которые можно описать около шара радиуса R.

Физика

На физическом отделении телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы в марте — апреле 1974 года изучается раздел «Колебания и волны». На лекциях и практических занятиях обсуждаются вопросы, касающиеся механических колебаний и волн, звука, электромагнитных колебаний и волн. В заключение будет прочитана обзорная лекция по волновым процессам.

Ниже приводятся типичные для домашних заданий задачи по разделу «Колебания и волны».

1. К двум одинаковым невесомым вертикальным пружинам подвешены грузы разной массы. Периоды колебаний пружин с грузами составляют соответственно $T_1 = 1{,}0$ *с* и $T_2 = 1{,}1$ *с*. Определить разность удлинений пружин в положении равновесия.

2. Математический маятник колеблется так, что расстояние между крайними положениями маятника $2A = 6{,}0$ *см*, а наибольшая скорость движения маятника $v_{\max} = 0{,}40$ *м/с*. Определить период колебаний маятника.

3. Частоты колебаний двух математических маятников, находящихся в одном и том же месте Земли, относятся как $n = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 0{,}90$. Определить длины маятников l_1 и l_2, если их разность $\Delta l = l_1 - l_2 = 21$ *см*.

4. Кинетическая энергия математического маятника при прохождении им положения равновесия равна $W_к = 0{,}10$ *дж*. Определить величину возвращающей силы в момент времени, равный одной восьмой периода колебаний маятника, если длина нити $l = 1{,}0$ *м* и масса материальной точки $m = 1{,}0$ *кг*.

5. Материальная точка массой $m = 2{,}0$ *г* с зарядом $q = +8{,}0 \cdot 10^{-8}$ *к*, укрепленная на конце изолирующей нити длиной $l = 1{,}2$ *м*, находится в электрическом поле напряженностью $E = 1{,}4 \cdot 10^3$ *в/м* и вращается вокруг вертикальной оси так, что угол, составляемый нитью с вертикалью, $\alpha = 20°$. Найти период обращения точки, если силовые линии электрического поля вертикальны и направлены вверх.

6. В однородном электрическом поле, силовые линии которого горизонтальны, на тонкой нити длиной $l = 35$ *см* подвешена материальная точка массой $m = 15$ *г* с зарядом $q = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ *к*. Найти период собственных колебаний точки, если напряженность электрического поля $E = 4{,}0 \cdot 10^4$ *в/м*.

7. Определить длину поперечной волны, распространяющейся вдоль шнура, если расстояние между двумя ближайшими точками, имеющими одинаковое смещение, $l = 0{,}40$ *м*, а разность фаз колебаний этих точек равна $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi/3$.

8. Катушка с индуктивностью $L = 0{,}13$ *гн* включена в сеть переменного тока последовательно с конденсатором емкости $C = 1{,}5$ *мкф*. Определить тепловую мощность, выделяемую в катушке, если действующее значение напряжения в сети $U = 100$ *в*, частота $\nu = 400$ *гц*, активное сопротивление катушки $R = 15$ *ом*.

9. Два одинаковых по форме плоских электрода опущены параллельно друг другу в электролит с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 24$. Найти удельное сопротивление электролита, если на частоте $\nu = 10^6$ *гц* активное и емкостное сопротивления электролита одинаковы.

10. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ *гц* последовательно с сопротивлением $R = 100$ *ом* поочередно включают сначала катушку с индуктивностью $L = 0{,}20$ *гн*, а затем конденсатор емкостью $C = 10$ *мкф*. Определить отношение амплитудных значений токов, текущих через сопротивление R.

11. При изменении емкости переменного конденсатора на $\Delta C = 50$ *пф* резонансная частота контура увеличилась с $\nu_1 = 100$ *кгц* до $\nu_2 = 120$ *кгц*. Определить величину индуктивности контура.

12. Колебательный контур, настроенный на частоту $\nu = 15$ *Мгц*, состоит из катушки с индуктивностью $L = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ *гн* и плоского конденсатора, в котором зазор между пластинами заполнен слюдой. Найти ширину зазора, если диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 6{,}0$, а площадь пластины $S = 15$ *см*^{2}.

13. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух параллельно соединенных одинаковых конденсаторов. После того, как эти конденсаторы соединили последовательно, резонансная частота контура изменилась на $\Delta\nu = 2{,}0$ *Мгц*. Найти величину индуктивности контура, если емкость каждого конденсатора $C = 40$ *пф*.

14. В колебательном контуре, состоящем из катушки с индуктивностью $L = 15 \times 10^{-6}$ *гн* и двух последовательно соединенных конденсаторов, после пробоя одного из них длина электромагнитной волны, излучаемой контуром, изменилась на $\Delta\lambda = 20$ *м*. Найти величину емкости пробитого конденсатора, если емкость второго $C_2 = 120$ *пф*.

А. Н. Борзяк, В. И. Давыдов,
П. Т. Дыбов, И. А. Дьяконов,
А. С. Иванов

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Методическое пособие по разделу «Неравенства»?

В настоящее время многие издательства нашей страны издают литературу по математике, предназначенную для поступающих в высшие учебные заведения. Эти книги и брошюры преследуют, в основном, две цели — чисто информационную и методическую.

Из книги, изданной тем или иным институтом, абитуриент узнает варианты письменных работ, предлагавшиеся поступающим в этот институт, знакомится с решениями типичных задач. Это помогает ему более правильно ориентироваться в вопросе выбора своей будущей специальности, судить об уровне требований, предъявляемых к поступающим. Помимо этих материалов справочного характера, в таких книгах, как правило, имеются и разделы, в которых освещаются вопросы, наиболее трудные для поступающих. Эти разделы являются, по существу, методическими пособиями по важнейшим разделам программы вступительных экзаменов.

И если единственным требованием к материалам справочного характера может быть, пожалуй, только правильность ответов или решений, то методические разделы должны удовлетворять значительно более высоким требованиям.

К сожалению, не все издательства относятся с должной ответственностью к книгам, предназначенным для поступающих. Иногда выпускаемые ими методические пособия страдают весьма серьезными недостатками. Между тем совершенно ясно, что неудачное пособие может оказаться как минимум бесполезным.

Недавно Саратовский экономический институт выпустил небольшую книгу, предназначенную для поступающих в вузы инженерно-экономического профиля *). Почти половину объема книги занимает рассмотрение неравенств, и этот материал, как указывает в предисловии автор, позволяет ее рекомендовать ‘‘как методическое пособие по разделу «Неравенства»,,. Между тем ознакомление с книгой показывает, что с этим мнением автора ни в коем случае нельзя согласиться — столь много в ней неряшливых формулировок, неразумных рекомендаций и прямых ошибок.

Известно «классическое» недоразумение: очень многие абитуриенты считают, что прежде чем решить неравенство, надо найти его область допустимых значений. Однако можно легко привести примеры, где предварительное нахождение ОДЗ совершенно излишне с логической точки зрения и вносит, кроме того, значительные усложнения в решение. Между тем автор пишет: «В общем случае следует помнить, что нахождение ОДЗ функций, входящих в неравенство, является необходимым условием при решении любого неравенства» (с. 50). Сам автор, впрочем, решая линейные и квадратные неравенства, не выполняет этого «необходимого» условия.

Конечно, нахождение ОДЗ часто является полезным, но оно, безусловно, не является необходимым, и решение, скажем, примера 5 (с. 52) проводится гораздо проще без нахождения ОДЗ: неравенство $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$ *равносильно* неравенству $\frac{3x-1}{2-x} > 1$, поскольку все решения последнего неравенства автоматически входят в ОДЗ исходного. Авторский текст можно считать хорошей иллюстрацией как раз того, почему нахождение ОДЗ не всегда полезно: ведь автор сначала решает неравенство $\frac{3x-1}{2-x} \geqslant 0$, а затем $\frac{3x-1}{2-x} > 1$, что, по меньшей мере, неэкономно. Весьма странно, что даже в тех случаях, когда автор пользуется эквивалентностью неравенств, он все равно отыскивает ОДЗ, не объясняя, зачем (см. с. 47—49).

В примере 3 (с. 65) автор находит ОДЗ тригонометрического неравенства, однако (типичная ошибка абитуриентов!) после отыскания решения он ни словом не обмолвился о том, что все полученные решения входят в ОДЗ, хотя как раз в рассматриваемом примере это логически необходимо.

---

*) А. И. Першин, Сборник конкурсных задач по математике (для поступающих в вузы), Изд-во Саратовского ун-та, 1973 г., 80 с., тираж 30 000 экз., цена 30 коп.

В книге систематически используется, помимо общеизвестного понятия ОДЗ, и иной, отнюдь не общепринятый термин «область допустимых решений неравенства», который автор нигде не определяет. Это значительно затрудняет точное понимание текста, тем более, что, скажем, в конце решения примера 6 (с. 54) этот термин имеет один смысл, а при решении примера 2 (с. 51) — другой.

Некоторые теоретические положения и рекомендации книги либо не ясны, либо просто не верны. Например, перечисляя основные свойства неравенств, автор формулирует и следующее: «если $a > b$, то $1/a < 1/b$» (с. 35); на с. 39 утверждается, что неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$

«равносильные, так как умножением на —1 приводятся друг к другу» и так далее. На с. 49—50 автор доказывает теорему: «неравенство $f(x)/\varphi(x) \geqslant 0$ не эквивалентно неравенству $f(x)\,\varphi(x) \geqslant 0$». Но, во-первых, теорема в такой формулировке не справедлива (следовало бы сказать «вообще говоря, не эквивалентно»). А во-вторых, негативная теорема для поступающего бесполезна — гораздо важнее было бы доказать теорему «неравенство $f(x)/\varphi(x) \geqslant 0$ в своей ОДЗ эквивалентно неравенству $f(x)\,\varphi(x) \geqslant 0$».

Особо следует сказать о приводимых на с. 68 в качестве образца рассуждениях по поводу одного показательного неравенства. Получив в результате необходимых преобразований его решение $x > 0$, автор далее пишет: «Проверка. Подставим любое значение $x > 0$, например, $x = 1$ ...» и, проведя вычисления, приходит к верному числовому неравенству. Остается, однако, не ясным, какой смысл и какое значение придает автор этой проверке.

При рассмотрении неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$ абитуриенты часто проводят следующее ошибочное рассуждение: так как $\sqrt{f(x)} \geqslant 0$ по определению корня, а $g(x)$ больше, чем $\sqrt{f(x)}$, то следовательно (?), $g(x) > 0$. Подобный логический дефект допускает и автор, решая неравенство $|x-a| < b$: он пишет: «число b положительно, так как оно больше неотрицательного числа $|x-a|$» (с. 38), как будто, например, неравенства $|x-3| < -1$ не существует.

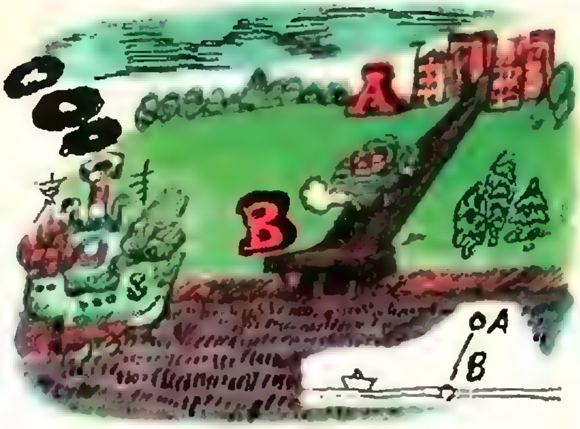
Хотя автор приводит в параграфе об иррациональных неравенствах шесть примеров (с. 50—54), читатель вряд ли сможет научиться правильно решать такие неравенства: в примерах 1 и 3 фактически не нужно решать неравенства, в примерах 2 и 4 неравенства просто не решены, в решении примера 5 большую часть занимают лишние выкладки и допущена логическая ошибка, а в примере 6 столько неясных и неточных утверждений, что понять его весьма сложно. При рассмотрении тригонометрических неравенств скрупулезно воспроизводятся простые выкладки, но никаких указаний по самому трудному для абитуриентов вопросу — как решать простейшие тригонометрические неравенства — не дается.

В книге имеется и значительное число мелких погрешностей (не говоря об опечатках). Так, на с. 56 читатель может узнать, что неравенство $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 \geqslant 0$ равносильно неравенству $2 < \sin x < -1/2$; на с. 61 сообщается, что «общей частью решений $0 \geqslant x \geqslant -2$ и $0 < x < 2$ будет область $-2 \leqslant x < 2$»; на с. 31 утверждается, что неравенству $1/y < 2$ «удовлетворяют только те значения y, которые больше $1/2$» (видимо, для большей убедительности это утверждение иллюстрируется чертежом), и так далее. Ответы к ряду примеров приведены неверно (см. №№ 241, 291, 295, 296, 306 и др.). Не могут не вызвать удивления безвкусно «комбинированные» задачи типа: «Найти... отношение скоростей пешеходов, если известно, что расстояние от A до B равно x_1 *км*, где x_1 есть положительный корень уравнения $2x^2 - x - 6 = 0$» (с. 17—19).

Указанный список вовсе не исчерпывает всех недостатков книги, но уже и этого слишком много для методического пособия. Следует ясно понимать, что высокий спрос на книги для поступающих не может служить основанием для снижения требовательности к этому виду литературы.

Г. В. Дорофеев

«Квант» для младших школьников.



Задачи

1. Грузы в город A предполагается доставлять по реке до некоторого пункта B, а затем автомашиной по шоссе BA (см. рисунок). Цена перевозки по реке вдвое меньше, чем по шоссе. Как провести шоссе AB, чтобы затраты на перевозки были наименьшими?

2. В сосуде с водой удерживают под самой поверхностью воды два целлулоидных шарика одинаковых масс, но разных диаметров. Если отпустить шарики, какой из них подскочит выше? (Силы сопротивления не учитывать.)

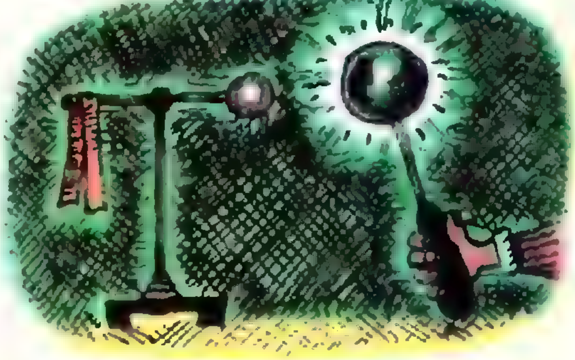
3. Прогуливаясь по городу, трое студентов-математиков заметили, что водитель автомашины грубо нарушил правила уличного движения. Номер машины (четырехзначный) студенты не запомнили, но каждый из них приметил по одной его особенности:

1) две первые цифры числа были одинаковы;

2) две последние цифры совпадали;

3) число являлось точным квадратом.

Можно ли по этим данным узнать номер машины?



4. Имеется металлический заряженный шарик на изолирующей ручке. Каким образом можно заряд этого шарика полностью передать электроскопу?

5. На площади установлено 5 громкоговорителей, разбитых на две группы: в одной 2, в другой 3 аппарата. Расстояние между группами равно 50 *м*. Где надо встать, чтобы звуки обеих групп были слышны с одинаковой силой?

Художник Э. Назаров

Турист в незнакомом городе

Б. А. Кордемский

Художник М. Златковский

Представьте себе город, улицы которого, как линии тетради в клетку, — одни протянулись с севера на юг, другие — с востока на запад. В этом городе есть турбаза. Туристу, находящемуся в пункте *А*, нужно попасть на эту турбазу. Но у него нет карты, а в городе нет указателей, и расспрашивать жителей турист не может — он не знает языка. Он хочет всякий раз случайным образом определять и направление движения, и сколько кварталов нужно пройти в этом направлении, прежде чем снова изменить его. Но как это — «определять случайным образом»; как вообще можно реализовать «случайность»?

Эврика! Туристу нужен набор так называемых «случайных чисел», объединенных в пары. Абсолютная величина первого числа будет указывать, сколько кварталов туристу нужно пройти в горизонтальном направлении (горизонтальным естественно назвать направление «восток — запад», «запад — восток»; а вертикальным — «север — юг», «юг — север»), а знак числа — само направление: на восток, если плюс, и на запад, если минус. Аналогично, абсолютная величина второго числа будет указывать, сколько кварталов нужно пройти в вертикальном направлении, причем на юг, если это число отрицательное, и на север — если положительное.

Но где же взять «случайные числа»? Их может выдать ЭВМ, если задать ей соответствующую программу, но у туриста ЭВМ, конечно, нет. Зато у него есть газета с таблицей номеров выигравших лотерейных билетов. Турист наудачу выбирает часть таблицы, затем в номере каждого лотерейного билета берет две последние

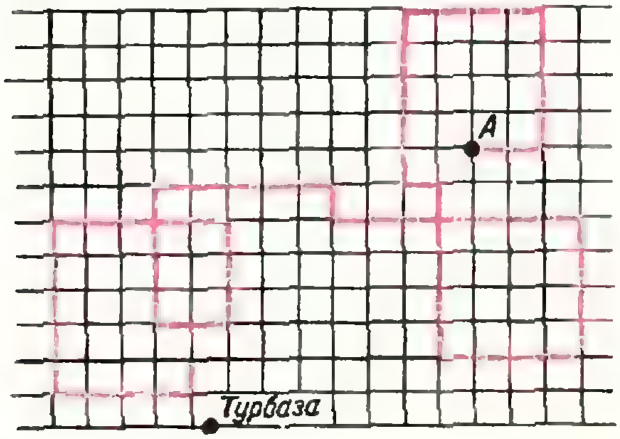
31013	179	Фотоаппарат	90
31019	110	25 рублей	—
31026	060	25 рублей	—
31030	199	50 рублей	—
31031	115	Часы «Полет»	35
31045	026	100 рублей	—
31047	101	Фотоаппарат	15
31068	178	50 рублей	—
31069	100	Часы «Полет»	35
31070	096	50 рублей	—

цифры и рассматривает их уже как пару. Получается такой набор пар случайных чисел: (7, 9), (1, 0), (6, 0), (9, 9), (1, 5), (2, 6), (0, 1), (7, 8), (0, 0), (9, 6). Недостатком этих чисел является то, что все они оказываются положительными. Но этот недостаток легко исправить: вычесть, например, из каждого числа образовавшегося набора случайных чисел какое-нибудь фиксированное число, скажем, 5. При этом пара (7, 9) превратится в пару (2, 4), что означает: «нужно идти два квартала на восток, затем четыре квартала на север»; пара (1, 0) — в пару (—4, —5), то есть «четыре квартала на запад и пять кварталов на юг». Набор таких пар уже задает туристу маршрут. В данном случае «код» получившейся случайной маршрутной линии будет записываться так: (2, 4), (—4, —5), (1, —5), (4, 4), (—4, 0), (—3, 1), (—5, —4), (2, 3), (—5, —5), (4, 1).

Теперь турист может отправляться в путь.

Заметим, что на турбазу турист может так и не попасть; впрочем, ему достаточно оказаться в любом из соседних с ней кварталов, так как оттуда дорога ему уже известна.

Выбранный маршрут изображен на рисунке; легко видеть, что он случайно оказался не очень длинным, хотя и далеко не самым коротким: ведь от турбазы туриста отделяло всего $15\frac{1}{2}$ кварталов, а ему пришлось пройти больше 66!



В этом примере случайные числа дали нам возможность промоделировать реальную случайность, а именно, случайность, диктующую туристу выбор того или иного направления. При этом, правда, для каждого звена маршрутной линии пришлось искусственно ввести ограничения — не более четырех кварталов в направлениях, задаваемых положительными числами (восток и север), и не более пяти кварталов в направлениях, определяемых отрицательными числами (юг и запад). И еще: заменив числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 на —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, мы «подправили» случайные числа так, что «отрицательные» направления — юг и запад — оказались предпочтительнее (—5, —4, —3, —2, —1 — их пять из десяти) «положительных» — севера и востока (их четыре из десяти).

Такую модель «случайности» математики называют «грязной», однако не считают ее недопустимой.

Задача. Пусть турист знает, что турбаза находится на юго-западе города. Значит, сохраняя в выборе направления принцип случайности, все же целесообразнее направления юг и запад сделать более предпочтительными. Но эти направления задаются отрицательными числами; поэтому в наборе однозначных случайных чисел нужно иметь больше отрицательных, чем положительных чисел. Чтобы выполнялось это требование, можно, например, все числа выписанного набора уменьшить не на 5, а на 7. Интересно, попадет ли теперь турист на базу скорее, чем в первый раз? Составьте новый «код» и схему его случайного маршрута.

В нашей заметке случайные числа оказались полезными: они помогли туристу найти турбазу. Помогают они и во многих других задачах. Поэтому мы вам о них и рассказали.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Свободное падение тел на вращающуюся Землю»

1. К экватору.

2. $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$, где g — ускорение свободного падения, измеренное на полюсе, R — экваториальный радиус Земли; $P = 0$; $F_T = \gamma \frac{mM}{R^2}$ (m — масса тела).

К статье «Арифметика на географической карте»

Задание 1. Например, карта, состоящая из стран A, F, G, H (см. рис. 2, с. 24).

Задание 2. а) Воспользоваться методом математической индукции по числу окружностей. Проводя очередную окружность, нужно оставить раскраску вне ее неизменной, а внутри поменять цвета.

б) Для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждой вершине карты сходилось четное число границ. Необходимость этого условия очевидна: если в какой-нибудь вершине карты сходится нечетное число границ, то уже страны, окружающие эту вершину, нельзя правильно раскрасить двумя красками.

Для доказательства достаточности условия проведите индукцию по числу стран карты (для перехода от $n+1$ к n удалите страну со всеми ее границами).

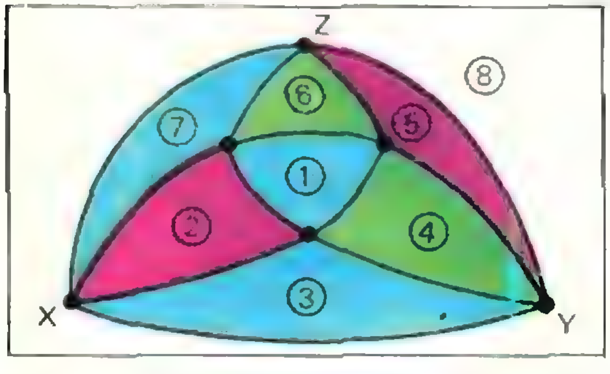


Рис. 1. Правильная раскраска графа октаэдра в 3 цвета. Грань 8 октаэдра — это «треугольник» XYZ; понятно, что в данном случае она должна быть окрашена в зеленый цвет.

Задание 4. Каждая точка границы карты должна принадлежать не более чем трем странам.

Задание 5. а) Смотри рисунок 1.

б) Для этого необходимо и достаточно, чтобы в каждой вершине графа триангуляции сходилось четное число граней (см. задание 3).

Задание 6. Доказательство утверждения 2) отличается от доказательства утверждения 3) только двумя особенностями:

а) рассматривается совокупность не всех граней триангуляции, а только тех, которые сходятся в данной вершине;

б) эта совокупность разбивается на три части по числу граней тетраэдра, сходящихся в той вершине тетраэдра, на которую отображается данная вершина триангуляции.

Задание 7. Воспользуйтесь индукцией по числу ребер P при заданном числе вершин B. Посылка индукции. $P = 0$; $Г = 1$, $K = B$.

Шаг индукции: добавим ребро (не пересекающее, разумеется, других ребер); это ребро либо соединит две компоненты и тем самым уменьшит K на 1, не изменив числа $Г$ стран, либо соединит две вершины одной компоненты, не изменив числа K компонент и увеличив число $Г$ стран на 1. Число B остается все время постоянным.

Задание 8. Вот «географическая» формулировка этой задачи — из столицы любой страны можно проехать в столицу любой другой страны.

Задание 9. Используйте теорему Эйлера, а также равенство $2P = 3Г$, следующее из того, что каждое ребро триангуляции входит в две грани, а каждая грань имеет три ребра.

К статье «Аргумент комплексного числа»

2. а) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; б) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; в) $\frac{4\pi}{9} + 2k\pi$; г) $-\frac{4\pi}{9} + 2k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. а) $3(\cos \pi + i \sin \pi)$; б) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$; в) $\cos \frac{5\pi}{14} + i \sin \frac{5\pi}{14}$;
г) $2 \sin \frac{\pi}{5} \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$;
д) $2 \sin \frac{\pi}{10} \left(\cos \frac{9\pi}{10} + i \sin \frac{9\pi}{10}\right)$.

5. $\varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Математика

Вариант 1

1. $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, n, k — целые числа.

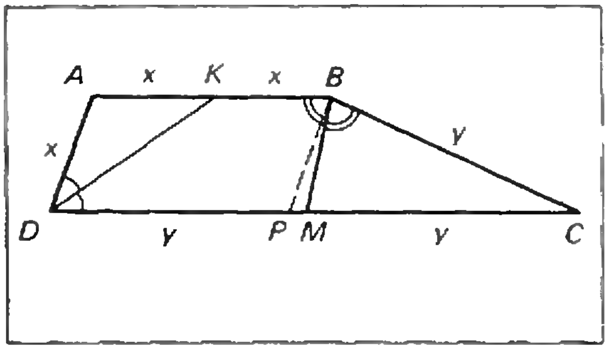


Рис. 2.

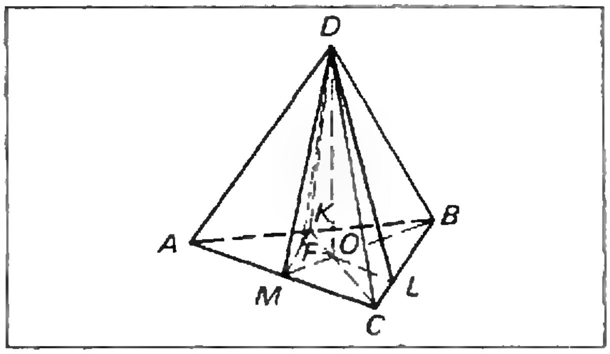


Рис. 3.

Указание. Уравнение представить в виде

$$\left(\sqrt{\cos x} - 1\right)\left(2\cos^2 x + \frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

и отобрать те корни двух получающихся уравнений, которые удовлетворяют условию $\cos x \geqslant 0$.

2. $S = 15\sqrt{3}$. Решение. Из условия видно, что углы при нижнем основании трапеции — острые, и потому ее нижнее основание больше верхнего. Пусть AB — верхнее основание трапеции $ABCD$ (рис. 2; убедитесь, что решение не изменится, если верхним основанием считать CD), так что $AB < CD$. Положим $AK = KB = x$, $CM = MD = y$; тогда $x < y$.

Так как $\sphericalangle AKD = \sphericalangle KDM$ (почему?), то треугольник DAK — равнобедренный, откуда $AD = x$. Аналогично, $BC = y$ (докажите!). Проведем $BP \parallel AD$; так как $BP = x < y = BC$, то в треугольнике BPC угол BPC больше угла BCP (и этот факт получается независимо от того, лежит ли точка P левее или правее точки M). Следовательно, в трапеции $\sphericalangle ADC > \sphericalangle BCD$, и потому $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.

По теореме косинусов из треугольника BPC получаем:

$$y^2 = x^2 + 4(y-x)^2 - 2x(y-x) \qquad (1)$$

(убедитесь в этом!); далее, по условию задачи,

$$x + y = 10 \qquad (2)$$

(докажите!). Решая систему уравнений (1), (2), находим:

$$x_1 = 5,\ y_1 = 5;\ x_2 = 3,\ y_2 = 7.$$

Первое решение необходимо отбросить (почему?), а второе решение (оно, кстати, показывает, что точка P действительно лежит левее точки M) позволяет найти площадь трапеции (как?).

3. $5/2 < x \leqslant 3$. Решение. ОДЗ неравенства — промежуток $0 < x \leqslant 3$ (убедитесь в этом!) Неравенство переписывается в виде

$$(5 - x\log_2 x)\left(1 - x + \sqrt{6 + x - x^2}\right) < 0 \qquad (3)$$

(проведите соответствующие выкладки!). Так как при всех x из промежутка $0 < x \leqslant 3$ справедлива цепочка неравенств $x\log_2 x \leqslant 3\log_2 3 < 5$ (докажите!), то вместо (3) получаем неравенство $\sqrt{6 + x - x^2} < x - 1$. Его решения должны удовлетворять условию $x > 1$ (почему?) и находятся обычным методом (как?).

4. $S = \sqrt{4q^2 + \dfrac{p^2}{12}}$. Решение. Ясно из условия, что BM и CK — медианы треугольника ABC, так что основанием высоты пирамиды является точка O пересечения этих медиан (рис. 3). Обозначим высоту пирамиды через H, ребро BC — через a, высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A на сторону BC, — через h (на чертеже эта высота не нарисована). По условию

$$p = \frac{ah}{2}. \qquad (4)$$

В трапеции $MKBC$ (почему это трапеция?) проведем высоту FL, проходящую через точку O. Тогда DF — высота треугольника (сечения) MDK, а DL — высота треугольника (грани) BDC (докажите!). Так как $FL = h/2$ (почему?) и так как $FO : OL = 1:2$ (откуда это следует?), то

$$FO = h/6, \quad LO = h/3.$$

Следовательно, по условию

$$q = \frac{a}{4}\sqrt{H^2 + \frac{h^2}{36}} \qquad (5)$$

(убедитесь в этом!), а искомая площадь грани BDC

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{H^2 + \frac{h^2}{9}}.$$

Используя (4) и (5), получаем:

$$S^2 = \frac{a^2}{4}\left(H^2 + \frac{h^2}{9}\right) = 4\,\frac{a^2}{16}\left(H^2 + \frac{h^2}{36}\right) + \frac{1}{12}\,\frac{a^2h^2}{4} = 4q^2 + \frac{p^2}{12}.$$

5. $x = 1$, $y = -1$. Решение. Вычтем из первого данного соотношение второе;

получим

$$\sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} - \sqrt{1 + (x + y)^2} \geqslant \geqslant y^6 + x^2 + 2xy^3,$$

или

$$\sqrt{1 - (1 - x^2y^2)^2} - \sqrt{1 + (x + y)^2} \geqslant \geqslant (x + y^3)^2. \qquad (6)$$

Так как первый корень в левой части неравенства (6) всегда меньше или равен 1, а второй — всегда больше или равен 1 (почему?), то левая часть неравенства (6) всегда неположительна, тогда как его правая часть, очевидно, всегда неотрицательна. Следовательно, неравенство (6) может выполняться, лишь если одновременно

$$(x + y^3)^2 = 0, \quad \sqrt{1 - (1 - x^2y^2)^2} = \sqrt{1 + (x + y)^2},$$

или

$$(x + y^3)^2 = 0, \ (1 - x^2y^2)^2 = (x + y)^2 = 0$$

(почему?). Эти равенства дают

$$x_1 = 1, \ y_1 = -1; \ x_2 = -1, \ y_2 = 1,$$

однако вторая пара не удовлетворяет исходным соотношениям.

Вариант 2

1. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, k — целое число.
2. $S = 4\sqrt{3}/3$.
3. $-1 < x \leqslant 1/3$.
4. $V = \dfrac{8S^2 \sin\alpha \sin\beta}{3a \sin(\alpha + \beta)}$.
5. $x_1 = -2$, $y_1 = 3/2$; $x_2 = 0$, $y_2 = -1/2$.

Вариант 3

1. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, $y_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $y_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, n, k — целые числа.

Указание. Выразить $\sin x$ из первого уравнения и подставить во второе уравнение.

2. $\frac{29}{50} < x \leqslant 7 + 4\sqrt{3}$.

3. $S = \frac{a}{4}(a + \sqrt{a^2 + 8b^2})$. **Указание.** Обозначив длины катетов через x и y, составить по условию задачи систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4b^2, \\ \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{\sqrt{2}}{a}, \end{cases}$$

и выразить из нее произведение xy.

4. $SA = 1$, $SB = \sqrt{2}/3$, $SC = \sqrt{2}/2$.

5. Треугольник ABC — тупоугольный. **Указание.** Рассмотреть следующие варианты, исчерпывающие все логические возможности.

а) Третий бегун и в точке B, и точке C оказывается вместе с первым бегуном. Доказать, что этот вариант невозможен (бегуны не могут финишировать одновременно).

б) Третий бегун и в точке B, и в точке C оказывается вместе со вторым бегуном. Доказать, что и этот вариант невозможен.

в) Третий бегун в точке B оказывается одновременно с первым бегуном, а в точке C — со вторым. Доказать, что этот вариант также невозможен.

г) Третий бегун в точке B оказывается одновременно со вторым бегуном, а в точке C — с первым. Доказать, что это возможно, лишь если скорость третьего бегуна на отрезках AB, BC, CA равна соответственно 12 *км/ч*, 12 *км/ч*, 14 *км/ч*, в этом случае

$$AB = \frac{5}{4} BC, \quad AC = \frac{28}{15} BC$$

и такой треугольник существует. По теореме косинусов получаем, что угол B (противолежащий наибольшей стороне AC) — тупой.

Вариант 4

1. $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k, n — целые числа.
2. $x = -4/3$.
3. Либо 2, либо 12,4.
4. $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\pi r \cdot SD}{r \cdot SD\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{4\sqrt{3} - 3}{13}\pi$ (SD — высота опущенная из вершины S на сторону PQ).
5. $\measuredangle AMO = \arccos\frac{25}{28}$. **Указание.** Описать окружность вокруг треугольника CDF и вокруг четырехугольника $CFHB$.

Физика

Факультеты механико-математический, вычислительной математики и кибернетики

Билет 1

$$H = h + \frac{v^2 - v_г^2}{2g} = h + l\sin^3\alpha \approx 22 \text{ см}.$$

(см. рис. 4).

Билет 2

Если конденсатор не заряжен, то период колебаний шарика (математического

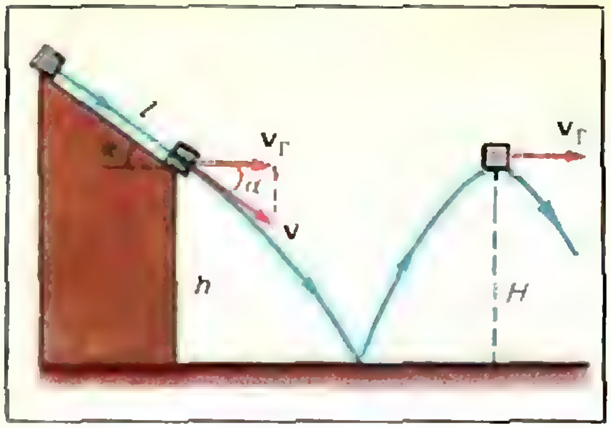


Рис. 4.

маятника) $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi\sqrt{ml/P}$, где l — длина нити. Если конденсатор зарядить, внутри него создается однородное электрическое поле, направленное вертикально. Поэтому на шарик кроме силы тяжести $P = mg$ действует электрическая сила $f = qE$. Поэтому в формуле для периода колебаний нужно P заменить на $F_1 = mg + qE$, если сила **f** направлена вниз, и на $F_2 = |mg - qE|$, если она направлена вверх. Так как $T_1 < T_2$, то

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{|mg - qE|}}.$$

Из этих формул находим

$$l = \frac{T_1^2(mg + qE)}{4\pi^2 m} = \frac{T_2^2|mg - qE|}{4\pi^2 m}.$$

Если $mg > qE$, то шарик до и после перезарядки конденсатора качается под точкой подвеса нити. В этом случае

$$T_1^2(mg + qE) = T_2^2(mg - qE)$$

и, следовательно,

$$E = \frac{mg(T_2^2 - T_1^2)}{q(T_1^2 + T_2^2)} \approx 250\ в/м.$$

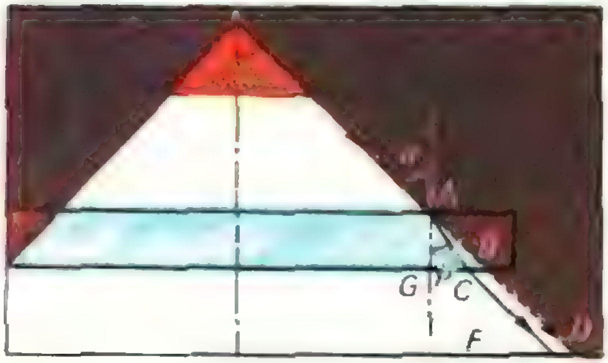


Рис. 5.

Если же $mg < qE$, то шарик после перезарядки конденсатора качается над точкой подвеса. При этом

$$T_1^2(mg + qE) = T_2^2(qE - mg)$$

и, следовательно,

$$E = \frac{mg(T_2^2 + T_1^2)}{q(T_2^2 - T_1^2)} \approx 1690\ в/м.$$

Билет 3

$$h = \frac{d}{2\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)} \approx 4{,}5\ см.$$

(см. рис. 5).

Билет 4

$$V_1 = \frac{\mu_2 T_1 V}{\mu_1 T_2 + \mu_2 T_1} \approx 0{,}9\ л,$$

$$V_2 = \frac{\mu_1 T_2 V}{\mu_1 T_2 + \mu_2 T_1} \approx 4{,}6\ л.$$

Физический факультет

1. В момент удара скорости тел горизонтальны. Запишем закон сохранения импульса, учитывая, что масса одного тела равна m, второго — $2m$:

$$2mv_0 - mv_0 = 3mv, \qquad (1)$$

где $v_0 = \sqrt{2gR}$ — скорость тел до удара, v — их скорость после удара.

После удара тела поднимаются на высоту h (рис. 6), скользя по полусфере. При этом вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную:

$$\frac{3mv^2}{2} = 3\,mgh. \qquad (2)$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{R - h}{R}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) получим

$$\cos\alpha = \frac{8}{9}.$$

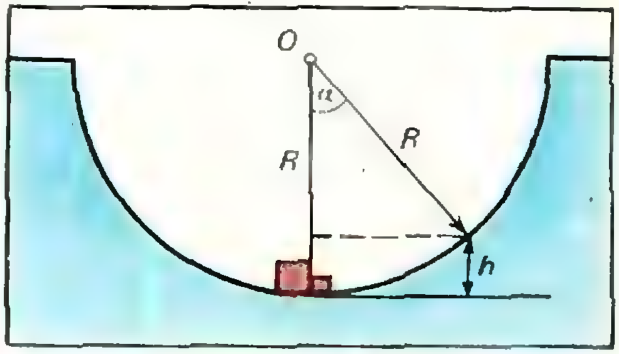


Рис. 6.

2. Запишем закон сохранения импульса:

$$0 = \frac{P_1}{g}(v_1 - v) - \frac{P_2}{g}(v_2 + v) - \frac{P}{g}v, \quad (1)$$

где v_1 — скорость первого человека относительно платформы, v_2 — скорость второго человека относительно платформы (по условию $v_1 = 2v_2$), v — абсолютная скорость платформы. Первый человек добежал до конца платформы за время t, то есть

$$l = v_1 t = 2v_2 t. \quad (2)$$

За это время платформа откатилась на расстояние

$$x = vt. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) найдем значения v_1, v_2 и v. Подставив их в уравнение (1), получим

$$x = \frac{(2P_1 - P_2)}{2(P_1 + P_2 + P)} l =$$

$$= \frac{2 \cdot 60 - 40}{2(60 + 40 + 500)} \cdot 10 = \frac{2}{3} \ (м).$$

3. $$Q > \lambda \left[M - \frac{m\rho_1(\rho_2 - \rho_{воды})}{\rho_2(\rho_{воды} - \rho_1)} \right].$$

4. Работа на изохорах равна нулю. Работа на изобаре *2—3* (рис. 7) совершается газом:

$$A_1 = p_2(V_2 - V_1).$$

Воспользуемся уравнением состояния газа $pV = RT$ в точках *2* и *3*. Тогда

$$A_1 = R(T_3 - T_2),$$

где T_2 — температура изотермы *2—4*.

Работа на изобаре *4—1* совершается над газом:

$$A_2 = p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1).$$

Полная работа, совершенная газом:

$$A = A_1 - A_2 = R(T_3 + T_1 - 2T_2).$$

Температуру изотермы T_2 найдем, воспользовавшись законом Шарля: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$, то есть $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$. Окончательно получим:

$$A = R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2.$$

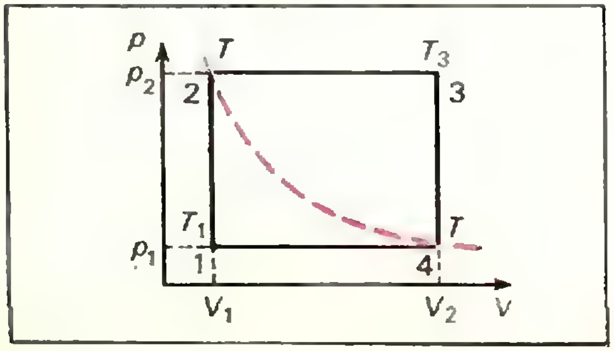


Рис. 7.

5. Сопротивление нити лампочки R растет с увеличением температуры:

$$R_1 = \frac{U_1^2}{W_1} = R_0(1 + \alpha t_1). \quad (1)$$

где α — температурный коэффициент сопротивления материала нити накала:

$$R_2 = \frac{U_2^2}{W_2} = R_0(1 + \alpha t_2). \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим:

$$R_0 = \frac{R_2 t_1 - R_1 t_2}{t_1 - t_2} = 100 \ (ом).$$

Задачу можно решить графически (в координатах R, t).

6. Сила тока электронного пучка I зависит от числа электронов в единице объема n, их скорости v, заряда электрона e и сечения пучка S:

$$I = nevS.$$

Скорость можно найти из закона сохранения энергии электрона в пучке:

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Таким образом,

$$n = \frac{I}{eS}\sqrt{\frac{m}{2eU}} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-6}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 28500}} = 10^3 \ (эл/см^3).$$

7. Построим ход лучей и обозначим через A_1 и F точки пересечения отраженных лучей с линией AB (рис. 8). Тогда

$$x = OA_1 - OF. \quad (1)$$

Для луча *1*

$$\sin\alpha = \frac{a}{R}, \quad (2)$$

где α — угол падения луча на зеркало. Из треугольника OA_1K

$$(OA_1)^2 = (A_1K^2) + R^2 - 2(A_1K) R\cos\alpha. \quad (3)$$

Из рисунка 8 ясно, что $OA_1 = A_1K$. Так

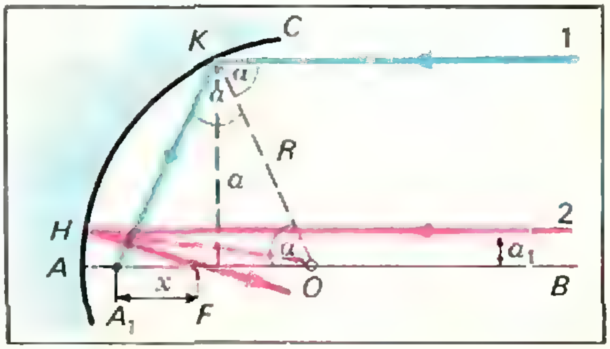


Рис. 8.

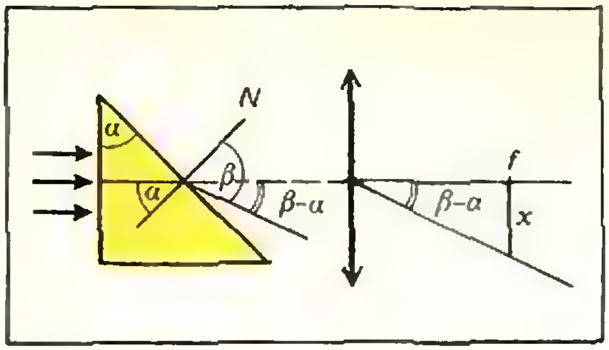


Рис. 9.

как $\cos\alpha = \frac{1}{R}\sqrt{R^2-a^2}$, то из равенства (3) получим:

$$OA_1 = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2-a^2}} \approx 25\ (см).$$

Аналогично рассмотрим треугольник OHF (красные линии на рис. 8): $OH = R$, $OF = FH$, а $\sin(HOF) = \frac{a_1}{R}$. Тогда $OF = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2-a_1^2}} \approx 15\ (см)$. Подставив в уравнение (1) значения OA_1 и OF, получим:

$$x = 10\ см.$$

8. Построим ход лучей (рис. 9). Призма отклонит пучок лучей от главной оптической оси линзы на угол $\beta-\alpha$, оставив его параллельным. Эти лучи соберутся в фокальной плоскости линзы в точке S на расстоянии x от главной оптической оси. При этом

$$x = f\,\mathrm{tg}(\beta-\alpha) = f\frac{\mathrm{tg}\,\beta-1}{\mathrm{tg}\,\beta+1} \qquad (1)$$

(поскольку $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$). Известно, что

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n, \qquad (2)$$

но $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\sin\beta = \frac{n\sqrt{2}}{2}$, и

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{n}{\sqrt{2-n^2}}. \qquad (3)$$

Подставив уравнение (3) в (1), получим:

$$x = f\,\frac{n-\sqrt{2-n^2}}{n+\sqrt{2-n^2}}.$$

К статье «Телевидение готовит в вуз»
(*см. «Квант», 1974, № 3*)

Математика

Вариант 1

1. -2.
2. $\frac{1}{4}h^2|\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta|$.

Решение. Поскольку $\angle BHM = \pi/_2$, то искомая площадь равна $\frac{1}{2}h\cdot MH$. Для отыскания длины отрезка MH следует рассмотреть все возможные случаи расположения точек A, C, M и H в зависимости от величины углов α и β.

Если $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ (рис. 10), то точка H лежит внутри отрезка AC и $AH > AM$ (докажите!). Тогда из треугольников AHB и CHB находим: $AH = h\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $HC = h\,\mathrm{ctg}\,\beta$, а поэтому $AC = h(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta)$, $AM = \frac{1}{2}h(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$MH = \frac{1}{2}h(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta). \qquad (1)$$

Если $\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то аналогично заключаем, что

$$MH = \frac{1}{2}h(\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha). \qquad (2)$$

Если $\alpha = \beta$, то точки M и H совпадают, так что $S_{\Delta BMH} = 0$.

Если $\beta = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то формулы (1) или (2), очевидно, остаются справедливыми (убедитесь в этом!).

Если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$ (рис. 11), то точка H лежит на продолжении стороны

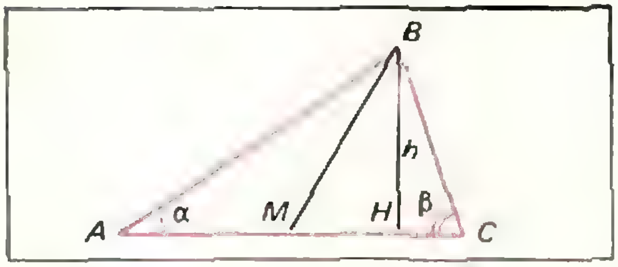


Рис. 10.

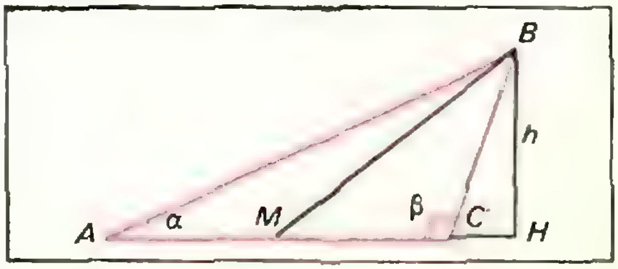


Рис. 11.

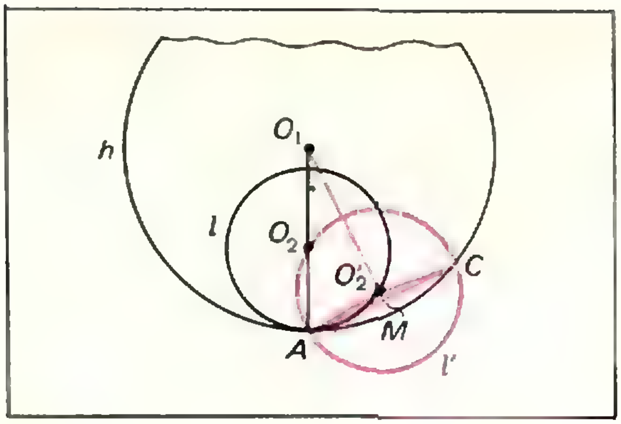


Рис. 12.

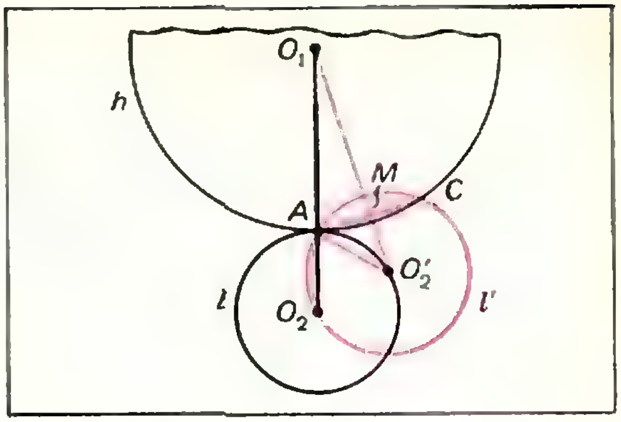


Рис. 13.

AC за точку C (докажите!). Тогда $AH = h\operatorname{ctg}\alpha$, $HC = -h\operatorname{ctg}\beta$, а поэтому $AC = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, $AM = \frac{1}{2}h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$MH = \frac{1}{2}h(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta),$$

что совпадает с формулой (1). Если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$, то снова приходим к формуле (2). Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$MH = \frac{1}{2}h\,|\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta|,$$

которая справедлива при любых значениях углов α и β (убедитесь в этом!). Теперь легко получается ответ.

3. $x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = 0, y_2 = 2; x_3 = 2; y_3 = 0; x_4 = 2, y_4 = 2.$

Указание. Второе уравнение удовлетворяется при $x + y = 0$, однако при этом первое уравнение удовлетворяется лишь если $x = y = 0$. Таким образом, найдено одно решение. Для отыскания других перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x + y), \\ x^2 - xy + y^2 = 4, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 2(x + y) + 2xy, \\ (x + y)^2 = 4 + 3xy. \end{cases}$$

Легко исключить xy, в результате получим уравнение

$$(x + y)^2 - 6(x + y) + 8 = 0.$$

Остается рассмотреть две возможности: $x + y = 2$ и $x + y = 4$.

4. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Вариант 2

1. 34 и 51.

2. $\frac{\sqrt{3}\,Rr}{\sqrt{R^2 - Rr + r^2}}$, если окружности касаются внутренним образом; $\frac{\sqrt{3}\,Rr}{\sqrt{R^2 + Rr + r^2}}$, если окружности касаются внешним образом.

Решение. Когда речь идет о построении правильного треугольника, весьма полезно сделать поворот вокруг одной из вершин этого треугольника на $\pi/3$. Это преобразование (меньшая окружность поворачивается на $\pi/3$) сводит данную задачу к следующей (см. рис. 12, 13): *две окружности h и l' пересекаются в точках A и C, причем $\measuredangle O_1AO_2' = \frac{\pi}{3}$ (если окружности h и l касаются внутренним образом*, рис. 12), *или $\measuredangle O_1AO_2' = \frac{2\pi}{3}$ (если окружности h и l касаются внешним образом*, рис. 13); *найти AC (радиусы R и r окружностей h и l, l' заданы)*. Заметим, что точка M на рисунке 13 может находиться как между O_1 и O_2', так и за O_2' (при $2r > R$). Замечая, что $AC = 2\,AM$, а AM — высота треугольника O_1AO_2', находим

$$S_{\Delta O_1AO_2'} = \frac{1}{2}AO_1 \cdot AO_2' \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}Rr,$$

$$AC = 2 \cdot AM = \frac{4S_{\Delta O_1AO_2'}}{O_1O_2'} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 - Rr}}$$

— если окружности касаются внутренним

образом, а если окружности касаются внешним образом, то, заменяя в этих формулах $\frac{\pi}{3}$ на $\frac{2\pi}{3}$, получаем

$$AC = \frac{\sqrt{3}\,Rr}{\sqrt{R^2 + r^2 + Rr}}.$$

Обоснование всех построений предоставляется читателю.

3. $x = (-1)^n \arcsin\left[\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right] + n\pi,$

$$y = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}} + 2k\pi,$$

$$n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, \quad n,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

Задачи

1. $\log_a b - \log_b a.$
2. $b < a < c.$
3. 0; 1.

Указание. Ввести вспомогательное неизвестное $y = x - 1$, получить уравнение $2y\left(2^y + \frac{y}{2}\right) = 0$, которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$y = 0 \text{ и } 2^y + \frac{y}{2} = 0.$$

Второе из этих уравнений имеет единственный корень $y_1 = -1$ (так как левая часть представляет собой монотонную функцию), а первое дает корень $y_2 = 0$.

4. 1; $\log_2\frac{\sqrt{29} - 5}{2}$. Указание. Введите вспомогательное неизвестное $y = 2^x - 2^{-x}$.

5. 2.

6. $x_1 = 9,\ y_1 = 3;\quad x_2 = \frac{1}{3},\ y_2 = \frac{1}{9}.$

7. $1 \leqslant x < 2.$

8. $-9 \leqslant x \leqslant -2, \quad 1 < x \leqslant \frac{3}{2}.$

Физика

1. $q = C\left(E_2 + \frac{E_1 - E_2}{R + r_1 + r_2}\ r_2\right) = 2{,}5\cdot 10^{-5}$ *к*.

2. $R_2 = \frac{r^2}{R_1} = 0{,}5$ *ом*.

3. $t_3 = V_3\left(\frac{t_1}{V_1} + \frac{t_2}{V_2}\right) = 70$ *мин*.

4. $A = \frac{\mu_B U F Z_B \rho V}{A_B R T} = 1{,}25\cdot 10^5$ *дж*.

5. $B = 9\cdot 10^{-6}$ *тл*.

6. $\nu = \frac{E_{\text{инд}}}{\pi l^2 B} \approx 1{,}3$ *гц*.

7. $v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \approx 0{,}1$ *м/с*.

8. $R_2 = \frac{U}{I_2 k} - \frac{R}{k^2} - \frac{P}{I_2^2} = 4$ *ом*.

9. $C = \frac{I_{0_2}}{2\pi\nu I_{0_1} R} = 3{,}6\cdot 10^{-6}$ *ф*.

10. $\nu \approx 5{,}7$ *гц*.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 3)

1. 10 метров.
2. Одинаково.
3. 6 коров.
4. Свеча станет легче.
5. Если неизвестное сопротивление мало по сравнению с сопротивлением вольтметра, лучше пользоваться схемой 1, в противном случае — схемой 2.

К задачам «Найти число...»

(см. «Квант», 1974, № 3 с. 8)

1. 445.
2. Нет, одно из таких чисел должно делиться на 3.
3. $5776 = 76^2$.
4. 27.
2. $2401 = 7^4$.
6. 400.

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 16/I 74 г.
Подписано в печать 27/II 74 г. Заказ 78
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,2
Уч.-изд. л. 6,05 Тир. 385 105 экз. Т-05509
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательства, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Уголок коллекционера

В. И. ЛЕНИН — ВЕЛИЧАЙШИЙ УЧЕНЫЙ XX ВЕКА

22 апреля 1974 года Советский народ отмечает 104 годовщину рождения В. И. Ленина — гениального продолжателя революционного учения Маркса и Энгельса, создателя Коммунистической партии Советского Союза, основателя первого в мире социалистического государства, вождя трудящихся всего мира. Ленин был не только великим государственным и политическим деятелем, но и революционером в науке, открывшим новый этап в развитии марксизма, обогатившим все составные части марксизма — философию, политическую экономию и научный коммунизм.

В. И. Ленин дал глубокий и философский анализ коренной перестройки физической науки в начале XX века.

Эту сложнейшую работу он выполнил в знаменитой книге «Материализм и эмпириокритицизм», изданной в 1909 году.

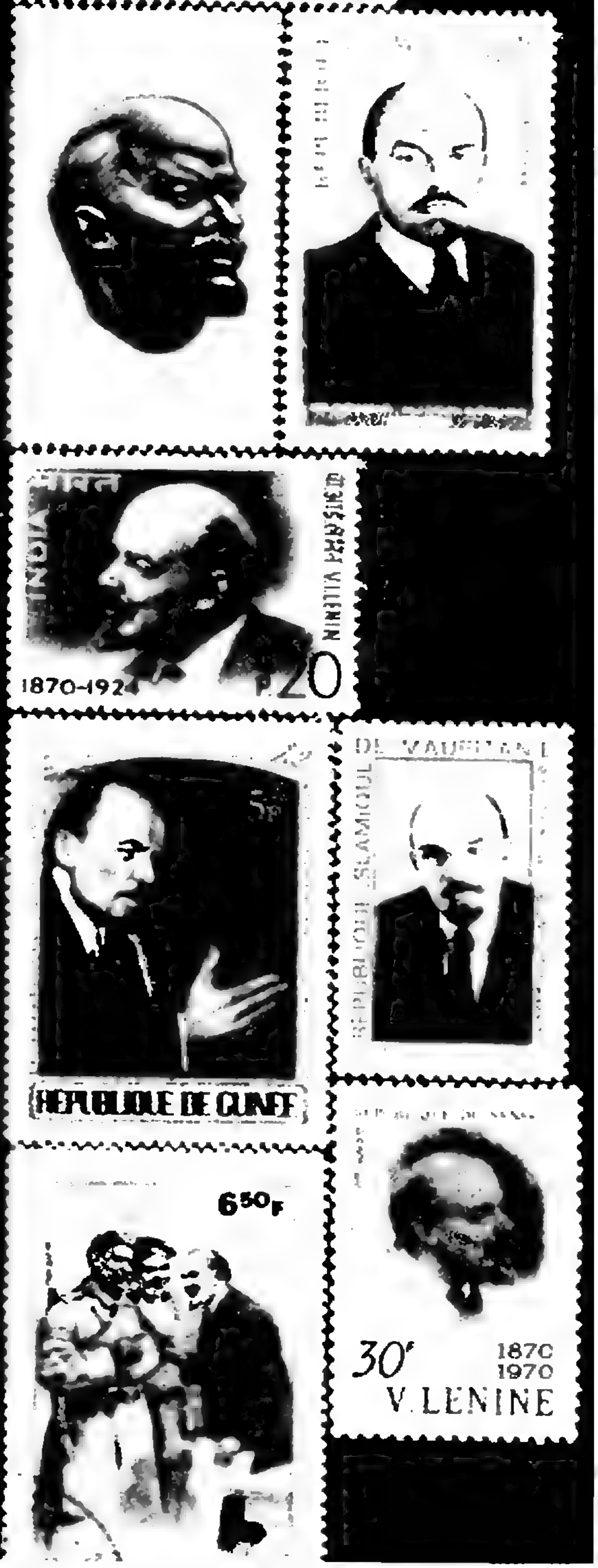
В. И. Ленин писал в своей книге о том, что атомы и электроны необычайно сложны, и мы никогда не узнаем о них все, а будем и дальше находить у них новые, ранее неизвестные науке свойства. Он писал также, что физика первых лет XX века рождает диалектику, то есть подтверждает своими исследованиями основные положения диалектического материализма. Он высказал твердую уверенность в том, что физика и далее будет развиваться по этому же пути. Оба этих гениальных предвидения полностью сбылись.

С первых дней существования советской власти В. И. Ленин уделял огромное внимание развитию науки. Молодое советское правительство стремилось оказывать всю возможную в те трудные дни помощь ученым и научным организациям. Оно установило тесный контакт с Академией наук. В. И. Ленин внимательно следил за работой И. П. Павлова, К. А. Тимирязева, И. В. Мичурина, И. М. Губкина, Г. М. Кржижановского и других русских ученых. Он стремился направить все усилия ученых нашей страны на решение важнейших проблем строительства социализма.

В наши дни непрерывно возрастает число государств, вступивших на социалистический путь развития. Такие страны имеются теперь не только в Европе, но и в Азии, Африке и Латинской Америке. И в каждой такой стране имя Ленина окружено глубокой любовью и уважением. Это находит подтверждение в выпуске почтовых марок, посвященных Владимиру Ильичу. Мы помещаем здесь некоторые из марок, выпущенных странами, недавно освободившимися от колониальной зависимости.

В. Рудов

LIBAN
لبنان
30



Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

4

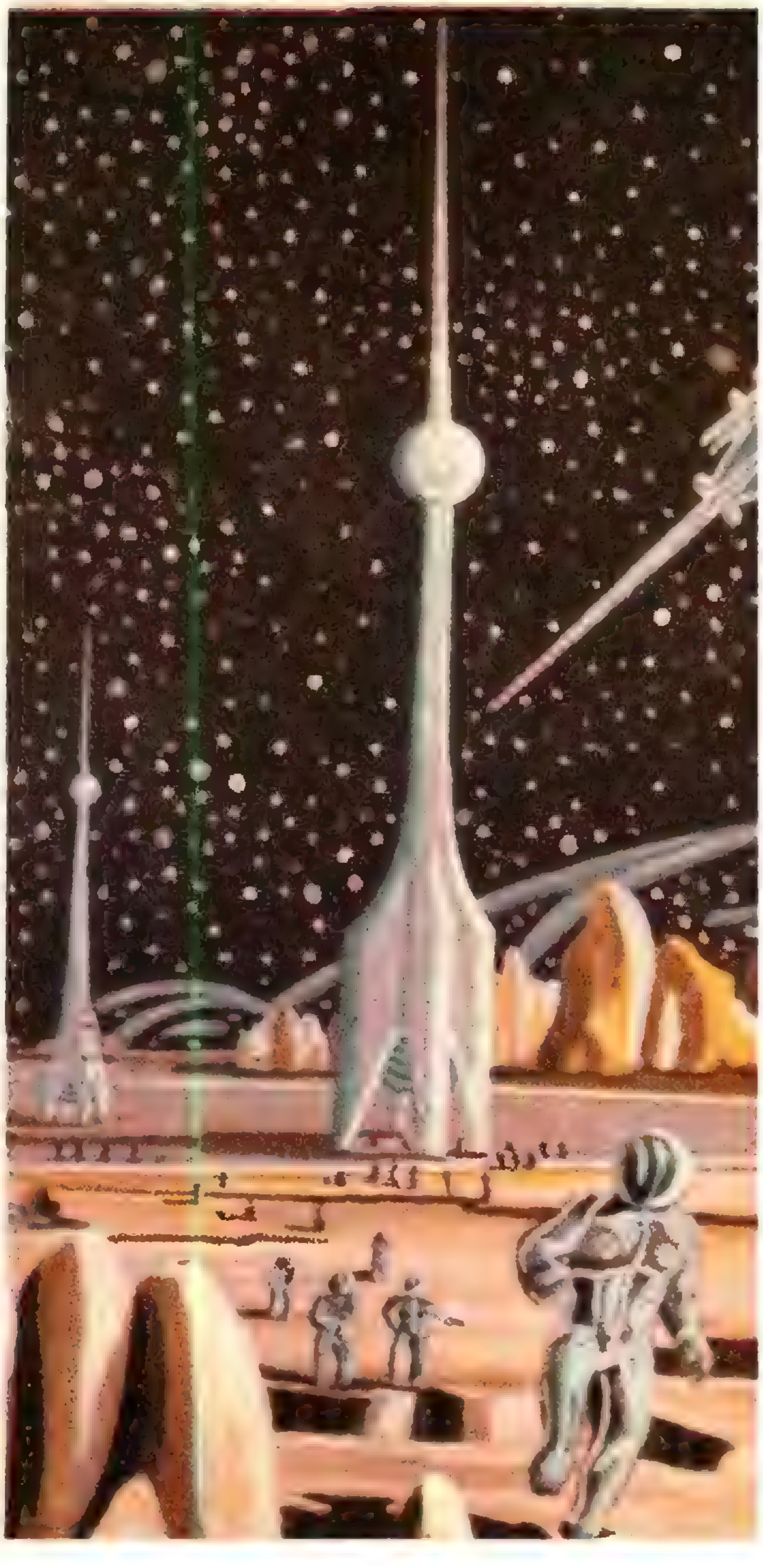
ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ

12 апреля 1961 года навсегда останется в памяти всего человечества как день выдающейся победы науки и техники. В этот день человек впервые совершил орбитальный космический полет вокруг Земного шара. Первым космонавтом стал советский человек, коммунист Юрий Алексеевич Гагарин.

Тринадцать лет отделяет нас от этого события. И каждый год приносит новые достижения в области исследования и использования космического пространства. В 1973 году в Советском Союзе в соответствии с программой космических исследований был осуществлен запуск двух космических кораблей: «Союз-12» с космонавтами Василием Григорьевичем Лазаревым и Олегом Григорьевичем Макаровым и «Союз-13» с космонавтами Петром Ильичем Климуком и Валентином Витальевичем Лебедевым. В этих полетах проводились комплексные проверки и испытания усовершенствованных бортовых систем космических кораблей «Союз» и спектрографирование отдельных участков земной поверхности с целью получения данных для решения народнохозяйственных задач. Космонавты Климук и Лебедев регистрировали ультрафиолетовое излучение звезд с помощью установленной на борту «Союз-13» системы телескопов «Орион-2». Это излучение недоступно для земных телескопов, так как оно поглощается атмосферой.

Успешно проходила подготовка к совместному советско-американскому космическому полету, запланированному на 1975 год.

Американские астронавты произвели серию экспериментов с орбитальной космической станцией «Скайлеб». Космический зонд «Пионер» прошел вблизи Сатурна и передал ценную информацию об этой загадочной планете.



НОМЕР
5

Основан в 1970 году.

Квант

1974
5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ

2 250 лет Академии наук СССР
6 *В. А. Лешковцев.* Физика в Академии наук СССР (1917—1974 гг.)
18 *Б. В. Гнеденко.* Академия наук и прогресс математики
26 *Б. Н. Делоне.* Леонард Эйлер
36 *И. К. Кикоин.* Он прожил счастливую жизнь
43 *Д. С. Людмилов, С. Д. Людмилова.* Правдоподобные рассуждения и математика

Задачник «Кванта»

48 Задачи М261 — М265, Ф273 — Ф277
50 Решения задач М219 — М221; Ф228 — Ф232

Практикум абитуриента

58 *И. Ф. Шарыгин.* Задачи о пересечении тел
64 *И. А. Зайцев.* Электрические машины постоянного тока
70 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Рецензии, библиография

72 *В. П. Лишевский.* Новые книги

«Квант» для младших школьников

73 Задачи
74 *В. Н. Крупский, А. И. Орлов.* Коза на привязи
78 **Ответы, указания, решения**

Уголок коллекционера

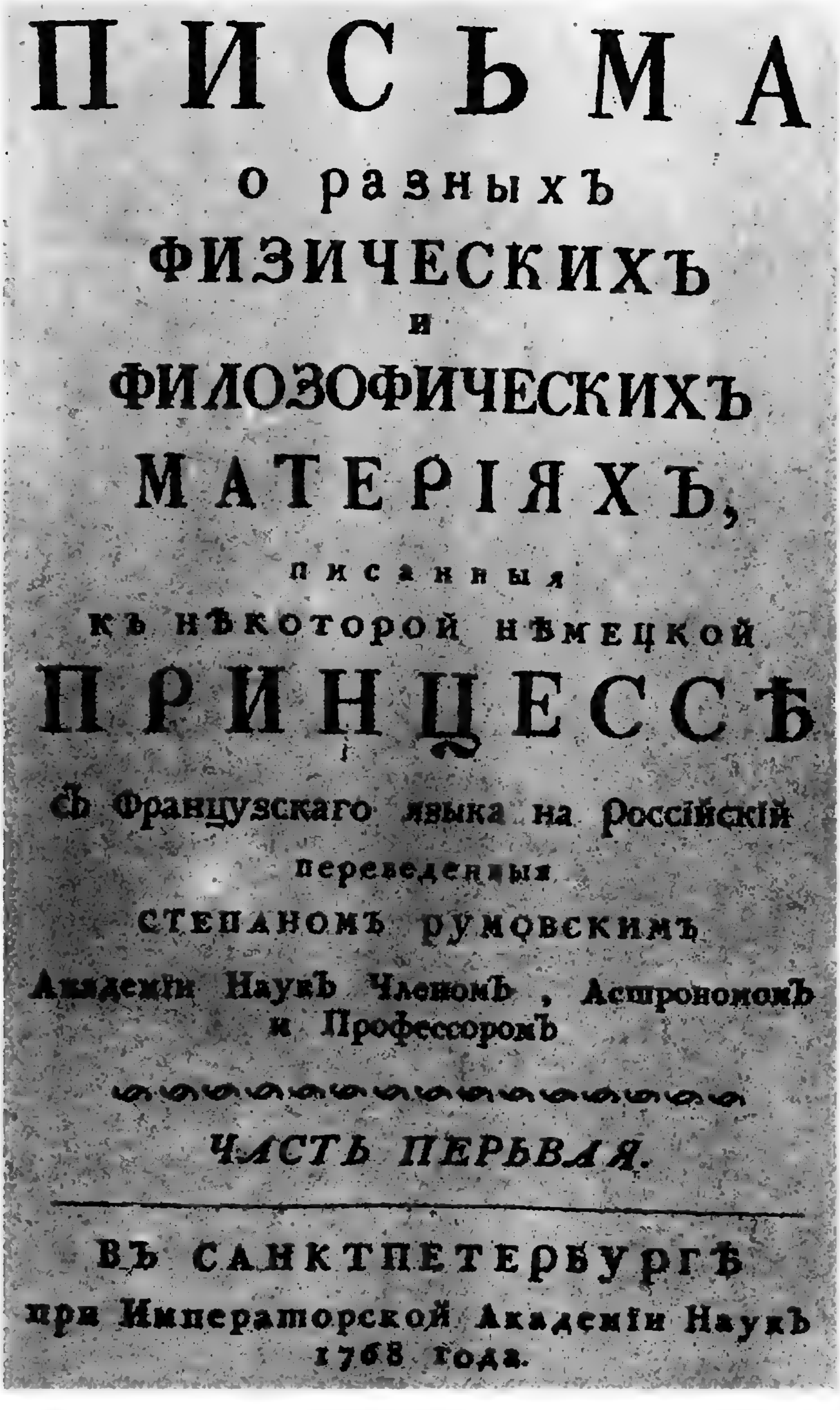
А. В. Алтыкис, В. А. Лешковцев. На марках — Академия наук СССР (*3-я с. обложки*)

Смесь

(*с. 35, 42, 63*)

На первой странице обложки приведена фотография здания Президиума Академии наук СССР, находящегося в Москве.

© «Квант», 1974 год.



ПИСЬМА
о разныхъ
ФИЗИЧЕСКИХЪ
и
ФИЛОЗОФИЧЕСКИХЪ
МАТЕРІЯХЪ,
писанныя
къ нѣкоторой нѣмецкой
ПРИНЦЕССѢ
съ Французскаго языка на Россійскій
переведенныя
СТЕПАНОМЪ РУМОВСКИМЪ
Академіи Наукъ Членомъ, Астрономомъ
и Профессоромъ

ЧАСТЬ ПЕРЬВАЯ.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
при Императорской Академіи Наукъ
1768 года.

Титульный лист книги Леонарда Эйлера в переводе на русский язык. Эта книга — великолепная популярная и полная оригинальных идей энциклопедия физики XVIII века, по которой учились физике несколько поколений русских читателей (о работах Эйлера см. с. 27).

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
250

250 ЛЕТ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Исполнилось 250 лет с момента образования высшего научного учреждения нашей страны — Академии наук СССР. Вся страна торжественно отмечает это выдающееся событие в истории отечественной науки. Отмечают его и во многих других государствах далеко за пределами нашей родины. Юбилей Академии наук — это смотр достижений отечественной науки.

Об истории Академии наук с момента ее возникновения и до Великой Октябрьской революции мы рассказали в предыдущем номере журнала в статьях академика С. И. Вавилова и академика АН УССР Б. В. Гнеденко. Теперь мы расскажем о судьбе Академии наук в последние 56 лет.

Великая Октябрьская революция вызвала огромные перемены в деятельности Академии наук. Советское правительство, возглавляемое В. И. Лениным, сразу раскрыло перед русскими учеными совершенно невиданные ранее возможности научной работы. Для победившей революции была ценна всякая научная инициатива, был дорог каждый ученый, старый и молодой, выдающийся и начинающий. С первых же месяцев существования советской власти, несмотря на крайне тяжелую обстановку в стране, правительство оказывало большую помощь научным учреждениям и отдельным ученым.

В. И. Ленин прекрасно понимал, что в строительстве социализма наука должна принимать активное участие. Поэтому он поставил такую задачу: «... все, что завоевала человеческая наука, человеческая техника, все усовершенствования, все знания специалистов, — все должно пойти на службу объединенному рабочему» *).

Октябрьская революция изменила место и роль науки в жизни общества. Теперь наука должна была служить интересам всего народа. Учитывая это, В. И. Ленин сказал в одном из выступлений в 1918 году: «Раньше весь человеческий ум, весь его гений творил только для того, чтобы дать одним все блага техники и культуры, а других лишить самого необходимого — просвещения и развития. Теперь же все чудеса техники, все завоевания культуры станут общенародным достоянием...» **).

Об этом же прекрасно сказал в своей речи на 200-летнем юбилее Академии наук Председатель ЦИК СССР М. И. Калинин: «... именно социалистическое общество больше, чем какой бы то ни было общественный строй, нуждается прежде всего в широком развитии как абстрактных, так и практических научных дисциплин, и оно же впервые дает научной мысли и работе условия подлинной свободы и плодотворного общения с самыми широкими массами».

---

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч. Изд. 5, т. 38, с. 26.

**) Ленин В. И. Полн. собр. соч. Изд. 5, т. 35, с. 289.

Эти идеи настойчиво и последовательно проводились в жизнь. Советское правительство сразу же признало необходимость поддержки Академии наук. 9 апреля 1918 года секретарь Совета Народных Комиссаров Н. П. Горбунов по поручению В. И. Ленина сообщил руководству Академии, что «Совет Народных Комиссаров считает крайне желательным возможно широкое развитие научных предприятий Академии и приглашает Академию довести до сведения Совета об имеющихся предположениях экспедиций, предприятий и изданий Академии, с тем, чтобы им могло быть оказано скорейшее содействие». 11 апреля 1918 года Народный Комиссар просвещения А. В. Луначарский сообщил В. И. Ленину, что переговоры с руководством Академии, в которых участвовали Президент Академии наук академик А. П. Карпинский и вице-президент академик В. А. Стеклов, успешно завершены. На следующий день Совет Народных комиссаров принял решение о дополнительном финансировании работ Академии наук, которая получила возможность широкого развития экспериментальных исследований и экспедиционных работ. И все это было сделано в труднейшее для молодой советской республики время, в условиях гражданской войны, когда положение на фронтах было отчаянным, а разруха парализовала хозяйственную жизнь в стране.

В это же время В. И. Ленин составил «Набросок плана научно-технических работ» — первый шаг к перспективному планированию развития советской науки. В нем В.И.Ленин выдвинул идею грандиозного экономического подъема страны при непосредственном участии науки. Этот документ начинается словами: «Академии наук, начавшей систематическое изучение и обследование естественных производительных сил России, следует немедленно дать от Высшего совета народного хозяйства поручение...».

Новые задачи требовали новых форм организации науки, прежде всего создания большого числа научных институтов, объединяющих оставшихся в стране ученых и готовящих новые научные кадры из талантливой молодежи. Еще при жизни В. И. Ленина в Академии наук были организованы Физико-математический институт, Институт физико-химического анализа, Институт по изучению платины и других благородных металлов. Тогда же при других ведомствах были организованы Физико-технический институт, носящий теперь имя его основателя А. Ф. Иоффе, Государственный оптический институт имени Д. С. Рождественского, Радиевый институт имени В. Г. Хлопина, Центральный аэрогидродинамический институт имени Н. Е. Жуковского, Государственный институт прикладной химии, Институт по изучению Севера и ряд других крупных научных центров. Впоследствии деятельность этих институтов была тесно связана с Академией наук.

В. И. Ленин внимательно следил за работами Академии наук по изучению Курской магнитной аномалии, природных богатств Кольского полуострова. Большая помощь была оказана им великому русскому физиологу академику И. П. Павлову и выдающемуся механику члену-корреспонденту Академии наук Н. Е. Жуковскому. Он привлек к участию в разработке плана электрификации России (плана ГОЭЛРО) крупнейших ученых будущих академиков Г. М. Кржижановского, Г. О. Графтио, В. Ф. Миткевича, будущего члена-корреспондента Академии наук М. А. Шателена.

Вскоре после смерти В. И. Ленина, в июле 1925 года, было принято решение о преобразовании Российской Академии наук, сферой деятельности которой была в основном РСФСР, во Всесоюзную Академию наук. Академия получила ряд новых институтов. Ей было поручено руководство Всесоюзными конференциями и совещаниями по различным проблемам науки и техники.

В 1934 году Академия наук переехала из Ленинграда в Москву. Здесь она стала быстро превращаться в штаб советской науки, тесно связанный с другими государственными органами.

23 ноября 1935 года Совет Народных Комиссаров СССР утвердил новый устав Академии наук. В первом пункте этого устава сказано: «Академия наук Союза ССР является высшим научным учреждением СССР, объединяющим наиболее выдающихся ученых страны».

В трудные годы Великой Отечественной войны Академия внесла большой вклад в победу нашего народа над фашизмом. Героическую страницу в историю Академии вписали ее ленинградские учреждения во время блокады города-героя.

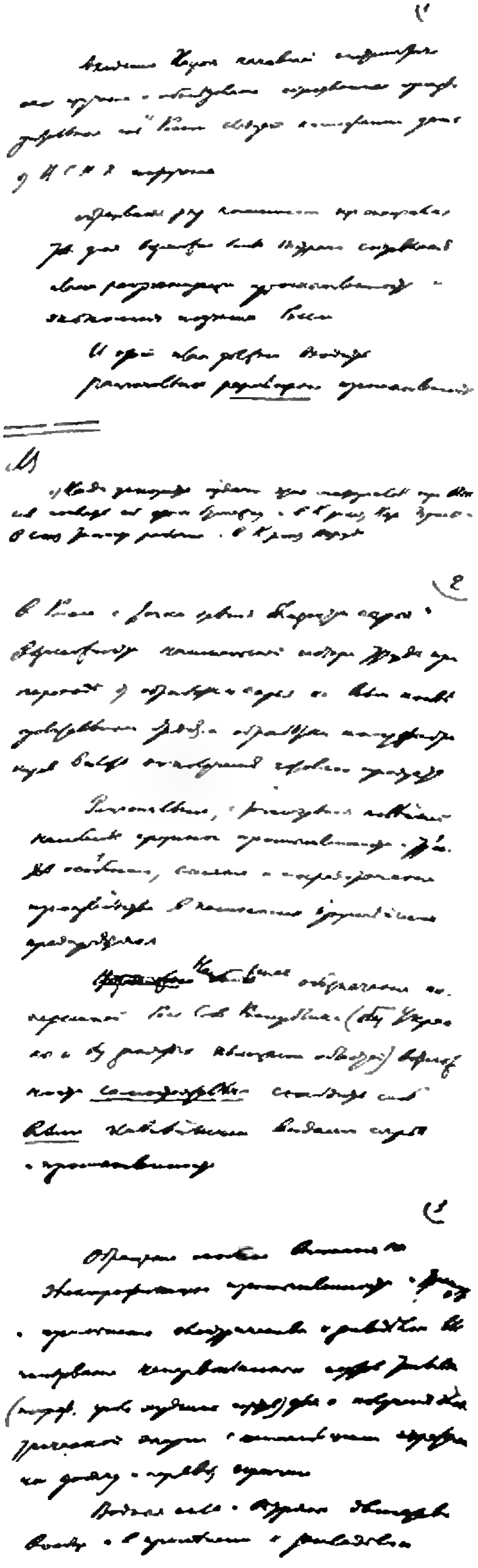
После окончания войны ученые Академии наук решили целый ряд важнейших проблем науки и техники. Под руководством академика И. В. Курчатова в необычайно короткие сроки было создано советское атомное и термоядерное оружие. Успешно были решены также проблемы мирного использования атомной энергии. Известно, что первая в мире атомная электростанция была построена в СССР. Академик С. П. Королев возглавил работы по созданию ракетно-космического комплекса для исследования и использования космического пространства. В нашей стране создана сложнейшая вычислительная техника. Особенно важное значение работа Академии приобрела в связи с происходящей в настоящее время научно-технической революцией, в которой науке принадлежит решающая роль.

Академия наук сегодня — это сотни научно-исследовательских институтов и учреждений и десятки тысяч научных работников. В 1928 году весь штат Физико-математического института Академии наук состоял из семи человек: директора, двух заведующих отделами и четырех научных сотрудников. Сегодня в одном лишь Физическом институте Академии наук имени П. Н. Лебедева работает несколько тысяч сотрудников. По данным на начало 1973 года в Академии состояли 244 академика, 449 членов-корреспондентов и 69 иностранных членов. Вся деятельность Академии направляется Президиумом, возглавляемым президентом академиком М. В. Келдышем.

Многочисленные академические институты и учреждения объединены в отделения по различным разделам науки: математики — в отделение математики, физики — в отделение общей физики и астрономии и отделение ядерной физики, механики — в отделение механики и процессов управления. Всего в составе Академии находится 16 отделений. Помимо этого, Академия наук СССР имеет очень крупное Сибирское отделение, в состав которого входит более 30 институтов, а также Уральский и Дальневосточный научные центры. В состав Академии входят также 6 филиалов: Казанский, Башкирский, Дагестанский, Карельский, Кольский и Коми-филиал.

Каждая союзная республика имеет свою Академию наук, тесно связанную с Академией наук СССР.

Академия наук внесла огромный вклад в развитие советской физики и математики. Мы рассказываем о нем в статьях, помещенных в этом номере.



В. И. ЛЕНИН. НАБРОСОК ПЛАНА НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ РАБОТ

Написан в апреле 1918 г.

«Академии наук, начавшей систематическое изучение и обследование естественных производительных сил *) России, следует немедленно дать от Высшего совета народного хозяйства поручение образовать ряд комиссий из специалистов для возможно более быстрого составления плана реорганизации промышленности и экономического подъема России.

В этот план должно входить:

рациональное *размещение* промышленности в России с точки зрения близости сырья и возможности наименьшей потери труда при переходе от обработки сырья ко всем последовательным стадиям обработки полуфабрикатов вплоть до получения готового продукта.

Рациональное, с точки зрения новейшей наиболее крупной промышленности и особенно трестов, слияние и сосредоточение производства в немногих крупнейших предприятиях.

Наибольшее обеспечение теперешней Российской Советской республике (без Украины и без занятых немцами областей) возможности *самостоятельно* снабдить себя *всеми* главнейшими видами сырья и промышленности.

Обращение особого внимания на электрификацию промышленности и транспорта и применение электричества к земледелию. Использование непервоклассных сортов топлива (торф, уголь худших сортов) для получения электрической энергии с наименьшими затратами на добычу и перевоз горючего.

Водные силы и ветряные двигатели вообще и в применении к земледелию.»**

---

*) NB: Надо ускорить *издание* этих материалов изо всех сил, послать об этом бумажку и в Комиссариат народного просвещения, и в союз типографских рабочих, и в Комиссариат труда.

**) Ленин В. И. Полн. собр. соч. Изд. 5, т. 36, с. 228—231.

ФИЗИКА В АКАДЕМИИ НАУК СССР (1917–1974 гг.)

В. А. Лешковцев

Созданная Петром I Академия наук на протяжении XVIII века была почти единственным центром физической науки в России. Но уже в самом начале XIX века в стране начали возникать и успешно развиваться новые научные центры, где проводились физические исследования. Это были университеты, Медико-хирургическая Академия, Московское общество испытателей природы. Со временем внеакадемическая физика стала играть очень важную роль в развитии физики в России. Александр Григорьевич Столетов, Николай Алексеевич Умов, Петр Николаевич Лебедев, Александр Степанович Попов и ряд других известных русских физиков не были членами Академии наук. Можно прямо сказать, что роль Академии в развитии отечественной физики в конце XIX и начале XX века была весьма скромной.

Это положение коренным образом изменилось вскоре после Великой Октябрьской революции. В начале тридцатых годов Академия наук становится высшим научным учреждением Советского Союза, объединяющим крупнейших ученых различных отраслей знания, в том числе и физиков. Уже в эти годы в ее составе мы видим выдающихся советских физиков Абрама Федоровича Иоффе, Дмитрия Сергеевича Рождественского, Леонида Исааковича Мандельштама, Сергея Ивановича Вавилова, Дмитрия Владимировича Скобельцына, Николая Дмитриевича Папалекси, Владимира Александровича Фока, Игоря Евгеньевича Тамма, Петра Леонидовича Капицу, Льва Давидовича Ландау и других. Быстро расширяется сеть научных институтов, занимающихся разработкой физических проблем.

Физика оказывает решающее влияние на различные отрасли техники — энергетику, связь, промышленное производство. В наши дни она является одной из главных движущих сил научно-технической революции, преобразующей современную промышленность. В связи с этим возникает необходимость усиленного развития физических исследований.

В настоящее время в состав Академии наук СССР входит более двадцати крупных научных физических институтов. Среди них Физический институт имени П. Н. Лебедева, Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе, Институт физических проблем имени С. И. Вавилова, Институт кристаллографии имени А. В. Шубникова, Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау, Институт радиотехники и электроники, Институт физики твердого тела, Институт физики высоких давлений и другие. Многочисленные научные физические институты созданы в республиканских Академиях. Кроме того, члены Академии руководят работой во многих физических институтах, не принадлежащих Академии наук (Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова, Объединенный институт ядерных исследований, Институт физики высоких энергий, Институт точной механики и вычислительной техники и т. д.).

Академия наук СССР определяет развитие советской физики и обеспечивает подготовку научных работников наиболее высокой квалификации.

В небольшой статье совершенно невозможно рассказать о достижениях Академии наук в области физики за годы советской власти. Об этом уже написаны обстоятельные научные труды. К тому же большинство работ по своему научному содержанию необычайно сложно и далеко выходит за рамки школьных представлений.

Мы расскажем здесь лишь о некоторых фундаментальных исследованиях выдающихся советских физиков — членов Академии наук СССР. При этом речь пойдет о работах, авторов которых уже нет среди нас. Что же касается ныне здравствующих авторов фундаментальных физических исследований, то мы надеемся, что они сами расскажут о своих достижениях на страницах нашего журнала.

Несмотря на большое количество направлений, на которые разделилась современная физика, основными ее разделами остаются физика твердого тела, оптика и радиоэлектроника, физика атомного ядра и элементарных частиц. В каждом из этих направлений советские физики выполнили исследования, ставшие теперь классическими.

Наш рассказ мы начнем с физики твердого тела.

Огромный вклад в эту чрезвычайно важную область физики внесли работы академика Абрама Федоровича Иоффе и его учеников.

Большинство твердых тел имеет кристаллическую структуру. При исследовании их свойств физики всегда стремятся пользоваться образцами, максимально приближающимися к идеальным кристаллам как по совершенству кристаллической структуры, так и по степени химической чистоты. Это вполне оправдано, потому что только на совершенных образцах можно получить однозначные результаты исследования.

Академик А. Ф. Иоффе (1880—1960).

Долгое время в физике господствовали представления о том, что реальные кристаллические тела мало чем отличаются от идеальных. Общепризнанная теория кристаллической решетки, разработанная Максом Борном, исходила из представлений об идеальном кристалле, где каждый атом находится на своем месте, и какие-либо нарушения структуры (примеси, внутренние дефекты) полностью отсутствуют. Эта теория описывала многие свойства кристаллических тел (электропроводность, теплопроводность и т. д.). Но как только дело доходило до определения прочности на разрыв, наблюдалось громадное расхождение между теоретическими предсказаниями и экспериментальными результатами. Прочность реальных кристаллов оказалась в сотни раз ниже теоретической. Например, теория указывает, что каменная соль должна выдерживать напряжения до $2 \cdot 10^9$ *н/м*^{2}, а в действительности кристаллы каменной соли разрываются уже при нагрузке $4 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}. Теоретическая прочность железа должна быть порядка 10^{10} *н/м*^{2}, а в действительности она на два порядка меньше.

Если бы мы научились получать материалы с прочностью, близкой к теоретической, это произвело бы настоящую революцию во многих отраслях техники, в том числе и в новейшей из них — ядерной.

Академик А. Ф. Иоффе первый понял причину этого громадного расхождения. Дело в том, что реальный кристалл существенно отличается от идеального. Как внутри, так и на поверхности его имеется много различных дефектов. Например, в каком-нибудь узле кристаллической решетки поваренной соли вместо атома натрия оказался атом хлора или серы, а иногда вообще никакого атома нет. На поверхности кристалла при сильном увеличении можно увидеть разветвленную сеть микроскопических трещин. Такие дефекты резко понижают прочность кристаллов.

Чтобы убедиться в этом, А. Ф. Иоффе произвел в 1924 году поразительно простые опыты, которые с тех пор вошли во все курсы общей физики под названием «эффекта Иоффе». Погружая кристаллы каменной соли в теплую воду, он растворял тонкий поверхностный слой вместе с присущими ему дефектами. При этом прочность кристаллов возрастала более чем в 10 раз.

В другой серии опытов выточенные из кристаллов каменной соли шары медленно охлаждались до температуры жидкого воздуха, а затем быстро погружались в расплавленный свинец. При этом, согласно теории, внутри шаров должно было возникать внутреннее напряжение (за счет быстрой смены сжатия на расширение) порядка $7 \cdot 10^8$ *н/м*^{2}. Но шары не разрывались, свидетельствуя о том, что подлинная внутренняя прочность каменной соли близка к теоретическому пределу.

Идеально упругое кристаллическое тело после прекращения воздействия деформирующей силы должно возвратиться в исходное недеформированное состояние. В действительности же всякая деформация оставляет за собой медленно исчезающий след — так называемое упругое последствие. Кроме того, предсказываемый теорией предел упругости, за которым твердое тело начинает течь подобно вязкой жидкости, также значительно выше реально наблюдаемой величины.

А. Ф. Иоффе первым создал метод экспериментального исследования механизма пластической деформации кристаллических тел. Суть этого метода состоит в последовательном наблюдении дифракции рентгеновских лучей, проходящих через кристалл, медленно деформируемый под влиянием внешних сил. Проходя через кристалл, рентгеновские лучи дают на помещенной за ним фотопленке систему закономерно расположенных пятен. Опыты, проделанные с кристаллами каменной соли, показали, что до определенного предела нагрузки никаких изменений на полученных рентгенограммах не наблюдается. При достижении предела упругости пятна на рентгенограмме внезапно раздваиваются, затем умножаются и, наконец, вытягиваются в длинные «хвосты». Это свидетельствует о том, что за пределом упругости образцы перестают быть правильными монокристаллами; они распадаются на отдельные монокристаллики, которые смещаются и поворачиваются относительно своих соседей. Каждый из них дает свою систему пятен, суммирующуюся с пятнами от других монокристалликов. Такое явление было названо астеризмом, а предложенный

А. Ф. Иоффе метод стал одним из основных методов исследования механизма деформаций кристаллических тел.

Продолжая эти исследования, А. Ф. Иоффе установил, что пластическая деформация происходит в кристалле не непрерывно, как думали до той поры все физики, а скачкообразно. При непрерывно действующей нагрузке деформация идет скачками, повторяющимися через одинаковые промежутки времени и даже сопровождающимися слабыми щелчками, напоминающими тиканье часов.

Этими, а также и некоторыми другими работами А. Ф. Иоффе заложил фундамент современных представлений о механизме прочности и пластичности реальных твердых тел. Он подал физикам глубокую идею о необходимости изучения различных дефектов кристаллической решетки, чрезвычайно сильно влияющих на многие свойства твердых тел.

Другой областью физики твердого тела, в которую академик А. Ф. Иоффе также внес вместе со своими учениками огромный вклад, является физика полупроводников. Сегодня трудно себе представить развитие техники без полупроводников. Но сорок с лишним лет назад, когда А. Ф. Иоффе занялся систематическим исследованием свойств полупроводников, многие физики весьма критически отнеслись к этому начинанию. В то время казалось, что только металлы и диэлектрики являются материалами, достойными серьезных физических исследований. Проводники и изоляторы — это важно и нужно технике, а полупроводники, хотя к ним относится большинство природных соединений, — бесполезный и бесперспективный материал. Но А. Ф. Иоффе гениально предвидел ту огромную революционизирующую роль, которую уже сегодня полупроводники играют в технике. «Можно предполагать,— говорил он немного позднее,— что прогресс техники второй половины XX столетия определится в первую очередь атомным ядром и полупроводниками».

На первых порах нужно было разработать методы получения достаточно чистых полупроводников и способы определения их основных физических характеристик: концентрации носителей тока, типа проводимости (электронный или дырочный), подвижности электронов и дырок и т. д. Многие из этих методов, впервые созданные А. Ф. Иоффе и его учениками, стали впоследствии классическими.

Школа Иоффе выполнила целую серию пионерских исследований электрических, гальваномагнитных, термоэлектрических и фотоэлектрических свойств полупроводников различных типов.

Одним из важнейших результатов, полученных А. Ф. Иоффе и его сотрудниками, было обнаружение огромного влияния примесей на электрические свойства полупроводников. А. Ф. Иоффе показал, что примеси не только меняют в широких пределах проводимость полупроводников, но могут изменять даже знак носителей тока, превращать электронный полупроводник в дырочный и наоборот. Причем, роль примеси могут играть не только чужеродные атомы, но и собственные атомы полупроводника при их избытке или недостатке. Например, избыток атомов свинца в полупроводнике PbS делает этот полупроводник электронным, а избыток атомов серы — дырочным полупроводником.

А. Ф. Иоффе первым сформулировал и экспериментально обосновал современные представления о механизме выпрямляющего действия полупроводников. Он показал, что в результате контакта двух полупроводников с различными носителями тока — электронного и дырочного — образуется запирающий слой (по современной терминологии «*p* — *n*-переход»). При этом ток может свободно проходить через соприкасающиеся участки только в том направлении, при котором электроны и дырки движутся навстречу друг другу по направлению к контакту, где они встречаются и рекомбинируют. В противоположном случае электроны и дырки расходятся друг от друга и проводимость контактного слоя резко падает, так как в нем остается крайне мало носителей тока. Эти работы открыли путь к созданию полупроводниковых выпрямителей (диодов).

Особенно большое внимание А. Ф. Иоффе уделял исследованиям термоэлектрических и фотоэлектрических свойств полупроводников. Используя эти свойства, можно создать новые методы прямого преобразования энергии тепла и света в электрическую энергию. Работами А. Ф. Иоффе были заложены основы современных солнечных батарей, успешно используемых на космических аппаратах.

А. Ф. Иоффе создал теорию термоэлектрогенераторов и термоэлектрических холодильников, открыв для современной техники новую обширную область — полупроводниковую энергетику. Под его руководством были сконструированы десятки новых типов полупроводниковых приборов и энергетических устройств, получивших разнообразные практические применения.

●

С давних пор была известна аналогия между электрическими и магнитными полями. Известна и формальная аналогия между магнитной и диэлектрической проницаемостями. Но долгое время среди диэлектриков не было обнаружено вещество с аномально большой диэлектрической проницаемостью, подобной аномальной магнитной проницаемости ферромагнетиков. Только в двадцатые годы было найдено несколько таких веществ, в том числе сегнетова соль. Их исследованием занялся академик Игорь Васильевич Курчатов со своими сотрудниками. В течение короткого времени их работы положили начало новой области физики диэлектриков, которая называется сегнетоэлектричеством. Оказалось, что зависимость электрического момента сегнетовой соли от внешнего электрического поля такая же, как и намагничивания ферромагнетиков от магнитного поля: наблюдается такая же гистерезисная петля. Исследовались точка Кюри (их оказалось две) и явления, сопровождающие переход через эту точку. Словом, был воспроизведен электрический вариант длинной истории изучения ферромагнетиков.

В истории советской физики имя академика И. В. Курчатова неразрывно связано с решением грандиозной проблемы создания отечественного атомного и термоядерного оружия и развития атомной энергетики.

Рассказ об этих исследованиях вы найдете в статье академика И. К. Кикоина «Он прожил счастливую жизнь», помещенной в этом же номере нашего журнала.

●

В современной физике твердого тела важную роль играет теоретическая физика с ее весьма сложным математическим аппаратом. Кристаллическое тело, которое прежде рассматривалось как система, состоящая из колеблющихся атомов и молекул, теперь рассматривается как объем, заполненный фононным газом. Фононами называют кванты поля колебаний решетки — по аналогии с фотонами, квантами электромагнитного поля. Фонон, как и фотон, во многих отношениях ведет себя так, как если бы он был частицей; поэтому их часто называют квазичастицами. Честь введения в науку понятия «фонон» принадлежит академику Игорю Евгеньевичу Тамму, который в 1930 году использовал понятие «квант упругости» при рассмотрении вопроса о рассеянии света в кристаллах. Термин «фонон» в том же году ввел в физическую литературу член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель. Поведение фононного газа описывается тем же математическим аппаратом, что и излучение абсолютно черного тела. Без понятия фонона трудно было бы представить себе, как любое возбуждение, например колебание отдельного атома, перемещается в твердом теле.

В 1931 году Я. И. Френкель теоретически предсказал весьма интересное физическое явление. Решая задачу о возбуждении атомов светом в идеальном кристалле, он показал, что возбужденное состояние, которое возникает у какого-либо атома такого кристалла после поглощения кванта света, не может быть локализовано там, где находится этот атом, а непременно должно перемещаться по кристаллу в виде своеобразной квазичастицы, которую Френкель назвал «экситоном».

Дело в том, что, как показывают расчеты, энергия кристалла не изменится, если в таком же возбужденном состоянии окажется не первоначальный возбужденный атом, а любой другой атом кристалла. Состояния, в которых любой из атомов кристалла оказывается возбужденным, физически неразличимы. Поэтому энергия возбуждения будет переходить от атома к атому до тех пор, пока один из получивших ее атомов не перейдет в нормальное невозбужденное состояние, испустив полученный им квант. Существование экситонов было в дальнейшем подтверждено в экспериментах члена-корреспондента АН СССР Евгения Федоровича Гросса. Теперь существует широкая научная область, которую можно назвать «экситонной физикой».

Для описания электрических и оптических свойств ряда полупроводников и диэлектриков оказалось необходимым ввести еще одну квазичастицу — «полярон». Она возникает вследствие поляризации электроном окружающей среды. В результате электрон становится как бы тяжелее и характер его движения в кристалле меняется. Полярон ввел в физику твердого тела академик Лев Давидович Ландау (совместно с академиком АН УССР С. И. Пекаром).

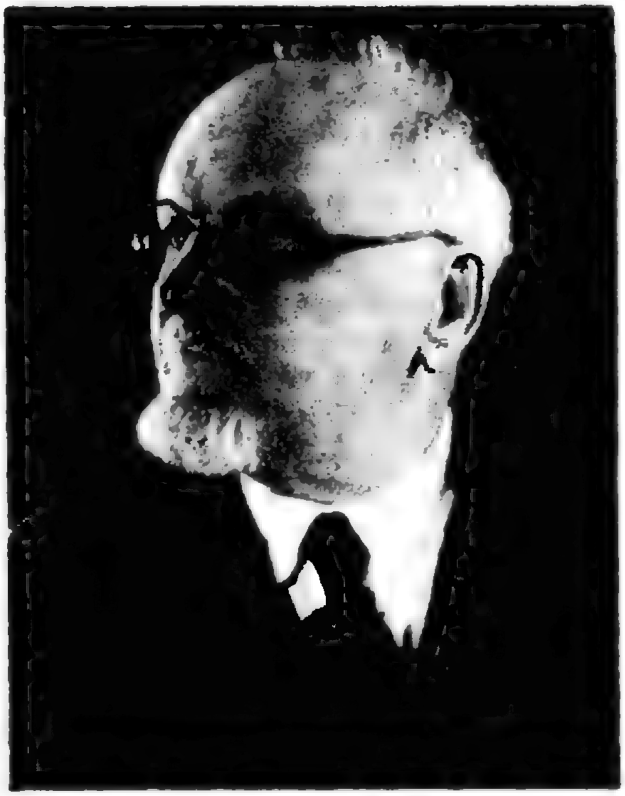
Академик Л. Д. Ландау (1908—1968).

Квазичастицы имеют весьма важное значение для развития наших представлений о природе кристаллов и разыгрывающихся в них процессах поглощения, передачи и излучения энергии.

В учебном пособии по физике для 9 класса последние параграфы посвящены описанию ферромагнетизма. Основы теории этого явления заложены советскими физиками-теоретиками. Член-корреспондент АН СССР Я. И. Френкель первый показал, что природа ферромагнетизма связана с взаимодействием собственных магнитных моментов электронов. Академик Л. Д. Ландау (совместно с членом-корреспондентом АН СССР Е. М. Лифшицем) создал теорию доменной структуры ферромагнетиков. Оказалось, что возникновение доменов является следствием стремления кристаллической структуры прийти в состояние с минимальной энергией.

Л. Д. Ландау предсказал теоретически, что свободные электроны (электроны проводимости) в металле должны создавать во внешнем магнитном поле дополнительный магнитный момент, направленный в сторону, противоположную направлению внешнего магнитного поля, то есть диамагнитный момент. Это — так называемый диамагнетизм Ландау.

Мы не останавливаемся здесь на классической работе Л. Д. Ландау по теории сверхтекучести жидкого гелия. О ней подробно рассказано в статье А. Ф. Андреева («Квант», 1973, № 10).



Академик Д. С. Рождественский (1876—1940).

ереходя к работам по оптике, остановимся лишь на замечательных исследованиях академиков Дмитрия Сергеевича Рождественского, Леонида Исааковича Мандельштама и Сергея Ивановича Вавилова.

Академик Д. С. Рождественский разработал отечественную технологию приготовления оптического стекла, благодаря чему уже в 1925 году Советский Союз полностью отказался от покупки такого стекла в других странах. Он внес очень важный вклад в изучение резонансного поглощения света парами щелочных металлов и развитие спектрального анализа. Им была существенно усовершенствована теория микроскопа.

Физика долго не могла дать правильного ответа на такой, казалось бы, простой вопрос: «А почему небо голубое?» Даже Ньютон, посвятивший этой проблеме много лет упорного труда, так и не сумел ее решить. Первым удовлетворительную теорию рассеяния света в атмосфере создал другой английский физик — Рэлей. Предположив, что свет рассеивают молекулы воздуха, он получил хорошее совпадение с результатами наблюдений.

Казалось бы, все ясно, проблема полностью решена. И только один физик, академик Л. И. Мандельштам, не согласился с этой интерпретацией. Он доказал, что истинной причиной, порождающей голубой цвет неба, являются флуктуации плотности (случайные изменения плотности воздуха по отношению к средней плотности), происходящие под влиянием теплового движения. Л. И. Мандельштам показал, что формула Рэлея верна, а физическая сущность картины рассеяния света совершенно иная. Эта работа была опубликована еще в 1907 году. Она явилась одной из первых работ по теории флуктуаций, то есть микроскопических отклонений той или иной физической величины от среднего значения.

Л. И. Мандельштам был первым физиком, обратившим внимание на то, что флуктуации давления, температуры, концентрации или ориентации молекул (если молекулы неизотропны) должны накладывать свой отпечаток на рассеяние падающего на них света, как говорят, модулировать его. В работах, начатых еще в 1908 году, он обосновал неизбежность рассеяния света на флуктуациях плотности, приводящего к появлению в рассеянном свете, помимо падающей волны длины λ_0, еще двух соседних волн λ_1 и λ_2, смещенных в оба конца спектра на одинаковую величину $\Delta\lambda$. Этот дублет Мандельштама — Бриллюэна *), близко примыкающий к основной линии λ_0, был впервые обнаружен членом-корреспондентом АН СССР Е. Ф. Гроссом.

Триумфом оптических исследований академика Л. И. Мандельштама было открытие совместно с академиком Григорием Самуиловичем Ландсбергом комбинационного рассеяния света.

В 1927 году ими был поставлен следующий эксперимент. Монохроматический свет, полученный от ртутной лампы с помощью фильтра, падал на кристалл максимально чистого и однородного кварца. Свет, рассеянный этим кристаллом, анализировался спектрографом. После чрезвычайно долгой экспозиции им удалось заметить слабые спектральные линии на равных расстояниях от первичной. Это значит, что свет при рассеянии в кристалле изменяет свой цвет! Тщательное исследование этих линий показало, что они сопровождают каждую спектральную линию первичного света. Разность между частотами этих линий и частотой падающего света совпадает с частотами внутренних колебаний молекул рассеивающего вещества. Кроме того, интенсивность линий, смещенных в красную сторону спектра, значительно выше интенсивности линий, смещенных в синюю сторону.

Академик Л. И. Мандельштам (1879—1944).

Грубую картину механизма этого взаимодействия можно получить следующим образом. Каждая молекула данного вещества может совершать различные внутренние колебания. Им соответствует определенный набор квантов электромагнитной энергии, $h\nu_i$, которые молекула способна принимать от окружающей среды и возвращать обратно. Если квант падающего света с энергией $h\nu_0$ взаимодействует с невозбужденной молекулой, он отдает ей часть своей энергии, равную $h\nu_i$. При этом в рассеянном свете появляется смещенная в «красную» сторону линия с частотой $\nu_к = \nu_0 - \nu_i$, то есть свет с большей длиной волны. Если же квант встречается с возбужденной молекулой, обладающей энергией возбуждения $h\nu_i$, он сам может получить эту энергию от молекулы, и тогда родится смещенная в «синюю» сторону линия с частотой $\nu_с = \nu_0 + \nu_i$. Нетрудно видеть, что смещенные линии должны располагаться симметрично по обе стороны от основной линии падающего света.

---

*) Л. Бриллюэн — французский физик, одновременно пришедший к тем же выводам.

Так как в обычных условиях число невозбужденных молекул значительно больше, чем возбужденных, интенсивность линий, смещенных в «красную» сторону спектра, должна быть значительно выше, что соответствует действительности.

Продолжая свои исследования, Л. И. Мандельштам и Г. С. Ландсберг создали новый метод спектрального анализа молекул, основанный на изучении спектров комбинационного рассеяния. Этот метод получил широкое распространение и применяется теперь во всех странах *).

Мы не можем здесь, ввиду их сложности, рассказать о фундаментальных работах академиков Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси по теории и технике колебаний, послуживших основой развития радиофизики и радиотехники.

* * *

Академик С. И. Вавилов с первых лет научной деятельности заинтересовался явлением фотолюминесценции, изучение которого он не прекращал до конца своей жизни. Под действием света некоторые вещества сами испускают характерное для них свечение, которое получило название люминесценции. Это свечение продолжается и после прекращения облучения. При люминесценции происходит поглощение возбуждающего света и испускание (с некоторой задержкой по времени) света люминесценции, длина волны которого отлична от длины волны поглощенного света.

Люминесценция различных веществ чрезвычайно разнообразна по спектральному составу испускаемого излучения. Длительные поиски законов, управляющих люминесценцией, привели лишь к установлению некоторых эмпирических правил, которые не охватывали всех основных опытных фактов и допускали значительные исключения. Примером является так называемое правило Стокса, согласно которому длина волны излучения люминесценции должна быть больше длины волны возбуждающего света. Так как энергия излученных квантов прямо пропорциональна частоте ν (и обратно пропорциональна длине волны λ), то увеличение длины волны при люминесценции свидетельствует о том, что некоторая доля энергии, поглощенной люминесцентным веществом, остается в нем, переходя в тепло. Однако это правило нередко нарушается на опыте. Подлинные законы спектрального преобразования света были открыты С. И. Вавиловым в результате длительного экспериментального и теоретического исследования энергетики люминесцентных процессов. Они являются теоретической основой не только для науки о люминесценции, но и для ее технических приложений.

Академик С. И. Вавилов (1891—1951).

---

*) Только случайная задержка с пересылкой в редакцию журнала уже готовой научной статьи лишила авторов этого крупнейшего открытия Нобелевской премии.

За последние десятилетия люминесценция широко используется в различных областях науки и техники. На ее основе разработаны новые методы химического и сортового анализа различных веществ — так называемый люминесцентный анализ. В развитии этих практических применений люминесценции большая заслуга принадлежит С. И. Вавилову. Но особенно большое значение имеют его работы по созданию люминесцентных источников света, открывшие новый этап в истории светотехники.

Основной источник света в наши дни — электрические лампочки накаливания — имеют очень крупные недостатки. Коэффициент полезного действия этих ламп не превышает 8%. Более 90% энергии теряется ими на создание невидимого инфракрасного излучения. Спектральный состав видимого света у этих ламп значительно отличается от состава солнечного света, к которому наиболее приспособлен человеческий глаз. Температура накала вольфрамовой нити в лампе 2200—2300° С. Для получения света, близкого к солнечному, и увеличения светоотдачи пришлось бы поднять ее до 6000° С. Однако еще задолго до этого нить лампочки распылится.

Недостатки электрических ламп накаливания побуждают ученых искать новые, более экономичные и удобные источники света. Такими источниками и оказались люминесцентные лампы. Люминесцентные вещества являются световыми трансформаторами. Они могут превращать один вид света в другой, например, невидимые ультрафиолетовые, то есть бесполезные в светотехническом отношении, лучи в видимые, или однородный свет — в широкие спектральные полосы самого различного состава.

С. И. Вавилов первым предложил использовать мощное ультрафиолетовое излучение ртутных ламп для получения видимого света с помощью люминесцентных веществ. Идя по этому пути, он создал люминесцентные лампы дневного света.

Основной частью люминесцентных ламп Вавилова является газоразрядная трубка, заполненная пара́ми ртути при низком давлении. Электроны, проходя через трубку при разряде, возбуждают ультрафиолетовое излучение ртути. Если наблюдать разряд через прозрачные стенки трубки, то можно заметить, что внутренность ее светится слабым голубым светом. Основная доля излучения ртути сосредоточена в ультрафиолетовой области. Для преобразования ее в видимый свет на внутреннюю стенку трубки наносят слой «светового трансформатора» — кристаллического люминесцентного порошка. Применяя различные порошки, можно получить свет любого цвета. Наибольший практический интерес представляют порошки, свечение которых близко к дневному рассеянному солнечному свету (например, дневному свету при облачном небе). Коэффициент полезного действия и средний срок службы таких ламп значительно больше обычных.

Перейдем теперь к работам в области физики атомного ядра.

Атомные ядра включают в себя заряженные частицы — протоны, сближенные до расстояния порядка 10^{-13} *см*. Казалось бы, они должны немедленно разрушаться под влиянием громадного электростатического отталкивания протонов друг от друга. Но мы знаем, что этого не происходит. Только очень тяжелые ядра элементов, стоящих в конце периодической системы Менделеева, оказываются неустойчивыми, и это приводит к радиоактивному распаду. Что же придает такую необычайную прочность атомным ядрам? Атомные ядра существуют только потому, что между всеми входящими в них частицами действуют могучие ядерные силы.

Основная идея, на которую опираются современные представления о природе ядерных сил, была выдвинута в 1934 году академиком И. Е. Таммом. Он первым понял, что эти силы могут быть только обменными. К этому времени уже были разработаны основные представления о квантовой природе электромагнитного поля, согласно которым взаимодействие двух заряженных частиц осуществляется посредством квантов, испускаемых и поглощаемых этими частицами. Таким образом, взаимодействие есть результат обмена промежуточными частицами, создающими электромагнитное поле.

И. Е. Тамм предположил, что не только электромагнитное, но и ядерное взаимодействие носит квантовый характер и осуществляется путем обмена какими-то промежуточными частицами. Предположив, что ядерные частицы обмениваются электронами, И. Е. Тамм построил первую математическую теорию ядерных сил. Однако величина этих сил оказалась на несколько порядков меньше их действительного значения.

Вскоре после этого японский физик Юкава показал, что если масса обменной частицы будет примерно в 300 раз больше массы электрона, то теория И. Е. Тамма хорошо описывает основные особенности ядерных сил. Впоследствии физики обнаружили частицы, отвечающие за перенос ядерных сил. Ими оказались так называемые пи-мезоны. Масса пи-мезонов и их свойства соответствуют теории Тамма—Юкавы.

И. Е. Тамм первый пришел к казалось бы парадоксальному выводу о том, что у нейтрона должен быть собственный магнитный момент, хотя эта частица не имеет электрического заряда. В 1934 году он не только теоретически предсказал существование магнитного момента у нейтрона, но и правильно определил знак этого момента.

Успехи ядерной физики второй половины двадцатого века неразрывно связаны с ускорителями заряженных частиц. Ускорители позволяют создавать новые элементарные частицы, которые рождаются в момент взаимодействия ускоренных частиц-снарядиков с частицами, входящими в состав мишеней. При этом чем выше энергия ускоренных частиц, тем более разнообразные новые элементарные частицы и античастицы (мезоны, гипероны, резонансы) могут быть получены с их помощью. Ускорители используются также для изучения строения элементарных частиц (протонов и нейтронов). На них же создаются сверхтяжелые химические элементы, стоящие после урана в периодической системе Менделеева (их называют трансурановыми) и атомные ядра с необычным отношением числа протонов и нейтронов.

В настоящее время наиболее распространены циклические ускорители, в которых заряженные частицы движутся по путям, близким к окружностям, многократно ускоряясь в специальных ускорительных устройствах. Первым таким ускорителем был циклотрон. Однако предел энергии, которую можно сообщать протонам в циклотроне, сравнительно невелик и составляет несколько десятков миллионов электрон-вольт.

Создание современных ускорителей на десятки и сотни миллиардов электрон-вольт стало возможным благодаря работам академика Владимира Иосифовича Векслера. В 1944 году он предложил знаменитый принцип «автофазировки» ускоряемых частиц, открывший новые горизонты перед ядерной физикой и физикой элементарных частиц. Этот принцип позволил создать новые типы ускорителей — фазотроны, синхротроны и синхрофазотроны.

◆

Одной из важнейших проблем современной науки и техники является проблема управляемых термоядерных реакций, при которых легкие ядра объединяются в более тяжелые. Неуправляемые термоядерные реакции происходят при взрывах водородных бомб. Они приводят к высвобождению громадного количества ядерной энергии.

Теперь задача ученых — найти пути осуществления контролируемой термоядерной реакции. Ее решение открывает необозримые энергетические возможности, превращая воду в отличное ядерное топливо. Если управляемый термоядерный синтез будет технически реализован в больших масштабах, будущие поколения смогут черпать из океана энергию, запасов которой хватит на громадный срок. Но эта энергия может быть получена лишь после того, как мы научимся нагревать водород до огромных температур и удерживать его в таком необычном состоянии на протяжении заметных интервалов времени. Даже первые признаки ядерных взаимодействий в нагретом веществе можно надеяться наблюдать лишь при температуре около миллиона градусов. В этих условиях атомы любого вещества распадаются, образуя своеобразный газ из положительно и отрицательно заряженных частиц, именуемый плазмой *).

Основная и наиболее трудная задача, стоящая на пути к осуществлению интенсивных управляемых термоядерных реакций, заключается даже не в том, чтобы нагреть плазму до гигантских температур, а в том, чтобы изолировать такую плазму от стенок сосуда, в котором она заключена. Эта задача облегчается тем, что практически все частицы горячей плазмы несут на себе электрические заряды и потому могут удерживаться специально подобранными комбинациями магнитных полей.

Исследования управляемых термоядерных реакций были почти одновременно начаты в СССР и США в начале 50-х годов. Первоначально они велись в условиях сугубой секретности. Советский Союз первым в 1956 году рассекретил эти исследования. С тех пор наши работы в этой области физики неизменно занимают ведущее место в мире. На протяжении длительного времени после смерти И. В. Курчатова ими руководил академик Лев Андреевич Арцимович..

Советские физики первыми наблюдали появление нейтронного и рентгеновского излучения плазмы, причем они сразу же дали правильную оценку этим фактам, показав, что возникающие нейтроны не являются, к сожалению, результатом термоядерных реакций. Они первые построили ряд крупных установок для исследования горячей плазмы (Огра-1, Огра-2, Токамаки и т. д.). Им удалось впервые осуществить кратковременные термоядерные реакции в экспериментальных условиях и получить плазму с рекордными характеристиками. Особенно важным является резкое увеличение времени жизни горячей плазмы, достигнутое нашими учеными. Однако сравнение этих результатов с данными, необходимыми для работы промышленного термоядерного реактора, показывает, что хотя нашим физикам и удалось пройти большой путь, полное решение проблемы потребует еще немалого времени и усилий.

Приведенные в этой статье примеры убедительно свидетельствуют об огромном вкладе ученых Академии наук СССР в развитие современной физики.

---

*) См. статью Л. А. Арцимовича «Плазма — четвертое состояние вещества», «Квант», 1974, № 3.

АКАДЕМИЯ НАУК И ПРОГРЕСС МАТЕМАТИКИ

Б. В. Гнеденко

Великая Октябрьская социалистическая революция 1917 года существенно изменила роль Академии наук в жизни страны, формы ее работы и размах ее деятельности.

Академия наук не только начала численно расти, но, что самое важное, существенно изменила свое научное лицо: стала ближе к жизненным нуждам страны, к потребностям ее экономики, промышленности, культуры. В составе Академии наук появились крупнейшие научно-исследовательские учреждения, в которых под руководством выдающихся ученых производятся исследования наиболее важных проблем науки, а также рассматриваются вопросы, представляющие особый интерес для развития страны. Необходимые для этого расходы взяло на себя государство. Наука стала важной частью жизни советского общества, а Академия наук взяла на себя ответственную функцию руководителя советской науки, как принято у нас говорить, стала штабом советской науки.

Но такая перестройка не могла осуществляться сама по себе, она требовала огромных организационных усилий, постоянного внимания руководителей партии и правительства. История сохранила в воспоминаниях современников и в документах память о героических днях революции и гражданской войны, когда страна истекала кровью и напрягала все усилия, чтобы выстоять в отчаянной борьбе с контрреволюцией, интервентами, голодом, разрухой. Но и в эти дни В. И. Ленин и его соратники заботились о научном и техническом прогрессе страны, о выходе ее на передовые позиции во всех областях знания. Уже в 1918 году Ленин не только принял меры к сохранению лучших представителей русской дореволюционной науки, но и к привлечению их на сторону советской власти, к сотрудничеству с новым общественным строем, к активному решению тех научных проблем, которые стояли перед страной. Характерный эпизод, непосредственно относящийся к этим событиям, приведен М. Горьким в воспоминаниях о Ленине *).

«Помню, я был у него с тремя членами Академии наук. Шел разговор о необходимости реорганизации одного из высших научных учреждений Петербурга. Проводив ученых, Ленин удовлетворенно сказал:

— Это я понимаю. Это умники. Все у них просто, все сформулировано строго, сразу видишь, что люди хорошо знают, чего хотят. С такими работать — одно удовольствие. Особенно понравился мне этот...

Он назвал одно из крупнейших имен русской науки, а через день уже говорил мне по телефону:

Спросите С., пойдет он работать с нами?

---

*) Горький А. М., В. И. Ленин. — В кн.: «Воспоминания о В. И. Ленине». Ч. I, М., 1955, с. 383.

И когда С. принял предложение, это искренне обрадовало Ленина; потирая, руки, он шутил:

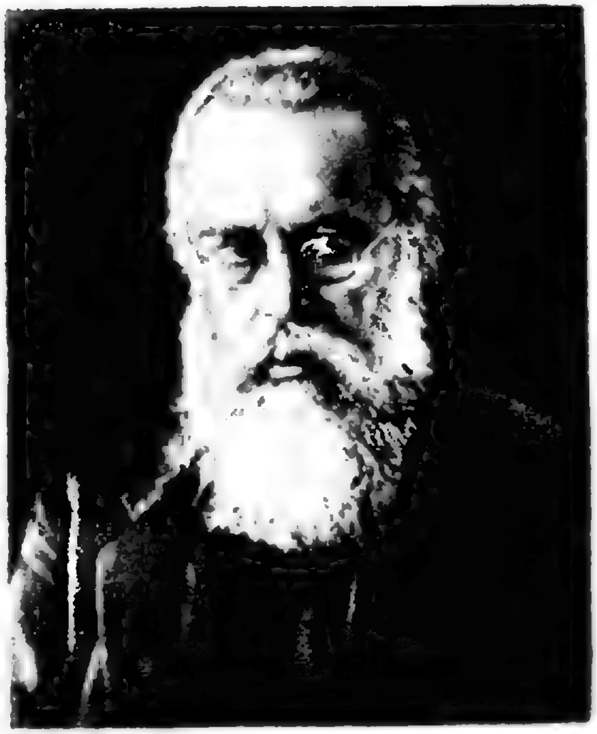
— Вот так, одного за другим, мы перетянем всех русских и европейских архимедов, тогда мир, хочет не хочет, а перевернется!»

Эти воспоминания касаются приема В. И. Лениным А. М. Горького, академиков В. А. Стеклова — вице-президента Академии наук, С. Ф. Ольденбурга — ученого секретаря Академии наук, а также президента Военно-медицинской академии В. Н. Тонкова, тогда еще не академика (он стал им в 1944 году).

Владимир Андреевич Стеклов (1864—1926)— ученик А. М. Ляпунова—воспринял от своего учителя интерес к проблемам математической физики и механики. Им были исследованы многочисленные задачи гидромеханики, теории упругости, механики твердого тела. Он построил теорию движения твердого тела в жидкости, теорию движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью, а также предложил ряд новых методов, вошедших в современную науку.

Как ни велики заслуги В. А. Стеклова в механике, основные усилия в своих исследованиях он направил на развитие математической физики, где им был сделан ряд фундаментальных открытий. Развитые им математические методы исследования физических задач прочно вошли в современную науку.

Труды Стеклова были замечены, и в 1912 году он был избран академиком, в 1916 году — членом правления, а в 1919 году — вице-президентом Академии наук. На плечи Стеклова было возложено тяжелое бремя забот по преобразованию Академии наук, ее обновлению и приближению ее интересов к нуждам страны. Однако этим не ограничилось его участие в строительстве фундамента советской науки. По его инициативе был организован Временный Комитет науки при Совете Народных Комиссаров СССР. При непосредственном участии В. А. Стеклова этот Комитет разработал и осуществил ряд постановлений, направленных на развитие советской науки и в том числе Академии. Внутри Академии В. А. Стеклов принимал участие в работе ряда комиссий—строительной, по изучению тропических стран, по делам Главной астрономической обсерватории, гидрологического института, а также был членом международной комиссии по изданию трудов Л. Эйлера. И, следует заметить, он активно участвовал в работе комиссий, заражая всех своей энергией, инициативой, целеустремленностью и темпераментом.


Академик В. А. Стеклов (1864—1926)

В самом начале 1919 года, в тяжелейший период гражданской войны, В. А. Стеклов вместе с академиками А. А. Марковым и А. Н. Крыловым обратился в физико-математическое отделение Академии наук с обоснованным предложением об образовании Математического кабинета. В известном смысле этот кабинет, названный Математическим кабинетом имени П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова, носил в себе зародыш будущего специализированного математического института. Возглавил этот кабинет сам автор предложения — В. А. Стеклов.

Идея создания кабинета в научном отношении себя оправдала, и уже через два года В. А. Стеклов счел необходимым представить в бюро физико-математического отделения записку с предложением и полноценным обоснованием необходимости организации в Академии наук специального научного учреждения — физико-математического института. В этой записке он писал: «Ни одна из естественных наук, если дело идет не о собирании сырого материала, а о действительном творчестве, не обойдется без математики, матери всех наук. Что же касается физики, поставленной впереди всех других наук, как и следует в проекте Ломоносовского института, то в настоящее время математика и физика до такой степени слились в одно целое, что иногда трудно отделить — где кончается математика и начинается физика» *).

Предложение В. А. Стеклова было единодушно поддержано как в Физико-математическом отделении, так и в Президиуме Академии наук. В результате в том же 1921 году ввиду «назревшей в науке потребности связать теснейшим образом физические науки с чисто математическими» был основан физико-математический институт Российской Академии наук. Директором института был избран В. А. Стеклов. Институт был организован на базе Математического кабинета, Физической лаборатории и Сейсмической сети.

Физико-математический институт просуществовал до 1934 года, а затем он был разделен на два самостоятельных учреждения — Математический институт им. В. А. Стеклова *) и Физический институт им. П. К. Лебедева. С первых дней существования самостоятельного математического института его возглавил академик И. М. Виноградов — крупнейший в современной науке специалист по теории чисел.

Отметим еще несколькими штрихами и другие стороны широкой, кипучей деятельности В. А. Стеклова. В годы гражданской войны он принимал деятельное участие в исследовании Курской магнитной аномалии, заведуя теоретической и вычислительной частью экспедиции северного района. Совет Труда и Обороны высоко оценил эту его работу, и в апреле 1923 года объявил ему благодарность. Немедленно после свержения царского режима В. А. Стеклов вместе с Горьким начал активную деятельность по популяризации науки. Он написал ряд биографических очерков о выдающихся ученых прошлого — П. Л. Чебышеве, А. М. Ляпунове, А. А. Маркове, А. Пуанкаре, В. Томсоне и других, две книги научно-биографического характера о М. В. Ломоносове и Г. Галилее, а также интересную книгу историко-философского содержания — «Математика и ее значение для человечества».

В некрологе, который был написан выдающимся деятелем советского просвещения А. В. Луначарским через день после смерти В. А. Стеклова, особое внимание уделялось философским взглядам покойного. Там было написано, что «... он был убежденным сторонником чисто эмпирического возникновения математики и с величайшим неодобрением относился к идеалистам и формалистам в этой науке. Он беспрестанно повторял, что математика — вся земная, но вместе с тем верил, что математическая формулировка явлений природы представляет собой предельную ясность

---

*) Протоколы заседаний физико-математического отделения АН, 1921. Приложение к протоколу первого заседания (10 января 1921 г.).

*) Имя В. А. Стеклова было присвоено институту в 1926 году.

истины. Он мне говорил как-то: «Люди непременно все согласятся между собой и притом по всем вопросам, но это будет тогда, когда наука о природе, то есть вся истина, будет математически формулирована» *).

Расскажем теперь о еще одном замечательном члене нашей Академии.

Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) прожил долгую и полнокровную жизнь. Математика, механика, кораблестроение—в каждой из этих областей он сочетал талант ученого и энергию организатора, высокую культуру теоретических исследований и глубокое понимание роли практических приложений.

Свои первые научные работы А. Н. Крылов выполнил в компасной части Главного гидрографического управления. Эти работы были посвящены исследованию девиации магнитных компасов — отклонений стрелки компаса от направления на магнитный полюс Земли, вызванных влиянием намагниченных тел (стального корпуса судна) или электромагнитных полей судовых электрических и радиоустановок.

В течение года А. Н. Крылов работал на кораблестроительном заводе. Затем он поступил в Морскую академию, которую окончил за три года (в 1890 году), а после этого преподавал в ней почти 50 лет. В академии он руководил занятиями по математике, а с 1892 года стал также читать лекции по теории корабля.

Созданные А. Н. Крыловым учебные курсы составили подлинную классику корабельной науки, а принадлежащие ему методы вычисления основных характеристик корабля и ныне являются фундаментом теории непотопляемости судна. В этой области А. Н. Крылов следовал идеям замечательного русского флотоводца и ученого адмирала С. О. Макарова.

Академик А. Н. Крылов (1863—1945)

А. Н. Крылов развил и усовершенствовал теорию бортовой качки корабля, которая до его работ носила чисто приближенный характер, и по существу создал теорию килевой качки. Следует отметить, что до работ А. Н. Крылова создание подобной теории считалось невозможным ввиду «непреодолимых математических трудностей».

К концу 1890-х годов относятся работы А. Н. Крылова по теории колебаний корабля при волнении, эти работы до сих пор служат основой для решения важнейших вопросов прочности и мореходных качеств кораблей. Впоследствии (к 1908 году) А. Н. Крылов разработал специальную теорию вибрации судов и первым в мировой науке создал курс этой дисциплины. Строгая математическая теория колебаний различных упругих систем, содержащаяся в этом курсе, выходит далеко за рамки кораблестроения, она играет важнейшую роль во всей строительной механике. В развитии этой инженерной дисциплины выдающуюся

---

*) Луначарский А. В., В. А. Стеклов. — «Наша газета», 1926, 1 июня.

роль сыграла и работа А. Н. Крылова «О расчете балок, лежащих на упругом основании» (1930 год).

В артиллерии А. Н. Крылову принадлежат исследования продольных и поперечных колебаний орудийных стволов во время выстрела, в так называемой «внешней баллистике» — исследование вращательного движения снаряда в полете. К этим исследованиям примыкают замечательные работы А. Н. Крылова по теории гироскопов и практическим приложениям гироскопических приборов и устройств для обеспечения устойчивости судов и летательных аппаратов.

С теории компасов началась научная деятельность Алексея Николаевича, и, спустя более чем 50 лет, он вновь обратился к этой теме, опубликовав в 1938—1940 годах цикл работ, посвященных теории девиации магнитных компасов, теории гироскопических компасов и вопросам влияния качки корабля на показания компаса. За эти работы А. Н. Крылов одним из первых в стране был удостоен Государственной премии.

Отдавая силы прежде всего развитию прикладных исследований, А. Н. Крылов внес важнейший вклад в развитие разделов математики и теоретической механики, требуемых для практических приложений. Еще в 1906 году он прочитал курс «О приближенных вычислениях», и поныне не потерявший своего значения для многих областей физики и техники.

«Причина, побудившая меня к составлению этого курса, следующая: в современных руководствах математического анализа преимущественное внимание обращается на вполне строгое установление основных понятий и на строгое доказательство всех получаемых из них выводов. Ввиду этого зачастую весьма обстоятельно доказывается существование решения какого-либо вопроса и устанавливается теоретическая возможность получения его с любою степенью точности, и гораздо меньшее внимание уделяется практической части дела, то есть действительному получению решения с данным, обыкновенно грубым, приближением, которое только и требуется в приложениях, но которое надо получить с возможно меньшею тратою труда и времени», — пишет А. Н. Крылов в предисловии к первому изданию этого курса — первого в мировой литературе курса приближенных вычислений.

В курсе А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах» (1912 год) содержится ряд крупных результатов, относящихся к исследованию вынужденных колебаний упругих систем и способов улучшения сходимости тригонометрических рядов. Последний пример убедительно демонстрирует глубокое теоретическое значение работ А. Н. Крылова, стимулируемых, казалось бы, «чисто прикладными» задачами. До сих пор могучая фигура А. Н. Крылова является опровержением всех теорий о делении науки на «чистую» и «прикладную». Например, в 1931 году А. Н. Крылов получил выдающиеся результаты в такой «далекой» от его традиционных интересов области, как небесная механика, предложив наилучший из всех существующих метод решения так называемого «векового уравнения», а ведь над этой задачей в свое время работали всемирно известные ученые — Ж. Лагранж, П. Лаплас, У. Леверье, К. Якоби!

А. Н. Крылов был не только ученым-энциклопедистом, но и выдающимся знатоком истории науки, его труды по разработке наследия великих классиков науки — И. Ньютона, Л. Эйлера, К. Ф. Гаусса, Ж. Лагранжа, П. Л. Чебышева — сами ныне являются классическими, ему же принадлежат образцовые переводы с латинского языка на русский таких трудов, как «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона (с рядом важных дополнений) и «Новая теория движения Луны» Л. Эйлера. Им же написан ряд ярких очерков о жизни и деятельности замечательных ученых, его предшественников и современников. А его книга «Мои воспоминания» — это не только выдающийся вклад в историю русской и мировой науки и культуры, но и замечательно талантливый, живой рассказ о всей жизни общества, которое по праву может гордиться таким достойным своим членом.

Алексей Николаевич Крылов был Учителем в подлинном и высоком смысле этого слова. Он создал школу кораблестроителей, из которой вышли многие замечательные ученые: В. Л. Поздюнин, П. Ф. Папкович, Ю. А. Шиманский и другие.

А. Н. Крылов был и замечательным изобретателем, он построил первую в России машину для интегрирования дифференциальных уравнений, ряд важных корабельных и артиллерийских приборов.

И, конечно, А. Н. Крылов памятен нам как замечательный гражданин, общественный деятель, патриот. Еще в дореволюционные годы он начал применять достижения науки к нуждам обороны страны: с 1900 года А. Н. Крылов заведовал Опытовым бассейном для испытаний моделей судов, в 1908—1910 годах он был Главным инспектором кораблестроения и председателем Морского технического комитета, в последующие годы консультировал на Металлическом, Путиловском, Обуховском и других заводах. С новым размахом развернулась его работа после Великой Октябрьской социалистической революции, за год до которой А. Н. Крылов был избран действительным членом Академии наук. В 1919 году А. Н. Крылов стал во главе Морской Академии. В 1921—1927 годах А. Н. Крылов в составе комиссии для возобновления научных связей находился в заграничной командировке, выполняя важное задание Советского правительства: он наблюдал за постройкой судов, заказанных для советского флота. По возвращении Алексей Николаевич продолжал руководить Морской академией, активно участвуя в решении важнейших технических вопросов военного и гражданского судостроения. В годы Великой Отечественной войны эта многогранная деятельность А. Н. Крылова приобрела особо важное значение.

В 1943 году за выдающиеся достижения в развитии советской науки и оборонного дела Алексей Николаевич Крылов был удостоен звания Героя Социалистического Труда, трижды он награждался орденами Ленина. Ныне имя А. Н. Крылова носит Военно-морская академия в Ленинграде.

●

С организацией математического института им. Стеклова характер математических исследований в Академии наук резко изменился. Прошло время великих математиков-одиночек, и наступил период работы больших коллективов над проблемами, которые требуют не только выдвижения крупных идей, но и систематической работы многих ученых над различными аспектами одной проблемы. Сказанное совсем не означает, что талант отдельного ученого перестал играть роль в развитии науки, но он перестал быть единственной движущей силой. Все большую и большую роль стал играть организованный коллектив, мысль которого и стремления направлены в одну сторону, на определенные решающие вопросы науки.

Влияние Академии наук распространилось и на высшие учебные заведения, поскольку они стали широко привлекаться к совместным крупным исследованиям. Ученые, работающие в вузах, включались в специальные комиссии, создаваемые Академией наук для решения конкретных научных проблем.

Академические институты в настоящее время отвечают за созыв Всесоюзных съездов по областям науки, а также Всесоюзных научных совещаний. Редколлегии основных научных журналов также сосредоточены в Академии наук. Время от времени Академия наук издает проблемные записки, в которых подводятся итоги исследований по определенной проблеме и намечаются перспективы ее дальнейшего развития. В академических институтах способные ученые заняты исключительно научными исследованиями. Окружающий коллектив, увлеченный научными изысканиями, стимулирует поиски в наиболее трудных вопросах науки.

Общение с аспирантами и организация научных семинаров, доступ на которые открыт для всех желающих, обеспечивают постоянные связи с молодежью, стремящейся к научным исследованиям и находящейся еще на первичной стадии формирования творческих интересов и научных идеалов.

Вопрос о подготовке научной смены, о более широком привлечении молодежи к научным исследованиям с особой остротой возник в конце двадцатых годов, когда страна оправилась от разрухи, вызванной первой мировой и гражданской войнами, и перешла к развитию промышленности, подъему экономики. В результате уже в 1928 году, а затем вновь в ноябре 1929 года ЦК ВКП (б) принял постановления о расширении и улучшении подготовки научно-исследовательских кадров как для возрастающей сети вузов, так и для Академии наук. Одни университеты с этой огромной задачей справиться не могли, и поэтому вполне естественно, что к ее решению была привлечена и Академия наук. Аспирантура в Академии была организована в 1929 году, в том же году был объявлен прием. Заявлений было подано 365. Специальная комиссия по приему в аспирантуру, в состав которой входили крупнейшие ученые, приняла лишь 69 человек и притом всех в кандидатскую аспирантуру. На следующий год принято было уже 97 человек (из них один в докторантуру). В 1931 году Академия приняла уже 207 человек, причем 7 кандидатов были приняты в докторантуру.

Нужно сказать, что организация аспирантуры в институтах Академии принесла замечательные результаты. Многие ее воспитанники выросли в крупнейших представителей науки наших дней и внесли заметный вклад в прогресс не только избранных ими направлений научных исследований, но и в развитие многих областей практики. В качестве примера я позволю себе привести следующий факт: аспирантом Математического института им. В. А. Стеклова в 1934—1937 годах был М. В. Келдыш, который получил результаты первостепенного значения в теории функций, теории дифференциальных уравнений и аэродинамике. Им были объяснены страшные для авиации прошлого явления флаттера (колебаний типа полоскания флага на ветру) и вхождения в штопор, а также указаны методы борьбы с ними. Эти научные результаты были широко использованы нашей промышленностью в период Великой Отечественной войны. В настоящее время М. В. Келдыш является президентом Академии наук и проявляет глубокое понимание нужд не только математики и механики, но и других наук.

Из аспирантуры Академии вышли многие выдающиеся представители науки союзных республик. Им пришлось взять в свои руки организацию научных исследований и подготовку национальных научных кадров во многих случаях буквально на пустом месте. В этом им помогла Академия которая организовала в союзных республиках свои филиалы, позднее преобразованные в республиканские Академии наук. Сейчас математические институты в большинстве Академий союзных республик занимают твердые позиции в прогрессе науки, а в некоторых направлениях занимают руководящие позиции.

Великая Отечественная война и последовавший за ней период восстановления народного хозяйства показали важность математических методов. Математики Академии наук, наряду со всем советским народом, внесли свой весомый вклад в дело победы. Здесь и участие в расчетах новых конструкций, и составление таблиц бомбометания, и проблемы контроля качества промышленной продукции, и помощь в поисках полезных ископаемых новыми методами. Родина высоко оценила эту работу советских математиков, в том числе сотрудников Академии наук.

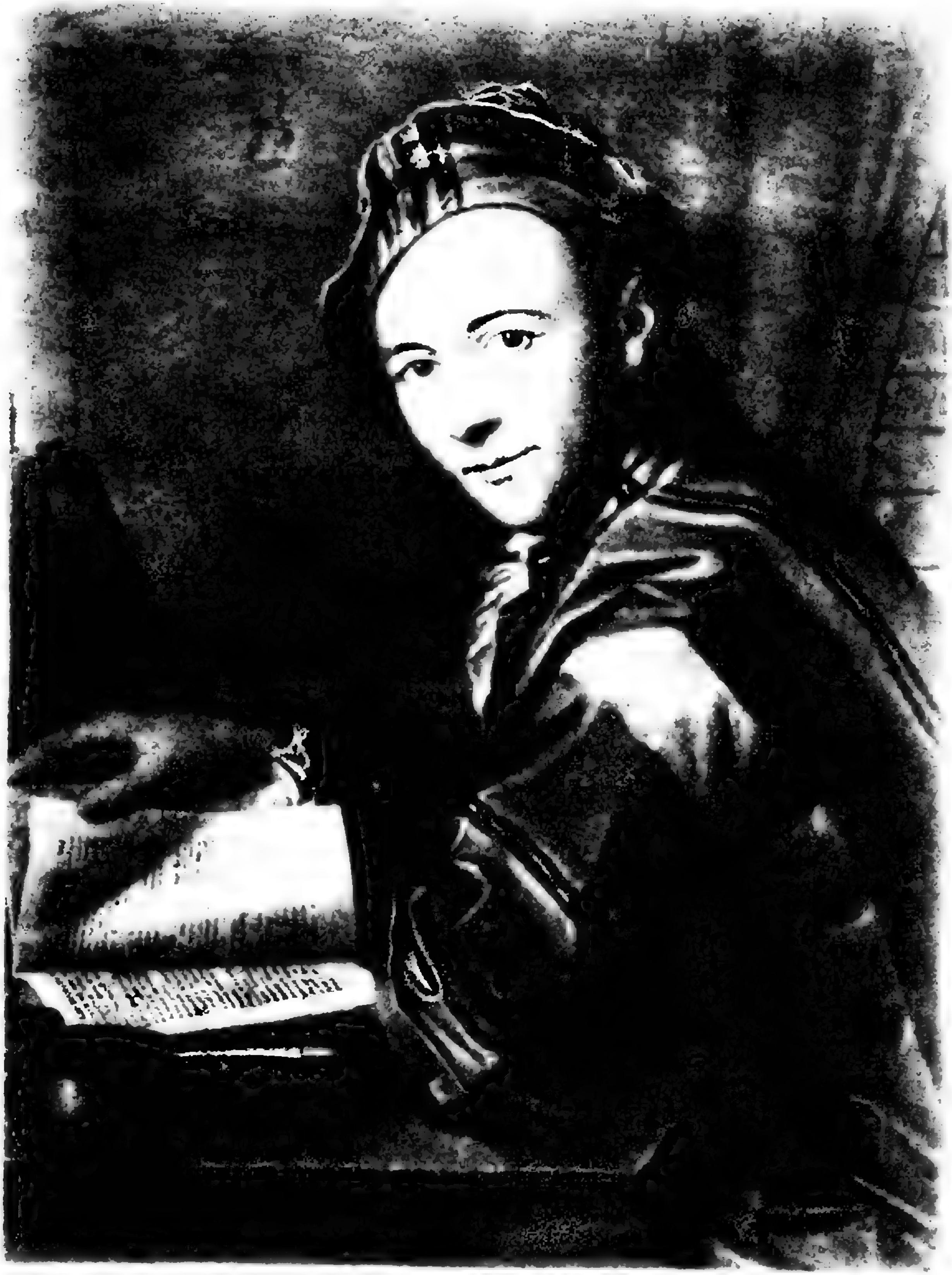
В послевоенное время математики Академии наук приняли активное участие в решении важнейших проблем, связанных с восстановлением народного хозяйства и укреплением обороны страны. Овладение атомной энергией, завоевание космоса, создание современных вычислительных машин и разработка методов программирования, решение проблем оптимального управления процессами — во всех этих работах содержится огромный труд советских математиков. Но наряду с этим никогда не прекращается систематический поиск новых математических методов исследования, решения задач самой математической науки, построения ее теории.

В послевоенные годы выяснилось, что одного института им. Стеклова уже не хватает для полнокровного прогресса советской математики. В недрах этого института выросли новые крупные научные учреждения — Ленинградское отделение Математического института (ЛОМИ), Институт прикладной математики, Вычислительный центр Академии наук, Уральский математический институт. Но, пожалуй, самым крупным событием в развитии Академии наук следует считать образование ее Сибирского отделения. Инициатором организации этого отделения и бессменным его руководителем является крупный представитель теории функций комплексного переменного и гидромеханики — академик М. А. Лаврентьев. Представители этого отделения участвуют как в разработке чисто прикладных проблем, так и в решении труднейших теоретических проблем математики. Теперь начинается новый этап развития Академии — создание Дальневосточного научного центра.

Математики, работающие и работавшие в Академии в советский период ее существования, могут с гордостью оглянуться на пройденный путь. Они внесли неоценимый вклад в развитие теоретической математики и ее применений буквально во всех областях знания. В результате их трудов существенно развились многие области математической науки, ряд из них существенно изменил свое содержание, появились новые направления исследований.

Академия сильна не только тем, что в ней трудятся многие выдающиеся ученые, но и своими постоянными связями с университетами и другими учебными заведениями страны. Академические институты ежегодно впитывают в себя научную молодежь.

В свои 250 лет Академия наук по-прежнему молода, она берется за труднейшие научные проблемы и успешно их решает, она постоянно принимает участие в решении актуальных проблем, стоящих перед нашей страной, она сама не остается неизменной, а растет и развивается так же, как развивается вся наша страна.



Леонард Эйлер (1707—1783)

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

Б. Н. Делоне

За время существования Академии наук в России, видимо, самым знаменитым ее членом был математик Леонард Эйлер. В этой статье мы рассказываем о его жизни и некоторых его математических работах.

XVII век был для математики необычным веком. Декарт и Ферма создали аналитическую геометрию, а Ньютон и Лейбниц — дифференциальное и интегральное исчисления. Эти два величайших достижения математики подняли человечество на существенно новую научную ступень. Открылась возможность решать задачи, совершенно не доступные прежним эпохам. Методы, развитые в интегральном и дифференциальном исчислениях, позволили решать задачу о касательной, о максимумах и минимумах исследуемой переменной величины, о кривизне линии в разных ее точках, а после того как Ньютону и Лейбницу удалось доказать знаменитую теорему анализа, связывающую дифференциальное и интегральное исчисления, оказалось возможным вычислять площади, объемы, находить центры тяжести таких фигур, для которых до того нельзя было и мечтать это сделать. После всех этих достижений наиболее глубокие дальнейшие результаты в области анализа*) принадлежат Якову Бернулли, его младшему брату Иоганну и сыновьям Иоганна — Николаю и Даниилу Бернулли — швейцарцам из небольшого города Базеля на Рейне.

Но первым, кто в своих работах стал возводить последовательное здание анализа бесконечно малых, был ученик Иоганна Бернулли — Леонард Эйлер. Только после его исследований, изложенных в грандиозных томах его трилогии *«Введение в анализ»*, *«Дифференциальное исчисление»* и *«Интегральное исчисление»* анализ стал вполне связной наукой — одним из самых глубоких научных достижений человечества.

Биография Эйлера

Эйлер родился в швейцарском городе Базеле в 1707 году. В 13 лет Эйлер поступил на факультет искусств Базельского университета. Среди других предметов на этом факультете изучались элементарная математика и астрономия, которые преподавал Иоганн Бернулли. Вскоре Бернулли заметил талантливость юного слушателя и начал заниматься с ним отдельно. Эйлер стал бывать в доме своего учителя, и между ним и сыновьями Иоганна Бернулли — Николаем и Даниилом—возникла дружба, сыгравшая очень большую роль в жизни Эйлера.

Когда в 1724 году по указу Петра I была организована Академия наук в Петербурге, из-за недостатка собственных ученых было решено привлечь зарубежных специалистов; перспектива работы в новом крупном центре науки и образования была для многих весьма заманчивой. В числе первых получили приглашение несколько математиков — видный последователь Лейбница Я. Герман, преподававший в университете Франкфурта-на-Одере, а также молодые Николай и Даниил Бернулли — друзья Эйлера. Осенью 1725 года все трое базельцев были уже в Петербурге. В своей автобиографии Эйлер рассказывает, что он «преисполнился невыразимым желанием поехать вместе с ними в 1725 году в Петербург»*). Друзья исхлопотали приглашение Эйлера на вакантную должность.

---

*) Математическим анализом или анализом бесконечно малых обычно называют тесно связанные между собой дифференциальное и интегральное исчисления.

В Петербурге имелись самые благоприятные условия для расцвета гения Эйлера: материальная обеспеченность, возможность заниматься любимым делом, наличие ежегодного журнала для публикации трудов. Здесь же работала самая большая тогда в мире группа специалистов в области математических наук, в которую входили, кроме упомянутых Я. Германа и Д. Бернулли (его брат Николай скончался в 1726 г.), разносторонний Х. Гольдбах, с которым Эйлера связывали общие интересы к теории чисел и другим вопросам, автор работ по тригонометрии Ф. Х. Майер, астроном и географ Ж. Н. Делиль, математик и физик Г. В. Крафт и другие. С этого времени петербургская Академия стала одним из главных центров математики в мире.

Открытия Эйлера, которые благодаря его оживленной переписке нередко становились известными задолго до издания, делают его имя все более широко известным. Улучшается его положение в Академии наук: в 1727 году он начал работу в звании адъюнкта, то есть младшего по рангу академика; в 1731 году он стал профессором физики, то есть действительным членом Академии, а в 1733 году получил кафедру высшей математики, которую до него занимал Д. Бернулли, возвратившийся в этом году в Базель. Рост авторитета Эйлера нашел своеобразное отражение в письмах к нему его учителя И. Бернулли. В 1728 году Бернулли обращается к «ученейшему и даровитейшему юному мужу Леонарду Эйлеру», в 1737 году — к «знаменитейшему и остроумнейшему математику», а в 1745 году — к «несравненному Леонарду Эйлеру — главе математиков»*).

... В конце 1740 года власть в России попала в руки регентши Анны Леопольдовны и ее окружения. В столице сложилась тревожная обстановка. В это время прусский король Фридрих II задумал возродить основанное еще Лейбницем Общество наук в Берлине, долгие годы почти бездействовавшее. Через своего посла в Петербурге король пригласил Эйлера в Берлин. Эйлер, считая, что «положение начало представляться довольно неуверенным», приглашение принял.

Покинув Петербург, Эйлер сохранил самую тесную связь с русской Академией наук, в том числе официальную: он был назначен почетным членом, и ему была определена крупная ежегодная пенсия, а он, со своей стороны, взял на себя обязательства в отношении дальнейшего сотрудничества. Он закупал для нашей Академии книги, физические и астрономические приборы; он подбирал за рубежом сотрудников, сообщая подробнейшие характеристики возможных кандидатов; редактировал математический отдел академических записок, выступал как арбитр в научных спорах между Петербургскими учеными, присылал темы для научных конкурсов, посылал информацию о новых научных открытиях и т. д.

---

*) См. Историко-математические исследования, вып. X, с. 14.

*) За эти интересные сведения я горячо благодарю Адольфа Павловича Юшкевича.

Из Берлина Эйлер, в частности, вел переписку с Ломоносовым, в творчестве которого он высоко ценил счастливое сочетание теории с экспериментом. В 1747 году он дал блестящий отзыв о присланных ему на заключение статьях Ломоносова по физике и химии, чем немало разочаровал влиятельного академического чиновника Шумахера, крайне враждебно относившегося к Ломоносову.

Эйлер пробыл в Берлине 25 лет и так же напряженно работал, как в Петербурге. Однако обострение отношений с королем Пруссии Фридрихом II (который, хотя и преклонялся перед Вольтером и французской культурой, но по существу был типичным солдафоном) привело к тому, что Эйлер в 1766 году решил вернуться в Петербургскую Академию наук, где он был встречен с величайшим почетом и устроен так хорошо, как только было можно.

Последние 16 лет жизни Эйлер опять жил в Петербурге. Там он и умер в 1783 году.

Эйлер отличался несравненной работоспособностью и за свою жизнь написал около 900 научных работ, и это несмотря на то, что он потерял один глаз еще в возрасте 31 года и почти ослеп на второй в 66 лет.

Нет ученого, имя которого упоминалось бы в учебной математической литературе столь же часто, как имя Эйлера. Достаточно открыть 48 том второго издания Большой Советской Энциклопедии на страницах 338—340, чтобы найти сведения о двадцати формулах, уравнениях, интегралах и т. д., носящих имя Эйлера. В учебниках для высшей школы их еще больше; а многие введенные им в обиход теоремы и методы давно перестали связывать с чьим-либо именем. Даже в средней школе логарифмы и тригонометрию изучают до сих пор в значительной степени «по Эйлеру».

Кроме математики, Эйлер занимался также многими другими, в том числе и совсем прикладными, вопросами — оснасткой корабля, картографией, механикой, астрономией, физикой, диоптрикой. Но все же главные достижения Эйлера относятся к математике.

Полное собрание сочинений Эйлера рассчитано на 72 тома (вышло уже 62 больших тома). 30 из них посвящено математике, 31 содержит его работы по механике и астрономии, 11 будут содержать работы по физике и другим предметам. В процентном отношении работы по математике распределяются (по объемам, а это дает лучшую характеристику, чем по числу работ, так как работы чрезвычайно отличаются по размерам) так: анализ — 60%, геометрия — 17%, теория чисел — 13%, алгебра — 7%, теория вероятностей — 3%.

Внутри анализа особенно большое место занимают работы по интегральному исчислению — 33%, по дифференциальным уравнениям — 25%, по рядам — 22% и по вариационному исчислению — 11%. В остальные 9% входят том «Дифференциальные исчисления» и первый том «Введения в анализ бесконечно малых». В целом эта статистика довольно верная.

Перейдем теперь к разбору некоторых математических работ Эйлера.

Работы Эйлера по теории чисел

После работ древнегреческого математика Диофанта уже в новое время (в 1600-е годы) французский математик, советник суда в Туллузе, **Пьер Ферма** рассмотрел ряд глубоких задач элементарной теории чисел и сообщил полученные им результаты, но по обычаю того времени скрыл их доказательства. Эйлер нашел доказательства всех теорем Ферма, показал неверность одной из них, а знаменитую «великую теорему

Ферма»*), не доказанную и не опровергнутую и до сих пор, о целых решениях уравнения $x^n+y^n=z^n$, доказал для $n=3$ и $n=4$.

Эйлер начал последовательно строить элементарную теорию чисел. Он начал с теории степенных вычетов. Эта теория исследует остатки (вычеты), которые получаются, если делить степени фиксированного натурального числа a на простое число p (модуль), не являющееся делителем a. Оказывается, вычет a^{p-1} всегда равен единице. (Это так называемая «малая теорема Ферма»*). Эйлер дал и ее доказательство.) Но a^m при делении на p может дать остаток, равный единице, и при m, меньшем чем $p-1$. Тогда m есть делитель $p-1$ и вычеты степеней a до $p-1$-й повторяются периодически. Особенно важны те значения a, для которых при делении на p остаток равен 1 только при показателе, равном $p-1$, а не при меньших. Их Эйлер назвал первообразными корнями p. Для таких значений a степени $a, a^2, \ldots, a^{p-1}$ дают все $p-1$ различных ненулевых возможных остатков по модулю p. Если два числа b и c имеют такие же вычеты, как a^β и a^γ, то β и γ называются индексами чисел b и c. При умножении b на c индексы складываются (то есть получается аналогия с теорией логарифмов).

Далее Эйлер занялся квадратичными вычетами. Назовем a квадратичным вычетом простого числа p, если вычет a такой же, как у некоторого квадрата. Все вычеты разбиваются на две совокупности: квадратичные вычеты и квадратичные невычеты p (при $p>2$ их равное число, нулевой вычет не рассматривается).

Если a — произведение нескольких сомножителей, то квадратичная вычетность или невычетность a по модулю p зависит от того, какое число его сомножителей — невычеты. Если это число нечетно, то a — невычет, если четно — вычет. Самый трудный вопрос, связанный с квадратичными вычетами,— найти при фиксированном a вид тех простых чисел p, для которых a является квадратичным вычетом. Эйлер заметил, что это те p, которые находятся в некоторых определенных арифметических прогрессиях, зависящих от a. Это так называемый квадратичный закон взаимности*).

Эйлер также много лет занимался решением неопределенных уравнений 2-й степени с двумя неизвестными. Еще Ферма в 1651 году предложил всем математикам мира показать, что при целом положительном A, не являющемся квадратом, неопределенное уравнение $x^2-Ay^2=1$ (его теперь называют уравнением Пелля) имеет бесконечно много решений (x, y) в целых числах. Эйлер исследовал общее неопределенное уравнение $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, где a, b, c, d, e и f — целые числа и x и y также ищутся целые.

Такие же уравнения 1-й степени $ax+by+c=0$ были решены еще в древности: если c делится на наибольший общий делитель a и b, то такое уравнение всегда имеет бесконечно много решений.

Эйлер понял, что для уравнения 2-й степени задача, поставленная Ферма, сводится к доказательству того, что квадратный корень из натурального числа A (если A не квадрат) всегда разлагается в периодическую непрерывную дробь**)

---

*) См. «Квант», 1972, № 8.

**) См. статью С. Г. Гиндикина «Малая теорема Ферма», «Квант», 1972, № 10.

*) Ему посвящена статья С. Г. Гиндикина «Золотая теорема», помещенная в «Кванте», 1973, № 1.

**) См. статью Н. М. Бескина в «Кванте» № 1 за 1970 год.

$$\sqrt{A} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3} + \dots}$$

Очень большую роль в упорядочивании элементарной теории чисел, сыграла и введенная Эйлером функция $\varphi(n)$, равная числу чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Во всех этих трех фундаментальных вопросах (которые больше двух столетий после Эйлера и составляли основной объем элементарной теории чисел) — степенные вычеты, закон взаимности, решение неопределенного уравнения 2-й степени — Эйлер ушел очень далеко, однако во всех трех его постигла неудача: существование первообразного корня для всякого p доказал Гаусс, и как доказал! Закон взаимности тоже доказал Гаусс, причем дал 6 разных, но, правда, весьма трудных доказательств. Периодичность разложения $\sqrt{A}$ доказал Лагранж в 1768 году, и тем самым, как это ранее показал уже Эйлер, решил общее уравнение 2-й степени и, в частности, уравнение Пелля. Эта работа Лагранжа несомненно является коронным бриллиантом в венке славы Лагранжа как математика. Она имела в дальнейшем целый ряд замечательных обобщений, над которыми работают еще и сейчас.

В переписке Эйлера с его другом академиком Петербургской Академии наук Гольдбахом находятся две знаменитые «задачи Гольдбаха»: *доказать, что всякое нечетное натуральное число есть сумма трех простых чисел, а всякое четное — двух*. Первое из этих утверждений было при помощи весьма замечательного метода доказано уже в наше время (1937 г.) академиком И. М. Виноградовым, а второе не доказано до сих пор.

Эйлеру принадлежит инициатива создания и второй части теории чисел — аналитической теории чисел, в которой глубочайшие тайны целых чисел, например, распределение простых чисел в ряду всех натуральных чисел, получаются из рассмотрения свойств некоторых аналитических функций.

Эйлер первый начал рассматривать функцию «дзета» $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$*), где сумма берется по всем натуральным числам n. Он доказал свою знаменитую формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

где $\prod$ обозначает произведение, которое берется по всем простым числам p. Из этой формулы он получил новое аналитическое доказательство бесконечности числа простых чисел, из нее же он вывел (правда, без достаточно строгого обоснования) приближенное равенство

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \approx \ln \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$$

(здесь p, как и выше, — простые числа, а n — целые).

Из этого равенства возник наиболее сильный в настоящее время метод исследования закона распределения простых чисел p в натуральном ряде чисел и в прогрессиях. С его помощью П. Л. Чебышев впоследствии установил, как ведет себя функция $\pi(x)$ — число простых чисел p, не превышающих числа x — при x, стремящемся к бесконечности**), а Ж. Адамар, используя глубочайшие соображения Римана о поведении $\zeta(s)$ в комплексной плоскости доказал предельный закон:

$$\pi(x) : \frac{x}{\ln x} \to 1.$$

---

*) Σ — знак суммирования; например, запись $\sum_{n=k}^{l} f(n)$ обозначает такую сумму: $f(k) + f(k+1) + \dots + f(l)$.

**) См. «Квант», 1971, № 5.

Созданная Эйлером аналитическая теория чисел продолжает свое развитие и в наши дни. Один из самых глубоких в ней методов создан в 1934 году академиком И. М. Виноградовым.

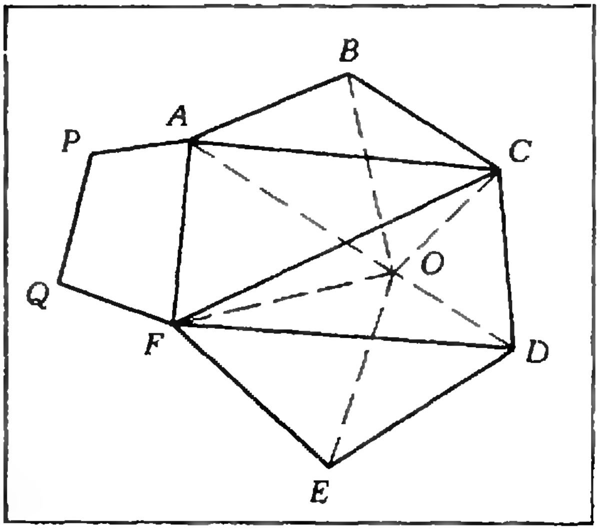
Эйлер также интересовался вопросом арифметической природы чисел. От него идет постановка Гольдбахом вопроса о трансцендентности чисел α^β, где α и β — алгебраические числа*). Эта задача была решена уже в наше время (1930 г.) членом Академии наук СССР А. О. Гельфондом.

В работах Эйлера по теории чисел поражает не только глубина идей и тонкость методов, но и то, что он никогда не останавливался перед вычислительными трудностями задачи.

Большая часть работ Эйлера по теории чисел, напечатанных в разных академических изданиях, была затем собрана в издании его ученика Фусса под названием «Commentationes Arithmeticae Collectae», то есть «Собрание арифметических исследований».

Работы Эйлера по геометрии

Всех работ Эйлера по геометрии 75, и они занимают три из томов полного собрания его сочинений. Часть из них хотя и любопытна, но не очень важна. Некоторые же просто составили эпоху. Во-первых, Эйлера надо считать одним из зачинателей исследований по геометрии в пространстве вообще. Он первый дал связное изложение аналитической геометрии в пространстве (во «Введении в анализ») и, в частности, ввел так называемые углы Эйлера, позволяющие изучать повороты тела вокруг точки.



В работе 1752 года *«Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями»* Эйлер дал доказательство того, что у выпуклого многогранника числа В — его вершин, Р — его ребер и Г — его граней всегда связаны соотношением В—Р+Г=2. Это в некотором смысле первая в истории математики крупная теорема топологии*) (самой глубокой части геометрии), которая (в несколько более общем виде) не утратила значения до сих пор.

Доказательство Эйлера основано на последовательном уничтожении вершин многогранника. Если бы его излагать сейчас, надо было бы сказать следующее. Всякий выпуклый многогранник определяется заданием своих вершин — он есть «выпуклая оболочка» своих вершин, то есть наименьшее выпуклое тело, которому принадлежат эти вершины**). Пусть числа его вершин, ребер и граней суть В, Р и Г. Выкинем одну из его вершин O и рассмотрим выпуклый многогранник, вершинами которого яв-

---

*) Напомним, что число α называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где все числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые. Не алгебраические числа называются трансцендентными.

*) Топология изучает свойства фигур, не меняющиеся, если фигуру можно как угодно растягивать, сжимать и изгибать, но нельзя склеивать и рвать.

**) Выпуклым называется тело, которое наряду с двумя точками содержит и соединяющий их отрезок.

ляются оставшиеся В—1 вершин. Как будет выглядеть этот многогранник? Если грани, сходящиеся в вершине O, все треугольные, их k, и многогранник рассматривать как поверхность, то все эти k граней исчезнут и исчезнут k их боковых ребер, исходящих из O. Ребра же, являющиеся их основаниями, все останутся и образуют, вообще говоря, неплоский многоугольник $ABCDEF$ (приложенная фигура и обозначения на ней взяты из работы Эйлера). Этот многоугольник окажется покрытым новыми треугольными гранями, такими, как ABC, ACF, CFD и FDE, имеющими вершины только в точках A, B, C, D, E и F. Число этих граней будет всегда $k—2$. А число их ребер, отличающихся от ребер AB, BC, CD, DE, EF и FA будет всегда $k — 3$. Если никакие две из этих треугольных граней не лежат в одной плоскости, то у получившегося после выбрасывания вершины O многогранника будет число вершин В—1, число ребер $\text{Р} — k + k — 3 = \text{Р} — 3$, число граней $\text{Г} — k + k — 2 = \text{Г} — 2$. Поэтому наша знакопеременная сумма, называемая характеристикой Эйлера многогранника, не изменится. Если некоторые соседние новые треугольные грани окажутся в одной плоскости, то настолько же меньше будет разных новых граней, насколько ребер, по которым они сложены, и поэтому эта сумма тоже будет такая же. Наконец, если какая-либо грань из сходившихся в вершине O, будет не треугольная, например AOF будет иметь продолжение $FQPA$, то часть ее $FQPA$ при выбрасывании O сохранится, но зато появится новое ребро AF (которое было диагональю у грани $AOFPQ$), и характеристика по-прежнему не изменится. Выкидывая так вершину за вершиной, мы, наконец, дойдем до того, что все оставшиеся вершины будут лежать в одной плоскости. Весь многогранник сведется к «моноэдру», то есть к одному выпуклому многоугольнику, сосчитанному дважды. Но если число сторон этого многоугольника l, то и число вершин его l, а число его «граней» 2, и поэтому его характеристика $l — l + 2$ будет равна 2. Но при каждом очередном выбрасывании вершины характеристика, как мы видели, не менялась, а следовательно, и характеристика $\text{В} — \text{Р} + \text{Г}$ исходного многогранника тоже равна 2*).

В работе «*Исследование о кривизне поверхностей*» (1760 год) Эйлер рассматривает вопрос, до того никем подробно не изучавшийся. Ответ на вопрос о том, какова изогнутость линии на плоскости в данной ее точке, состоит просто в нахождении радиуса такой окружности, которая так же изогнута. Он был решен Ньютоном. Этот радиус равен $R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}$, где $y = f(x)$ — уравнение линии, а y' и y'' — ее первая и вторая производные в этой точке.

Для поверхности все гораздо сложнее. Метод исследования этого вопроса очень характерен для Эйлера. Пусть M — точка поверхности. Он сначала находит формулу радиуса кривизны R в точке M для кривой, получающейся сечением поверхности совсем произвольной плоскостью, проходящей через M. Формула получается сложной. Затем он рассматривает только нормальные сечения — такие, когда секущая плоскость проходит через нормаль (то есть через перпендикуляр) в M к плоскости, касающейся поверхности в точке M. Формула становится проще. Наконец, он обнаруживает, что есть такие два взаимно перпендикулярных («главные») нормальные сечения, радиусы кривизны для которых R_1 и R_2 — наибольший и наименьший. При их помощи получается уже совсем простая формула для радиусов кривизны любого нормального сечения.

---

*) Постарайтесь самостоятельно доказать все те промежуточные утверждения, которые Эйлер счел очевидными.

Работа 1769 года *«Об ортогональных траекториях»* Эйлера содержит блестящие соображения о получении с помощью функции комплексной переменной из уравнений двух взаимно ортогональных семейств кривых на поверхности (то есть таких линий, как меридианы и параллели на сфере) бесконечного числа других взаимно ортогональных семейств. Работа эта в истории математики оказалась очень важной. В следующей работе 1771 года *«О телах, поверхность которых может быть развернута в плоскость»* Эйлер доказывает знаменитую теорему о том, что любая поверхность, которую можно получить, лишь изгибая плоскость, но не растягивая ее и не сжимая (как лист бумаги, который легко изгибается, но почти нерастяжим), если она не коническая и не цилиндрическая (то есть не получается движением образующей прямой, проходящей постоянно через одну точку или параллельно самой себе), представляет собой совокупность касательных к некоторой пространственной кривой (ее ребру возврата).

Столь же замечательны работы Эйлера по картографическим проекциям.

В заключение описания геометрических работ Эйлера мы вполне присоединяемся к высказыванию немецкого математика В. Коммереля: «Слава и заслуги Гаусса не пострадают, если мы укажем на то, что ряд мыслей и методов, которые Гаусс так блестяще использовал в «Disquisitiones generales» (правда, частично лишь в специальной форме или лишь неполно формулированные), имеется уже у Эйлера, например сферическое отображение (когда куску поверхности ставится в соответствие кусок сферы радиуса 1, состоящий из всех таких точек, в которых радиусы этой сферы параллельны нормалям к поверхности в точках этого ее куска), задание поверхности в параметрической форме, совпадение линейных элементов как условие наложимости при изгибании, исследование геодезических линий (то есть кратчайших линий на поверхности между двумя ее точками) при помощи угла, который они образуют с кривыми некоторого семейства на поверхности и другие».

Можно себе представить, каким откровением для математиков той эпохи явились хотя бы работы Эйлера о кривизне поверхностей и о развертывающихся поверхностях. Работы же, в которых Эйлер исследует отображение поверхности, сохраняющие подобие в малом (конформные отображения), основанные на теории функций комплексного переменного, должны были казаться прямо-таки трансцендентными. А работа о многогранниках начинала совсем новую часть геометрии и по своей принципиальности и глубине стояла в ряду с открытиями Эвклида.

О работах Эйлера по анализу

Работ этих так много, и они столь всеобъемлющи, что мы не решаемся здесь давать их описания. Скажем только, что он упростил и дополнил целые большие отделы анализа бесконечно малых, интегрирование функций, теорию рядов, дифференциальных уравнений, которые были начаты уже до него, так, что они приобрели примерно ту форму, которая за ними в большой мере остается и до сих пор. Эйлер, кроме того, начал целую новую главу анализа — вариационное исчисление. Это его начинание вскоре подхватил Лагранж и получилась новая наука.

Влияние Эйлера на развитие математики в России

Плодотворное влияние Эйлера испытывали практически все творчески работающие математики в России. Стиль и направленность работ Эйлера оказали определяющее влияние на все дальнейшее развитие математики в Петербурге (М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев и его школа: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, В. А. Стеклов, И. М. Виноградов и др.). Знаменитая Петербургская математическая школа есть, собственно говоря, школа Эйлера—Чебышева. Это одна из самых своеобразных и глубоких математических школ в мире. Основным ее принципом является принцип Эйлера—Чебышева: исходя из трудной математической задачи, и часто такой, которую ставит другая наука или техника, строить большие и глубокие математические теории, а при решении математических задач всегда доводить их решение до удобного на практике результата, то есть до числа, не останавливаясь ни перед какими вычислительными трудностями.

Большая математика в Москве стала развиваться в начале двадцатого века (Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин). Молодое московское направление, быть может, более принципиальное, более глубокое и более современное, чем петербургское, значительно углубило и усилило нашу математику.

После переезда Академии наук в Москву (1935 г.) постепенно произошло слияние обоих направлений, петербургского и московского, которые вместе со школами Казани, Киева и других научных центров и дали то, что мы теперь называем советской математикой.

Ампер славился своей рассеянностью. Про него рассказывали, что однажды он с сосредоточенным видом варил в воде три минуты свои часы, держа яйцо в руке. Другой часто приводимый случай: Ампер шел по улице, производя, как всегда, в уме сложные расчеты. Он ничуть не удивился, когда прямо перед ним возникла прекрасная черная доска, спокойно достал из сюртука непременный кусок мела и стал записывать результаты; он не удивился и тогда, когда доска начала двигаться вперед, и для того, чтобы поспевать за ней, ему пришлось идти, а затем... бежать. Доска оказалась задней стенкой кареты.

*
* *

В начале XVIII века в России не существовало физики; не было никаких пособий по физике и даже научной терминологии. Еще в 1728 году в «Кратком описании комментариев Академии наук» (так назывались труды Академии, издававшиеся на латинском языке) переводчики этих комментариев на русский язык и редакторы перевода не знали, как лучше писать: «фисика», «фусика» или «физика». Издавая в 1746 году сокращенный перевод «Экспериментальной физики» немецкого ученого Вольфа, М. В. Ломоносов предупреждал читателей о том, что он принужден был «искать слова для наименования некоторых физических инструментов, действий и натуральных вещей, которые хотя сперва покажутся несколько странны, однако... со временем через употребление знакомее будут».

В. Л.

ОН ПРОЖИЛ СЧАСТЛИВУЮ ЖИЗНЬ

И. К. Кикоин

В истории физики известны имена выдающихся ученых, которые своими трудами более или менее значительно опередили свой век. Так, например, Ломоносов почти на столетие раньше «срока» сформулировал идею молекулярно-кинетической теории. То же можно сказать и о Циолковском, который примерно на полстолетия опередил эру ракетной техники. Заслуженное признание и слава этих ученых пришли для них слишком поздно. Они сами при жизни не могли участвовать в развитии своих идей. Современные этим ученым наука и техника не были подготовлены для восприятия их идей. И это обстоятельство в некотором смысле было бедой для таких, безусловно великих, ученых: они не были признаны современниками. Истинно счастлив ученый, который идет «в ногу» со временем.

Академик Игорь Васильевич Курчатов был именно счастливым ученым. Он неизменно интуитивно чувствовал развитие современной ему физики. Он всегда занимался наиболее животрепещущими вопросами физики. Так, в середине 20-х годов электрические свойства диэлектриков были одной из актуальных проблем физики. Именно к этому времени относятся работы Курчатова в области электрической прочности диэлектрических кристаллов, которые затем привели его к замечательным исследованиям сегнетоэлектричества. Здесь Курчатову, можно сказать, вдвойне повезло. Его исследования явления сегнетоэлектричества совпали по времени с появлением квантовой теории ферромагнетизма, электрическим аналогом которого и является сегнетоэлект-

---

Статья впервые опубликована в журнале «Природа», 1974, № 1. Перепечатывается с небольшими изменениями.

Фото *Д. С. Переверзева*

Академик И. В. Курчатов и академик И. Е. Тамм.

ричество (его часто называют ферроэлектричеством). Таким образом, работы Курчатова сразу оказались в русле развития двух актуальных проблем современной ему физики твердого тела: физики диэлектриков и физики магнетизма. В это время Игорь Васильевич энергично «озадачивал» (одно из любимых его выражений) теоретиков из Ленинграда (Я. И. Френкеля) и из Харькова (Л. Д. Ландау), которые занимались теорией магнетизма. Этот цикл работ Курчатова завершается изданием известной монографии «Сегнетоэлектричество», изданной одновременно и во Франции.

С 30-х годов, как известно, началось бурное развитие ядерной физики, которое сопровождалось каскадом крупнейших открытий. Это — открытие нейтрона, позитрона, искусственной радиоактивности и т. д. Курчатов решительно переключает свою лабораторию на работы в этой многообещающей области физики.

В это время в Ленинградском физико-техническом институте (ЛФТИ), где работал Курчатов, практически не было «культуры» физики атомного ядра, кроме небольшой лаборатории Д. В. Скобельцына, который в основном занимался космическими лучами.

Курчатову с его группой приходилось все начинать практически на пустом месте. В это время Игорь Васильевич целыми днями просиживал в библиотеке и изучал литературу. «Литературный» период длился сравнительно недолго. Очень скоро в лаборатории Курчатова начались экспериментальные работы по ядерной физике. Довольно быстро определилось основное направление его интересов: искусственная радиоактивность при облучении нейтронами. Тогда можно было видеть типичную картину: Игорь Васильевич мчится из одного конца коридора в другой с облученным образцом в руке для исследования очередного короткоживущего ядра.

В те времена в стране не было еще ни одного действующего циклотрона и только в Радиевом институте заканчивалось строительство первого циклотрона с вертикально расположенными метровыми полюсами магнита. Этот циклотрон долго не могли наладить. Курчатов немедленно связывается с заведующим физическим отделом Радиевого института Л. В. Мысовским и начинает с ним целую серию физических работ. Мысовский с давних пор занимался исследованием природной радиоактивности. Практически все руководство работами по налаживанию циклотрона взял на себя Игорь Васильевич, и довольно быстро циклотрон был запущен.

Работы в лаборатории Курчатова велись с максимальной интенсивностью. Для химической идентификации искусственных ядер он привлек своего брата Бориса Васильевича Курчатова, и очень скоро были налажены радиохимические исследования с индикаторными (то есть ничтожно малыми) количествами вещества. Словом, в течение полутора лет работы по ядерной физике в лаборатории Курчатова достигли, как принято говорить, мирового уровня.

Вскоре после начала работ вышла монография И. В. Курчатова под названием «Расщепление атомного ядра» (1935 г.). В связи с этим не могу не вспомнить о трагикомическом событии в институте, одним из героев которого был и автор этих строк. В начале 30-х годов мне понадобилось облучать α-частицами алюминиевый порошок, который служил источником позитронов (это было вскоре после открытия супругами Жолио-Кюри искусственной радиоактивности). Для этой цели я использовал ампулу с радоном, которая была закрыта тонким слюдяным окошком. На слюде помещался облучаемый образец. Чтобы избежать опасности утечки радона, ампула хранилась в другой комнате, которая неизменно запиралась. Однажды по какой-то случайности комнату не закрыли, кто-то вошел в нее и, по-видимому случайно, прорвал слюдяное окошко ампулы. Сразу же защелкали счетчики во всех лабораториях института. Поднялась паника. Немедленно были приняты меры: открыты все окна, включена вся наличная вентиляция. Через несколько часов «авария» была ликвидирована и счетчики пришли в норму. На этом можно было бы и успокоиться, если бы не рвение одного из сотрудников, который решил об этом случае доложить директору института Абраму Федоровичу Иоффе. У А. Ф. Иоффе была сильно развита боязнь радиоактивных излучений. Происшествие очень расстроило его, и он назначил комиссию для расследования, выяснения причин и определения последствий. Председателем комиссии был назначен Курчатов. Подсчет показал, что даже если бы долгоживущий продукт распада радона — радий Е с периодом распада 29 лет — из всей ампулы осел на поверхностях здания института, то радиоактивность оказалась бы на порядок меньше естественного фона. Комиссия составила соответствующий акт, который и успокоил А. Ф. Иоффе. Однако в течение нескольких месяцев об этом событии не раз вспоминали, и оно было отражено в одном из очередных капустников.

На подаренной мне монографии Игорь Васильевич сделал следующую надпись: «Дорогому Исааку на добрую память. В книге много недостатков. Ты их сам заметишь; укажу только на один, который может от тебя ускользнуть: ничего не написано об ампулах для α-частиц и их коварных свойствах. 20/IV 1935 г. И. В. Курчатов». Видно, это событие надолго врезалось в его память.

Работы по ядерной физике непрерывно велись до самой войны. Правда, начиная с 1937 года я уже не мог за ними следить, потому что уехал в Свердловск и практически не встречался с Игорем Васильевичем. И только в конце 1942 года Курчатов неожиданно появился в Свердловске, зашел ко мне в лабораторию и поинтересовался, чем я занимаюсь. Внешне его посещение тогда ни на чем не сказалось, но позже стало ясно, что он имел поручение прозондировать возможность привлечь меня к новой тематике. Действительно, в начале 1943 года я был вызван в Москву, где встретился с И. В. Курчатовым и А. И. Алихановым у С. В. Кафтанова. Мне сообщили, что имеется поручение правительства заняться вопросами практического использования деления урана. Едва ли нужно упоминать, что после открытия деления урана это был самый животрепещущий вопрос, который интересовал всех физиков. На ядерной конференции 1940 года в Москве проблема деления урана обсуждалась весьма оживленно при активном участии Курчатова. По его инициативе была составлена записка правительству, в которой указывалось на важность этой проблемы и на необходимость организации широких исследований в этой области.

В начале 1943 года организация работ по практическому использованию явления деления урана была оформлена правительственным актом. Началась совместная деятельность с И. В. Курчатовым уже на новом поприще, в новой роли. Понятно, что более актуальной физической проблемы в то время нельзя было себе представить. Конечно, проблема защиты кораблей от магнитных мин, которой занимался тогда Игорь Васильевич, тоже была очень актуальна. Известно, что работы А. П. Александрова и И. В. Курчатова в этой области позволили спасти жизнь многим тысячам моряков. Но проблема урана не терпела никаких отлагательств. Так началась напряженнейшая эпопея решения практической задачи создания атомного оружия. Первое время непосредственно работами занималось считанное число людей. Вскоре Игорь Васильевич привлек крупных теоретиков (Я. Б. Зельдовича, И. Я. Померанчука и др.). Довольно быстро было произведено разделение сфер влияния. Проблемы, не связанные непосредственно с ядерной физикой, были поручены мне: как выразился Курчатов, «ты у нас специалист по пузырькам» (он в шутку называл все работы, не связанные с ядром, пузырьковой физикой). Вопросами ядерной физики занимался он сам и А. И. Алиханов.

Начался бурный организационный период, когда нужно было собирать людей, доставать помещения, оборудование. Временно нам было предоставлено помещение в Пыжевском переулке и в Институте неорганической химии на Калужской улице. И снова Игоря Васильевича можно было видеть бегущим с облученными мишенями из одного конца коридора в другой. Казалось, мы снова в ЛФТИ. Наряду с этой работой Курчатов выполнял огромную организаторскую работу. Засиживались мы на Пыжевском до поздней ночи.

Однажды было сказано, что нужно готовить доклады о программе работ с указанием конечных сроков практического решения проблемы. Мы засели за составление такого доклада — каждый по своей части. И в один из вечеров предстали перед правительством. Докладывали тоже каждый по своей части. В каждом докладе содержался пункт, указывающий сроки получения практических результатов. Как известно, эти сроки были выдержаны.

В это время Игорь Васильевич организовал работы не только по созданию института. Теоретики и экспериментаторы взаимно обучались основам будущей ядерной техники. Коллективно обсуждались основные проблемы, связанные с практической задачей, которая была поставлена. Все, особенно Курчатов, чувствовали огромную ответственность, возложенную на коллектив. Большое беспокойство вызывал вопрос, не обгонит ли нас фашистская Германия. Не было никакой уверенности, что Германия усиленно не занимается проблемой урана. Было ясно, что если в 1941 году все публикации, относящиеся к делению урана, вдруг прекратились, то все, в том числе и

Академик И. В. Курчатов и академик С. П. Королев.

немцы, должны были понимать, что начались работы по использованию этого явления для важных целей. Нужно было принять во внимание и то, что в печати появился ряд статей с оценкой того действия, которое может вызвать цепная ядерная реакция, если она осуществится.

В лаборатории поначалу эксперименты осуществлялись в очень малом масштабе: не было места. Но теоретические и расчетно-оценочные работы велись с чрезвычайной интенсивностью. После наших докладов о перспективах решения проблемы процесс организации лаборатории резко ускорился. Довольно быстро было выделено новое помещение и приведено в порядок старое. К концу 1944 года мы уже имели достаточно приличные помещения для работы.

Организация работ по этой проблеме в нашей стране шла очень интенсивно. Число сотрудников возрастало по экспоненциальному закону:

$$N = N_0 e^{at}$$

(N_0 — начальное число сотрудников, N — число сотрудников в момент времени t).

Научная и организационная деятельность Игоря Васильевича была предельно напряженной. Тогда он руководил работами по измерению основных ядерных констант урана. Необходимо было получить с большой точностью данные о количестве нейтронов, освобождающихся в одном акте деления ядра урана, определить энергетические спектры нейтронов и др.

Как и в прошлом, Курчатов «озадачивает» теоретиков: необходимо развить теорию цепных ядерных реакций. Как известно, наши теоретики с большим успехом справились с этой задачей. Курчатов непосредственно занялся строительством первого атомного реактора. Он целиком был захвачен этим делом и сам руководил проектными, конструкторскими и научными разработками. Он сумел привлечь к проблеме большое количество научных институтов и ученых самых разных специальностей. Его интересовал не только сам реактор. Он понимал, что предстоят большие химические исследования по выделению плутония*). Я помню, однажды, когда мы были в Кремле, Игорь Васильевич демонстрировал первую стеклянную ампулочку с несколькими микрограммами плутония, который был получен на нашем первом реакторе, находящемся в «здании» монтажных мастерских.

Вскоре Курчатов выехал на площадку, где началось сооружение промышленного реактора, и в Москве бывал наездом, как и другие руководители.

Наконец, наступил день, когда все было готово для испытания атомного оружия. Непосредственное руководство первым взрывом осуществлял Курчатов. И несмотря на то, что на месте испытания присутствовали ответственные члены правительства, было сказано, что руководство всеми работами поручается Курчатову. И все работы были подчинены лично ему. Доверие правительства Игорю Васильевичу было неограниченным.

Игорь Васильевич быстро понял, что актуальнейшая проблема послевоенного времени — мирное использование атома в энергетике. И поэтому не удивительно, что первая атомная электростанция была создана под его непосредственным руководством. Курчатов понимал также, что для дальнейшего развития атомной науки требуется обеспечить ее тылы, создать современные установки для изучения физики элементарных частиц. И по его инициативе, также весьма своевременно, началась организация Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) под Москвою в Дубне. Можно сказать, что Дубна — это детище Курчатова, хотя физика элементарных частиц была далека от личных научных интересов ученого.

Едва ли нужно доказывать, насколько своевременно были начаты работы по управляемым термоядерным реакциям. Тогда еще не было известно, что в других странах тоже ведутся такие работы. Это было начало 1952 года. Курчатов внимательно следил за ходом работ, хотя первое время непосредственного участия в них сам не принимал. Не менее своевременно он оценил полученные при исследованиях результаты и понял, что первоначальные надежды на быстрое решение проблемы оказались слишком оптимистичными. Он понял, что необходима серьезная систематическая работа в этой области, и опять же своевременно оценил целесообразность рассекречивания этих работ. Как известно, в 1956 году он в своем докладе в Англии изложил наши результаты по управляемому термоядерному синтезу.

Помню, с какой тщательностью Курчатов готовил свой доклад: оттачивал каждую фразу, обсуждал, исправлял, переделывал. Доклад в Англии произвел сенсацию. Только после этого стало известно, что аналогичные работы велись и в США, и в Англии. С тех пор начался период широкого международного сотрудничества в достижении управляемой термоядерной реакции. Личные интересы Курчатова также переместились в эту увлекательную область. В последние годы он сам руководил работами по термоядерному синтезу. Он привлек к ним многие научные учреждения, конструкторские организации. Причем, он решил придать исследованиям отчетливую целенаправленность и даже настаивал, чтобы началось проектирование будущей термоядерной электростанции.

С самого начала организации Института атомной энергии (ИАЭ) Игоря Васильевича беспокоил вопрос, сумеем ли мы наладить работу так, как она была организована А. Ф. Иоффе в ЛФТИ, где в основе лежал беспредельный энтузиазм сотрудников. Все мы чувствовали себя ответственными перед Иоффе, авторитет которого был чрезвычайно высок. Это Курчатов понимал и хотел обеспечить такую же интенсивную работу у себя в институте. Он не раз высказывался в том духе, что нам придется надеяться не на личное обаяние руководителей, а на важность и грандиозность решаемой проблемы. В действительности его личный авторитет был велик. Что касается обаяния, то ему тоже было его не занимать. Он сам в этом не был убежден, но когда ему на это указывали, ухмылялся и говорил: «Посмотрим». Опыт показал, что и личное обаяние Курчатова, и его большой научный авторитет, наряду с грандиозностью проблемы, которая была поручена институту, действительно, обеспечили высокую интенсивность и производительность научного труда. Сотрудники ИАЭ тоже работали, не считаясь со временем, не за страх, а за совесть.

---

*) Плутоний — трансурановый элемент, занимающий 94-ю клетку периодической системы Менделеева. Пригоден для создания атомного оружия и мирного использования атомной энергии.

Термоядерный синтез — это лебединая песня Курчатова. Последние дни он проводил непосредственно в лаборатории, за пультом, за рабочим столом, на термоядерных установках нашего института и был полон надежд, что в самое ближайшее время термоядерный синтез будет практически осуществлен.

Можно утверждать, что Курчатов прожил счастливую жизнь. Игорь Васильевич занимался самыми актуальными, самыми животрепещущими, самыми многообещающими вопросами науки. Он верил в беспредельную мощь науки и заразил этой верой своих сотрудников. На этом и сейчас зиждутся успехи атомной науки в нашей стране.

Биосфера и ЭМП

Изобретатель радио А. С. Попов когда-то говорил, что человеческий организм не имеет еще такого органа чувств, который замечал бы электромагнитные волны. Это высказывание расшифровывалось как вывод об отсутствии биологического действия радиоволн. Сегодня такой вывод имеет лишь исторический интерес.

Биосфера — область распространения жизни на земном шаре — подвержена влиянию различных ЭМП (электромагнитных полей), источниками которых служат Земля, Солнце и космическое пространство. Все живое на Земле растет и развивается в геомагнитном поле, величина которого в среднем равна около $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ *тл*.

Этот факт до недавнего времени считался несущественным. Однако начавшаяся эра космических исследований поставила на повестку дня вопрос о детальной оценке условий жизни на Земле. Выяснилось, что снижение геомагнитного поля до уровня магнитного поля Луны,

(окончание см. с. 63)

Правдоподобные рассуждения и математика

Д. С. Людмилов, С. Д. Людмилова

> *«Написав, что нечто очевидно, вы, наверное, так и думали. Но когда, спустя месяц, или два, или шесть, вы вынули рукопись и перечитали ее заново, вы по-прежнему продолжаете так считать? ...*
> *Когда вы объясняли это другу или на семинаре, было ли это место воспринято как очевидное? Или кто-нибудь задавал вопросы и усаживался, ворча, после ваших уговоров? Вы его убедили или запугали? Ответы на эти риторические вопросы ограничивают использование слова «очевидно». Есть еще и другое правило, главное, его знает каждый; нарушение этого правила — самый частый источник математических ошибок: удостоверьтесь в том, что «очевидное» — верно.»*
>
> П. Р. Халмош. Как писать математические тексты.

Правдоподобные рассуждения, подсказываемые интуицией, играют значительную роль в математических исследованиях, в поиске решения задачи. Математику было бы труднее находить решение новых математических проблем, если бы он не получал «подсказок» от своей математической интуиции.

То же самое можно сказать об ученике, который ищет способ решения задачи. Поиск решения — это формулировка различных гипотез и последовательная их математическая проверка.

Но... будьте осторожны! Нельзя недооценивать математическую строгость и переоценивать интуицию. То, что интуитивно очевидно, не всегда соответствует действительности.

Переправа

Рассмотрим один поучительный пример, который объясняет, почему математики стремятся строго доказывать «очевидное».

В книге П. Ю. Германовича «Сборник задач по математике на сообразительность» (М., Учпедгиз, 1960) есть такая задача.

Канал шириной 3,5 м имеет поворот (рис. 1). Как организовать переправу через него, если имеются две

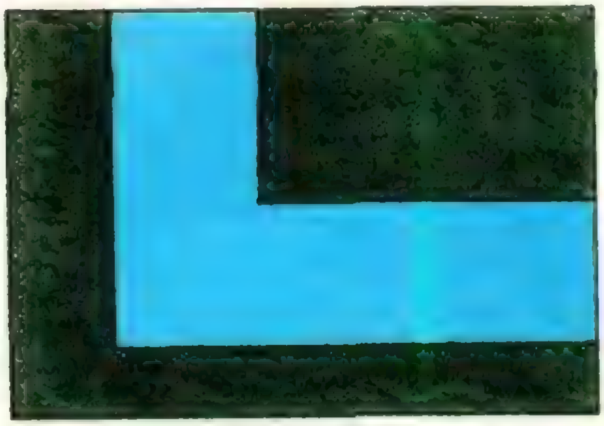


Рис. 1.

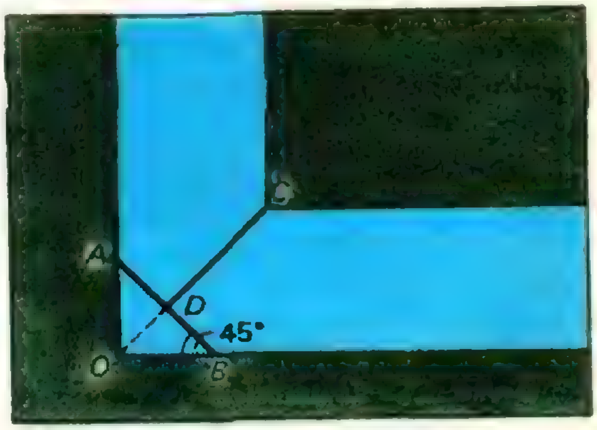


Рис. 2.

доски, но длина каждой из досок только 3 м?

Авторское решение задачи показано на рисунке 2. Судя по этому рисунку, автор предполагает, что

(1) *края A и B первой доски должны упираться в края рва* (мы считаем, что доски не изгибаются);

(2) *первая доска AB должна образовывать с краями рва углы 45°;*

(3) *вторая доска CD должна быть перпендикулярной AB* (точка C — вершина противоположного угла рва).

(4) *такое расположение досок указанных размеров возможно* (и, следовательно, обеспечивает переправу).

Все эти гипотезы интуитивно правдоподобны, не так ли? Но... давайте займемся проверкой.

Первый сюрприз

Начнем с гипотезы 4. Вероятно, очень легко поверить в ее справедливость: неужели за счет лишних 2,5 *м* (6 *м* — 3,5 *м*) доски нельзя указанным на рисунке 2 способом получить недостающие 0,5 *м* (3,5 *м* — 3 *м*)?

Однако проведем расчеты. Из рисунка 2 имеем:

$$OC = 3{,}5\sqrt{2}\ м, \quad OD = \frac{1}{2}AB = 1{,}5\ м,$$

$$CD = OC - OD = (3{,}5\sqrt{2} - 1{,}5)\ м.$$

Переправа возможна, если выполняется неравенство

$$3{,}5\sqrt{2} - 1{,}5 \leqslant 3$$

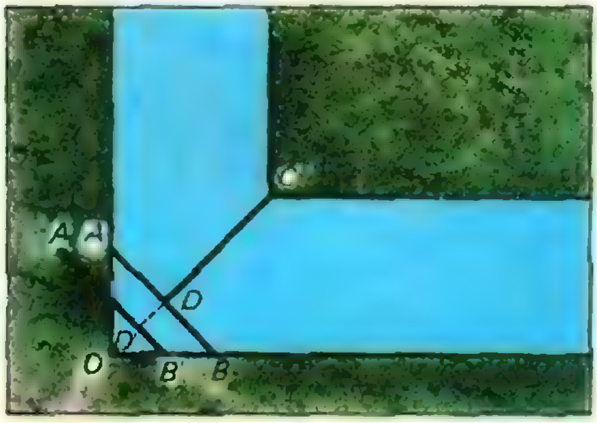


Рис. 3.

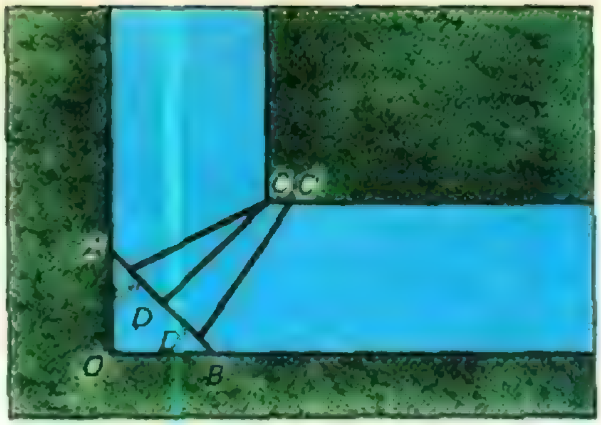


Рис. 4.

или $3{,}5\sqrt{2} \leqslant 4{,}5$, откуда $7\sqrt{2} \leqslant 9$, а это неверно. Поэтому в действительности $CD > 3$ *м*!

Следует ли отсюда, что переправиться невозможно? Пока что нет, ведь этот вывод получен из предположения, что первые три гипотезы выполняются. Быть может, существует другое расположение досок, обеспечивающее переправу?

Второй сюрприз

Из рисунка 3 видно, что гипотеза 1 верна: действительно, если один из концов A первой доски (или оба ее конца) не лежит на самом краю рва, то эту доску удается передвинуть в более выгодное положение.

Нетрудно подтвердить и гипотезу 3: если вторая доска CD не будет перпендикулярна AB (см. рис. 4), то она должна будет иметь большую длину.

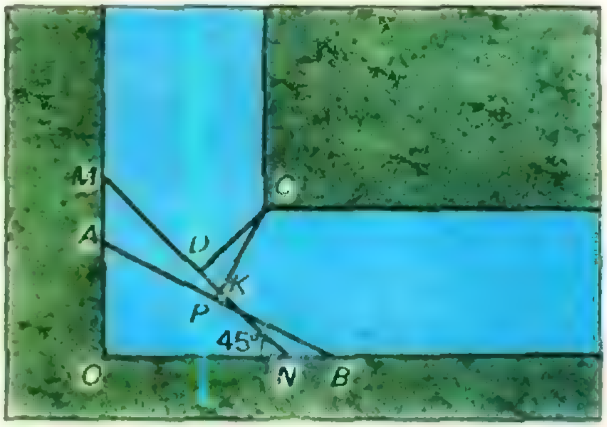


Рис. 5.

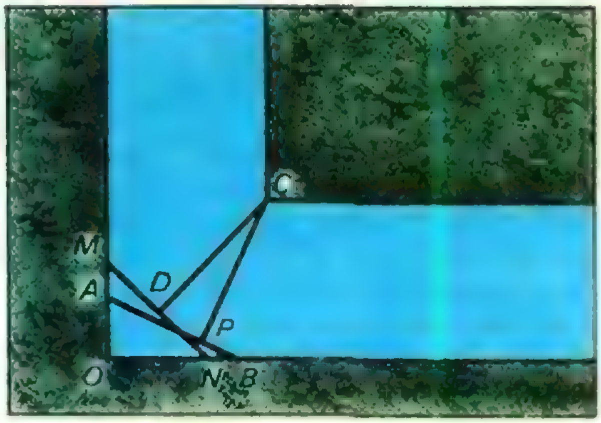


Рис. 6.

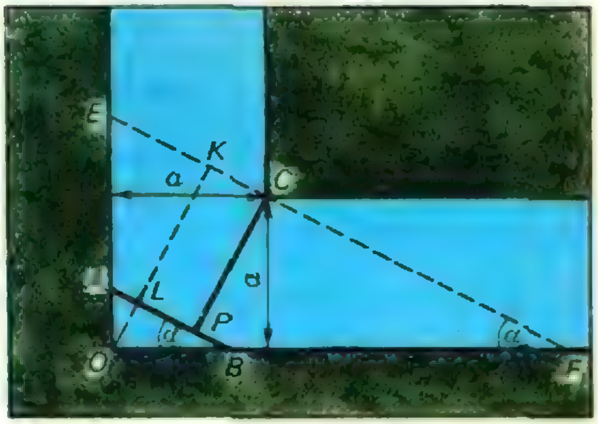


Рис. 7.

Остается проверить гипотезу 2. На первый взгляд кажется, что и эта гипотеза подтверждается. Действительно, рассмотрим два положения первой доски (рис. 5): MN ($\measuredangle MNO = 45°$) и AB ($\measuredangle ABO \neq 45°$). Пусть $CD \perp MN$, $CP \perp AB$, K — точка пересечения CP и MN. Ясно, что $CP > CD$, так как $CP > CK$ и $CK > CD$ (гипотенуза больше катета).

Однако отрезки MN и CP могут и не пересекаться, соответствующее расположение досок указано на рисунке 6. *Обратите внимание, что на* этом рисунке $CD \geqslant CP$. Предыдущее рассуждение не проходит. По-видимому, непосредственно геометрически проверить гипотезу 2 нелегко.

Попытаемся сделать это алгебраически. Обозначим ширину канала через a, длину каждой доски — через l ($a > l$), $\measuredangle ABO$ через α (рис. 7) и будем считать величины a и l постоянными, а величину α переменной. Гипотеза 2 утверждает, что минимум длины отрезка CP ($CP \perp AB$) достигается при $\alpha = 45°$. Поэтому надо выразить $y = CP$ как функцию от α.

Проведем $ECF \parallel AB$ и $OLK \perp AB$ (рис. 7). Тогда

$$EF = EC + CF = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha}; \quad OF = EF\cos\alpha = a + \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad OK = OF\sin\alpha = a\sin\alpha + a\cos\alpha; \quad OB = AB\cos\alpha = l\cos\alpha; \; OL = OB\sin\alpha = l\cos\alpha\sin\alpha; \quad y = LK - CP = OK - OL = a\sin\alpha + a\cos\alpha - l\sin\alpha\cos\alpha.$$

Исследуем функцию $y(\alpha)$ на максимум и минимум. Пусть

$$x = \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(45° + \alpha).$$

Тогда $x^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{x^2 - 1}{2},$$

$$y(x) = ax - \frac{l(x^2 - 1)}{2} = \frac{-lx^2}{2} + ax + \frac{l}{2}.$$

Если бы область определения функции $y(x)$ не была ограничена, то она не имела бы минимума, а имела бы максимум при $x = \frac{a}{l}$ (рис. 8).

Этот максимум равен

$$\frac{1}{2}\left(-l\frac{a^2}{l^2} + 2a\frac{a}{l} + l\right) = \frac{a^2 + l^2}{2l}.$$

Однако область определения функции $y(x)$ ограничена, так как $x = \sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

Функция $x(\alpha)$ имеет минимум $x = 1$ при $\alpha = 0°$ (этот минимум достигается, когда $\alpha = 0°$ — доска AB вся лежит на одном берегу) и максимум $x = \sqrt{2}$ при $\alpha = 45°$. Отсюда находим область определения функции $y = f(x)$: $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ *).

---

*) На самом деле, при α, близком к 0° (90°) и AB, меньшем a, точка P на рисунке 7 окажется на продолжении AB, то есть на берегу и потребуется доска длины, меньшей чем CP, но если конец P доски CP лежит на берегу, то CP — наименьшее при $\alpha = 0°$ и совпадает с $y(x)$ при $x = 1$.

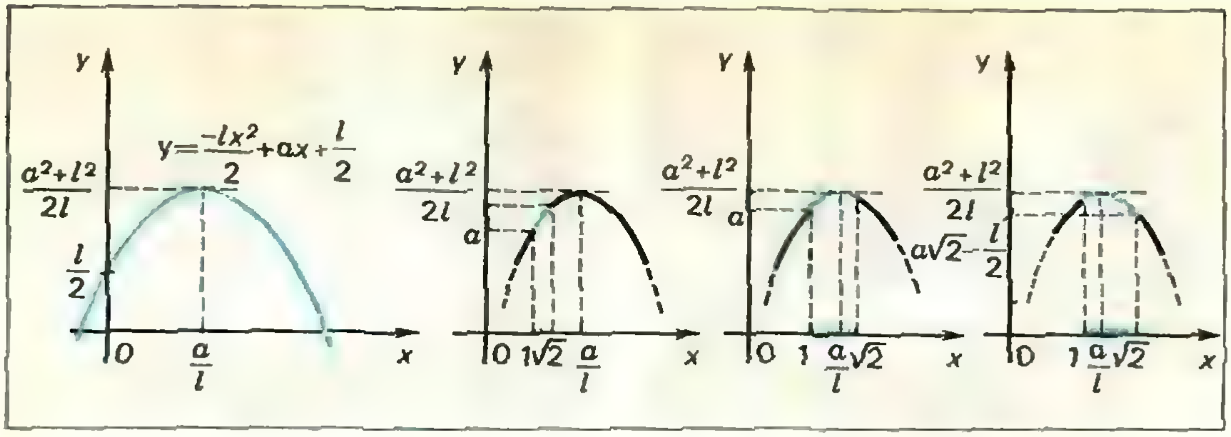


Рис. 8. Рис. 9. Рис. 10. Рис. 11.

Точка $x=1$ на оси абсцисс расположена всегда между точками $x=0$ и $x=\frac{a}{l}$ $(a>l)$. Точка же $x=\sqrt{2}$ может занимать два положения: слева от точки $x=\frac{a}{l}$ (рис. 9) или справа от этой точки (рис. 10).

В том и в другом случае графиком функции $f(x)$ является дуга AB параболы между точками $x=1$ и $x=\sqrt{2}$.

В первом случае $\left(\frac{a}{l}\geqslant\sqrt{2}\right)$ функция $y(x)$ при $x=\sqrt{2}$ ($\alpha=45°$) достигает максимума (!), равного $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}$, а при $x=1$ — минимума, равного a (рис. 9; переправа в этом случае невозможна, так как при любом $1<x\leqslant\sqrt{2}$ будет $y>a$).

Мы получили результат, прямо противоположный интуитивно предполагаемому! Рисунок 6 не напрасно настораживал нас. Если $\frac{a}{l}\geqslant\sqrt{2}$, то при $\alpha=45°$ расстояние CP от точки C до первой доски будет не наименьшим, а наибольшим! Согласитесь, что интуиция, подсказавшая гипотезу 2, очень даже красиво обманула нас. Кроме того, невозможность переправы при $l\leqslant\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (например, при $a=3,5$ *м*, $l\approx2,4$ *м*) трудно предсказать интуитивно, хотя ясно, что какое-то ограничение на l должно быть, при очень малом l переправа невозможна.

Продолжим исследования

Посмотрим, всегда ли возможна переправа, если $1<\frac{a}{l}<\sqrt{2}$. В этом случае функция $y(x)$ имеет максимум, равный $\frac{a^2+l^2}{2l}$ (рис. 10). Нас интересует минимум этой функции. Функция достигает минимума при $x=1$ или при $x=\sqrt{2}$. Пусть $y(1)\leqslant y(\sqrt{2})$ (рис. 10). Поскольку $y(1)=a$, $y(\sqrt{2})=a\sqrt{2}-\frac{l}{2}$, то $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}\geqslant a$, откуда $\frac{a}{l}\geqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Итак, при $\frac{\sqrt{2}+1}{2}\leqslant\frac{a}{l}<\sqrt{2}$ переправа неосуществима, так как при $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ будет $y(x)>a$ (рис. 9). Остается рассмотреть случай $1<\frac{a}{l}<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

В этом случае $y(\sqrt{2})=a\sqrt{2}-\frac{l}{2}<a=y(1)$, минимум функции $y(x)$ равен $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}$ (рис. 11) и достигается при $x=\sqrt{2}$, $\alpha=45°$. Переправа возможна, если этот минимум не превосходит длины l второй доски, то есть при $a\sqrt{2}-\frac{l}{2}\leqslant l$, или $\frac{a}{l}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(<\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.

Подытоживая, получаем, что переправа невозможна при $\frac{a}{l}>\frac{3\sqrt{2}}{4}$

и возможна при

$$\frac{a}{l} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}. \qquad (*)$$

Отношение $\frac{a}{l} = \frac{3,5}{3}$ условию (*) не удовлетворяет, так как $\frac{3,5}{3} > \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Из неравенства $\frac{3,5}{l} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}$ находим, что переправа возможна, если $l \geqslant \frac{7\sqrt{2}}{3} \approx 3,3$ *м*.

Невозможность переправы геометрически означает, что множества точек, «заметаемые» первой и второй доской, не пересекаются (рис. 12). Если $\frac{a}{l} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, то эти множества имеют лишь одну общую точку.

Если $\frac{a}{l} < \frac{3\sqrt{2}}{4}$, то область пересечения указанных множеств содержит бесчисленное множество точек.

Если $\frac{a}{l}$ ближе к 1, чем к $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (область пересечения множеств достаточна велика), первую доску можно располагать и не под углом 45° к берегам, а вторую доску — не перпендикулярно к первой, можно даже отодвинуть ее конец от вершины угла (точки C).

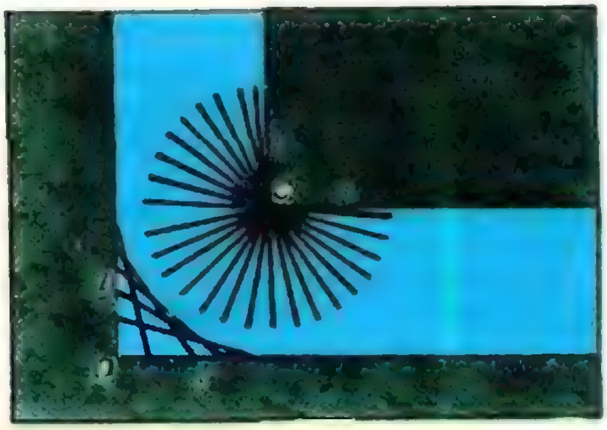


Рис. 12.

Итоги

Какой же вывод можно сделать из всего сказанного? Подтверждают ли все наши рассуждения тот факт, что интуитивное предсказание гипотезы 2 является верным?

Мы видели, что гипотеза 2 в формулировке

а) *первая доска окажется на наименьшем расстоянии от C, если $\alpha = 45°$*,

не соответствует действительности. В формулировке же

б) *если переправа возможна* $\left(\frac{a}{l} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, *то первая доска окажется на наименьшем расстоянии от C, если $\alpha = 45°$*,

гипотеза 2 соответствует действительности. Однако предсказать этот результат интуитивно трудно.

В связи с рассмотренной задачей возникают новые интересные задачи. Вот некоторые из них.

Упражнения

1. При какой минимальной длине двух одинаковых досок (ширина канала равна 3,5 *м*) переправа возможна, если запас покрытия для каждой доски должен составлять 20 *см* (по 10 *см* для каждого конца)?

2. Вывести условие возможности переправы через канал ширины a с помощью двух досок различной длины: m и n ($m < a$, $n < a$). В частности, выяснить, возможна ли переправа, если $a = 3,5$ *м* и $m + n = 6$ *м*.

3*. Через канал пытаются переправиться с помощью трех досок. При каких длинах a, b, c досок это возможно? Хватит ли трех досок по 3 *м* каждая?*)

4*. Две ветви канала имеют различную ширину: a (*м*) и b (*м*) ($a > b$), причем имеются две доски одинаковой или различной длины: m и n, — каждая из которых меньше b. Вывести необходимое и достаточное условие возможности переправы.

5*. Ветви канала образуют произвольный (а не прямой) угол φ, их ширина равна a и b, доски — различной длины (m и n). При каком условии возможна переправа?

Литература

1. Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, 1957.

2. Д. Пойа, Математическое открытие, М., «Наука», 1970.

3. Д. Пойа, Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1957.

4. Г. Д. Балк, М. Б. Балк, Испытания на правдоподобие. «Квант», 1972, № 1.

---

*) Задачи 3—5 решать не обязательно, их решения очень трудные, громоздкие, требуют знаний, выходящих за пределы школьной программы.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июля 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М256, М257» или «...Ф268». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «..., новая задача по математике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные из них отмечены звездочкой.

Задачи

М261—М265; Ф273—Ф277

М261. Обруч радиуса R, висевший на неподвижном круге радиуса $r < R$, начинают катить по этому кругу. Докажите, что точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиуса $R - r$, катящегося снаружи по тому же кругу радиуса r (рис. 1, *а*, *б*). (Качение происходит без скольжения — так, что длины прокатившихся друг по другу дуг равны.)

С. Г. Гиндикин

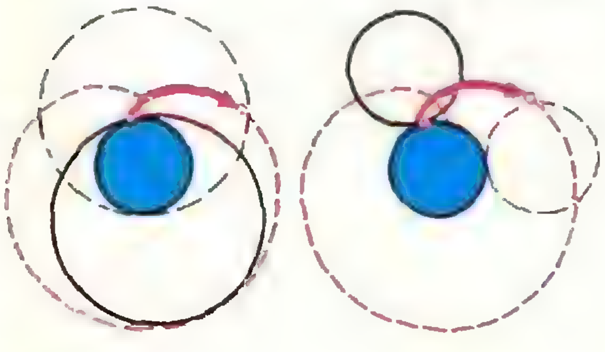

а б

Рис. 1.

М262. Какое наибольшее число:

а) ладей,

б) ферзей

можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая из этих фигур была под ударом не более чем одной из остальных?

В. и Л. Рабинович

М263. Даны два числа p и q, большие 1. На сторонах BC и DC прямоугольника $ABCD$ берутся точки P и Q так, что $|BC| = p \cdot |BP|$ и $|DC| = q \cdot |DQ|$. При каком отношении длин сторон AB и AD угол PAQ будет иметь наибольшую величину? Какова эта наибольшая величина в частном случае $p = 2$, $q = \frac{3}{2}$ (рис. 2)?

Э. Г. Готман

М264. В городе одна синяя площадь и n зеленых, причем каждая зеленая площадь соединена улицами с синей и с двумя зелеными (рис. 3). На каждой из $2n$ улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую

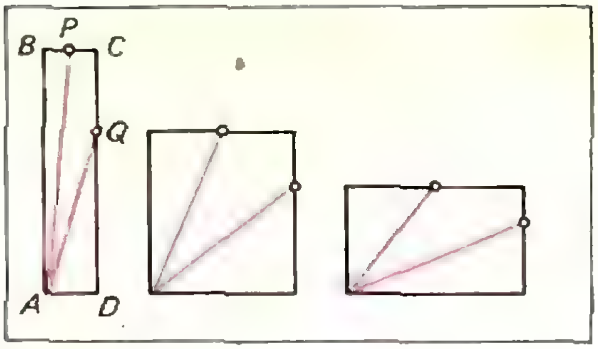


Рис. 2.

площадь можно приехать и с каждой — уехать. Докажите, что с любой площади этого города можно, не нарушая введенных правил, доехать до любой из остальных.

(Для города, план которого изображен на рисунке 4, аналогичное утверждение было бы неверным.)

Б. Розенштейн, ученик 9 класса

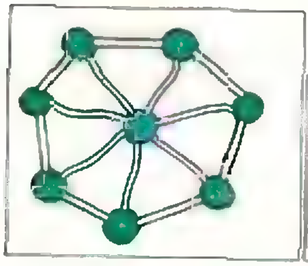


Рис. 3.

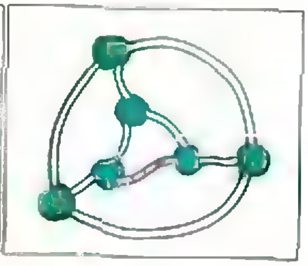


Рис. 4.

М265. Диагональ d прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами a, b и c углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma$ меньше π.

М. Л. Гервер

Ф273. Для получения газов при сверхвысоких температурах и давлениях иногда применяется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра-ствола и поршня-пули, влетающей в цилиндр с открытой стороны. При хорошей обработке ствола и пули удается добиться малой утечки газа через зазор. Благодаря очень высоким температурам сильно сжатые газы в этих условиях еще можно считать идеальными. Оценить верхний предел температуры аргона, подвергнутого сжатию в такой установке, если пуля массы $m = 100$ *г* влетает в ствол, имеющий объем $V_0 = 200$ *см*^{3}, с начальной скоростью $v = 250$ *м/с*. Начальные температура и давление газа равны соответственно $T_0 = 300°$ К и $p_0 = 1$ *атм*.

Ф274. Решите задачу Ф232 или прочтите ее решение в этом номере журнала. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R после замыкания ключа K, если вольт-амперная характеристика диода будет такой, как показано на рисунке 5?

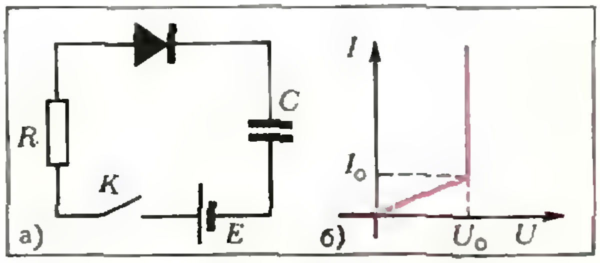


Рис. 5.

Ф275. На обод массивного колеса массы M надет дополнительный груз малого размера и массы m, причем $M : m = 15$. С какой скоростью должно катиться колесо, чтобы оно подпрыгивало?

Ф276. Какие очки следует прописать человеку, если в воде он видит нормально?

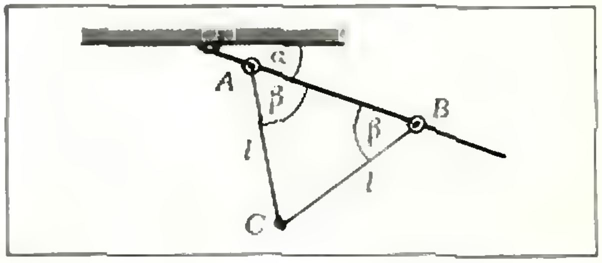


Рис. 6.

Ф277. Определить период колебаний грузика C, шарнирно прикрепленного двумя очень легкими стержнями длины l к стержню AB, укрепленному под углом α к горизонту (рис. 6). $\angle BAC = \angle ABC = \beta$. Трением пренебречь.

Решения задач

М219—М221; Ф228—Ф232

М219. *В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?*

Сначала решим аналогичную плоскую задачу. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько существует параллелограммов, для которых эти точки служат вершинами?

Эта задача значительно проще пространственной. Ответ в ней: 3 параллелограмма.

Убедиться в этом можно, например, так. Предположим, что параллелограмм имеет три данные точки вершинами. Тогда одна из них (*C* на рис. 1) играет особую роль: она соединена с двумя другими точками сторонами параллелограмма (а те две между собой — диагональю). Ясно, что такой точкой *C* можно «назначить» любую из трех данных точек, после чего параллелограмм строится единственным образом (рис. 2).

Перейдем теперь к пространственной задаче. Самое замечательное в ней — ответ: 29 параллелепипедов.

1-е решение. Сначала, как полагается в задачах «на построение», проведем небольшой анализ, то есть представим себе, что параллелепипед (имеющий четыре данные точки вершинами) построен.

Из восьми вершин параллелепипеда четыре вершины, не лежащие в одной грани, можно выделить четырьмя существенно различными способами *), как показано на рисунках 3, *а*, *б*, *в*, *г*. Чтобы отличить эти способы, достаточно, например, посмотреть, сколько в каждом случае имеется граней, содержащих три выделенных вершины, — такие грани мы будем называть жесткими (они сразу строятся по трем своим вершинам): в случае *а* три жесткие грани, *б* — две, *в* — одна, *г* — ни одной. Более трех жестких граней быть не может: две жесткие грани не могут быть параллельны, поскольку каждая содержит три данные точки, а всего точек — четыре.

Теперь для каждого случая отдельно посчитаем, сколько параллелепипедов такого типа можно построить по данным четырем точкам.

а) Три жесткие грани должны иметь общую вершину *A*. После того как на роль этой общей вершины *A* выбрана одна из четырех точек, параллелепипед строится однозначно. Итак, в этом случае можно построить 4 параллелепипеда.

б) Две жесткие грани должны иметь общее ребро. На роли концов этого ребра *B′B″* можно выбрать любые две точки из четырех (6 способов); после этого одну из двух оставшихся точек нужно соединить с *B′* (2 способа). Тем самым судьба оставшейся четвертой точки будет решена — она будет

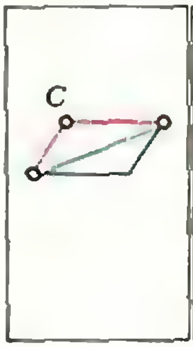


Рис. 1.

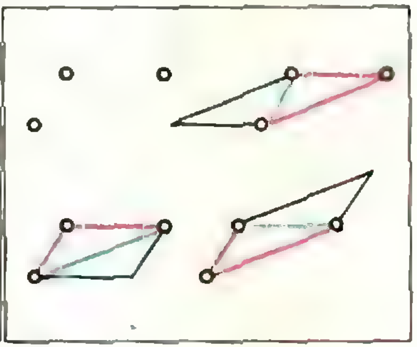


Рис. 2.

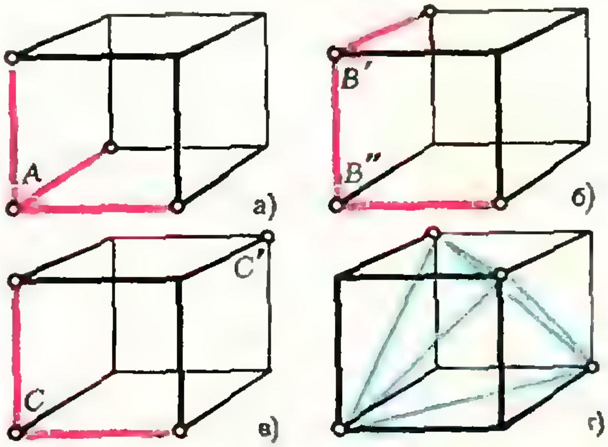


Рис. 3.

---

*) Словам «существенно различными» можно придать такой точный смысл: два 4-подмножества вершин считаются существенно различными, если нельзя отобразить множество из восьми вершин на себя так, чтобы вершины одной грани перешли в вершины одной грани, а подмножество из четырех вершин — одно в другое. На этом языке можно было продолжить решение, но мы выбрали более наглядный способ изложения.

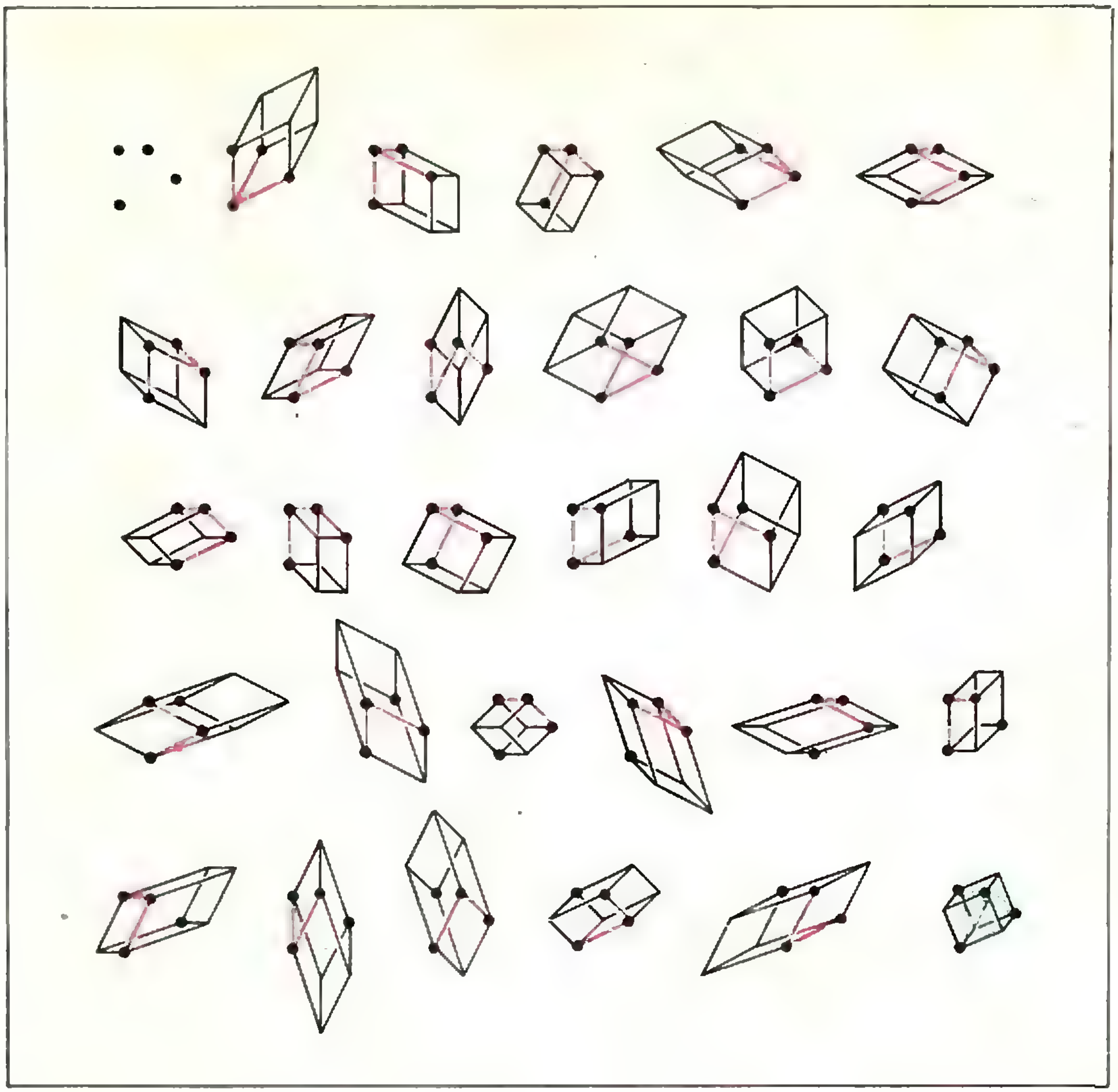


Рис. 4.

соединена с точкой B'' — и обе жесткие грани, а тем самым, и параллелепипед будут определены однозначно. Всего в этом случае можно построить 12 параллелепипедов.

в) Здесь — одна жесткая грань, содержащая три из четырех точек, а четвертая *точка C' должна быть, очевидно, противо*положной вершиной параллелепипеда по отношению к точке C — «главной» вершине жесткой грани. На роль C можно назначить любую из четырех точек, на роль C' — любую из трех остальных. После этого жесткая грань, а затем и весь параллелепипед строятся однозначно. Итак, получим еще 12 параллелепипедов.

г) Жестких граней нет, и поэтому, как нетрудно доказать, в каждой грани должны быть две выделенные точки, не лежащие на одном ребре. Три возможных разбиения множества из четырех точек на два подмножества по две точки в каждом позволяют построить три пары скрещивающихся прямых (диагоналей противоположных граней параллелепипеда), а значит, и три пары параллельных друг другу плоскостей, при пересечении которых получается нужный параллелепипед. Здесь он только один (это неудивительно, *поскольку роли всех точек совершенно оди*наковы).

Складывая, получаем ответ: $4 + 12 + 12 + 1 = 29$. На рисунке 4 воспроизведены все 29 штук.

Приведем теперь второе решение задачи (где тот же ответ получается совсем иначе, что уже гарантирует от ошибки), но раньше вернемся на минуту к плоской задаче.

Ответ «3» можно обосновать еще так. Заметим, что «средние линии» будущего параллелограмма (прямые, параллельные сторонам и расположенные посередине между ними) — это прямые, равноудаленные от всех трех данных точек. Имея две такие «средние»

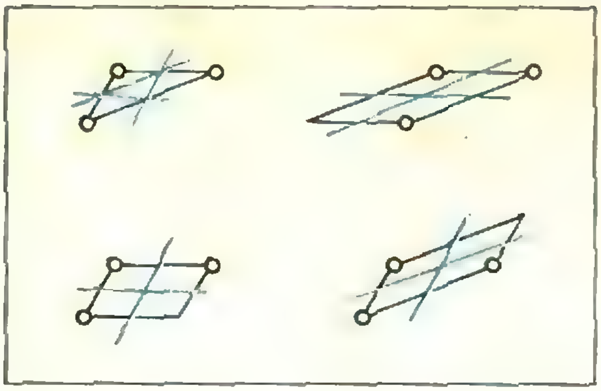


Рис. 5.

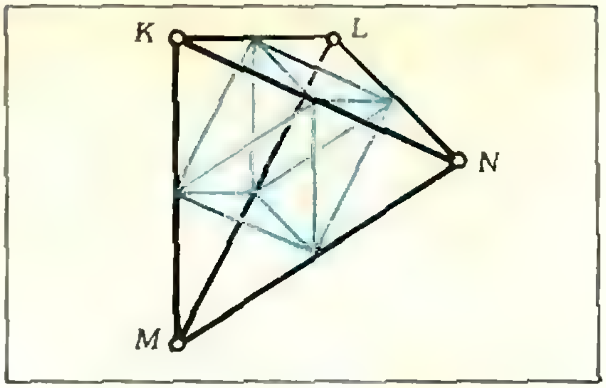


Рис. 6.

прямые, легко построить параллелограмм — достаточно провести параллельные им прямые через данные точки. Всего прямых, равноудаленных от трех данных точек, существует три (они идут по средним линиям треугольника с вершинами в данных точках). Выбрать две из них можно тремя способами (рис. 5).

2-е решение. Три «средние плоскости» искомого параллелепипеда (плоскости, равноудаленные от всех восьми его вершин) должны удовлетворять следующим условиям:

1° каждая из них равноудалена от данных четырех точек;

2° все три плоскости пересекаются в одной точке.

Обратно, если удастся указать тройку плоскостей, удовлетворяющих условиям 1° и 2°, то параллелепипед, в котором они служат «средними», определяется однозначно: достаточно через четыре данные точки провести все различные плоскости, параллельные каждой плоскости из этой тройки, — и параллелепипед готов.

Сначала выясним: сколько существует плоскостей p, равноудаленных от четырех данных точек K, L, M, N (не лежащих в одной плоскости)? Докажем, что семь. Действительно, достаточно указать, какие точки лежат по одну сторону p, а какие — по другую. Возможно, что по одну сторону будет три точки, а по другую — одна (четыре плоскости), а, возможно, что по обе стороны будет по две точки (три плоскости).

Легко видеть, как строить все эти семь плоскостей: все они пересекают ребра тетраэдра $KLMN$ в серединах, а его грани — по средним линиям (четыре плоскости пересекают тетраэдр по треугольнику, а три — по параллелограмму, рис. 6).

Три плоскости из семи мы можем выбрать $C_7^3=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=35$ способами. Каждая из этих троек удовлетворяет условию 1°; остается выяснить, сколько из этих троек «плохих», не удовлетворяющих условию 2°, то есть параллельных одной прямой.

Пользуясь тем, что линия пересечения каждых двух из семи плоскостей либо соединяет середины двух противоположных ребер тетраэдра $KLMN$ (таких случаев всего три — пересечение двух плоскостей), либо параллельна одному из ребер этого тетраэдра (причем каждому ребру параллельны три из семи плоскостей), — получим, что «плохих» троек столько же, сколько ребер у тетраэдра — шесть.

Вычитая, получаем ответ: 35 — 6 = 29.

Н. Б. Васильев

М220. *Король обошел шахматную доску 8 × 8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна единице).*

Король сделал 64 хода. Поскольку длина каждого хода равна либо единице, либо $\sqrt{2}$, то длина всего пути заведомо не меньше 64. (Путь длины 64 действительно существует — см. пример на рисунке 7.) Покажем теперь, что длина пути короля не может быть больше $28+36\sqrt{2}$. Для этого достаточно показать, что путь короля содержит не меньше 28 «прямых» ходов. Рассмотрим два соседних выхода короля на границу поля. Легко сообразить, что эти граничные поля должны быть соседними, иначе путь короля окажется самопересекающимся (см. рис. 8; постарайтесь строго доказать это утверждение). Так как цвет этих полей различен, а при ходах по диагонали цвет не меняется, то между двумя соседними выходами на границу должен быть «прямой» ход. Поскольку граничных полей 28, то и выходов на границу — тоже 28, и, следовательно, прямолинейных ходов действительно не меньше 28. Из примера пути короля, приведенного на

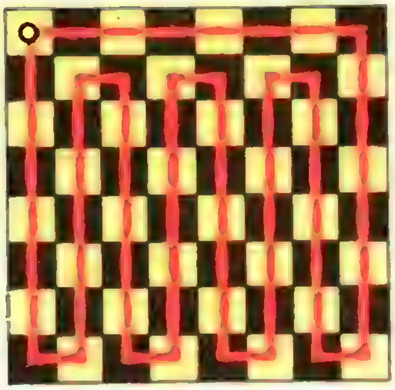


Рис. 7.

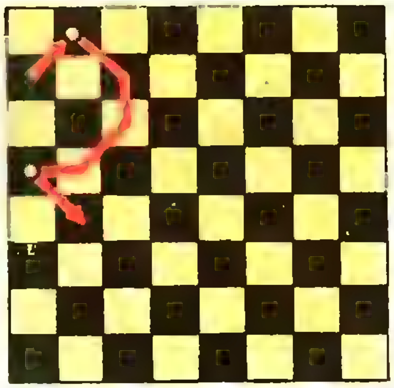


Рис. 8.

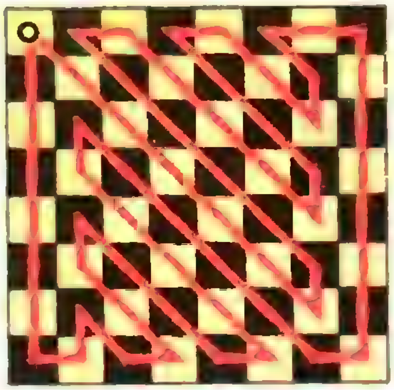


Рис. 9.

рисунке 9, следует, что можно обойтись ровно 28 «прямыми» ходами.

М221. *На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее расстояние от границы кляксы, а также наибольшее расстояние от границы кляксы. Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее — r_0, а среди наибольших выбрали наименьшее — R_0. Какую форму имеет клякса, если $r_0 = R_0$?*

Пусть A — точка кляксы, наименьшее расстояние от которой до границы кляксы равно r_0. Тогда круг радиуса r_0 с центром в точке A содержится внутри кляксы (если бы этот круг не содержался полностью внутри кляксы, то какая-то точка границы кляксы оказалась бы внутри круга, и расстояние до нее от точки A было бы меньше r_0, что противоречит выбору r_0,— см. рис. 10).

Аналогично, если B — точка кляксы, наибольшее расстояние от которой до границы кляксы равно R_0, то вся клякса содержится в круге радиуса R_0 с центром в точке B (рис. 10).

Итак, первый построенный круг содержится в кляксе, а клякса в свою очередь содержится во втором круге. Но по условию

$$r_0 = R_0 = \rho,$$

откуда следует, что круги совпадают; значит, совпадают и точки A и B, а клякса имеет форму круга с центром в точке A ($=B$) радиуса ρ.

Г. А. Гальперин

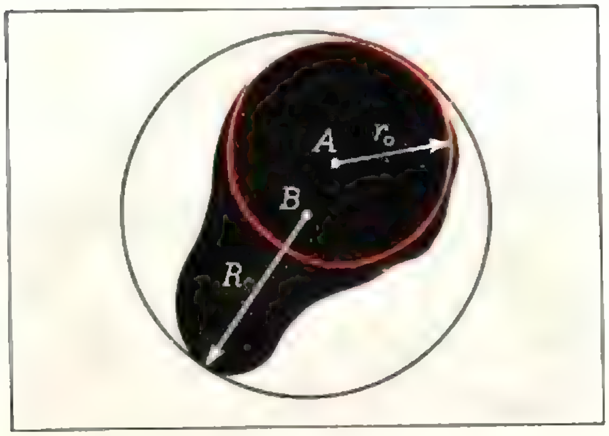


Рис. 10.

Ф228. *На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m (рис. 11). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость v_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска?*

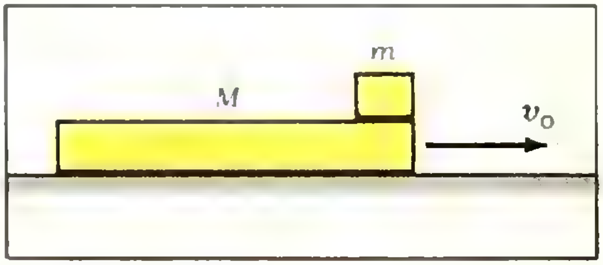


Рис. 11.

Так как доске скорость сообщается толчком, то в начальный момент брусок покоится относительно плоскости, а доска имеет скорость v_0. В горизонтальном направлении на брусок и доску действуют только силы трения скольжения $F_{тр.\,д.}$ и $F_{тр.б.}$ между ними (рис. 12). Эти силы равны по абсолютной величине μmg и сообщают бруску и доске ускорения, равные соответственно

$$a_б = \frac{\mu mg}{m} = \mu g,$$

$$a_д = -\frac{\mu mg}{M} = -\mu\frac{m}{M}g.$$

Таким образом, скорость бруска будет увеличиваться со временем, а скорость доски уменьшается.

Если начальная скорость доски невелика, то через некоторое время после начала движения скорости бруска и доски станут равными, после чего брусок и доска будут дви-

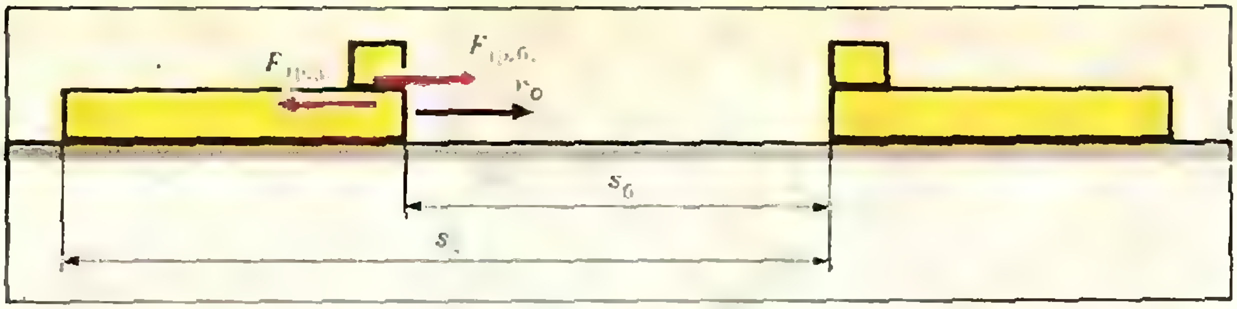


Рис. 12.

гаться как одно целое, то есть с одной и той же скоростью. Если разность перемещений бруска и доски к этому моменту равна длине бруска (рис. 12), то брусок в дальнейшем будет двигаться, находясь на краю доски. Брусок соскользнет с доски, если эта разность перемещений будет больше L.

Найдем скорость v совместного движения бруска и доски. Так как на систему доска — брусок в горизонтальном направлении не действуют внешние силы, то импульс этой системы со временем не меняется. Поэтому

$$Mv_0 + m\cdot 0 = (M + m)\,v,$$

откуда

$$v = \frac{M}{M + m}\,v_0.$$

Для нахождения величин перемещений доски и бруска воспользуемся формулой, которая связывает скорости тела v_1 и v_2 в некоторые моменты времени с его ускорением a и перемещением s за время между этими моментами:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\,as.$$

Начальная скорость бруска $v_1 = 0$, а в тот момент, когда скорости бруска и доски станут равными, $v_2 = v$. Поэтому величина перемещения бруска к этому моменту равна

$$s_{\text{б}} = \frac{v^2}{2a_{\text{б}}} = \frac{M^2v_0^2}{2\,(M + m)^2\,\mu g}.$$

Аналогично найдем величину перемещения доски:

$$s_{\text{д}} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_{\text{д}}} = \frac{M\,(m + 2M)\,v_0^2}{2\mu g\,(M + m)^2}.$$

Брусок соскользнет с доски, если

$$s_{\text{д}} - s_{\text{б}} > L,$$

или

$$\frac{M\,(m + 2M)}{2\mu g\,(M + m)^2}\,v_0^2 - \frac{M^2}{2\,(M + m)^2\,\mu g}\,v_0^2 > L.$$

Отсюда найдем, каким должно быть v_0:

$$v_0 > \sqrt{2\mu gL\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Ф229. *Однородной тонкой шайбе, лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращательное движение с угловой скоростью ω_0 и поступательное со скоростью v_0 (рис. 13). По какой траектории движется центр шайбы? В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: при $\omega_0 = 0$ или при $\omega_0 \neq 0$ (v_0 одинаково в обоих случаях)?*

Для нахождения траектории движения центра шайбы необходимо выяснить, какие силы действуют на шайбу. Так как шайба находится на шероховатой поверхности, то очевидно, что единственная сила, которая действует на шайбу в горизонтальной плоскости, это сила трения, которая всегда направлена противоположно возможному перемещению тела. Каждая точка шайбы одновременно участвует в двух движениях: в поступательном и вращательном. Поэтому величина и направление результирующей скорости для каждой точки свои. Значит, и силы трения, действующие на различные участки шайбы, различны. Поэтому для определения результирующей силы трения разобьем шайбу на элементарные участки и рассмотрим силы, на них действующие.

Выделим два одинаковых участка шайбы *1* и *2*, расположенных симметрично относительно диаметра шайбы, перпендикулярного направлению скорости v_0 (рис. 14). На эти участки действуют одинаковые по абсолютной величине силы трения $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = kmg$ (m — масса участка, k — коэффициент трения). Направления же сил трения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ различны. Найдем эти направления.

Скорость каждого из участков равна сумме скорости поступательного движения центра шайбы $\mathbf{v}_0$ и линейной скорости вращения этого участка относительно центра шайбы $\mathbf{u}$, перпендикулярной радиусу $\mathbf{R}$, проведенному к этому участку из центра шайбы.

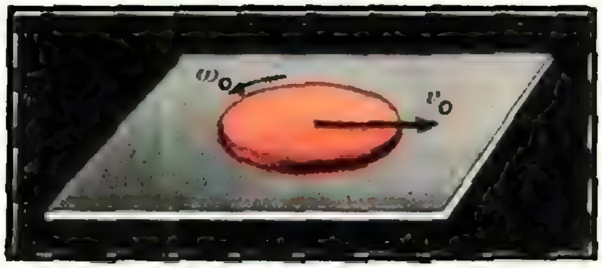


Рис. 13.

Так как $R_1 = R_2$, то $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = \omega^2 R$, то есть линейные скорости по величине равны. Кроме того, углы, которые составляют скорости $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ с направлением вектора $\mathbf{v}_0$, одинаковы. Это означает, что скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ участков *1* и *2* тоже равны по абсолютной величине, составляют с направлением вектора $\mathbf{v}_0$ одинаковые углы β, но отклонены от направления вектора $\mathbf{v}_0$ в разные стороны. Силы трения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и направлены противоположно векторам $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ соответственно. Их вертикальные составляющие, очевидно, равны между собой по абсолютной величине, но направлены в противоположные стороны, поэтому их сумма равна нулю. Следовательно, суммарная сила трения, действующая на симметричные элементарные участки шайбы, равна сумме горизонтальных составляющих и направлена противоположно вектору $\mathbf{v}_0$.

Рассматривая и другие подобные пары элементов, мы придем к выводу, что результирующая сила трения, действующая на весь диск, тоже направлена противоположно скорости $\mathbf{v}_0$. Эта сила может изменить абсолютную величину скорости поступательного движения центра шайбы, но не может изменить ее направление (ускорение, сообщаемое шайбе силой трения, направлено противоположно скорости центра шайбы). Следовательно, траекторией движения шайбы будет прямая линия.

Если в начальный момент $\omega_0 = 0$, то все силы трения, действующие на элементарные участки шайбы, направлены одинаково, то есть против скорости $\mathbf{v}_0$. Поэтому результирующая сила трения, равная их сумме, больше по величине, чем в предыдущем случае. Больше будет и величина ускорения.

Следовательно, путь, пройденный шайбой до остановки, будет меньше в том случае, когда $\omega_0 = 0$, и больше, когда $\omega_0 \neq 0$.

Ф230. *На систему, состоящую из двух соединенных пружиной шариков массы m, покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности, налетает слева шарик массы M (рис. 15). Происходит лобовой абсолютно упругий удар. Найти приближенно отношение масс $\gamma = \frac{m}{M}$, при котором удар произойдет еще раз.*

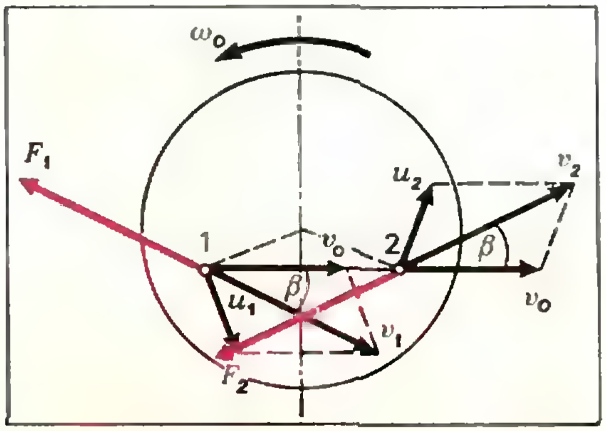


Рис. 14.

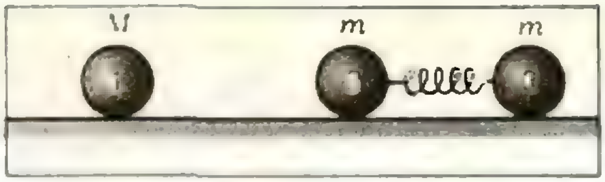


Рис. 15.

После соударения шариков *1* и *2* шарик *1* будет двигаться поступательно с некоторой постоянной скоростью. Центр масс системы шариков *2* и *3* тоже будет двигаться поступательно с постоянной скоростью, и, кроме того, шарики *2* и *3* будут колебаться относительно их центра масс. Для того чтобы ответить на вопрос, столкнутся ли шарики *1* и *2* второй раз, нужно найти зависимость координат этих шариков от времени и посмотреть, могут ли эти координаты совпасть.

Будем считать, что удар мгновенный. В этом случае он происходит так же, как соударение двух свободных шариков, не связанных с другими телами, и можно воспользоваться законами сохранения импульса и энергии*). Обозначим скорость шарика *1* до соударения v_0, его скорость после соударения v_1 и скорость шарика *2* после соударения v_2. Тогда можно записать

$$Mv_0 = Mv_1 + mv_2,$$

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Из этих уравнений нетрудно найти v_1 и v_2:

$$v_1 = v_0\frac{M-m}{M+m} = v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma},$$

$$v_2 = v_0\frac{2M}{M+m} = v_0\frac{2}{1+\gamma}.$$

После соударения первый шарик будет двигаться равномерно, и его координата будет меняться со временем по закону

$$x_1 = v_1 t = v_0\frac{1-\gamma}{1+\gamma}t.$$

Центр масс шариков *2* и *3* будет тоже двигаться равномерно, но со скоростью

$$v_ц = \frac{v_2}{2} = v_0\frac{1}{1+\gamma}$$

(так как шарики *2* и *3* одинаковые). Это означает, что координата центра масс меняется со временем по формуле

---

*) Время соударения τ должно быть таким, чтобы можно было не учитывать смещения шарика *2* и деформации пружины. Для этого должно выполняться неравенство: $\tau \ll T$, где T — период колебаний шарика *2* относительно центра масс шариков *2* и *3*.

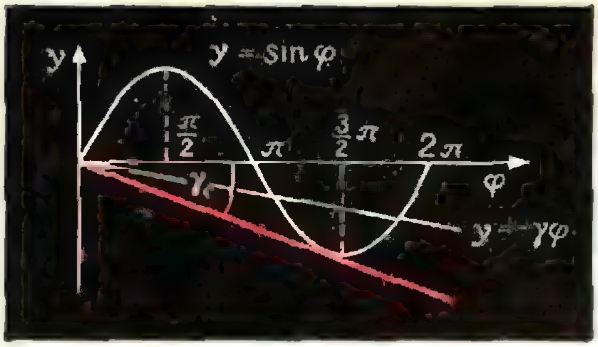


Рис. 16.

$$x_{\text{ц}} = v_0 \frac{1}{1+\gamma} t.$$

Рассмотрим движение шариков *2* и *3* в системе координат, связанной с их центром масс. В этой системе в начальный момент шары движутся навстречу друг другу с равными по абсолютной величине скоростями, поэтому в дальнейшем каждый из шаров будет совершать гармоническое колебание (относительно центра масс) по закону:

$$x = A \sin \omega t.$$

Если жесткость половины пружины обозначить k, то частота этих колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$. Амплитуду колебаний A можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии. В начальный момент пружина не деформирована, шарик *2* имеет скорость $\frac{v_2}{2}$ и энергию $\frac{mv_0^2}{2(1+\gamma)^2}$. Эту энергию приравняем энергии упругой деформации пружины в тот момент, когда отклонение шарика от положения равновесия максимально и равно амплитуде колебаний A:

$$\frac{mv_0^2}{2(1+\gamma)^2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Отсюда найдем A:

$$A = \sqrt{\frac{mv_0^2}{(1+\gamma)^2 k}} = \frac{v_0}{(1+\gamma)\omega}.$$

Теперь можно записать зависимость координаты шарика *2* от времени в системе координат, связанной с горизонтальной плоскостью:

$$x_2 = v_{\text{ц}} t + A \sin \omega t = v_0 \frac{1}{1+\gamma} t + \frac{v_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t.$$

Шарики *1* и *2* столкнутся еще раз, если возможно равенство $x_1 = x_2$, то есть

$$v_0 t \frac{1-\gamma}{1+\gamma} = \frac{v_0 t}{1+\gamma}\left(1 + \frac{1}{\omega t} \sin \omega t\right),$$

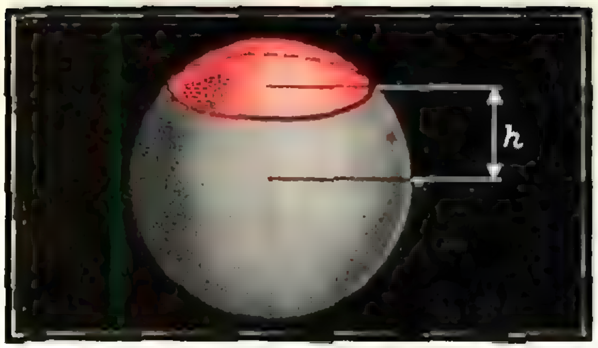


Рис. 17.

или

$$\sin \omega t = -\gamma \omega t.$$

Подобные уравнения удобно решать графически. Нарисуем графики для правой и левой частей последнего уравнения как функции $\varphi = \omega t$ (рис. 16). Решения уравнения определяются точками пересечения прямой $y = -\gamma\varphi$ и синусоиды $y = \sin \varphi$. Очевидно, решение существует, если $\gamma \leqslant \gamma_1 \approx \operatorname{tg} \gamma_1$. Из рисунка видно, что

$$\gamma_1 \approx \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)} \approx 0{,}21,$$

то есть отношение масс равно приблизительно 0,21.

Ф231. *Заряженный металлический шар радиуса R разрезан на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии h от центра (рис. 17). Найти силу, с которой отталкиваются эти части. Полный заряд шара Q.*

Так как шар металлический, заряд Q распределится равномерно по его поверхности, поэтому в дальнейшем мы будем говорить о заряженной сфере. Для того чтобы определить силу, действующую, например, на верхнюю часть сферы со стороны нижней, разобьем эту часть сферы на элементарные участки и найдем сначала силу F_i, действующую на один из таких участков (рис. 18):

$$F_i = qE,$$

где q — заряд выделенного участка, E — напряженность поля, созданного всей остальной частью сферы. Величина $q = \frac{Qs_i}{4\pi R^2}$, где s_i — площадь выделенного участка.

Как известно, напряженность поля вне сферы у ее поверхности равна

$$E_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q}{R^2},$$

а напряженность поля внутри сферы равна нулю. Из принципа суперпозиции следует, что поле как внутри, так и вне сферы складывается из поля выделенного участка сферы и поля остальной части сферы. Будем счи-

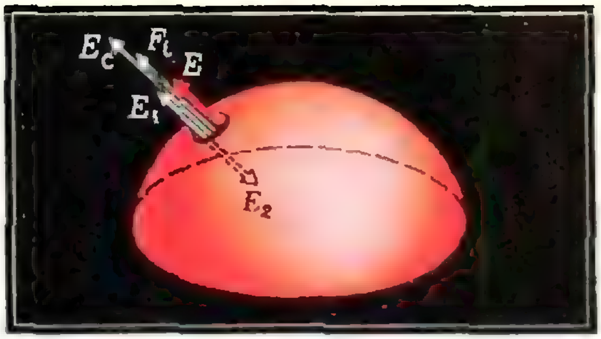


Рис. 18.

тать, что выделенный участок достаточно мал, так что его можно считать плоским. Тогда напряженности поля этого участка как внутри, так и вне сферы равны по абсолютной величине, направлены перпендикулярно площадке, но противоположно друг другу, то есть

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2 \text{ и } |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|.$$

Пусть для определенности заряд сферы положителен, тогда векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ направлены так, как показано на рисунке 18.

Поскольку напряженность поля внутри сферы равна нулю, то сумма векторов $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}$ (напряженность поля остальной части сферы) равна нулю, то есть

$$\mathbf{E}_2 = -\mathbf{E} \text{ и } |\mathbf{E}_2| = |\mathbf{E}|.$$

Тогда, для напряженности поля вне сферы можно записать

$$E_C = E + E_1 = E + E_2 = 2E,$$

откуда

$$E = \frac{1}{2} E_C = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{Q}{R^2}.$$

Это означает, что сила $\mathbf{F}_i$ равна по абсолютной величине

$$F_i = Eq = \frac{Q^2 s_i}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4}.$$

Теперь найдем силу $\mathbf{F}$, действующую на всю верхнюю часть сферы. Для этого нужно найти сумму сил $\mathbf{F}_i$, действующих на элементарные участки «верхушки» сферы. Из симметрии очевидно, что горизонтальные составляющие сил $\mathbf{F}_i$ при сложении уничтожают друг друга. Поэтому

$$F = \Sigma F_{i_\text{верт}} = \Sigma F_i \cos\alpha_i =$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon R^4} \Sigma s_i \cos\alpha_i$$

(α — угол, который вектор $\mathbf{F}_i$ составляет с вертикалью). Так как $s_i \cos\alpha_i$ — это проекция площади участка на горизонтальную плоскость, а она равна площади проекции этого участка, то ясно, что сумма $\Sigma s_i \cos\alpha_i$ равна площади S поверхности «дна» верхней части сферы, радиус которой равен $\sqrt{R^2 - h^2}$. То есть $S = \pi(R^2 - h^2)$

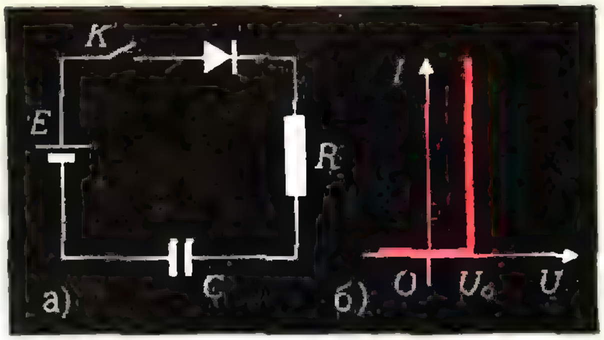


Рис. 19.

и

$$F = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}\left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right).$$

Ф232. *Диод включен в цепь, изображенную на рисунке 19, а. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке 19, б. Конденсатор предварительно не заряжен. Ключ K замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника E. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.*

После замыкания ключа в цепи возникает ток, величина которого будет постепенно уменьшаться. Как следует из вольтамперной характеристики диода, напряжение на диоде равно U_0 при всех значениях тока вплоть до нуля. Поэтому зарядка конденсатора и ток в цепи прекратятся тогда, когда напряжение на конденсаторе станет равным

$$U_C = E - U_0,$$

при этом по цепи пройдет заряд

$$q = CU_C = C(E - U_0).$$

Согласно закону сохранения энергии работа источника тока по перенесению заряда по всей цепи равна сумме работ на отдельных участках:

$$A = A_R + A_\text{д} + W_C.$$

Здесь $A = Eq$ — работа источника тока; $A_\text{д} = U_0 q$ — работа на участке цепи, содержащем диод; $W_C = \frac{1}{2} qU_C = \frac{1}{2} q(E - U_0)$ — энергия заряженного конденсатора; A_R — работа по перенесению заряда через сопротивление R, которая целиком перешла в тепло Q.

Поэтому

$$Q = Eq - U_0 q - \frac{1}{2} q(E - U_0) =$$

$$= \frac{1}{2} q(E - U_0) = \frac{1}{2} C(E - U_0)^2.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Задачи о пересечении тел

И. Ф. Шарыгин

В этой статье разбираются решения нескольких довольно трудных и, на наш взгляд, полезных задач на вычисление объемов пересечений тел. Основная трудность подобных задач заключается в том, что при их решении требуется хорошо развитое пространственное воображение. В частности, при решении любой задачи о пересечении тел очень важно суметь сделать хороший чертеж. Нередко именно от чертежа зависит успех в решении задачи. Прежде чем перейти к разбору задач, дадим вам следующий совет: прочтя условие той или иной задачи, не смотрите сразу же ее решение, подумайте некоторое время, попытайтесь сделать чертеж и решить задачу самостоятельно. Тогда вы получите и удовлетворение, и возможность сравнить свое решение с предлагаемым в статье (вполне возможно, что вам удастся придумать решение, отличное от приводимого в статье). Если ваши усилия не увенчаются успехом, то все равно время, потраченное на раздумья, пойдет на пользу и облегчит чтение статьи.

Задача 1. *В кубе с ребром a помещены три правильные четырехугольные призмы, вершины каждой из которых являются серединами ребер двух противоположных граней куба. Найти объем части куба, принадлежащей всем этим трем призмам.*

Поскольку довольно трудно представить себе, а тем более сразу изобразить искомое тело, поступим следующим образом. Поместим сначала в куб одну призму (рис. 1), затем посмотрим, что «отсечет» от нее вторая, и, наконец, что останется, когда мы добавим третью призму.

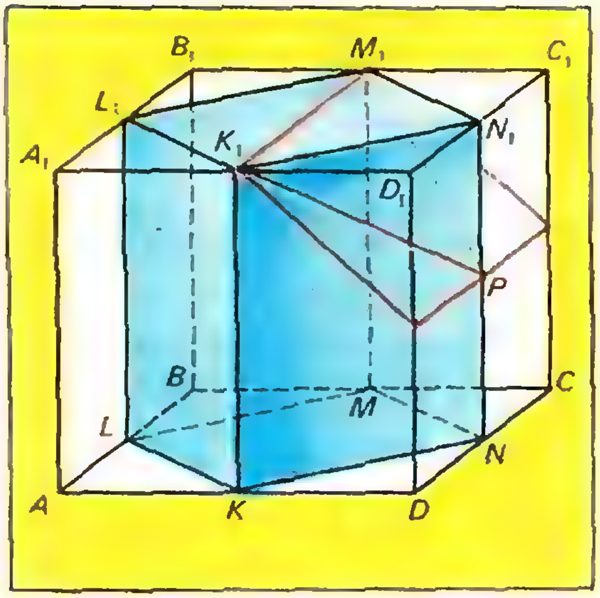


Рис. 1.

Пусть вершинами второй призмы являются середины ребер AA_1, A_1D_1, D_1D, AD, BB_1, B_1C_1, C_1C и CB (основания этой призмы лежат в «передней» и «задней» гранях куба). Ребро второй призмы, соединяющее середины ребер DD_1 и CC_1 куба, пересекает отрезок NN_1 в его середине. Значит, грань второй призмы, проходящая через точки K_1M_1 и середины ребер DD_1 и CC_1, пересекаются с гранью KK_1N_1N по прямой K_1P, а вся эта грань второй призмы отсекает от первой пирамиду $K_1M_1PN_1$.

Проведя аналогичные рассуждения для остальных граней второй призмы, мы можем изобразить общую часть первых двух призм (рис. 2). Она представляет собой две четырехугольные пирамиды: KK_1M_1MP и KK_1M_1MQ (P и Q — центры граней DCC_1D_1 и ABB_1A_1), сумма объемов которых равна $\frac{a^3}{3}$, так как $S_{KK_1M_1M} = a^2$ и $PQ = a$.

Теперь посмотрим, что «отрежет» от этого тела третья призма, основания которой лежат в гранях ABB_1A_1 и DCC_1D_1. Боковые грани этой призмы «срежут» четыре вершины: K_1, M_1, K и M. На рисунке 3 изображена пирамида KK_1M_1MP со «срезанными» третьей призмой углами. «Отрезанные» углы являются равными треугольными пирамидами. (Одна из них — $RTSK_1$, где R, T и S — середины KK_1, K_1M_1 и PK_1). Объем каждой из них составляет 1/16 часть объема пирамиды KK_1M_1MP (это легко проверяется; например, объем пирамиды $RTSK_1$ в восемь раз меньше объема пирамиды KM_1PK_1, который вдвое меньше объема пирамиды PKK_1M_1M; подробные вычисления и доказательства проведите самостоятельно).

Таким образом, от пирамид отсекается $4 \times 1/16 = 1/4$ часть. Объем общей части всех трех призм составляет 3/4 объема общей части первой и второй призм, равного $\frac{a^3}{3}$, то есть он равен $\frac{a^3}{4}$.

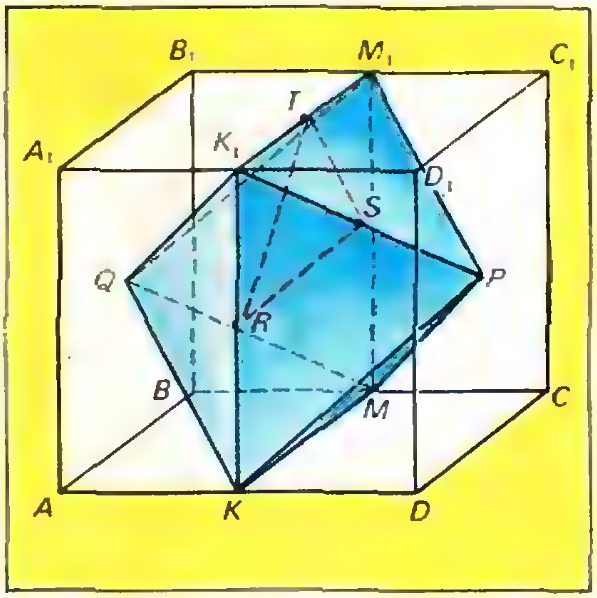


Рис. 2.

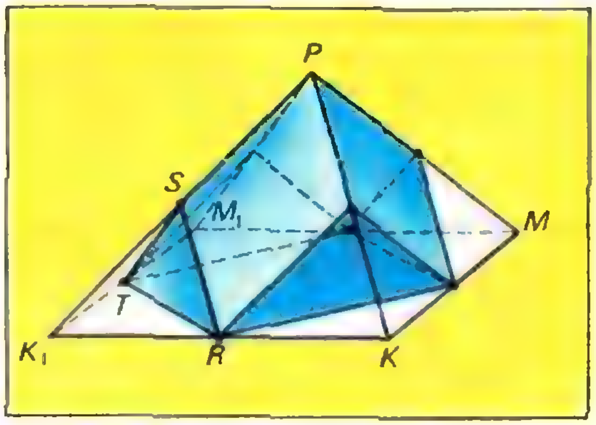


Рис. 3.

Задача 2. *Даны две равные правильные треугольные пирамиды объема V каждая, расположенные симметрично относительно точки O. Найти объем общей части этих двух пирамид, если точка O лежит на высоте одной из них и делит эту высоту в отношении* 2 : 1, *считая от вершины пирамиды.*

В этой задаче чрезвычайно важно, хотя и достаточно трудно, сделать правильный, хороший, обоснованный чертеж. Пусть $SABC$ — первая пирамида. Основание $A_1B_1C_1$ второй пирамиды пересекает высоту SH_1 в точке H, делящей ее в отношении $1:2$ (считая от вершины S), а в пересечении с пирамидой $SABC$ дает треугольник MNP, подобный треугольнику ABC, $MN = \frac{1}{3}AB$.

Отсюда легко вывести (проверьте!), что треугольник MNP целиком находится внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично внутри основания ABC будет находиться треугольник $M_1N_1P_1$, являющийся сечением второй пирамиды плоскостью треугольника ABC.

Теперь можно изобразить тело, являющееся общей частью рассматриваемых двух пирамид (рис. 4), причем положение, например, точки L находится так: надо соединить точку S с серединой ребра BC, пересечение этой прямой с прямой S_1A_1 даст точку L (для доказательства рассмотрите сечение пирамид плоскостью SA_1S_1). Аналогично находятся остальные точки на рисунке 4. Для вычисления искомого объема мы должны от объема пирамиды $SABC$ отнять объем пирамиды $SMNP$ (этот объем составляет $\frac{1}{27}V$), затем отнять объемы трех одинаковых пирамид, равных $KTRC$, и прибавить объемы трех «маленьких» пирамид, равных QM_1RL.

Найдем объем пирамиды $KTRC$. Так как плоскость KRT параллельна плоскости SAB, то $V_{KTRC}=\left(\frac{TR}{AB}\right)^3V$. Аналогично, $V_{QM_1RL}=\left(\frac{M_1R}{AB}\right)^3V$. Но $M_1R=\frac{TR-M_1N_1}{2}=\frac{3TR-AB}{6}$. Нам осталось найти $\frac{TR}{AB}$. Треугольники ABC и $M_1N_1P_1$ правильные, имеют соответственно параллельные стороны, их центры совпадают, и $M_1N_1=\frac{AB}{3}$. Отсюда легко найти, что $\frac{TR}{AB}=\frac{5}{9}$, $\frac{M_1R}{AB}=\frac{1}{9}$ (проверьте!). Искомый объем равен $V-\frac{1}{27}V-3\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3V+$

$$+3\left(\frac{1}{9}\right)^3\cdot V=\frac{110}{243}V.$$

Задача 3. *Дан куб с ребром a. Второй куб получается из данного поворотом вокруг его диагонали на угол α ($\alpha \leqslant 60^\circ$). Найти объем общей части этих кубов.*

В этой задаче представить себе и изобразить пересечение тел в целом трудно, легче понять, как пересекаются отдельные элементы одного тела с элементами другого тела.

Обозначим вершины данного куба буквами A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 (см. рис. 5), и пусть куб поворачивается вокруг диагонали B_1D против хода часовой стрелки. Посмотрим, какие куски исходного куба могут срезаться при его повороте. Вершины куба расположены дальше всего от центра куба O — середины диагонали B_1D, которая остается на месте. Поэтому уйти при повороте внутрь куба вершины не могут, наоборот они окажутся вне куба и срезаться будут куски куба около вершин. Далее, срезать куски куба могут только грани. Поэтому достаточно найти, какой кусок куба срезает каждая грань.

Найдем, что срежет грань DCC_1D_1. Подскажем сразу ответ: срезается пирамида D_1LPD (см. рис. 5), где $D_1L=D_1K=C_1P$, причем основания перпендикуляров, опущенных из точек L и K на B_1D,

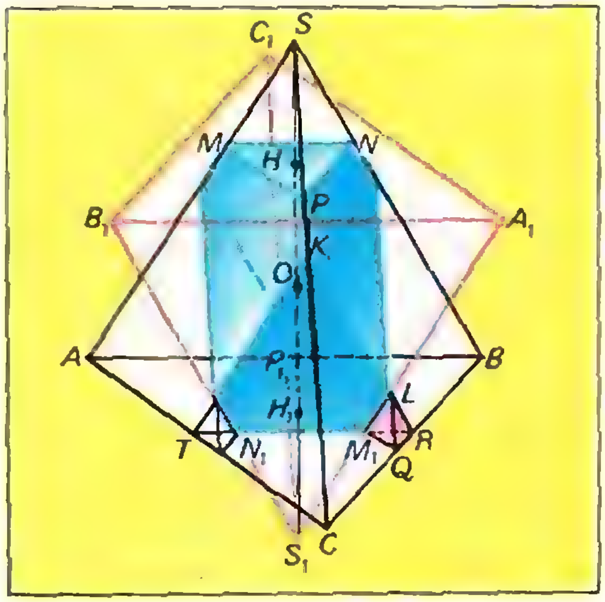


Рис. 4.

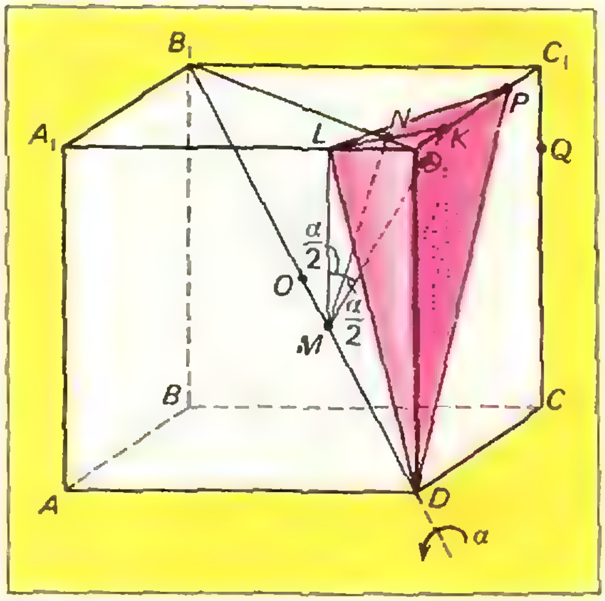


Рис.

совпадают (докажите!) в точке, которая на рисунке 5 обозначена буквой M, и $\angle LMK = \alpha$. Таким образом, при повороте куба точка K переходит в точку L. Обозначим LD_1 через x (его мы найдем позднее). Пусть Q — точка на ребре CC_1, $C_1Q = C_1P = x$. Тогда при повороте куба точка Q переходит в точку P (докажите!). Итак, грань DCC_1D_1 пересекает куб по треугольнику LPD и отсекает пирамиду D_1LPD объема $\frac{1}{6}\,ax(a-x)$ (докажите!). Аналогично рассматриваются остальные грани — они отсекают такие же пирамиды. Поэтому объем общей части кубов будет $a^3 - ax(a-x)$. Осталось найти x.

Пусть N — точка пересечения B_1D_1 и LK. Изобразим на отдельном чертеже (рис. 6) прямоугольник BDD_1B_1. Пусть T — основание перпендикуляра, опущенного из D_1 на B_1D. Имеем: $LN = ND_1 = \frac{LK}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 5). Из $\triangle LMK$ получим:

$$MN = LN \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$B_1N = B_1D_1 - ND_1 = a\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

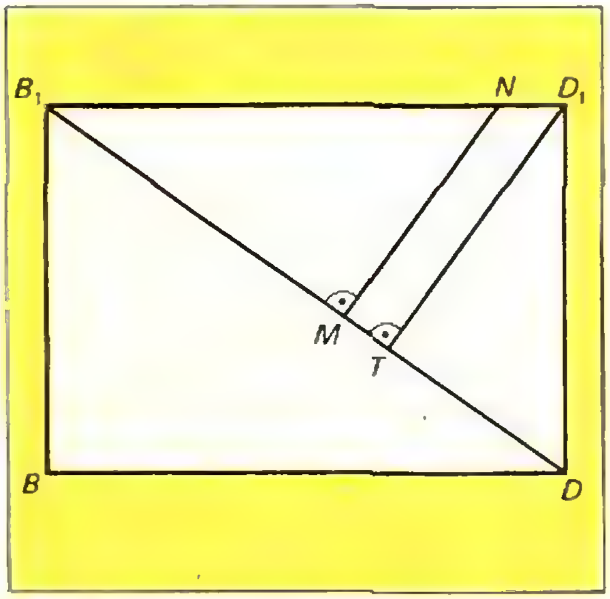


Рис. 6.

Легко из $\triangle B_1D_1D$ найти D_1T: $D_1T = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из подобия треугольников B_1NM и B_1D_1T получим:

$$\frac{B_1N}{B_1D_1} = \frac{NM}{D_1T},$$

$$\frac{a\sqrt{2} - x\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{x\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}},$$

откуда $x = \dfrac{2a}{1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$, искомый объем равен

$$V = a^3 - \frac{2a^2}{1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} \times \left(a - \frac{2a}{1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{3a^3}{2[1+\cos(\alpha-60^\circ)]}.$$

Задача 4. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Середины двух его противоположных ребер AB и C_1D_1 служат серединами двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, причем на одном из этих ребер лежит соответствующее ребро куба. Найти объем общей части куба и тетраэдра.*

Пусть точка K — середина AB — является серединой ребра PQ правильного тетраэдра, а M — середина D_1C_1 и одновременно середина ребра RS тетраэдра (D_1C_1 лежит на RS (рис. 7)).

Если ребро тетраэдра равно b, то расстояние между серединами его скрещивающихся ребер легко вычисляется, оно равно $b\frac{\sqrt{2}}{2}$ (проверьте!). С другой стороны, $MK = a\sqrt{2}$. Значит, $b = 2a$.

Мы знаем длину ребра тетраэдра, однако не так просто изобразить пересечение данных тел — неясно, будут ли ребра тетраэдра пересекать куб. Чтобы ответить на этот вопрос,

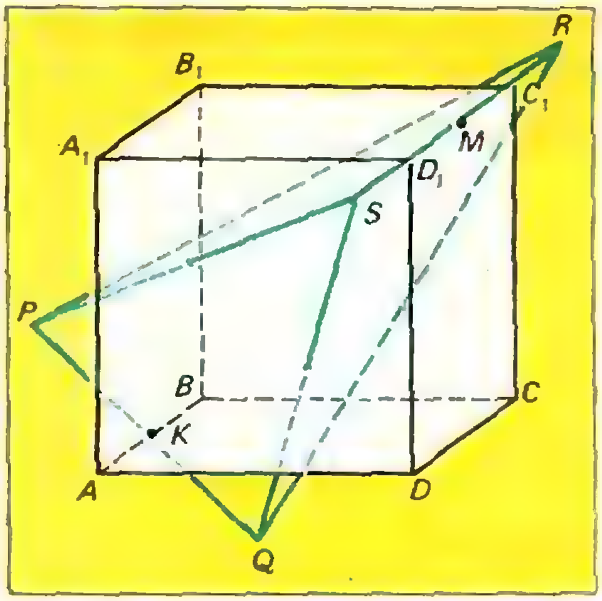


Рис. 7.

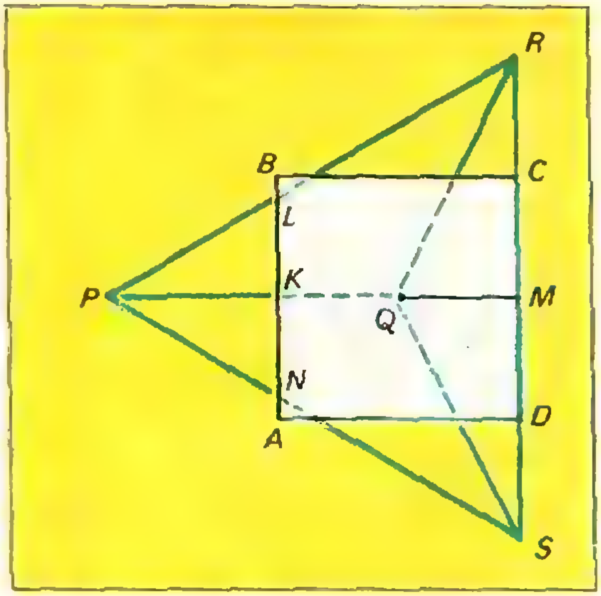


Рис. 8.

спроектируем данные тела на плоскость $ABCD$ (рис. 8). Поскольку PQ составляет с этой плоскостью угол 45° (докажите!), то длина проекции PQ на эту плоскость будет

$$b\frac{\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}.$$

Пусть L — точка пересечения проекций прямых AB и PR. Из подобия треугольников PLK и PMR легко найдем:

$$LK=\frac{RM\cdot PK}{PM}=a\frac{1}{1+\sqrt{2}}<\frac{a}{2}.$$

Значит, ребро PR тетраэдра (а следовательно, и другие ребра: PS, QR и QS) пересекает куб.

Для вычисления объема удобно изобразить заданное тело как тетраэдр со срезанными углами. Чтобы определить, какую часть объема тетраэдра составляет каждая из срезанных пирамид, удобно воспользоваться следующим утверждением (докажите его самостоятельно), которое оказывается полезным довольно часто.

Даны две пирамиды $SABC$ и $SA_1B_1C_1$, причем A_1 лежит на SA; B_1 на SB; C_1 на SC. Тогда отношение объемов этих пирамид равно отношению произведений длин ребер, выходящих из вершины S, а именно

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}}=\frac{SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1}{SA\cdot SB\cdot SC}.$$

Теперь легко можно найти объемы пирамид, «отрезанных» от вершин P и Q. Каждый из них составляет

$$\frac{PK}{PQ}\cdot\frac{PL}{PR}\cdot\frac{PN}{PS}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2(3+2\sqrt{2})}$$

часть объема тетраэдра, а объемы пирамид, «отрезанных» от вершин R и S, составляют $^1/_{16}$ объема тетраэдра (проверьте!). Объем тетраэдра равен $\frac{b^3\sqrt{2}}{12}=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. Значит, объем общей части куба и тетраэдра будет равен

$$\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}-\frac{1}{8}\right)=$$

$$=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}(16\sqrt{2}-17).$$

Упражнения

1. Даны две равные правильные треугольные пирамиды, симметричные относительно точки O, расположенной на высоте одной из этих пирамид. Найти объем общей части этих двух пирамид, если точка O делит эту высоту, считая от вершины пирамиды, в отношении: а) 3 : 1; б) 1 : 1; в) 4:1.

2. Дан правильный тетраэдр объема V. Второй тетраэдр получается из данного поворотом его на угол α вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер тетраэдра. Найти объем общей части этих двух тетраэдров.

3. Треугольная пирамида $PQMN$ и куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены следующим

образом: середина ребар PQ совпадает с серединой ребра AB и $PQ = 2AB$, ребро D_1C_1 лежит на ребре MN, их середины совпадают, $MN = 3D_1C_1$. Какая часть объема пирамиды расположена внутри куба, если известно, что PQ перпендикулярно плоскости ABD_1C_1?

4. Ребро одного правильного тетраэдра служит апофемой другого тетраэдра. Апофема противоположной данному ребру грани первого тетраэдра лежит на ребре второго. Какая часть объема первого тетраэдра расположена внутри второго?

5. Центры куба и правильного тетраэдра совпадают, два ребра тетраэдра параллельны диагоналям одной из граней куба. Найти объем части тетраэдра, находящейся внутри куба, если ребро куба равно a, ребро тетраэдра равно $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$.

6. Внутри правильной треугольной пирамиды находится вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а биссектрисы плоских углов проходят через вершины основания пирамиды. В каком отношении поверхность трехгранного угла делит объем пирамиды, если известно, что боковая поверхность пирамиды разделена на две равные по площади части?

7. Диагональ единичного куба лежит на ребре двугранного угла в 60°. Доказать, что объем части куба, находящейся внутри двугранного угла, имеет постоянную величину, и найти этот объем.

8 (МГУ, физфак, 1963). Ребро куба равно a. Сфера с центром O пересекает три ребра, сходящиеся в вершине A, в их серединах. Из точки B пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину A, причем угол между этим перпендикуляром и радиусом OB делится ребром куба пополам. Найти радиус сферы.

9 (МГУ, физфак, 1968). В правильной треугольной пирамиде высота равна h, сторона основания равна a. Одна из вершин основания является центром сферы, касающейся противоположной грани пирамиды. Найти площадь тех частей боковых граней пирамиды, которые расположены внутри сферы.

10 (МФТИ, 1968). В тетраэдре $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны и равны a и b соответственно. Общий перпендикуляр к этим ребрам пересекает ребро AB в точке M и ребро CD в точке N; $MN = c$. В тетраэдр вписан куб так, что четыре ребра куба параллельны MN и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найти ребро куба.

Биосфера и ЭМП

(Окончание. Начало см. с. 42)

то есть в несколько тысяч раз, изменяет деятельность зрительного анализатора у человека, вызывает нарушения поведения и деятельности внутренних органов у мышей, затормаживает рост растений и угнетает размножение бактерий. Эти немногочисленные еще исследования приводят к выводу, что электромагнитное поле является существенным фактором, определяющим нормальную жизнедеятельность биосферы, наряду с температурой, давлением атмосферы, составом воздуха и т. п.

Электромагнитный фон Земли зависит и от солнечной активности. При анализе и выяснении тех физических факторов, которые, будучи связанными с колебаниями солнечной активности, могли повлиять на биологические земные процессы, астрономы и астрофизики называют в первую очередь электромагнитное поле. В экспериментах на животных биологи успешно подтверждают эти гипотезы.

Таким образом, можно говорить о существовании своеобразного электромагнитного «моря», которое питают естественные и искусственные источники, земные и космические. Человечеству, живущему в этом море, необходимо знать его течения, мели и острова, чтобы управлять интенсивностью биологических процессов, охранять больных от пагубных для них магнитных бурь, излечивать некоторые заболевания. Без правил плавать в этом море становится все опаснее.

(Из статьи Ю. А. Холодова «Электромагнитные поля — новые раздражители», помещенной в международном ежегоднике «Будущее науки» за 1971 год.)

И. А. Зайцев

Электрические машины постоянного тока

В этой статье мы не будем подробно обсуждать устройство различных электрических машин. Мы рассмотрим работу электромотора и динамо-машины (динамо-машина — старое название индукционного генератора электрического тока), используя два основных закона — закон Ома и закон сохранения энергии.

Статья состоит в основном из вопросов и ответов. Работая над статьей, прежде чем прочитать ответ, попробуйте ответить на вопрос самостоятельно. Даже если вам это не удастся, размышление над вопросом принесет несомненную пользу, благодаря чему лучше запомнится правильный ответ.

Электромоторы

Во всех электромоторах (или, по-другому, электродвигателях) обязательно есть одни и те же основные части. Это, прежде всего, индуктор и якорь. Индуктор является источником магнитного поля. Когда по обмотке якоря пропускается электрический ток, якорь, находящийся в магнитном поле, приходит во вращение. Таким образом происходит преобразование электрической энергии в механическую. Если, например, вал мотора соединить со станком, станок можно привести в движение.

Вопрос. *Рассмотрим мотор постоянного тока с независимым возбуждением (в нем индуктором является или постоянный магнит, или электромагнит, обмотка которого питается независимо от обмотки якоря). Как записывается закон Ома для цепи якоря такого мотора, подключенного к источнику постоянного тока?*

Ответ. В электрической цепи якоря имеются две электродвижущие силы — напряжение источника тока U и э. д. с. индукции $E_и$, возникающая в обмотке якоря при его вращении в магнитном поле индуктора. Причем э. д. с. индукции, согласно правилу Ленца, противоположна по знаку напряжению источника тока. Поэтому закон Ома запишется так:

$$U - E_и = IR, \qquad (I)$$

где I — ток в цепи, а R — общее сопротивление обмотки якоря и подводящих проводов.

Вопрос. *Как записывается закон сохранения энергии для такой цепи?*

Ответ. Энергия $W_п = UIt$, потребляемая от источника, тратится на джоулево тепло, которое выделяется на сопротивлении R, и на совершение полезной работы A. Поэтому, согласно закону сохранения энергии

$$UIt = I^2Rt + A,$$

или для мощностей

$$UI = I^2R + P. \qquad (II)$$

Из равенств (I) и (II) можно получить много важных следствий.

Вопрос. *Чему равна полезная мощность P?*

Ответ. Умножив обе части равенства (I) на ток I, получим

$$UI - E_{\text{и}}I = I^2R,$$

или

$$UI = I^2R + E_{\text{и}}I.$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (II), можно сразу же заметить, что

$$P = E_{\text{и}}I,$$

то есть полезная мощность мотора равна произведению э. д. с. индукции на ток.

Вопрос. *Получив какой-нибудь результат, всегда полезно проанализировать возможные частные случаи. Мы только что выяснили, что полезная мощность мотора равна $E_{\text{и}}I$. Посмотрим, при каких условиях мотор не будет совершать механической работы, то есть $P = 0$. Что при этом происходит в цепи якоря?*

Ответ. Произведение $E_{\text{и}}I$ может быть равно нулю, если $E_{\text{и}} = 0$ или $I = 0$.

Чтобы э. д. с. индукции была равна нулю, магнитный поток, проходящий через витки обмотки якоря, не должен меняться. Это возможно, если якорь мотора заторможен, то есть не вращается. При этом по обмотке заторможенного якоря идет ток

$$I = \frac{U}{R}.$$

Мотор не совершает работы еще в одном случае, когда $I = 0$. Это возможно не только тогда, когда мотор не подключен к источнику тока. Из закона Ома следует, что $I = 0$ еще и в том случае, когда

$$E_{\text{и}} = U,$$

то есть мотор вращается с такой скоростью, что э. д. с. индукции равна по абсолютной величине напряжению источника тока. При этом мотор не потребляет электроэнергии от источника: так как $I = 0$, то и потребляемая мощность $P_{\text{п}} = UI = 0$. Якорь мотора вращается по инерции*).

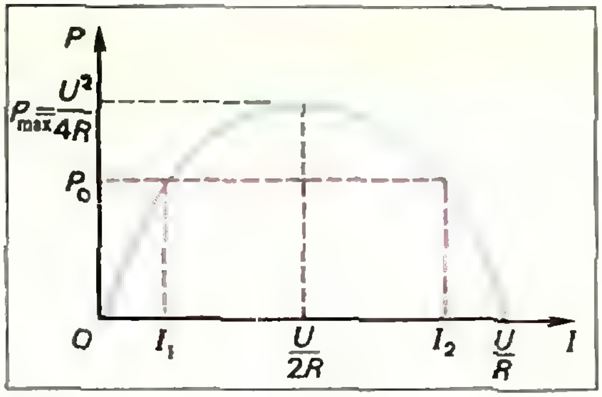


Рис. 1.

Вопрос. *Вернемся к формуле (II). Из нее следует, что полезная мощность мотора равна*

$$P = UI - I^2R.$$

Как выглядит график зависимости P от тока I?

Ответ. Это парабола, пересекающая ось I в точках $I = 0$ и $I = \frac{U}{R}$ (рис. 1). Из соображений симметрии очевидно, что полезная мощность мотора максимальна при $I = U/2R$ и равна

$$P_{\max} = \frac{U^2}{4R}.$$

Вопрос. *Чему равен коэффициент полезного действия мотора с независимым возбуждением при условии, что развиваемая им мощность максимальна?*

Ответ. Как мы видели, механическая (полезная) мощность мотора максимальна при $I = \frac{U}{2R}$ и равна $P_{\max} = \frac{U^2}{4R}$. Мощность, потребляемая мотором от источника, равна

$$P_{\text{п}} = UI = \frac{U^2}{2R}.$$

Следовательно, коэффициент полезного действия в рассматриваемом случае

$$\eta = \frac{P_{\max}}{P_{\text{п}}} = \frac{U^2 2R}{4RU^2} = \frac{1}{2}.$$

Вопрос. *Интересно заметить, что одной и той же величине полезной мощности такого мотора соот-*

---

*) Это следует еще и из того, что при $I = 0$ равны нулю и силы, действующие в магнитном поле индуктора на обмотку якоря.

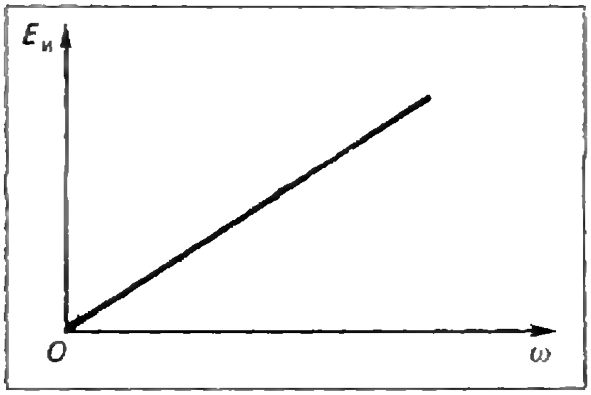


Рис. 2.

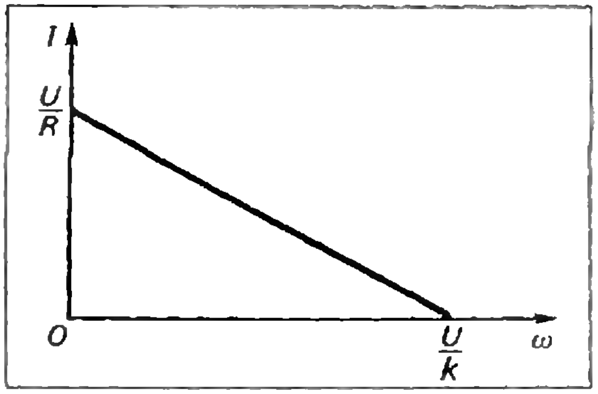


Рис. 3.

ветствуют два значения тока. Так, мощность равна P_0 при токах I_1 и I_2 (рис. 1).

Посмотрим, с чем это связано.

Ответ. Полезная мощность зависит от э. д. с. индукции, возникающей в якоре, и от тока, текущего по его обмотке:

$$P = E_и I.$$

При неизменных U и R величина тока зависит от э. д. с. индукции:

$$I = \frac{U - E_и}{R}.$$

Из закона электромагнитной индукции следует, что э. д. с. индукции, возникающая в обмотке якоря, пропорциональна скорости изменения магнитного потока $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ через эту обмотку:

$$E_и \sim \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В свою очередь скорость изменения магнитного потока пропорциональна угловой скорости вращения якоря ω. Таким образом

$$E_и \sim \omega,$$

или

$$E_и = k\omega,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

График зависимости $E_и$ от ω показан на рисунке 2.

Теперь посмотрим, как зависят от ω ток в цепи якоря и полезная мощность двигателя. Из закона Ома

$$I = \frac{U - E_и}{R} = \frac{U - k\omega}{R},$$

а из закона сохранения энергии

$$P = UI - I^2R = E_и I = \frac{kU\omega - (k\omega)^2}{R}.$$

Графики зависимости I и P от ω приведены на рисунках 3 и 4.

Итак, каждому значению угловой скорости ω соответствуют определенные значения э. д. с. индукции $E_и$ и тока I. Причем при увеличении ω величина $E_и$ увеличивается, а величина I уменьшается. При этом полезная мощность, развиваемая мотором, оказывается одинаковой при двух разных значениях скорости вращения якоря.

Вопрос. *В свою очередь угловая скорость вращения якоря зависит от нагрузки двигателя. Как?*

Ответ. Электрические силы, действующие на якорь в магнитном поле индуктора, пропорциональны току, идущему по обмотке. Пропорциональны току и моменты этих сил, то есть

$$M_э = k_1 I,$$

где коэффициент пропорциональности k_1 зависит от конструкции двигателя. Так как

$$I = \frac{U - k\omega}{R},$$

то

$$M_э = k_1 \frac{U - k\omega}{R}.$$

То есть суммарный момент электрических сил, действующих на якорь, линейно зависит от угловой скорости вращения якоря. При малой угловой скорости вращения якоря момент сил

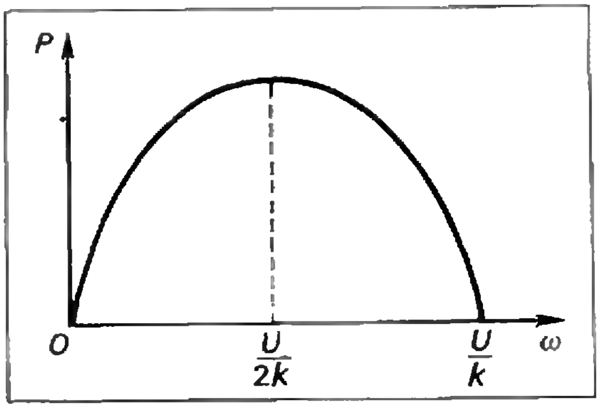


Рис. 4.

большой, при увеличении угловой скорости он уменьшается и становится равным нулю при

$$\omega = \frac{U}{k}.$$

С другой стороны, на вал двигателя действует момент механических сил, так называемый момент нагрузки M. Например, если двигатель равномерно поднимает на веревке груз, то момент нагрузки равен произведению силы натяжения веревки, которая равна весу груза, на радиус вала. В установившемся режиме якорь мотора, очевидно, вращается с такой скоростью ω, при которой момент электрических сил, действующих на якорь, равен моменту нагрузки. Действительно, пусть, например, скорость вращения якоря меньше ω. В этом случае момент электрических сил больше момента нагрузки, так что угловая скорость вращения якоря будет увеличиваться. Если угловая скорость вращения якоря больше ω, то момент электрических сил меньше момента нагрузки. Это будет приводить к уменьшению скорости вращения якоря до ω.

Таким образом, устанавливается такая угловая скорость вращения якоря, при которой

$$M_э = M,$$

то есть

$$k_1\frac{U - k\omega}{R} = M$$

откуда

$$\omega = \frac{k_1U - MR}{k_1k}.$$

То есть угловая скорость вращения якоря линейно зависит от момента нагрузки.

Итак, нагрузка определяет ток в обмотке якоря и угловую скорость его вращения.

Рассмотрим такую задачу.

Задача. *Электродвигатель присоединен к источнику постоянного напряжения. При числе оборотов $n_1 = 1000$ об/мин ток в цепи якоря равен $I_1 = 10$ а, а при числе оборотов $n_2 = 900$ об/мин он равен $I_2 = 15$ а. Найти число оборотов двигателя на холостом ходу (без нагрузки).*

Так как $I = \frac{U - k\omega}{R}$, а $\omega = 2\pi n$, то

$$I_1 = \frac{U - 2\pi kn_1}{R}$$

и

$$I_2 = \frac{U - 2\pi kn_2}{R}.$$

В режиме холостого хода $I_3 = 0$, поэтому

$$U - 2\pi kn_3 = 0.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$n_3 = \frac{I_2n_1 - I_1n_2}{I_2 - I_1} =$$

$$= \frac{15\cdot1000 - 10\cdot900}{5} = 1200 \quad (об/мин).$$

Обратимость электрических машин

Все машины постоянного тока обратимы. Если на клеммы машины подать постоянное напряжение, то якорь будет вращаться, совершая механическую работу, то есть получим электромотор. С другой стороны, если вращать якорь с помощью другой машины, то электрическая машина будет работать как динамо-машина, вырабатывающая ток.

Вопрос. *Предположим, одна и та же машина вращается с оди-*

наковой скоростью, работая один раз в качестве динамо-машины, а другой раз — в качестве мотора. Что можно сказать об э. д. с. индукции, возникающей в якоре в обоих случаях?

Ответ. Так как э. д. с. индукции зависит только от конструкции якоря и угловой скорости вращения якоря, то э. д. с. индукции в обоих случаях будет одна и та же.

Вопрос. *А если угловые скорости вращения динамо-машины и мотора разные?*

Ответ. В этом случае отношение электродвижущих сил индукции будет равно отношению угловых скоростей вращения якоря.

Вопрос. *Мы уже говорили о законе Ома и о законе сохранения энергии для мотора и записали соответствующие равенства* (I) *и* (II). *Как будут выглядеть аналогичные равенства для динамо-машины?*

Ответ. Пусть сопротивление цепи динамо-машины равно R. Тогда, согласно закону Ома

$$E_д = I_д R,$$

где $E_д$ — э. д. с. индукции динамо-машины и $I_д$ — ток.

Далее, если пренебречь потерями энергии (например, на трение), то можно записать закон сохранения энергии так:

$$P_м = E_д I_д.$$

Здесь $P_м$ — механическая мощность, затрачиваемая на вращение якоря, $E_д I_д$ — электрическая мощность, развиваемая динамо-машиной.

Решим теперь несколько задач.

Задача 1. *Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением, включенный в цепь батареи с напряжением* $U = 24$ *в, при полном сопротивлении цепи* $R = 20$ *ом делает* $n_1 = 600$ *об/мин при токе в цепи* $I = 0{,}2$ *а. Какую э. д. с. разовьет тот же мотор, работая в качестве динамо-машины, при* $n_2 = 1400$ *об/мин?*

Э. д. с., развиваемая динамо-машиной, равна

$$E_д = \frac{n_2}{n_1} E_и,$$

где $E_и$ — э. д. с., возникающая в обмотке якоря мотора при скорости вращения $n_1 = 600$ *об/мин*. Ее можно найти из закона Ома:

$$E_и = U - IR.$$

Поэтому

$$E_д = \frac{n_2}{n_1}(U - IR) =$$

$$= \frac{1400}{600}(24 - 0{,}2 \cdot 20) \approx 46{,}7 \text{ (в)}.$$

Задача 2. *Груз массой* m *подвешен на нити, намотанной на ось якоря динамо-машины с независимым возбуждением. Нить сматывается с оси так, что груз опускается с постоянной скоростью* v_1. *Динамо-машина замкнута на сопротивление* R. *С какой скоростью* v_2 *будет подниматься вверх тот же груз, если динамо-машину включить как электромотор в цепь постоянного тока с напряжением* U *и с тем же сопротивлением цепи* R?

Мощность мотора, поднимающего груз массой m со скоростью v_2, равна mgv_2. Из закона Ома и закона сохранения энергии следует, что

$$U - E_и = IR \qquad (1)$$

и

$$UI = I^2R + mgv_2, \qquad (2)$$

где I — ток и $E_и$ — э. д. с. индукции в обмотке якоря. Эта э. д. с. связана с э. д. с. индукции динамо-машины соотношением

$$\frac{E_и}{E_д} = \frac{v_2}{v_1}. \qquad (3)$$

Запишем теперь закон Ома и закон сохранения энергии для динамо-машины:

$$E_д = I_д R$$

и

$$E_д I_д = mgv_1.$$

Отсюда

$$E_д = \sqrt{mgv_1 R},$$

и из соотношения (3)

$$E_{н} = \frac{v_2}{v_1} E_{д} = \frac{v_2}{v_1} \sqrt{mgv_1R}.$$

Подставив полученное выражение для $E_{н}$ в уравнение (1) и решая затем уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$v_2 = \frac{\sqrt{mgv_1R}\, U - mgv_1R}{mgR} = U \sqrt{\frac{v_1}{mgR}} - v_1.$$

Задача 3 (Ф226). *Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью v_1 при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью v_0. С какой скоростью v_2 будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь.*

После того как обмотка окажется замкнутой накоротко, мотор превратится в динамо-машину, причем ток I в якоре динамо-машины будет таким же, каким он был, когда машина работала как электромотор. Действительно, в обоих случаях один и тот же груз движется (поднимается или опускается) равномерно. Поэтому момент сил, действующих на якорь со стороны магнитного поля индуктора и пропорциональный величине тока, равен моменту силы тяжести груза. При подъеме невесомой нити (в режиме холостого хода) момент нагрузки равен нулю, следовательно, и ток $I_0 = 0$. Запишем закон Ома для всех трех случаев.

При подъеме груза с помощью мотора

$$U - E_{н} = IR, \qquad (1)$$

где U — напряжение на клеммах мотора.

При опускании груза, когда мотор работает как динамо-машина

$$E_{д} = IR. \qquad (2)$$

Когда мотор работает на холостом ходу

$$U - E'_{н} = 0. \qquad (3)$$

Для трех э. д. с. $E_{н}$, $E'_{н}$ и $E_{д}$ можно записать следующие соотношения:

$$E_{н} = \frac{v_1}{v_2} E_{д} \qquad (4)$$

и

$$E'_{н} = U = \frac{v_0}{v_2} E_{д}. \qquad (5)$$

Окончательно из равенств (1) — (5) находим

$$v_2 = v_0 - v_1.$$

Упражнения

1. Электромотор без нагрузки делает 1000 *об/мин*, а с некоторой нагрузкой — 700 *об/мин*. Какой будет частота его вращения, если момент нагрузки увеличится на 20%?

2. Электродвигатель присоединили к источнику напряжения 500 *в*. Зная, что при токе 10 *а* он развивает мощность 4 *квт*, найти его мощность при токе 20 *а* (ток меняется вследствие изменения нагрузки).

3. Угловая скорость вращения якоря динамо-машины с постоянным магнитом увеличилась на 10%. На сколько процентов увеличилась при этом полезная мощность динамо-машины?

4. Сопротивление обмотки якоря мотора равно R_1, а обмотки индуктора — R_2. Если обмотки якоря и индуктора соединены последовательно и подключены к одному источнику тока, говорят о моторах с последовательным возбуждением, или о сериесных двигателях. Если же обмотки соединены параллельно, говорят о моторах с параллельным возбуждением, или о шунтовых двигателях. В каком случае максимальная полезная мощность будет больше? Каковы при этом коэффициенты полезного действия шунтового и сериесного двигателей? Напряжение на клеммах мотора равно U.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Ниже помещены варианты вступительных экзаменов по математике 1973 года на гуманитарных факультетах Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Отделение планирования экономической кибернетики экономического факультета

Вариант 1

1. График функции $y = 1 - 3x^2$ пересекается в двух точках с прямой, наклоненной к оси x под углом φ. Вычислить абсциссу середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x.

2. Найти все пары чисел x, y, для которых выполняются одновременно следующие условия:

а) $x^2 - 2xy + 12 = 0$;
б) $x^2 + 4y^2 \leqslant 60$;
с) x является целым числом.

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с площадью основания S и высотой h. Через вершину A_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке B_2, боковое ребро CC_1 в точке C_2 и боковое ребро DD_1 в точке D_2. Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2 = c$.

4. 5100 шаров, из которых 300 красных, а остальные — белые, разложены в некотором числе ящиков так, что в каждом ящике находится не более трех шаров красного цвета. Доказать, что найдется два ящика, содержащих одинаковое число шаров (белых и красных в совокупности).

Вариант 2

1. График функции $y = 2x^2 - x$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси y с ординатой b. Найти среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось абсцисс.

2. Найти все пары чисел x, y, для которых одновременно выполняются следующие условия:

а) $2x^2 - xy + 9 = 0$;
б) $2x^2 + y^2 \leqslant 81$;
в) x является целым числом.

3. Точки E и F лежат по одну сторону от плоскости треугольника ABC, причем отрезок EA перпендикулярен этой плоскости, а основание H перпендикуляра FH, опущенного из точки F на эту плоскость, лежит на отрезке BC. Найти объем многогранника, ограниченного треугольниками ABC, AEC, EFC, FCB, BFE и AEB, если известно, что $EA = a$, $FH = b$ и площадь треугольника ABC равна S.

4. В 100 ящиках разложено 4000 белых и 300 красных шаров, причем вес каждого красного шара в три раза больше веса каждого белого шара. Доказать, что найдется два ящика, содержимое которых имеет одинаковый вес.

Отделение политической экономии экономического факультета

Вариант 1

1. Катер прошел вверх, против течения реки, 4 *км*, затем прошел вниз, по течению, еще 39 *км*, затратив на все 1 час времени. Найти скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 7,5 *км/ч*.

2. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся обеих боковых сторон треугольника и первой окружности. Определить радиус второй окружности.

3. Решить уравнение

$$1 - \sqrt{13 + 3x^2} = 2x.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x - 4\sin 3x + 2\cos x - 4}{\sin x - 1} = 0.$$

5. Решить неравенство

$$\log_x \frac{1}{3} < \log_{\frac{x+1}{2}} \frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. Моторная лодка прошла вниз, по течению реки, 45 *км* и вверх, против течения, еще 4 *км*, затратив на все это 1 час времени. Скорость течения реки 8,5 *км/ч*. Найти скорость лодки в стоячей воде.

2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписана окружность. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся основания, одной из боковых сторон треугольника и вписанной в него окружности. Определить радиус второй окружности.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{5 - 2x} = 6x - 1.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x + \cos 2x + 4\cos 3x + 2\cos x + 4}{2\cos x - 1} = 0.$$

5. Решить неравенство

$$\log_{2x} 3 > \log_{3x+1} 3.$$

Факультет психологии

Вариант 1

1. Двое рабочих получили задание обработать партию из 72 одинаковых деталей. Первый рабочий обработал за 3 часа часть этой партии, после чего был сменен вторым рабочим, обработавшим за 4 часа оставшуюся часть партии. Сколько деталей обрабатывает за час второй рабочий, если для обработки 18 деталей ему требуется время, на $^1/_2$ часа больше, чем то, за которое обрабатывает 18 деталей первый рабочий?

2. Найти все корни уравнения

$$2\log_2 \sin x + \log_2 (4\,\mathrm{ctg}^2 x) = \log_2 3.$$

3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) сторона основания равна a, боковое ребро пирамиды равно $5a/\sqrt{2}$. Пусть A и C — противоположные вершины основания пирамиды, E — середина ребра SC. Найти расстояние от центра шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки A и E параллельно диагонали BD основания $ABCD$.

4. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$2^{\frac{3}{2}\log_2 (21-5x)} < 32 + 2^{\log_2 (8x-7)}.$$

Вариант 2

1. Два автоматических станка обрабатывают фанеру. Первый станок приступил к обработке партии в 64 $м^2$ фанеры и за 4 часа обработал часть этой партии, после чего оставшаяся часть партии была обработана за 2 часа вторым станком. Сколько фанеры обрабатывает за час второй станок, если 24 $м^2$ он обрабатывает за время, на один час большее, чем требуется на обработку 24 $м^2$ первому станку?

2. Найти все корни уравнения

$$\log_3 (2\,\mathrm{tg}^2 x) = \log_3 2 - 2\log_3 (2\cos x).$$

3. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) равны a, высота пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}a$. Пусть B и D — противоположные вершины основания пирамиды, E — середина ребра SC. Найти расстояние от центра шара, описанного около пирамиды $SABCD$, до плоскости, проведенной через точки A, D, E.

4. Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$3^{\frac{5}{2}\log_3 (13-4x)} - 3^{\log_3 (3x-2)} < 47.$$

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

Вариант 1

1. Сумма, равная 53 коп., составлена из трехкопеечных и пятикопеечных монет, общее число которых меньше 15. Если в этом наборе монет трехкопеечные монеты заменить пятикопеечными, а пятикопеечные — трехкопеечными, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более чем в 1,5 раза. Сколько трехкопеечных монет было в наборе?

2. Плоскость, не содержащая вершин заданной правильной n-угольной пирамиды, делит совокупность этих вершин на две части. Сколькими способами можно осуществить подобное деление?

3. Найти минимальное значение следующего выражения:

$$\cos 2x - 8\cos x.$$

4. Можно ли вокруг четырехугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$ и $AC = 6$?

5. Решить уравнение

$$\log_{x-1} \sqrt[4]{2x^2 - 8x + 9} = \frac{1}{2}.$$

Вариант 2

1. В классе, в котором учится менее 27 человек, писали контрольную работу. Среди выставленных за нее оценок встречаются только оценки «3», «4» и «5». Оценки «3» и «5» получило одинаковое число учеников, а оценок выше «3» поставлено больше 23. Оценку «4» получило нечетное число учеников. Сколько оценок «3» и «4» было поставлено?

2. Грани трехгранной призмы, занумерованные числами от 1 до 5, окрашиваются пятью разными красками так, чтобы грани, имеющие общее ребро, были окрашены разными цветами. Сколько различных способов такой окраски существует, если два способа окраски считаются одинаковыми только тогда, когда при каждом из них грани с одинаковыми номерами окрашиваются в один и тот же цвет?

3. Найти минимальное значение следующего выражения:

$$\frac{1}{\cos^4 x} - \mathrm{tg}^2 x.$$

4. Вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Кроме того, $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Чему равна длина отрезка AC?

5. Решить уравнение

$$\log_x \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1.$$

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Новые книги

Академия наук всегда уделяла большое внимание пропаганде научных достижений. Этой цели, в частности, служит серия «Научно-популярная литература», издаваемая с 1931 года. За сорок с лишним лет выпущено около 1300 книг. Среди них — вошедшие в классику мировой литературы произведения С. И. Вавилова, В. А. Обручева, А. Е. Ферсмана, Е. В. Тарле и других ученых. Успешными были издания коллективных научно-популярных трудов, дающих обзор современного состояния и проблем науки в ее ведущих областях, например: *«Глазами ученого»* под редакцией А. Н. Несмеянова, *«Наука и молодежь»*, *«Химия больших молекул»* под редакцией А. В. Топчиева и др. В последнее время редакция научно-популярной литературы издательства «Наука» ежегодно выпускает 50—60 научно-популярных книг.

В 1974 году в редакции научно-популярной литературы издательства «Наука» выйдут следующие научно-популярные книги по математике и физике.

1. Виленкин Н. Я. *Популярная комбинаторика.* Объем 12 л. Тираж 25 000 экз. Цена 40 коп. (IV квартал).

С комбинаторными задачами приходится иметь дело математикам, физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам и многим другим. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений. В книге в популярной форме рассказывается об интересных комбинаторных задачах и методах их решения.

2. Фаермарк Д. С. *Задача пришла с картины.* Объем 8,2 л. Тираж 90 000 экз. Цена 54 коп. (I квартал).

Книга представляет собой своеобразную попытку создания научно-беллетристического произведения на математической основе. Рассказав о знаменитой картине Н. П. Богданова-Бельского «Устный счет», о жизни художника и о его школьном наставнике — известном педагоге и просветителе С. А. Рачинском, изображенном на картине среди крестьянских детей, автор обращается к задаче, условие которой написано на классной доске. Далее читатель узнает о многих интересных задачах, о русских, советских и зарубежных математиках, внесших большой вклад в теорию чисел. Книга содержит много интересных математических фактов, наблюдений, теорем, и несомненно будет полезна читателям «Кванта».

3. Гегузин Я. Е. *Очерки о диффузии в кристаллах.* Издание второе, дополненное. Объем 12 л. Тираж 30 000 экз. Цена 40 коп. (III квартал).

В книге около семидесяти глав-очерков, в каждой из которых популярно рассказано о каком-нибудь диффузионном явлении, процессе или механизме. Темы очерков выбраны так, что книга охватывает практически все те проявления диффузионного перемещения атомов, которые представляют научный интерес или важны для практики. Каждая из глав-очерков — это самостоятельный рассказ, который с другими связан только единством темы. Автор книги — доктор физико-математических наук, исследователь, непосредственно изучающий диффузию, поэтому о многом в книге говорится на основе личного опыта. В новом издании книга дополнена очерками об эффектах и явлениях, обнаруженных и изученных в последнее время. В частности, изложены представления о так называемой квантовой диффузии.

4. Губкин А. Н. *Электреты.* Объем 10 л. Тираж 20 000 экз. Цена 65 коп. (III квартал).

Электрет — это постоянно наэлектризованный диэлектрик, несущий на одной стороне положительный заряд, а на другой — отрицательный и способный создавать электрическое поле в окружающем его пространстве. В книге дается описание методов изготовления электретов из разных диэлектриков, их свойств, теорий электретного эффекта, принципов работы различных электретных приборов. Обсуждаются новые направления технического применения электретов.

5. Жданов Г. Б. *Множественная генерация частиц.* Объем 8 л. Тираж 12 000 экз. Цена 50 коп. (II квартал).

Новые астрофизические открытия познакомили нас с миром сверхвысоких температур и давлений. В этих условиях частицы атомных ядер — нуклоны — могут ускоряться до энергий, которые эквивалентны нагреву материи до триллионов градусов. При столкновениях таких частиц концентрируется невообразимо огромная энергия, что приводит к одновременному рождению (генерации) множества новых частиц — мезонов, возбужденных нуклонов и античастиц. О методах экспериментального изучения процессов множественной генерации частиц с помощью космических лучей и мощных ускорителей заряженных частиц и рассказывает эта книга.

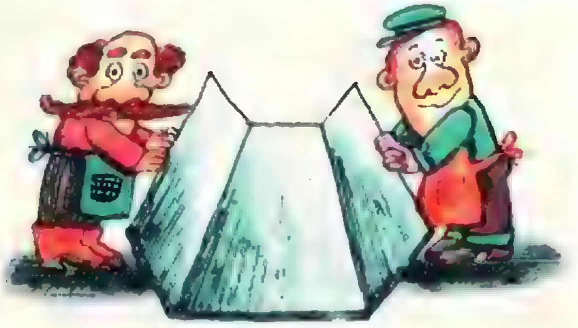
В. П. Лишевский

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Из цилиндрического бревна надо вырезать прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть сечение этого бруса?

2. Из прямоугольного металлического листа надо согнуть желоб с сечением в форме равнобочной трапеции (см. рисунок). Какой ширины должны быть боковые полосы и под каким углом надо их отогнуть, чтобы сечение желоба имело наибольшую площадь?



Рисунки Э. Назарова

3. Почему керосиновая лампа гаснет, если подуть сверху в ее стеклянный колпак?

4. Вам нужно определить вес тела. Известно, что чашечные весы, которыми вы можете пользоваться, «неправильные». Зато гири — «правильные». Как определить с их помощью вес тела?

5. Почему вода в проруби не поднимается до верхней кромки льда?

6. Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны быть они быть, чтобы периметр прямоугольника численно равнялся его площади?

КОЗА НА ПРИВЯЗИ

В.Н.Крупский, А.И.Орлов

После окончания занятий в вечерней математической школе, когда последние школьники уже ушли домой, мы увидели забытую кем-то тетрадь. Это был дневник без имени автора. Записи показались нам интересными, и мы решили напечатать выдержку из дневника.

«... Козы прожорливы и съедают все, до чего могут дотянуться. Мой приятель ловко использовал это обстоятельство. Он жил в деревне и хорошо знал грибные места. Но когда приходили друзья и спрашивали, куда пойти завтра за грибами, он отвечал: «Коза покажет». В самом деле, к вечеру его коза съедала траву на участке в форме стрелки, направленной к самому грибному месту (рис. 1). Мне стало интересно, как это у него получается. Вчера я рассказал об умной козе моему соседу-математику, и вот что он мне ответил.

Математик. — Это совсем не так сложно, как ты думаешь. Давай разбираться с самого начала. Если в поле привязать козу к колышку десятиметровой веревкой, то она съест траву, конечно, в круге радиуса 10 метров. Попробуем привязать ее по-другому. В точках A и B вобьем колышки, между ними натянем веревку. У второй веревки один конец закрепим на «ошейнике» козы, а на другом конце сделаем петлю, которая будет скользить по первой веревке. Теперь коза сможет съесть траву на участке, состоящем из прямоугольника и двух полукругов с центрами в точках A и B (рис. 2). Расстояние от точки границы «выеденного» участка до первой веревки всегда равно длине второй веревки.

Я. — А что такое «расстояние от точки до веревки»? Ведь можно измерять расстояние от точки M до точки A, или до точки B, или до какой-нибудь внутренней точки C отрезка AB (рис. 3). Все время мы будем получать разные результаты.

Математик. — Расстоянием от точки M до отрезка называется

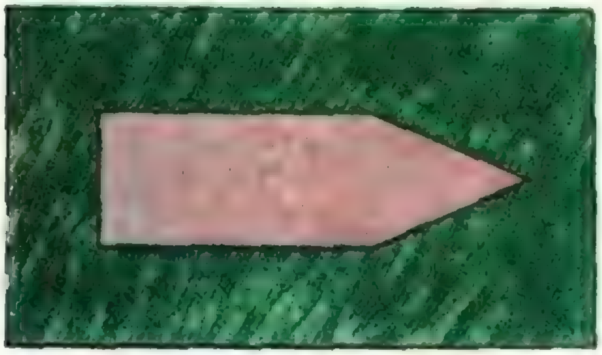


Рис. 1.

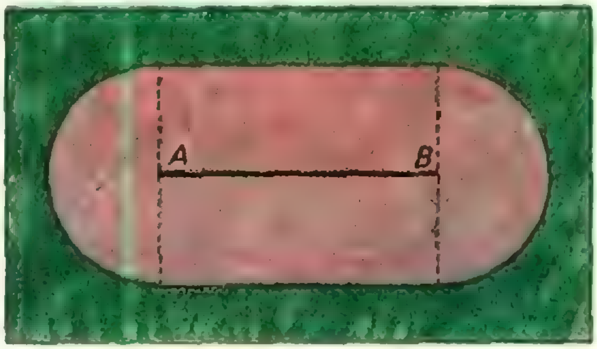


Рис. 2.

наименьшее из расстояний от точки M до точек отрезка. На рисунке 3 расстоянием от точки M до отрезка AB является длина отрезка MA, потому что MA — наименьший из отрезков, соединяющих точку M с точками отрезка AB. Если же основание C' перпендикуляра, опущенного на прямую AB из точки M', попадает в отрезок AB, то в качестве расстояния надо взять длину этого перпендикуляра $M'C'$.

Теперь попробуем «ограничить» козу прямоугольным участком. Постараемся использовать предыдущий результат. Вбив колышки в точках A и B и привязав козу, как мы делали раньше, ограничим ее уже знакомой фигурой, которую нарисуем черным карандашом (рис. 4). Если вбить колышки в точках C и D, то козе придется питаться внутри фигуры, обведенной красным. Как ты думаешь, что будет, если мы к ошейнику козы привяжем две веревки, по одной «от каждой фигуры»?

Я. — Здорово придумано! Теперь она будет есть траву только внутри общей части черной и красной фигур, то есть внутри прямоугольника.

Математик. — Да, так и получится. Математики называют общую часть двух фигур их пересечением. Всегда, когда мы сумеем при помощи веревок и колышков ограничить козу какими-то двумя фигурами, мы сможем ограничить ее и пересечением этих фигур. Просто надо к ошейнику козы привязать веревки и «от первой», и «от второй» фигур.

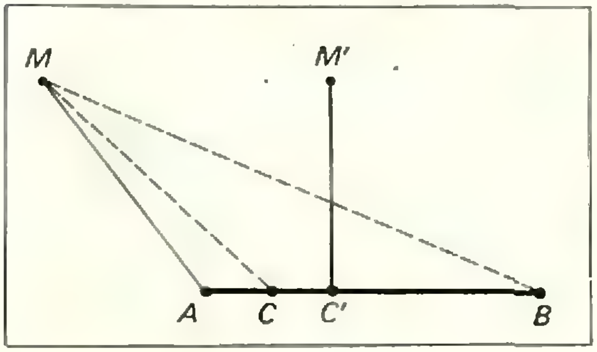


Рис. 3.

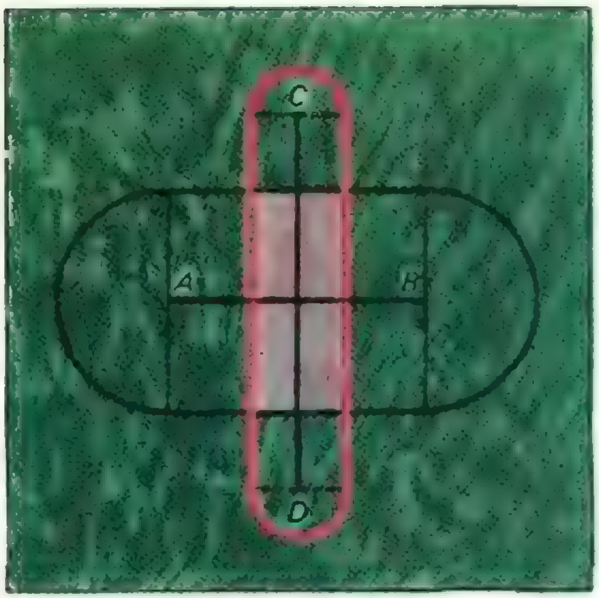


Рис. 4.

Я. — Но если козу привязать к колышку десятиметровой веревкой, то она, вытянув шею, доберется до травы, которая растет дальше, чем в десяти метрах. Шея-то у нее длинная!

Математик. — Ты прав. Мы упрощаем дело — строим математическую модель. Например, мы считаем, что земля ровная, коза съедает всю траву, до которой может дотянуться, причем коза маленькая, а веревки длинные, и изображаем козу точкой.

Я. — И считаем, что веревки не растягиваются и скользят друг по другу. И еще — очень важно! — что коза не запутывается в веревках и может перепрыгнуть через них.

Математик. — Совершенно верно. Теперь вернемся к твоему приятелю. Стрелка — это пересечение параллелограмма и прямоугольника (рис. 5), так что ничего удивительного в поведении козы нет, она может «построить» и более интересные фигуры.

Задача. 1. Попробуй ограничить козу параллелограммом.

Задача 2. Ограничь козу

а) треугольником;

б) правильным шестиугольником;

в) заданным выпуклым многоугольником.

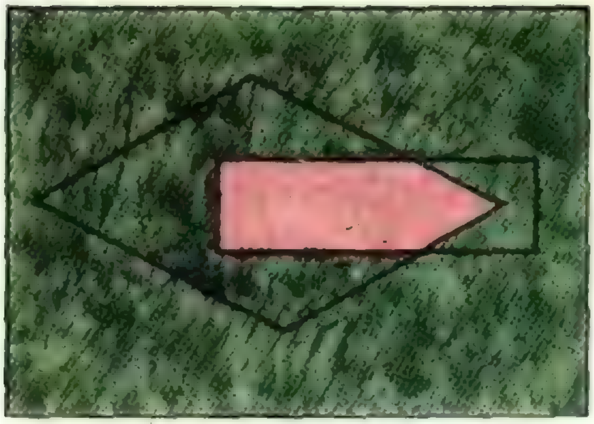


Рис. 5.

Я. — Решив эти задачи, я смогу заставить козу «съесть» и сектор.

Математик. — Конечно, ведь сектор — это пересечение треугольника с кругом, а обе эти фигуры ты сможешь получить. Кстати, вот тебе еще задача.

Задача 3. Как заставить козу съесть полукруг?

Я. — Я подумаю над твоими задачами. Интересно, ты сам полностью придумал «Теорию голодной козы» или воспользовался какими-нибудь математическими понятиями?

Математик. — Я уже говорил о таких вещах, как расстояние от точки до отрезка, пересечение фигур. Но, по-моему, самое нужное математическое понятие, которое использовалось, — это понятие «окрестности фигуры радиуса R».

Определение. *Окрестностью радиуса R фигуры Ф называется множество всех тех точек, расстояние от которых до фигуры Ф не превосходит R (здесь R — неотрицательное число).*

Я. — А что такое «расстояние от точки до фигуры»?

Математик. — Это естественное обобщение понятия «расстояние от точки до отрезка».

Определение. *Расстоянием от точки M до фигуры Ф называется наименьшее из расстояний от точки M до точек фигуры Ф.*

Я. — Значит, окрестность радиуса R точки — это круг радиуса R, окрестность радиуса R отрезка AB — та самая фигура, с которой ты начал разговор (рис. 2). А что такое окрестность радиуса 0?

Математик. — Сама фигура Ф. Вообще, если $R_1 < R_2$, то окрестность радиуса R_1 фигуры является частью окрестности радиуса R_2.

Я. — А прямоугольник является пересечением окрестностей отрезков (рис. 4). Интересно...

Математик. — Заметим, что окрестность радиуса R фигуры Ф состоит из тех и только тех точек плоскости, что лежат в окрестности радиуса R хотя бы одной из точек Ф, то есть лежат в одном из кругов радиуса R с центрами в точках Ф. Кстати, вот тебе еще задачи.

Задача 4. Что является окрестностями радиуса 1 следующих фигур (см. рис. 6):

а) креста;
б) окружности;
в) прямоугольника;
г) границы этого прямоугольника?

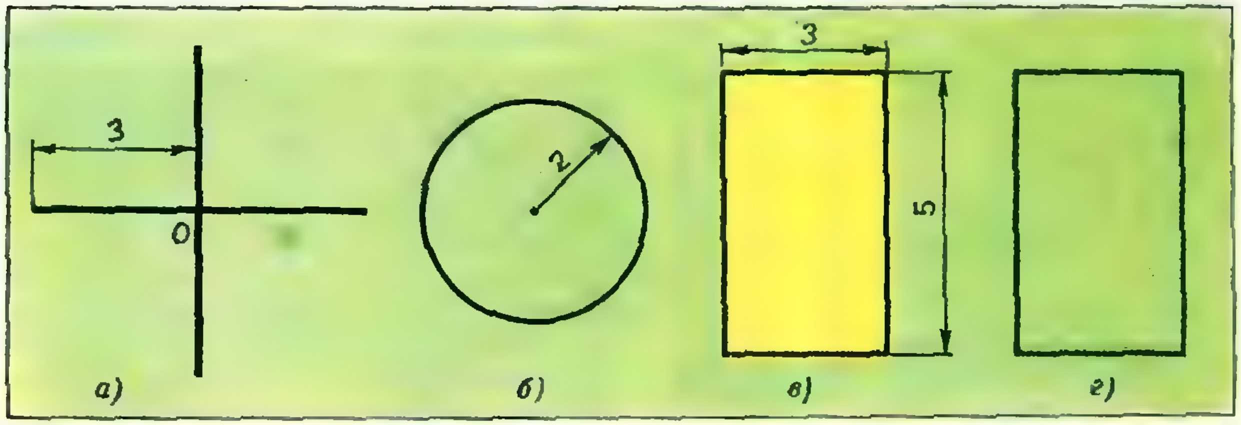


Рис. 6.

Задача 5. Какова площадь окрестности радиуса R выпуклого многоугольника с периметром P и площадью S?

Я. — Мы забыли про козу.

Математик. — Нет, почему же? Если у нас есть проволока, можно петлю веревки длины R надевать на нее. Тогда коза съест окрестность радиуса R проволочного контура. Мы считаем, конечно, что контур приварен к единственному колышку, так что он неподвижен, и петля свободно скользит по нему.

Я. — Значит, с помощью проволоки можно заставить козу съесть окрестности радиуса R окружности и границы прямоугольника?

Математик. — Да. Вот с окрестностью креста дело обстоит сложнее.

Задача 6. Подумай, какой нужен проволочный контур, чтобы получить окрестность креста.

Я. — Действительно, сам крест в качестве контура не подойдет — ведь через точку O (рис. 6, *а*) петля не пройдет. Надо подумать... Интересно, можно ли в «Теории голодной козы» использовать окрестность самого прямоугольника, а не его границы?

Математик. — Построим низкую загородку по границе прямоугольника так, что коза легко перепрыгивает через нее. Один конец веревки длины R привяжем к ошейнику, а другой — к рогульке — «якорю», который может двигаться только внутри прямоугольника. Перетащить его через загородку коза не может. Тогда коза будет питаться в окрестности радиуса R прямоугольника.

Ты, может быть, знаешь, что разностью Φ_1/Φ_2 двух фигур Φ_1 и Φ_2 называют фигуру, состоящую из всех тех точек Φ_1, которые не лежат в Φ_2. Например, разностью прямоугольника со сторонами 30 *м* и 40 *м* и окрестностью его границы радиуса 5 *м* будет прямоугольник со сторонами 20 *м* и 30 *м* (рис. 7).

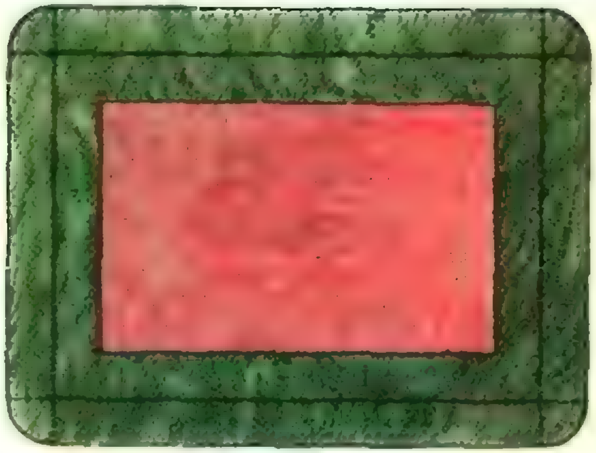


Рис. 7.

Я. — В «Теории голодной козы» это можно использовать так. К прямоугольному проволочному контуру 30 *м*×40 *м* пятиметровой цепью привяжем собаку. Она будет бегать по окрестности радиуса 5 *м* границы этого прямоугольника и не пускать козу за пределы прямоугольника 20 *м*×30 *м*.

Математик. — Вот похожая задача.

Задача 7. Как одной собакой удержать непривязанную козу в полукруге?

«Теорию голодной козы» можно развивать в разных направлениях. Например, можно пользоваться только колышками и веревками и требовать, чтобы все веревки были постоянно натянуты. Тогда заставить козу ограничиться прямоугольником $ABCD$ можно так: вбить колышки в вершинах прямоугольника, натянуть веревки между A и B и между C и D, набросить веревочное кольцо на веревки AB и CD, натянуть его до отказа и привязать козу к кольцу. Ведь для точек прямоугольника сумма расстояний до двух противоположных сторон постоянна. Теперь ты сможешь заставить козу «съесть» треугольник и при новых ограничениях...».

Следующий лист был выдран, и мы не узнали о дальнейшем развитии «Теории голодной козы». Может быть, читатели «Кванта» помогут нам и предложат свои варианты теории?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Задачи о пересечении тел»

1. а) $\frac{V}{2}$; б) $\frac{2}{9}V$; в) $\frac{12}{25}V$.

2. При $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ объем общей части равен $V\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. Указание. Рассмотрите прямоугольник, получающийся при пересечении тетраэдра плоскостью, перпендикулярной оси вращения и такой, что угол между его диагоналями α (таких прямоугольников будет два).

3. Отношение объема части тетраэдра, находящейся внутри куба, к объему всего тетраэдра равно $\frac{54-28\sqrt{2}}{27}$.

4. $2(2-\sqrt{3})$.

5. $\frac{23}{32}a^3$.

6. $\frac{3}{11}$ (считая от вершины пирамиды).

7. $\frac{1}{6}$. Указание. Пусть одна грань двугранного угла пересекает какое-то ребро куба в точке M, а другая грань — другое ребро в точке N, тогда эти ребра непременно выходят из одной вершины, обозначим ее A, причем $MA+NA=1$.

8. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

9. $\frac{9a^2h^3}{12h^2+a^2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{12h^2+a^2}}{a\sqrt{3}}$.

10. $\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

К статье «Электрические машины постоянного тока»

1. 8400 *об/мин.*

2. 6 *квт.*

3. 21%.

4. $P_{o.\,max}=\frac{U_2}{4(R_1+R_2)}$; $\eta_o=\frac{1}{2}$;

$$P_{ш.\,max}=\frac{U^2}{4R_1};\quad \eta_ш=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+2\frac{R_1}{R_2}}.$$

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова Отделение планирования и экономической кибернетики...»

Вариант I

1. $-\frac{1}{6}\operatorname{tg}\varphi$. Указание. Уравнение прямой имеет вид $y=x\operatorname{tg}\varphi+b$, $\varphi\neq\pi/2$. Абсциссы точек пересечения прямой и параболы являются корнями уравнения $1-3x^2=x\operatorname{tg}\varphi+b$, а искомая абсцисса середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x, равна полусумме корней этого квадратного уравнения.

2. $x_1=3$, $y_1=7/2$; $x_2=-3$, $y_2=-7/2$.

3. $(c+h)S/2$. Указание. Продолжив боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 за верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$, пристроить к данному параллелепипеду сверху параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A'B'C'D'$ высоты c. Доказать, что секущая плоскость $A_1B_2C_2D_2$ делит объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ пополам.

4. Доказательство проведем от противного. Допустим, что все шары удалось разложить в N ящиков так, что в каждом ящике находится не более трех красных шаров и никакие два ящика не содержат одинакового числа шаров. Занумеруем ящики в порядке возрастания числа лежащих в них шаров и обозначим через n_i число шаров (белых и красных в совокупности) в i-м ящике.

Непосредственно из сказанного следует справедливость соотношений

$$n_1\geqslant 1,\ n_2\geqslant n_1+1,\ n_3\geqslant n_2+1,\ \ldots,\ n_N\geqslant n_{N-1}+1,$$

откуда заключаем, что имеют место оценки

$$n_1\geqslant 1,\ n_2\geqslant 2,\ \ldots,\ n_N\geqslant N.$$

Складывая все эти неравенства и вспоминая, что $n_1+\ldots+n_N=5100$, получаем

$$5100\geqslant\frac{N(N+1)}{2},$$

откуда $N\leqslant 100$. Но, с другой стороны, $N\geqslant 100$, поскольку лишь при этом условии можно разложить 300 красных шаров, не помещая больше трех красных шаров в каждый ящик.

Итак, $N=100$ и, следовательно, в каждый ящик положено по три красных шара. Тогда

$$n_1\geqslant 3,\ n_2\geqslant 4,\ n_3\geqslant 5,\ \ldots,\ n_{100}\geqslant 102,$$

и, складывая эти неравенства, придем к противоречию:

$$5100 = n_1 + \ldots + n_{100} \geqslant$$
$$\geqslant 3 + \ldots + 102 = \frac{105 \cdot 100}{2} = 5250.$$

Вариант 2

1. $\sqrt{|b|/2}$.
2. $x_1 = 2$, $y_1 = 17/2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -17/2$.
3. $\frac{a+b}{3}S$.

Вариант 3

1. $(a+1)/2$.
2. $x_1 = 2$, $y_1 = 9$; $x_2 = -2$, $y_2 = -9$.
3. $\frac{a+b+c}{3}S$.

Отделение политической экономии...

Вариант 1

1. 37,5 *км/ч*.
2. $\frac{a}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$.
3. $x = -2$.
4. $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. $0 < x < 1$.

Вариант 2

1. 42,5 *км/ч*.
2. $\frac{a\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
3. $x = 1/2$.
4. $x = \pi + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. $x > 1/2$.

Факультет психологии

Вариант 1

1. 9 деталей.
2. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3. $\frac{5a\sqrt{11}}{44}$.
4. $x_1 = 3$; $x_2 = 4$.

Вариант 2

1. 8 *м*^{2}.
2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$
3. $\frac{7a\sqrt{3}}{72}$.
4. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Отделение структурной и прикладной лингвистики

Вариант 1

1. Шесть.
2. $n(n-1)+2$ способа.
3. Минимальное значение равно -7.
4. Нельзя.
5. $x = 4$.

Вариант 2

1. 1 оценка «3» и 23 оценки «4».
2. 240 способов.
3. Минимальное значение равно 1.
4. $\sqrt{299/11}$.
5. $x = 2$.

К статье «Телевидение готовит в вуз»

(см. «Квант», 1974, № 4)

Математика

Задачи

1. $x = -2$.
2. 24, 42.
3. За 3 часа.
4. 13 *см*. Указание. Если x, y, z — ребра прямоугольного параллелепипеда, то его диагональ равна
$$\sqrt{(x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)}.$$
5. $\frac{S_1 S_2}{2a}$.
6. $\frac{3\sqrt{6}}{2}a^2$. Указание. Доказать, что в основание пирамиды можно вписать круг, причем высота пирамиды проходит через центр этого круга.
7. $\frac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}$.
8. $\arccos\sqrt{-\cos\alpha}$.

Контрольная работа № 4

1. $x_1 = \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
2. $x = 8$, $y = 6$.
3. $-4 \leqslant x < 0$, $\frac{\sqrt{17}-1}{2} < x \leqslant 2$.
4. $x = \frac{9}{2}\pi + 6\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
5. $0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $x \geqslant 3$.

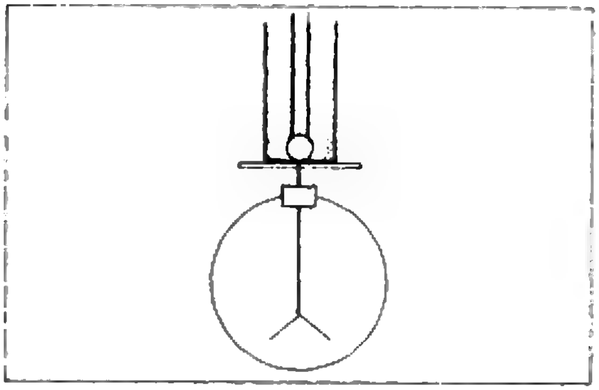
Указание. Обозначить $\log_x 3$ через y.

Контрольная работа № 5

1. 2 *км/ч*.
2. 3535.
3. $\frac{4\sqrt{2}R^2}{\sin\alpha}$.
4. $\frac{a\sin 2\alpha\sin(\beta/2)}{2+2(\sin\alpha+\cos\alpha)\sin\beta/2}$. Указание. При решении задачи полезно воспользоваться формулой $r=\frac{3V}{S'}$, где V — объем пирамиды, S' — площадь полной поверхности пирамиды, r — радиус шара, вписанного в пирамиду.
5. $\frac{8}{3}\pi R^3$.

Физика

1. $\Delta l=\frac{g}{4\pi^2}(T_2^2-T_1^2)=0{,}05$ *м*.
2. $T\approx 0{,}49$ *с*.
3. $l_1=\frac{\Delta l}{1-n^2}=1{,}1$ *м*; $l_2=l_1-\Delta l=0{,}89$ *м*.
4. $F_в=0{,}96$ *н*.
5. $T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g-\frac{qE}{m}}}=3{,}3$ *с*.
6. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+\frac{q^2E^2}{m^2}}}}=1{,}05$ *с*.
7. $\lambda=2\pi\frac{l}{\varphi_2-\varphi_1}=1{,}2$ *м*.
8. $P_т=\frac{U^2R}{R^2+\left(2\pi\nu L-\frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}\approx 36$ *вт*.
9. $\rho=\frac{1}{2\pi\nu\varepsilon_0\varepsilon}=750$ *ом·м*.



10. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{\sqrt{R^2+\frac{1}{(2\pi\nu C)^2}}}{\sqrt{R^2+(2\pi\nu L)^2}}=2{,}8$.
11. $L=\frac{1}{4\pi^2\Delta C}\left(\frac{1}{\nu_1^2}-\frac{1}{\nu_2^2}\right)=15{,}5\times 10^{-3}$ *гн*.
12. $d=4\pi^2\nu^2L\varepsilon\varepsilon_0S=3{,}6\cdot 10^{-3}$ *м*.
13. $L=\frac{1}{8\pi^2C\Delta\nu^2}=7{,}8\cdot 10^{-5}$ *гн*.
14. $C_1=\frac{C_2(2\pi c\sqrt{LC_2}-\Delta\lambda)^2}{4\pi^2c^2LC_2-(2\pi c\sqrt{LC_2}-\Delta\lambda)^2}=150$ *пф* (где $c=3\cdot 10^8$ *м/с* — скорость света).

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, №4)

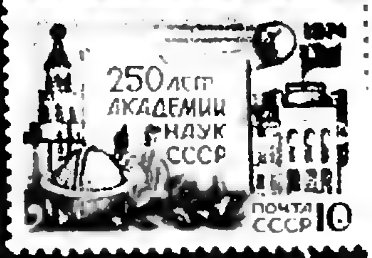
1. Шоссе надо провести под углом 60° к реке.
2. Шарик большего диаметра подскочит выше.
3. 7744.
4. См. рисунок.
5. Искомое геометрическое место точек — окружность радиуса $100\sqrt{\frac{3}{2}}$ *м*, ее центр находится на прямой, соединяющей группы, на расстоянии 100 *м* от группы из двух громкоговорителей и 150 *м* — от группы из трех громкоговорителей.

Корректор *Н. Б. Румянцева*

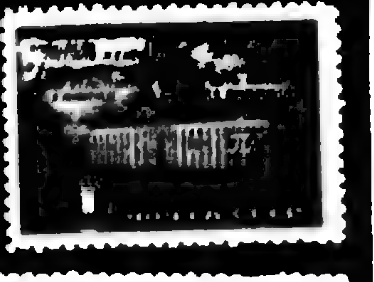
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 15/II-74 г.
Подписано в печать 8/IV-74 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,20
Тир 385 215 экз Т-20863
Цена 30 коп. Заказ 360

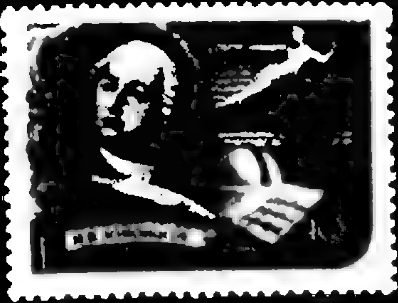
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

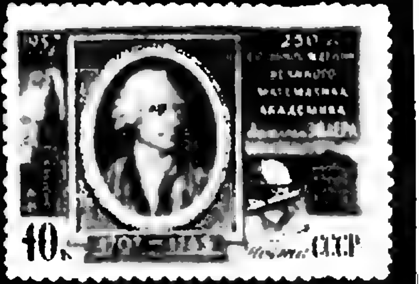
Рукописи не возвращаются



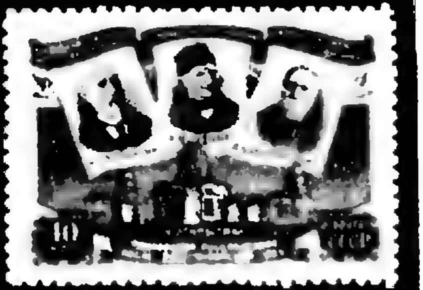
На марках — Академия наук СССР







почта СССР
1961
10



В нашей стране неоднократно выпускались марки, посвященные Академии наук СССР, ее институтам и учреждениям. Первые две такие марки были выпущены в 1925 году в связи с празднованием 200-летия Академии.

На этих марках был изображен портрет первого русского академика, выдающегося ученого нашей родины, М. В. Ломоносова на фоне главного здания Академии наук в Ленинграде. Одну из этих марок мы воспроизводим в верхней части нашей подборки.

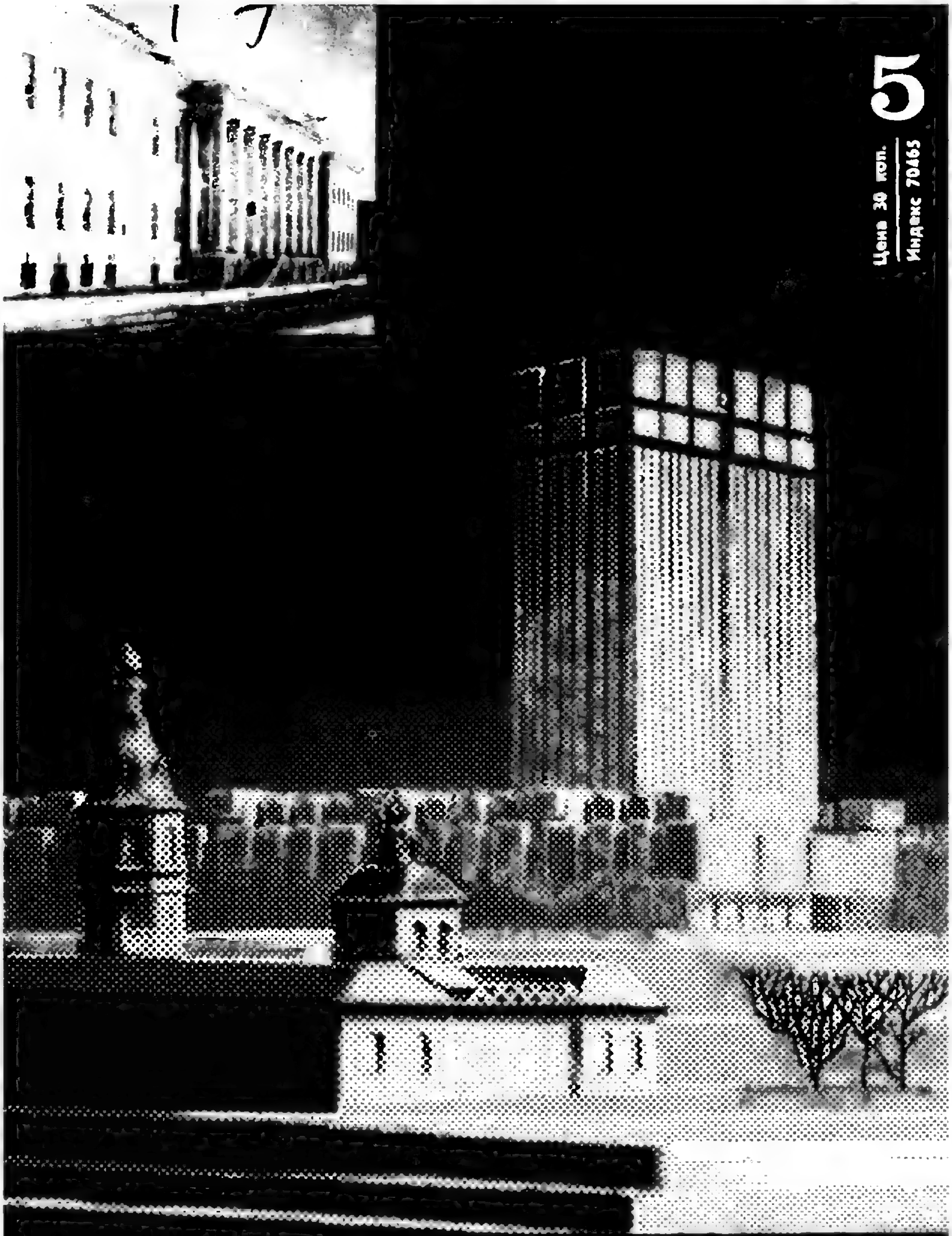
В 1945 году, в связи с торжествами по поводу 220-летия Академии, была выпущена серия из двух марок. На одной из них изображено здание Президиума Академии наук в Москве, на Ленинском проспекте. Это же здание мы видим в правой части недавно выпущенной марки, посвященной 250-летию Академии наук.

В 1940 году в серии из трех марок, посвященных М. В. Ломоносову, была выпущена марка с изображением старейшего здания, принадлежащего Академии наук в Ленинграде,— знаменитой петровской кунсткамеры, в которой долгое время находились физический кабинет и астрономическая обсерватория.

Здание кунсткамеры воспроизведено также на юбилейной марке 1974 года (левая часть) и еще на трех приведенных здесь марках. Две из них посвящены М. В. Ломоносову. Третья марка была выпущена в 1957 году в связи с 250-летием со дня рождения одного из основателей Академии наук выдающегося математика и механика Леонарда Эйлера.

В 1839 году Академия обогатилась Пулковской обсерваторией, которая и сейчас является Главной астрономической обсерваторией нашей страны. Она была основана русским астрономом В. Я. Струве. Главный корпус этой обсерватории мы видим на двух представленных здесь марках. Первая из них вышла в 1954 году к открытию обсерватории, восстановленной из руин после Великой Отечественной войны, во время которой на ее территории проходил передний край героической обороны Ленинграда. На этой же марке воспроизведены портреты трех крупнейших русских астрономов — академиков В. Я. Струве (в центре), Ф. А. Бредихина (слева) и А. А. Белопольского (справа). Вторая марка была выпущена двумя годами позже, в 1956 году. Она посвящена 125-летию со дня рождения академика Ф. А. Бредихина, выдающегося исследователя комет.

А. В. Алтыкис
В. А. Лешковцев



5

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На фотографии приведен проект нового здания Президиума Академии наук СССР (авторы проекта Ю. Платонов, А. Звездин, А. Батырева, С. Захаров, А. Левенштейн).
Вверху — здание Президиума Академии наук СССР, находящееся в Ленинграде.

НОМЕР
6

Основан в 1970 году.

Квант

1974
6

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Г. М. Герштейн.* Сигналы. Спектры
10 *В. С. Абрамович.* Числа Бернулли
14 *В. Н. Березин.* Первый учебник математики, напечатанный в России

Математический кружок

15 *Е. Я. Гик.* О силе шахматных фигур

Задачник «Кванта»

18 Задачи М266—М270; Ф278 — Ф282
20 Решения задач М222 — М230; Ф233 — Ф237

Практикум абитуриента

31 *В. А. Тихомирова.* Механические колебания
38 *Л. Е. Садовский.* «Прикладная математика» — новая специальность в технических вузах
42 *В. И. Коровин, Ю. М. Лужнов.* Московский институт инженеров железнодорожного транспорта
43 *В. А. Тонян.* Московский институт электронного машиностроения
44 Московский авиационный институт
46 Московское высшее техническое училище
47 Ленинградский государственный университет

Информация

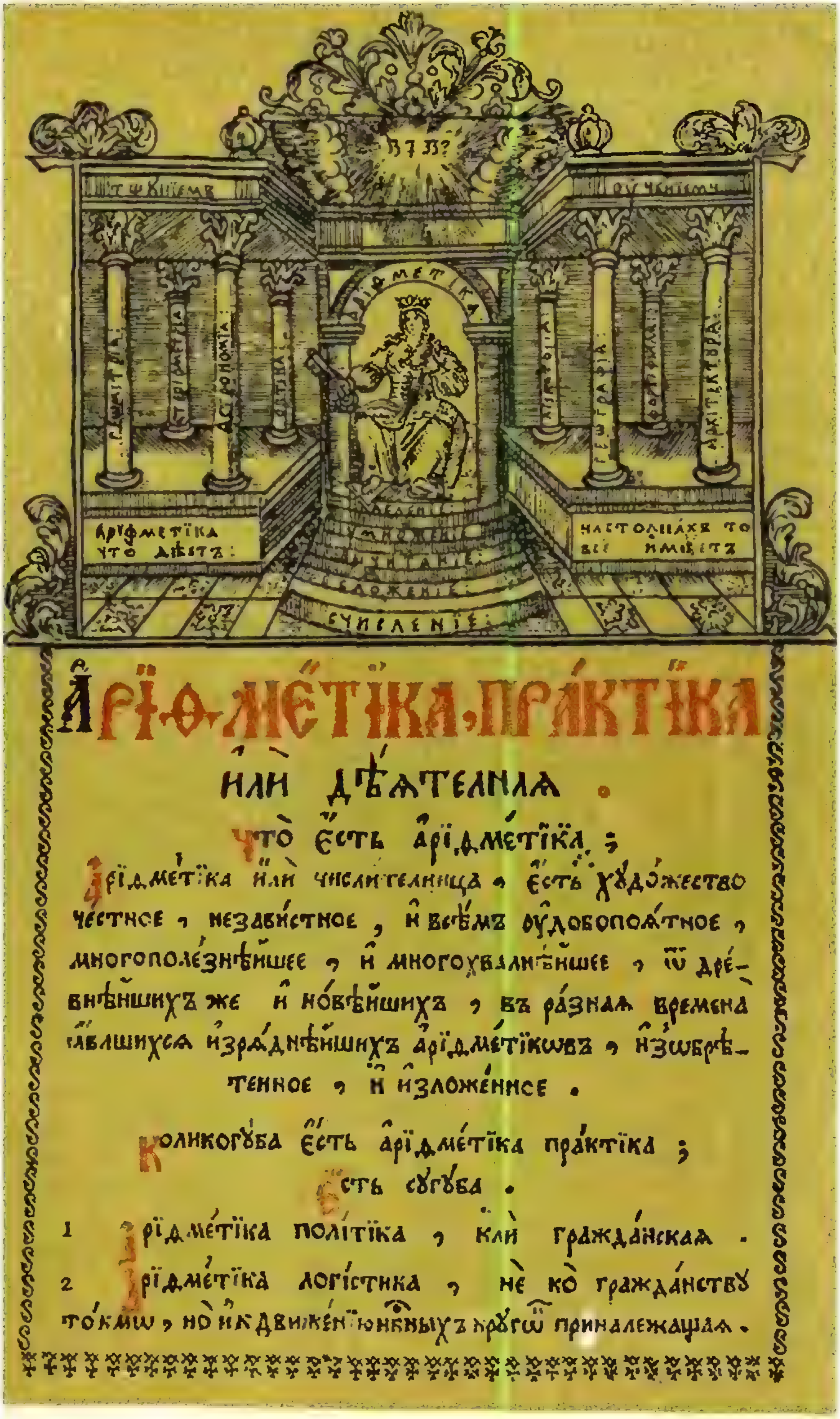
49 *Ю. Д. Кабалевский.* «Прикладная математика» в техникумах
50 *А. Н. Борзяк, А. Я. Диденко, П. Т. Дыбов, И. А. Дьяконов, В. В. Рощупкин.* Телевидение готовит в вуз

«Квант» для младших школьников

52 Задачи
53 *А. Д. Бендукидзе.* Фигурные числа
57 *Н. А. Родина.* Как измерить молекулу?
60 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с.* 9, 17, 56)

На первой странице обложки вы видите замечательный паркет, изобретенный голландским художником М. Эшером (1898—1972). Как и всякий паркет он обладает «фундаментальной областью» (два коня — коричневый и желтый). Все остальные кони могут быть получены из них параллельными переносами. Постарайтесь отыскать все нужные для этого параллельные переносы.

© *«Квант», 1974 год.*


Арифметика что дѣетъ:
Настоящахъ то все имѣетъ
Арифметика
Дѣленїе
Умноженїе
Вычитанїе
Сложенїе
Счисленїе

Арїѳметїка практїка
или дѣателна.

что есть арїѳметїка;

Арїѳметїка или числителница, есть художество честное, независтное, и всѣмъ удобопонятное, многополезнѣйшее, и многохвалнѣйшее, ѿ древнѣйшихъ же и новѣйшихъ, въ разная времена явлшихся изряднѣйшихъ арїѳметїкѡвъ, изѡбрѣтенное, и изложенное.

Колико губа есть арїѳметїка практїка;

Есть сугуба.

1 Арїѳметїка политїка, или гражданская.

2 Арїѳметїка логїстика, не ко гражданству токмѡ, но и к движенїю небныхъ кругѡвъ принадлежащая.

Первая страница книги Л. Ф. Магницкого «Арифметика» (см. с. 14).

Г. М. ГЕРШТЕЙН

СИГНАЛЫ. СПЕКТРЫ

В современной жизни нас буквально захлестывает поток разнообразной информации, объем которой неуклонно возрастает. Эта информация передается при помощи радио, телевидения, телефона и телеграфа в виде сигналов. Весьма важной характеристикой любых сигналов является их спектр, органически связанный с формой и длительностью сигналов. Спектральные представления позволяют сравнивать разные по природе физические процессы и изучать акустические, электромагнитные, оптические и другие явления с единой точки зрения. Поэтому полезно иметь понятие о сигналах и их спектрах, знать связь между спектрами и другими характеристиками сигналов. Об этом и будет идти речь в настоящей статье.

О сигнале

Первоначальную информацию о богатом и разнообразном мире, окружающем нас, мы получаем при помощи глаз и ушей. Мы любуемся восхитительным зрелищем восхода или заката солнца на море или на опушке леса, радугой и северным сиянием, полотнами прославленных мастеров живописи, стройными зданиями, разнообразными машинами и т. п. Глядя на текст и формулы, мы воспринимаем выраженные ими мысли других людей. То же самое происходит, когда мы слушаем речь или музыку. Во всех этих случаях человек воспринимает сообщения, которые играют роль носителей информации. С этой точки зрения различные звуки и изображения являются примерами сообщений.

Для передачи звука или изображения на далекие расстояния сообщение прежде всего преобразуют в соответствующий электрический сигнал, то есть в электрический процесс $u(t)$, характеризуемый определенной зависимостью электрической величины u от времени t, или, как говорят, кодируют сообщение. Звуки сравнительно просто кодируются микрофонным устройством. На микрофон воздействуют упругие колебания воздуха, роль сообщения играет звуковое давление p на мембрану микрофона, изменяющееся во времени по закону $p(t)$. При этом, например, в угольном микрофоне соответствующим образом изменяется сопротивление микрофона и ток в его цепи, в результате чего на выходе микрофонного устройства напряжение $u(t)$ изменяется во времени по тому же закону, что и звуковое давление $p(t)$.

Значительно сложнее кодировать изображение. Сначала специальное фотоэлектрическое устройство преобразует оптическое изображение в электрическое, в котором распределение напряжений соответствует яркости различных участков изображения. Затем с помощью электронного луча, обегающего электрическое изображение, осуществляется последовательное преобразование этого изображения в электрический сигнал $u(t)$, характеризуемый определенной зависимостью u от времени t. В зависимости $u(t)$ и зашифрована информация о данном изображении.

При изучении электрического сигнала обычно несущественно, какая именно электрическая величина подразумевается под u — напряжение, ток или заряд. Важно не что изменяется, а как изменяется эта величина во времени. Можно отвлечься от физической природы этой величины и интересоваться характером математической зависимости $u(t)$, то есть функцией времени t, например, непрерывная она или импульсная, синусоидальная или несинусоидальная и т. д. В конечном счете для нас важно, что независимо от физической природы сообщения кодирующий его сигнал передается в виде определенной функции времени.

Временное и спектральное представления сигнала

Изучая некоторое событие, мы обычно интересуемся тем, где и когда оно произошло, какие перемещения в пространстве и изменения во времени имели место. Поэтому мы привыкли рассматривать большинство величин как функции пространственных координат и времени.

Иное дело сигнал. Значение пространственных координат источника сигнала не имеет особого смысла, поскольку в земных масштабах сигналы, переносимые электромагнитными волнами, распространяются практически мгновенно (напомним, что в воздухе скорость электромагнитной волны $\approx 3\cdot10^8$ *м/с*). Например, при трансляции спектакля из московского театра радиослушатели во Владивостоке услышат звук, произнесенный на сцене, даже раньше сидящих в задних рядах партера москвичей, поскольку электромагнитные волны распространяются примерно в миллион раз быстрее звуковых.

Зато очень важно знать, как сигнал изменяется со временем, так как именно в зависимости $u(t)$ и содержится передаваемая информация. Эту зависимость можно записать аналитически или представить в виде графика $u(t)$. Но можно сигнал охарактеризовать по-другому, с точки зрения его спектрального состава, и тоже представить графически соответствующим образом. Что же такое спектр сигнала? Попробуем в этом разобраться.

Будем рассматривать, главным образом, такие сигналы, которые являются периодическими, то есть функция $u(t)$ удовлетворяет соотношению

$$u(t + nT) = u(t),$$

где T — постоянная величина, называемая периодом, n — любое целое число. Периодический процесс можно характеризовать также частотой $\nu = \frac{1}{T}$. Теоретически предполагается, что такая периодичность длится вечно и не имеет начала и конца во времени. Практически к периодическим процессам относят такие процессы, длительность которых намного больше периода.

На рисунке 1 представлены графики трех различных периодических процессов. Легко заметить, что у них одинаковая частота, но различная форма колебаний. В дальнейшем вы увидите, что эти различные по форме колебания имеют разный спектральный состав.

Рассмотрим такой опыт. Пусть есть много различных резонансных контуров, настроенных на частоты ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$ и т. д., и электрические сигналы, соответствующие указанным процессам, одновременно воздействуют на эти контуры. Оказывается, что первый сигнал $u_1(t)$ возбуждает колебания в трех контурах, настроенных на частоты ν_0, $2\nu_0$ и $3\nu_0$; на второй сигнал $u_2(t)$ откликнется значительно больше контуров, а при воздействии последнего сигнала $u_3(t)$

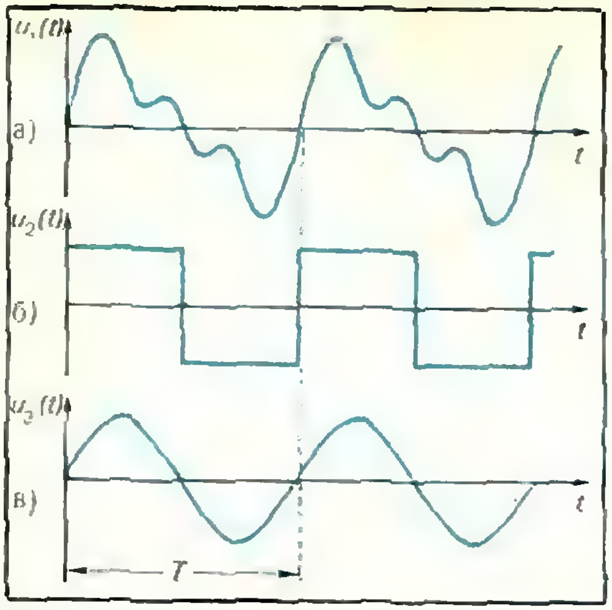


Рис. 1.

колебания возникают только в одном контуре с собственной частотой ν_0. Очевидно, для таких колебательных контуров периодический процесс $u_3(t)$ является простейшим, поскольку он вызывает возбуждение только на одной частоте, равной ν_0. Этот процесс вам, безусловно, знаком, он представляет собой так называемое синусоидальное, или гармоническое, колебание, описываемое соотношением

$$u(t) = A\sin(2\pi\nu_0 t + \varphi) = A\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

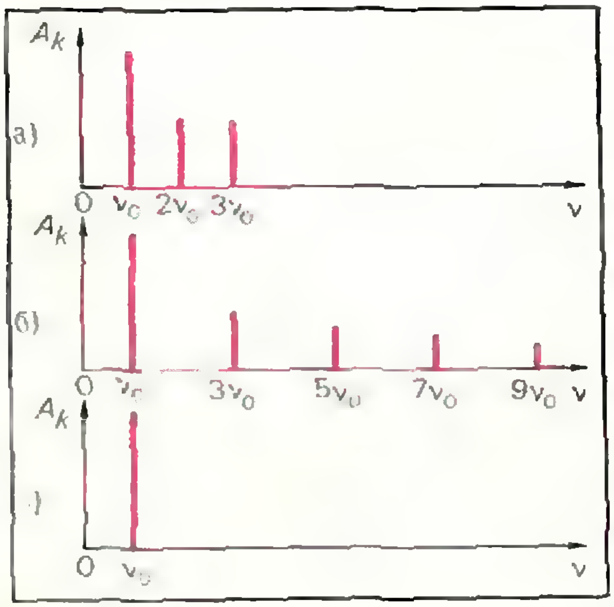


Рис. 2.

и удовлетворяющее условиям

$$A,\ \omega_0,\ \varphi = \text{const},$$

где A — амплитуда, φ — начальная фаза, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ — круговая частота колебаний.

Как же объяснить тот факт, что каждый из сигналов $u_1(t)$ и $u_2(t)$ одновременно возбуждает несколько контуров, настроенных на разные частоты? Можно заметить, что эти сигналы ведут себя так, как если бы каждый из них представлял собой сумму нескольких синусоидальных колебаний с разными частотами. Строго это свойство было доказано французским ученым Фурье и сформулировано им в виде замечательной теоремы. Она утверждает, что практически любую периодическую функцию, частота которой равна ν_0, можно представить в виде суммы синусоид с соответствующим образом подобранными амплитудами и начальными фазами и частотами, кратными ν_0 (такие синусоиды часто называют гармониками), или, как говорят, эту функцию можно разложить в ряд Фурье. Эта теорема может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) = {} & A_1\sin(\omega_0 t + \varphi_1) + \\ & + A_2\sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + \\ & + A_3\sin(3\omega_0 t + \varphi_3) + \ldots \\ & \ldots + A_k\sin(k\omega_0 t + \varphi_k) + \ldots \end{aligned}$$

или, более кратко,

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k),$$

где k — номер гармоники, определяющий ее частоту, A_k — амплитуда гармоники, φ_k — начальная фаза гармоники, ω_0 — круговая частота исследуемого процесса.

Таким образом, сигнал, представленный в виде суммы синусоид, можно удобно и просто охарактеризовать совокупностью величин A_k и φ_k. Совокупность величин A_k называется *спектром амплитуд*. Этот спектр наглядно представляют графически, откладывая по оси ординат значения A_k и по оси абсцисс ν и изобра-

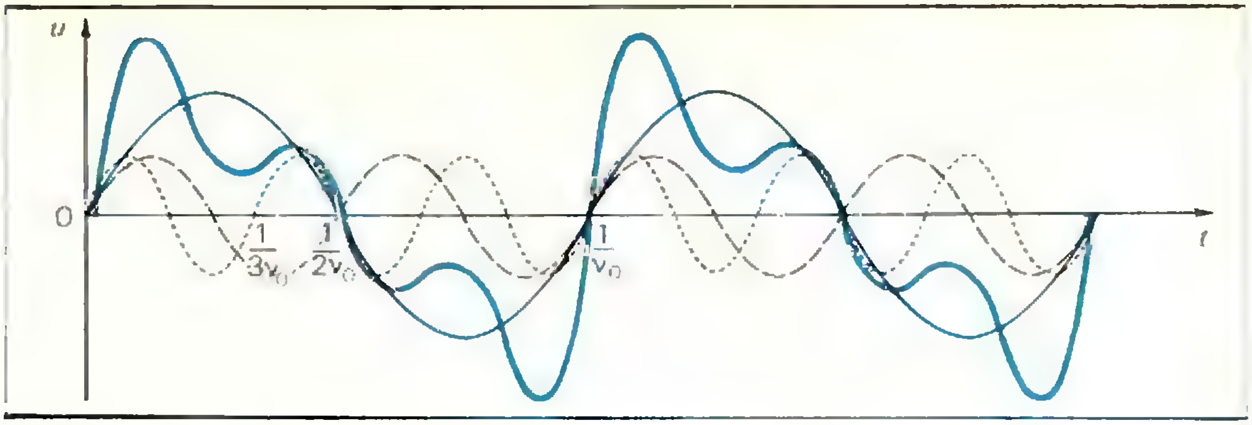


Рис. 3.

жая амплитуды отдельных гармоник вертикальными отрезками соответствующей длины. Такой спектр является линейчатым и гармоническим. Последнее означает, что между частотами гармоник существуют простые кратные соотношения. Если процесс не периодичен, он также может быть представлен суммой синусоид, но спектр подобного процесса не будет гармоническим. Совокупность величин φ_k называют спектром фаз. При анализе сигналов в большинстве случаев достаточно знать только амплитудные спектры. Поэтому для краткости амплитудные спектры называют часто просто спектрами, что мы и будем делать в дальнейшем.

Как правило, с увеличением номера гармоник их амплитуды убывают, и, начиная с некоторого номера, амплитуды последующих гармоник становятся столь малыми, что ими можно пренебречь. Поэтому практически спектры имеют ограниченное число спектральных линий. Одной из характеристик спектра является его ширина. Шириной спектра называют интервал на шкале частот, в котором размещается такой спектр.

На рисунке 2 приведены спектры функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $u_3(t)$, полученные, например, с помощью упомянутого выше набора резонансных контуров. Они наглядно иллюстрируют связь между временными и спектральными представлениями сигнала. Мы видим, что чем резче изменения функции во времени, тем богаче и шире ее спектр. Это естественно. Чтобы, складывая непрерывные и плавно изменяющиеся синусоиды, получить резкие изменения результирующей функции, требуется сложить большое число синусоид с разными частотами, амплитудами и фазами. Для воспроизведения же непрерывного процесса, близкого к синусоидальному, достаточно небольшого числа таких синусоид. В качестве примера на рисунке 3 показано графическое сложение трех синусоид с частотами и амплитудами, соответствующими спектру рисунка 2, *а*, и начальными фазами, равными нулю. Результирующая кривая (она показана синим) по форме совпадает с кривой на рисунке 1, *а*.

Спектры звуков

Звуковые сообщения обычно подразделяют на музыкальные звуки и шумы.

Музыкальный звук представляет собой периодически изменяющийся процесс, например, такой, как на рисунке 4, *а*. В частности, если этот процесс — гармонический, говорят о музыкальном тоне. Используя разложение Фурье, музыкальный звук можно рассматривать как совокупность основного музыкального тона и нескольких высших гармоник — обертонов. В спектре соответствующего сигнала наибольшую амплитуду имеет основной тон, с ростом номера гармоник амплитуда их заметно

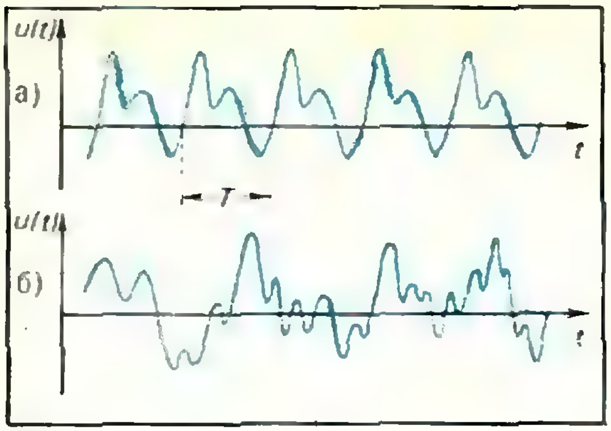


Рис. 4.

падает, так что практически спектр музыкального тона имеет сравнительно немного гармоник. Роль этих гармоник в эмоциональном восприятии музыки очень велика. Они определяют тембр музыкальных звуков. Беря одну и ту же ноту на различных инструментах, мы получим звуки с разным числом гармоник и разными соотношениями между их амплитудами. Соответственно и спектры этих звуков будут различными, благодаря чему наше ухо различает, на каком именно инструменте звучит данная нота. На рисунке 5 представлены графики и спектры звуков рояля и кларнета для одной и той же ноты.

Такие отрывистые звуки, как удары барабана, стук кастаньет, являются шумами. Сигналы шумов отличаются непериодичностью и сложной зависимостью от времени (например, такой, как на рисунке 4, б). Один из таких спектров — спектр шума компрессора — показан на рисунке 6. В нем очень много различных частотных компонент. Спектр шума значительно шире и богаче спектра музыкальных тонов. В этом легко убедиться, произведя, например, простой опыт с камертонами, имеющими различные собственные частоты колебаний. На длительное звучание чистого музыкального тона откликнется только один из камертонов. Если же вблизи резко ударять по барабану, зазвучат многие камертоны. То есть чистый тон может быть представлен одной частотой, а удары барабана — большим числом частот.

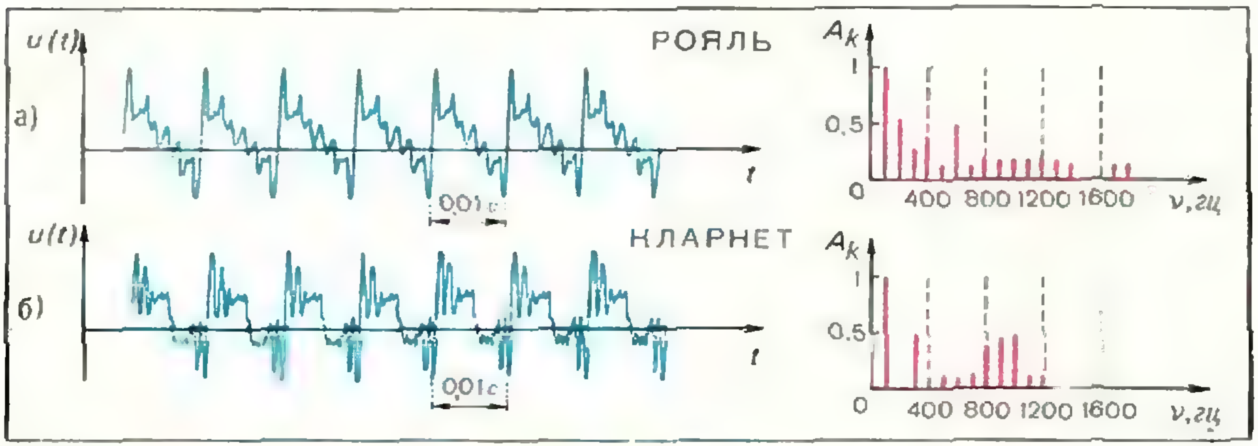


Рис. 5.

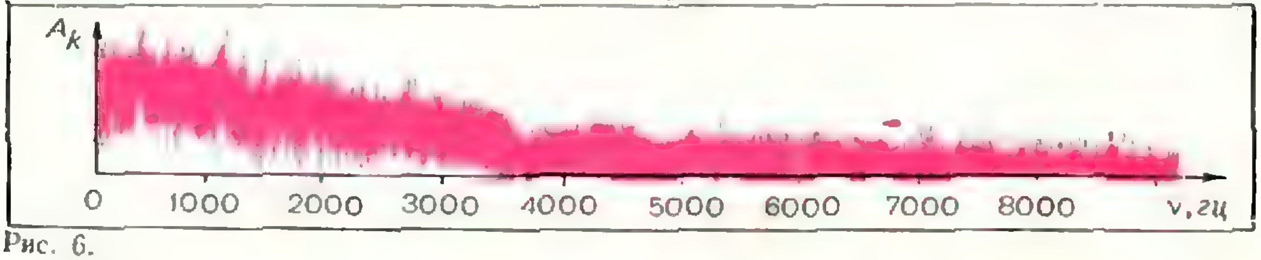


Рис. 6.

Качественное отличие различных шумов выражается в том, что спектр одного шума может иметь более интенсивные спектральные компоненты в области низких частот, а другого шума — на более высоких частотах, то есть в различных пропорциях между спектральными компонентами.

Какого цвета шум?

Спектральные представления позволяют создать единый и наглядный язык для описания процессов различной физической природы, использовать подчас неожиданные ассоциации и аналогии.

Так, например, специалисты иногда используют термин «белый шум». С точки зрения филологов это — бессмыслица, и они могут язвительно заметить, что шум не имеет цвета, мы его не видим, а слышим. Однако для физика это вполне понятное, довольно точное и емкое определение, использующее аналогию между звуком и светом.

Известно, что ощущение белого цвета является результатом воздействия на глаз целой гаммы световых лучей, от красного до фиолетового. Белый свет имеет сплошной спектр, в котором представлены все частоты видимой части шкалы электромагнитных волн (от $3{,}8 \cdot 10^{14}$ до $7{,}5 \cdot 10^{14}$ *гц*). Хотя существует определенное распределение энергии по частотам и максимум энергии, излучаемой источником белого света, приходится на конкретный участок видимого спектра (в частности, максимум энергии излучения Солнца находится в желто-зеленой части), излучение в остальных участках видимого спектра тоже достаточно интенсивное, то есть в белом свете энергия красного, зеленого, синего и других цветов более или менее равномерно распределена по всему диапазону видимых световых волн.

Аналогично этому «белый шум» — это такой шум, в сплошном спектре которого присутствуют все звуковые частоты, причем различные спектральные компоненты отличаются по энергии не очень сильно.

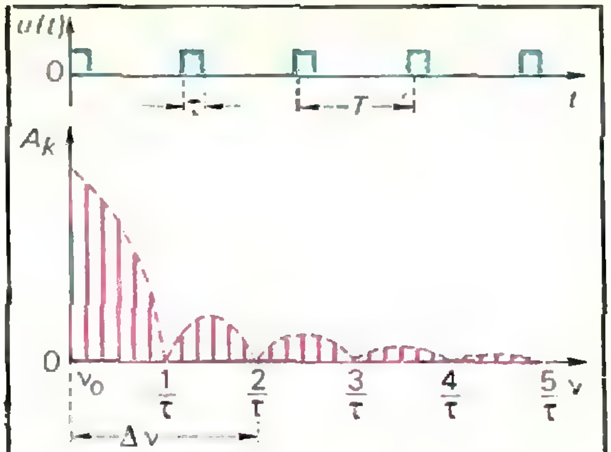


Рис. 7.

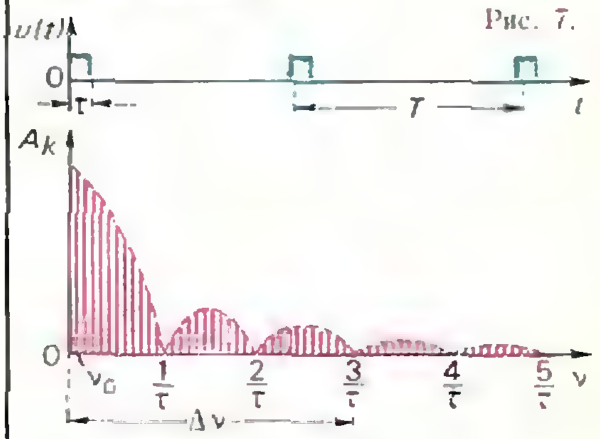


Рис. 8.

Спектры импульсных сигналов

В современной технике, например, в телеграфии, радиолокации, телевидении часто используются сигналы в виде периодически повторяющихся импульсов прямоугольной формы (рис. 7 и 8). Как видно из этих рисунков, такие сигналы имеют богатый спектр, содержащий много спектральных линий, сгруппированных в своеобразные «лепестки», причем частоты, соответствующие «узлам» этих лепестков, равны n/τ, где n — номер лепестка. Теоретически подобные спектры имеют бесконечную протяженность по частоте, но поскольку после третьего лепестка амплитуды гармоник становятся пренебрежимо малыми, практически можно ограничиться первыми тремя лепестками. Ширина такого ограниченного спектра $\Delta\nu$ связана с длительностью импульса τ простой зависимостью:

$$\Delta\nu = \frac{3}{\tau},$$

то есть ширина спектра прямоугольного импульса обратно пропорциональна его длительности.

Это соотношение имеет большое практическое значение. Оно показывает, что чем меньше длительность импульсов, то есть чем меньше занимается линия связи, тем более широким является спектр такого сигнала и тем более широкая полоса частот требуется для достаточно правильного его воспроизведения.

Так, например, при передаче телеграфных сигналов средняя длительность импульсов (точек и тире) примерно равна 0,1 *с*. Этому соответствует ширина спектра $\Delta\nu = 30$ *гц*. Если, для того чтобы меньше времени занимать линию связи, передавать телеграфный сигнал в 100 раз быстрее ($\tau = 0{,}001$ *с*), $\Delta\nu$ возрастает до 3000 *гц*. Следовательно, чем быстрее передается сигнал, тем шире его спектр.

Иногда сама природа сообщения требует быстрой передачи соответствующего сигнала. Так, в частности, обстоит дело в телевидении. Поскольку зрительное ощущение изображения сохраняется в нашем глазу только в течение примерно 1/25 секунды, нужно за это время успеть передать один кадр, то есть в виде импульсов последовательно передать информацию о яркостях примерно 500 000 элементов изображения (по современным стандартам). В данном случае каждый импульс длится меньше миллионной доли секунды, при этом спектр телевизионного сигнала занимает полосу частот шириной в десятки миллионов герц что обусловливает особые трудности его передачи.

На примере прямоугольных импульсов мы столкнулись с весьма любопытной закономерностью, справедливой и для других видов импульсов. Эту закономерность можно выразить математически, переписав приведенное выше соотношение в виде

$$\tau \cdot \Delta\nu = \text{const}.$$

Физический смысл этого соотношения состоит в том, что невозможно одновременно сконцентрировать такой сигнал во времени и по частотам. Если, например, стремясь сжать сигнал во времени, то есть быстрее передать информацию, мы уменьшаем длительность импульсов τ, при этом увеличивается полоса частот и спектр сигнала расширяется.

Из приведенной формулы также следует, что ширина спектра $\Delta\nu$ прямоугольных импульсов определяется только их длительностью τ и не зависит от частоты повторения импульсов $\nu = 1/T$. Это важно практически, так как позволяет легко определить минимальное значение τ, при котором полоса частот, занимаемая данным сигналом, не превысит допустимую для данной системы передачи и приема импульсных сигналов.

Однако, с изменением частоты ν изменяется число спектральных линий в каждом лепестке, то есть их густота. Так, с увеличением интервала между импульсами уменьшается ν, и число этих линий в лепестках спектра увеличивается (рис. 7 и 8). Очевидно, в предельном случае перехода от периодически повторяющихся импульсов к одиночному импульсу ($T \to \infty$ и $\nu \to 0$) спектр должен стать сплошным, что действительно подтверждается опытом.

Большой практический интерес представляет спектр импульсов, возникающих при включении рубильников, контактов различных электрических цепей, когда ток в цепи резко возрастает от нуля до определенной величины (рис. 9, *а*). Такой сигнал имеет сплошной спектр, показанный на рисунке 9, *б*, где по горизонтальной оси отложена непрерывно меняющаяся частота ν. Из

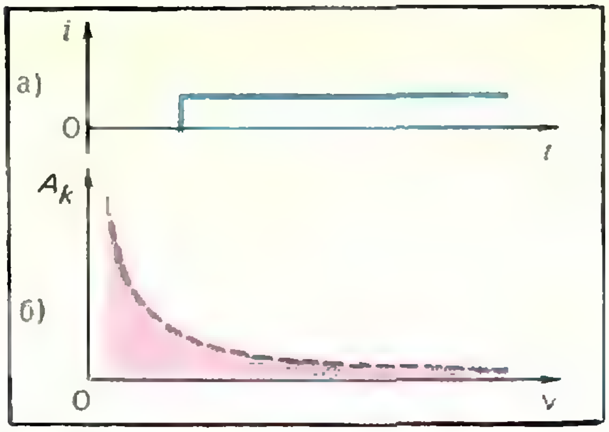


Рис. 9.

рисунка видно, что наибольшую интенсивность имеют спектральные компоненты низких частот. Действие таких импульсов мы часто обнаруживаем, сидя за радиоприемником, когда вблизи проходят трамваи, троллейбусы, работает электросварка и т. п.

Заключение

Спектральные представления универсальны, они объективно характеризуют практически важные свойства любых колебаний и волн. Как мы видели, спектры самым тесным образом связаны с формой и длительностью соответствующих процессов и сигналов. Спектральные представления позволяют сравнивать разные объекты информации (музыка, речь, помехи, изображения и др.) с единых позиций, определять ширину спектра кодирующих их сигналов и на основании этого судить о возможности передачи этих сигналов по тем или иным линиям связи.

Упражнения

1. Попробуйте убедиться в том, что несинусоидальный периодический процесс $u_2(t)$ (рис. 1, *б*) можно приближенно представить суммой пяти синусоид с частотами и амплитудами, соответствующими спектру рисунка 2, *б*, и начальными фазами, равными нулю. Сложите алгебраически ординаты этих синусоид для нескольких периодов сигнала $u_2(t)$ и постройте результирующую кривую.

2. В диапазоне каких частот могут создавать помехи прямоугольные электрические импульсы длительностью 10 *мкс* каждый, повторяющиеся 2 000 раз в секунду?

Задачи

1. Семиклассник Петя утверждает, что с помощью циркуля и линейки можно построить приближение любого острого угла с абсолютной погрешностью не более 0,0000001 градуса. Прав ли он?

2. Решить систему уравнений:

$$a\sqrt[10]{a}+b\sqrt[10]{b}=1973,$$

$$a\sqrt[10]{b}+b\sqrt[10]{a}=1974.$$

3. Можно ли расположить на плоском столе четыре одинаковые монеты, чтобы каждая из них касалась трех остальных?

4. Расшифровать равенства:

а) tg × tg = ctg;

б) sin × sin = arcsin.

5. Будет ли при каких-либо натуральных значениях букв верно равенство

$$\sqrt[3]{l}+\sqrt[3]{g}=\sqrt[3]{lg}?$$

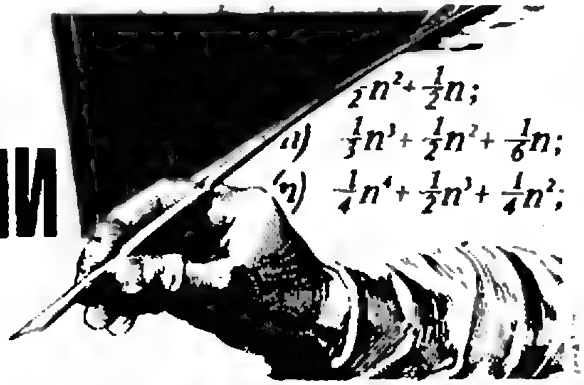
6. Сколькими способами можно «расшифровать» пример:

$$\begin{array}{r} -\,\text{фунт} \\ \text{фут} \\ \hline \text{пуд?} \end{array}$$

В. Ф. Акулич
И. Ф. Акулич

В.С. АБРАМОВИЧ

ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ


$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n;$
$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n;$
$\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2;$

$B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0$

С древних времен математики пытались постичь тайны удивительного мира чисел. Этот мир привлекает своим многообразием, строгостью и совершенством законов. Здесь есть «великаны» и есть «карлики», обычные «трудяги» и такие «знаменитости», как π и e. Но еще более многообразен мир числовых последовательностей. Здесь и последовательность натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и полная глубоких тайн последовательность простых чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,$$

и последовательность «биномиальных коэффициентов»

$$C_1^1,\ C_2^1,\ C_2^2,\ C_3^1,\ C_3^2,\ C_3^3, \ldots,$$

появляющихся при возведении в степени 2, 3, 4, . . . «бинома» $a+b$:

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k. \qquad (1)$$

Числа C_k^m являются основным инструментом увлекательной области математики — комбинаторики *). Они нам будут нужны и в этой статье. Напомним, что вычисляются они очень просто — по формуле

$$C_k^m = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}, \qquad (2)$$

$1 \leqslant m \leqslant k$, с помощью которой вы легко выведете их важнейшее свойство:

$$C_k^{m-1} + C_k^m = C_{k+1}^m \qquad (3)$$

(теорема Паскаля). Формулу (2) можно переписать еще и в таком, более «компактном» виде:

$$C_k^m = \frac{k!}{m!\,(k-m)!}, \qquad (2^*)$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots n$ при $n > 0$; значение $0!$ полагается равным единице (значок ! называется факториалом). Из формулы (2*) немедленно вытекает еще одно свойство биноминальных коэффициентов:

$$C_k^m = C_k^{k-m}. \qquad (3^*)$$

---

*) Об этой науке рассказано в книге Н. Я. Виленкина с одноименным названием, М., «Наука», 1969.

Очевидно, что $C_k^0=1$. (Это также сразу получается из (2*), если учесть, что $0!=1$.) Кроме того, будем считать, что при $m>k$ числа $C_k^m=0$ по определению.

В этой статье речь пойдет об одной замечательной последовательности чисел, которую открыл выдающийся швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705).

Последовательность эта играет в математике важную роль, что объясняется ее связью с вопросами суммирования функций, простыми числами, великой теоремой Ферма, а также другими задачами.

1. Что такое числа Бернулли?

Возникли эти числа у Бернулли в связи с изучением им сумм*)

$$S_k(n)=1^k+2^k+\ldots+n^k. \tag{4}$$

С помощью разложения (1) напишем тождество

$$(a-1)^{k+1}-a^{k+1}=-C_{k+1}^1a^k+C_{k+1}^2a^{k-1}+\ldots+(-1)^kC_{k+1}^ka+(-1)^{k+1}.$$

Полагая $a=1, 2, \ldots, n$ и складывая результаты слева и справа, мы получим:

$$-n^{k+1}=-C_{k+1}^1S_k(n)+C_{k+1}^2S_{k-1}(n)+\ldots+$$
$$+(-1)^kC_{k+1}^kS_1(n)+(-1)^{k+1}S_0(n),\quad S_0(n)\equiv n.$$

Отсюда вытекает рекуррентное соотношение

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\,[n^{k+1}+C_{k+1}^2S_{k-1}(n)-\ldots+$$
$$+(-1)^kC_{k+1}^kS_1(n)+(-1)^{k+1}S_0(n)], \tag{5}$$

из которого легко получить сумму $S_k(n)$, если известны суммы $S_1(n)$, $S_2(n)$, ..., $S_{k-1}(n)$, причем по индукции следует, что $S_k(n)$ является многочленом степени $k+1$ без свободного члена.

Например, проверьте, что

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

$$S_2(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

$$S_3(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Определение. *Числами Бернулли* B_k называются коэффициенты при первой степени n в многочленах $S_k(n)$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Так например, из формул для $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ следует, что

$$B_0=1,\quad B_1=\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0. \tag{6}$$

Из определения и рекуррентного соотношения (5) вытекает простой способ вычисления чисел Бернулли. Так как $S_k(n)$ является многочленом без свободного члена, то, разделив обе части формулы (5) на n и полагая затем $n=0$, получим рекуррентную формулу для вычисления чисел B_k:

---

*) Подробно о суммах $S_q(n)$ см. в статье В. С. Абрамовича «Суммы одинаковых степеней натуральных чисел», «Квант», 1973, № 5.

$$B_h=\frac{1}{k+1}\left[C_{k+1}^{2}B_{k-1}-C_{k+1}^{3}B_{k-2}+\ldots+(-1)^{k}C_{k+1}^{k}B_{1}-(-1)^{k}B_{0}\right], \qquad B_0=1. \tag{7}$$

Проверьте с помощью этой формулы значения первых четырех чисел Бернулли (см. (6)).

Бернулли удалось доказать, что и другие коэффициенты многочлена $S_k(n)$ вычисляются с помощью чисел B_k. Коэффициент при n^2 оказывается равным $\frac{B_{k-1}}{k-1}C_k^2$, коэффициент при n^3 равен $\frac{B_{k-2}}{k-2}C_k^3$, наконец, коэффициент при степени n^k оказывается не зависящим от k и всегда равным $\frac{B_1}{1}C_k^k=\frac{1}{2}$. Особняком стоит коэффициент при старшей степени $k+1$, который сразу находится из формулы (5). Он равен $\frac{1}{k+1}$.

Таким образом, *формула Бернулли* имеет вид

$$S_k(n)=B_kn+\frac{B_{k-1}}{k-1}C_k^2n^2+\frac{B_{k-2}}{k-2}C_k^3n^3+\ldots+\frac{B_1}{1}C_k^kn^k+\frac{n^{k+1}}{k+1}. \tag{8}$$

В следующем параграфе мы покажем, что формула (8) на самом деле вдвое короче.

2. Числа Бернулли с нечетными номерами

Теорема. *Все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме* B_1, *равны нулю*: $B_{2m+1}=0$ *при* $m\geqslant 1$.

Для доказательства воспользуемся равенством (1); применим его к разности $(1+a)^{2m}-(1-a)^{2m}$:

$$(1+a)^{2m}-(1-a)^{2m}=2\left(C_{2m}^{1}a+C_{2m}^{3}a^{3}+C_{2m}^{5}a^{5}+\ldots+C_{2m}^{2m-1}a^{2m-1}\right).$$

Полагая здесь $a=1, 2, \ldots, n$ и складывая полученные результаты, слева получим:

$$(S_{2m}(n)+(n+1)^{2m}-1)-(S_{2m}(n)-n^{2m})=(n+1)^{2m}+n^{2m}-1.$$

Справа же получим выражение

$$2\left(C_{2m}^{1}S_1(n)+C_{2m}^{3}S_3(n)+\ldots+C_{2m}^{2m-1}S_{2m-1}(n)\right). \tag{9}$$

Итак, имеем

$$(n+1)^{2m}+n^{2m}-1=2\left(C_{2m}^{1}S_1(n)+C_{2m}^{3}S_3(n)+\ldots+C_{2m}^{2m-1}S_{2m-1}(n)\right).$$

Вычислим коэффициент при n^1 в выражениях, получившихся в правой и левой частях. В выражении, стоящем в левой части, этот коэффициент будет равен $2m$ (очевидно). Получить вид коэффициента при первой степени n в выражении, стоящем в правой части, немногим сложнее: для этого достаточно в формуле (9) заменить суммы $S_j(n)$ ($j=1, 3, \ldots, 2m-1$) числами Бернулли с теми же номерами (это утверждение следует из самого определения чисел Бернулли). Значит, имеет место такое тождество:

$$C_{2m}^{1}B_1+C_{2m}^{3}B_3+C_{2m}^{5}B_5+\ldots+C_{2m}^{2m-1}B_{2m-1}=m.$$

Но так как $C^1_{2m}=2m$, а $B_1=\frac{1}{2}$, то должно быть:

$$C^3_{2m}B_3+C^5_{2m}B_5+\ldots+C^{2m-1}_{2m}B_{2m-1}=0. \qquad (10)$$

Полагая здесь последовательно $m=2, 3, 4, \ldots$ и учитывая, что $C^k_n=0$ при $k>n$, получим:

$$B_3=B_5=B_7=\ldots=0.$$

3. Связь с простыми числами

Христиан Штаудт (1798—1867), исследуя числа Бернулли, получил красивый и глубокий результат, раскрывающий арифметическую природу этих чисел. Пусть задано число B_k. Рассмотрим все простые числа p, не превосходящие $k+1$, и такие, что $p-1$ нацело делит k (то есть номер данного числа Бернулли). По всем таким p составим конечную сумму вида $\sum\frac{1}{p}$ — назовем ее суммой, соответствующей данному числу Бернулли B_k (рассмотрением как раз таких сумм и занимался Штаудт). Оказалось, что число B_k и соответствующая ему сумма $\sum\frac{1}{p}$ взаимно дополняют друг друга до целого числа. Итак, $B_k+\sum\frac{1}{p}$ — всегда число целое!

Приведем пример, позволяющий оценить важность этого результата Штаудта. Пусть нам известно, что B_6 таково, что $0<B_6<1$. Мы хотим найти его точное значение; оказывается, что теперь это уже сделать легко.

Действительно, делителями 6 являются числа 1, 2, 3, 6. Увеличив их на единицу, получим числа 2, 3, 4, 7. Из них простыми являются числа 2, 3 и 7. Подсчитываем сумму $\sum\frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}.$$

Таким образом, по теореме Штаудта $\frac{41}{42}+B_6$ должно быть целым числом, но так как по условию $0<B_6<1$, то единственным подходящим целым числом является **1**. Поэтому

$$B_6=1-\frac{41}{42}=\frac{1}{42}.$$

Упражнение 1. Найдите B_{14}, которое заключено между числами 1 и 2.

4. О теореме Куммера

В 1850 году великим немецким математиком Эрнстом Куммером (1810—1893) был получен важный результат, относящийся к проблеме существования решения в целых числах уравнения Ферма $x^n+y^n=z^n$, $n\geqslant 3$ — к проблеме Ферма. Хотя результат этот и не решает полностью проблемы, тем не менее он и по сей день остается одним из самых значительных, полученных в этом направлении. Этот результат оказывается тесно связанным с числами Бернулли.

Прежде, чем сформулировать теорему Куммера, введем следующее определение (предложенное Куммером). Пусть задано простое число $p \geqslant 3$. Назовем его *регулярным*, если ни один из числителей чисел Бернулли B_2, B_4, . . ., B_{p-3} не делится на него нацело. Тогда теорема Куммера читается так: *уравнение Ферма $x^p + y^p = z^p$, где p — регулярное, не решается в целых числах x, y, z, отличных от* 0. Можно проверить, что простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, . . . будут регулярными. Возникает вопрос: а не являются ли все простые числа регулярными? Оказывается, что нет. Однако первое нерегулярное простое число обнаруживается не так быстро. Это — двенадцатое по счету простое число 37. Удалось показать, что нерегулярных простых чисел бесконечно много. Что же касается регулярных простых чисел, то до сих пор неизвестно, является ли их число конечным или нет.

Упражнения

2. Покажите, что функция

$$f(x) = S_k(x) - \frac{x^k}{2}$$

является четной при нечетном k и нечетной при четном k.

3. С помощью теоремы Куммера проверьте справедливость великой теоремы Ферма для $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$.

4. Пользуясь теоремой Паскаля (3), найдите коэффициенты разложения

$$S_k(n-1) = a_0C_n^1 + a_1C_n^2 + \ldots + a_kC_n^{k+1}. \qquad (11)$$

Выведите отсюда явную формулу для чисел Бернулли (опираясь на эту формулу, Штаудт и доказал свою знаменитую теорему).

5. Пусть $S_k(n) = b_{0,k}n^{k+1} + b_{1,k}n^k + \ldots + b_{k,k}n$. Обозначим

$$S'_k(n) = (k+1)\,b_{0,k}n^k + kb_{1,k}n^{k-1} + \ldots + b_{k,k}.$$

Используя формулу (5) и метод математической индукции, докажите, что

$$S'_k(n) = kS_{k-1}(n) + B_k. \qquad (12)$$

6. Подумайте, как использовать соотношение (12) для определения коэффициентов многочлена $S_k(n)$, то есть для доказательства формулы Бернулли.

Первый учебник математики, напечатанный в России

Первым российским учебником математики была книга «Арифметика» Леонтия Филипповича Магницкого, изданная в 1703 г. в Москве. В течение полустолетия книга эта служила единственным учебником. По нему занимались в Московской Навигацкой школе и цифирных или арифметических школах будущие астрономы, геодезисты, ученые капитаны и адмиралы Российского флота. Среди них учившиеся у самого Л. Ф. Магницкого в Навигацкой школе исследователь Камчатки и Курильских островов С. И. Челюскин, геодезисты Ф. Ф. Лужин и И. М. Евреинов, составившие первые географические карты Камчатки, вице-адмирал — гидрограф и картограф, исследователь Каспийского моря, Чукотского полуострова и Охотского моря Ф. И. Соймонов, адмирал Н. Ф. Головин, генерал-адмирал М. М. Голицын, капитан-командор А. И. Чириков и многие другие.

Самоучкой занимался по «Арифметике» Л. Ф. Магницкого Михаил Васильевич Ломоносов. Он, так же как до него Л. Ф. Магницкий, учился в Славяно-греко-латинской академии, а в ней математику не преподавали.

М. В. Ломоносов называл «Арифметику» Л. Ф. Магницкого «вратами учености» и, по свидетельству некоторых биографов М. В. Ломоносова, даже выучил ее наизусть.

«Арифметика» Л. Ф. Магницкого содержит примерно 600 страниц текста. Из них более 40 страниц отдано предисловию. И это было естественно — поскольку книга представляет собой не только учебник, но и популярное введение в математику. Она объясняет, зачем нужна математика, какую роль она играет в жизни.

Талантливо написанная книга математика-педагога, самоучки, крестьянского сына Леонтия Магницкого обессмертила его имя.

В. Н. Березин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

О силе шахматных фигур

Е. Я. Гик

Если вы умеете играть в шахматы, то наверняка знаете, что легкую фигуру (коня или слона) можно смело отдать за три пешки, а ферзя за две ладьи; конь и пара пешек компенсируют потерю ладьи и т. д. Конечно, истинная сила фигуры зависит от конкретной позиции: вы без труда приведете примеры, когда одна пешка матует вражеского короля, окруженного всей армией своих фигур. И все же ясно, что каждая фигура в шахматной игре имеет некоторую среднюю силу. Для сравнения сил фигур за единицу обычно принимают силу пешки, выражая через нее силы остальных фигур. В учебниках, как правило, предлагается такая шкала:

$$F_{п} = 1, \quad F_{К} = F_{С} = 3, \quad F_{Л} = 5, \quad F_{Ф} = 9$$

(через F_x мы обозначаем силу фигуры x).

Эта шкала подтверждается многочисленной практикой и опытом шахматистов. Однако существуют и чисто математические пути определения силы шахматных фигур. Один из наиболее распространенных способов связан с подвижностью фигур. Рассмотрим для примера ходы короля (рис. 1). С каждого из угловых полей он может сделать 3 хода, с неугловых полей крайних вертикалей и горизонталей — по 5 ходов, наконец, с остальных полей доски король в состоянии переместиться на любое из 8 соседних полей. Суммируя, получаем число возможных ходов короля на шахматной доске, обозначим это число через $S_{Кр}$:

$$S_{Кр} = 3\cdot 4 + 5\cdot 24 + 8\cdot 36 = 420.$$

Из рисунков 2—6 находим числа S_x для других фигур:

$$S_{Ф} = 21\cdot 28 + 23\cdot 20 + 25\cdot 12 + 27\cdot 4 = 1456,$$

$$S_{Л} = 14\cdot 64 = 896,$$

$$S_{С} = 7\cdot 28 + 9\cdot 20 + 11\cdot 12 + 13\cdot 4 = 560,$$

$$S_{К} = 2\cdot 4 + 3\cdot 8 + 4\cdot 20 + 6\cdot 16 + 8\cdot 16 = 336,$$

$$S_{п} = 2\cdot 10 + 3\cdot 32 + 4\cdot 6 = 140.$$

Если мы теперь разделим S_x — число возможных ходов фигуры x — на N_x — число полей, на которых эта фигура может стоять, то получим среднее число ходов фигуры с одного поля доски. Назовем это число P_x *подвижностью* фигуры x:

$$P_x = \frac{S_x}{N_x}. \qquad (*)$$

Очевидно, $N_x = 64$ для всех фигур, кроме пешки, а $N_{п} = 48$. По формуле (*) находим:

$$P_{Кр} = 6{,}5625; \quad P_{Ф} = 22{,}75; \quad P_{Л} = 14;$$
$$P_{С} = 8{,}75; \quad P_{К} = 5{,}25; \quad P_{п} = 2{,}5.$$

Будем считать, что сила фигуры прямо пропорциональна ее подвижности. Принимая, как и выше, силу пешки $F_{п}$ за единицу, силы остальных фигур выразим через нее по формуле

$$F_x = \frac{P_x}{P_{п}}.$$

В результате получится следующая шкала (значения округлены до

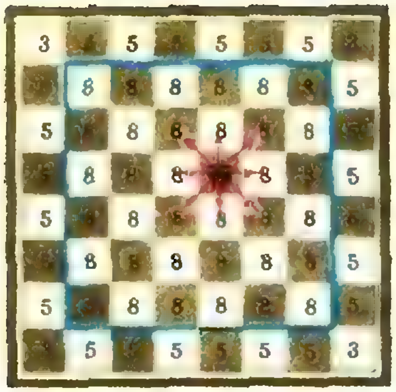


Рис. 1. Подвижность короля.

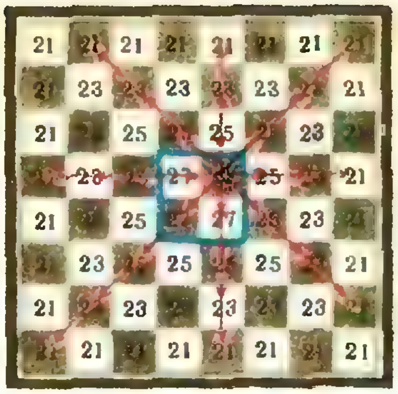


Рис. 2. Подвижность ферзя.

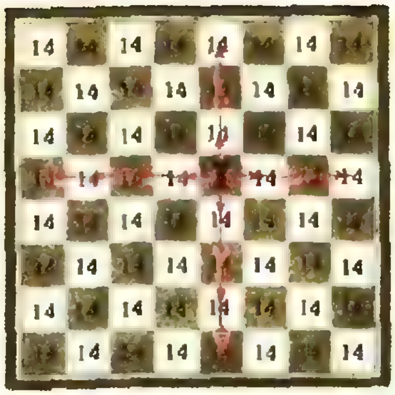


Рис. 3. Подвижность ладьи.

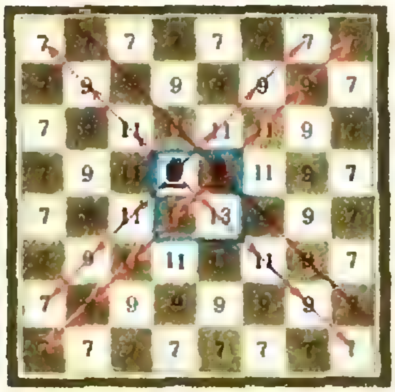


Рис. 4. Подвижность слона.

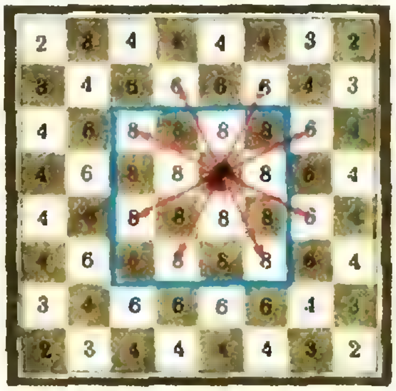


Рис. 5. Подвижность коня.

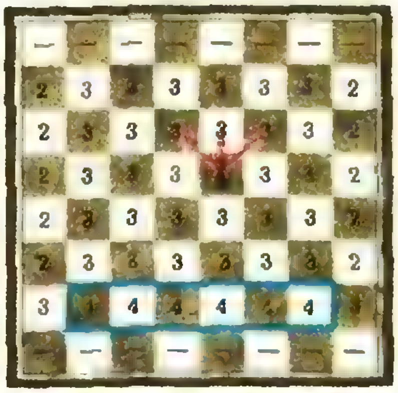


Рис. 6. Подвижность пешки.

десятых долей):

$$F_{\text{п}} = 1;\quad F_{\text{Кр}'} = 2{,}6;\quad F_{\text{Ф}} = 9{,}1;$$
$$F_{\text{Л}} = 5{,}6;\quad F_{\text{С}} = 3{,}5;\quad F_{\text{К}} = 2{,}1.$$

В вычислениях мы для простоты не учитывали возможность рокировки, а для пешки рассматривали также диагональные ходы, которые она совершает при взятии. На рисунках 1—6 выделены поля, с которых соответствующая фигура может сделать максимальное число ходов. Эти поля сосредоточены в центре, лишь ладья одинаково «сильна» на всех полях доски.

Король в полученной шкале получил очень низкую оценку, хотя на самом деле его «потеря» невозместима *). Однако с точки зрения подвижности найденная оценка вполне отвечает действительности. Наша шкала имеет и некоторые расхождения с практикой. Ее основной дефект заключается в слишком большом превосходстве дальнобойных фигур (ферзя, ладьи и слона) над конем. В шахматах действия дальнобойных фигур почти всегда ограничены другими фигурами. Мы могли бы учесть это обстоятельство, вводя поправочные коэффициенты, но сейчас нас интересует сама идея, и на деталях мы не останавливаемся.

Математический подход к оценке силы фигур позволяет рассматривать разнообразные обобщения. Представьте себе, что вы играете в шахматы привычными фигурами, но на необычной доске, например, размером 50 × 50. Исходя из одной интуиции, вам будет довольно сложно определить сравнительную силу фигур на этой доске. Например, ясно, что слон здесь сильнее коня, но вот насколько, сразу сказать трудно. Пользуясь введенным выше понятием подвижности, мы можем найти вполне разумные значения для силы фигур и на такой доске. Аналогичным образом можно исследовать силу фигур на цилиндрической, сферической, пространственной и других шахматных «досках».

---

*) При программировании на ЭВМ для силы короля обычно выбирают очень большое число, подчеркивая этим его исключительность.

Другое обобщение состоит в изменении правил движения фигур. Шахматные композиторы, специализирующиеся в «фантастических шахматах», изобрели десятки так называемых «сказочных» фигур: канцлер, кентавр, ночной сверчок, всадник, жук, леопард, гиппопотам, лев, зебра, имитатор, жираф и другие. Канцлер может ходить как ладья и конь, кентавр — как конь и слон, всадник — дальнобойная фигура, совершающая непрерывные прыжки по маршруту обычного коня в одном направлении (например, a1 — b3 — c5 — d7 или a1 — c2 — — e3 — g4), лев ходит через поле в любом направлении и т. д. Наш способ позволяет без труда находить и силу сказочных фигур.

Упражнения

1. Найдите подвижность $P_x(n)$ каждой шахматной фигуры x на доске размера $n \times n$, пользуясь формулой (*).

2. Как меняется подвижность фигур при неограниченном увеличении размеров доски?

3. На обычной доске ладья по силе равна слону и коню ($14 = 8{,}75 + 5{,}25$). На какой еще доске это возможно? На доске какого размера одинаковую силу имеют король и слон?

4. Сколькими способами на доске размером $n \times n$ можно поставить двух ферзей, чтобы они не угрожали друг другу?

5. Сколькими способами можно поставить на доске $n \times n$ трех ферзей, чтобы они не угрожали друг другу?

6. Кто сильнее на бесконечной шахматной доске — ферзь или две ладьи?

7. Определите подвижность и силу кентавра, канцлера, всадника и льва.

8. Какую подвижность на бесконечной доске имеет конь типа (a, b), передвигающийся на a полей в одном направлении и на b полей — в перпендикулярном (обычный конь получается при $a = 2$, $b = 1$)?

Домино — пасьянс

28 косточек домино уложены в прямоугольник 7×8. Границы косточек не изображены. Требуется восстановить их.

2	2	3	0	0	4	4
2	5	4	4	0	1	1
6	1	5	4	4	0	0
3	2	6	6	3	3	5
1	5	5	6	4	3	0
1	1	5	2	6	0	0
3	2	5	1	2	2	6
6	4	3	6	3	5	1

6	6	0	6	6	0	0
4	5	2	6	6	5	1
4	4	5	5	4	3	3
0	5	1	4	1	3	2
2	5	2	6	1	1	1
3	1	5	3	4	2	2
3	2	6	0	0	0	2
5	3	3	4	0	1	4

Л. П. Мочалов

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 августа 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М266, М267» или «... Ф278». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М266—М270; Ф278—Ф282

М266. Дан выпуклый n-угольник.

а) Докажите, что если для каждой тройки последовательных вершин n-угольника построить окружность, проходящую через эти три вершины, и из n полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наибольшей, то эта окружность содержит внутри себя весь данный n-угольник;

б) Докажите, что если для каждой тройки последовательных сторон n-угольника построить окружность, касающуюся этих сторон, и из n полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наименьший, то она будет содержаться внутри данного n-угольника.

А. В. Карзанов

М267. В последовательности троек целых чисел (2, 3, 5) (6, 15, 10)... каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число множится на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку.

Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т. д.

Ф. А. Бартенев

М268. В углу шахматной доски стоит фигура. Первый игрок может ходить ею два раза подряд как обычным конем (на два поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном), а второй — один раз как конем с удлиненным ходом (на три поля в одном направлении и на одно — в перпендикулярном). Так они ходят по очереди. Первый стремится к тому, чтобы поставить фигуру в противоположный угол, а второй — ему помешать. Кто из них выигрывает (размеры доски — $n \times n$, где $n \geqslant 4$)?

П. Кацыло, ученик 10 класса (Москва)

М269. Обозначим через $T_k(n)$ сумму произведений по k чисел от 1 до n. Например,

$$T_2(4) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 35.$$

а) Найдите общую формулу для $T_2(n)$ и $T_3(n)$.

б) Докажите, что $T_k(n)$ выражается многочленом от n степени $2k$ (для каждого натурального $k \geqslant 2$).

в) Укажите метод нахождения многочленов $T_k(n)$ ($k = 2, 3, 4, 5, \ldots$) и примените его для отыскания многочленов $T_4(n)$ и $T_5(n)$.

Э. А. Ясиновый

М270. Пусть AB и CD — две хорды окружности, а точки K и H построены так, что все четыре угла KAB, KCD, HBA и HDC — прямые. Докажите, что прямая KH проходит через центр окружности и через точку пересечения прямых AD и BC.

И. Ф. Шарыгин, А. И. Яновский

Ф278. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 760$ *км* над поверхностью Земли. Его хотят перевести на эллиптическую орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли $H = 40\,000$ *км* и минимальным расстоянием от поверхности $h = 760$ *км*. Насколько для этого необходимо изменить скорость спутника? Каким будет период обращения спутника по новой, эллиптической, орбите?

А. Боржиевский, ученик 10 класса (Оришинская с. ш., Хмельницкая обл.)

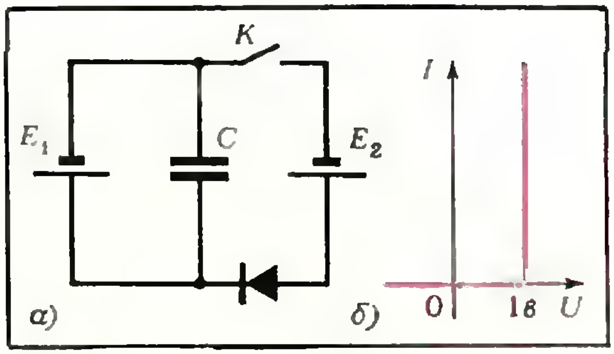


Рис. 1.

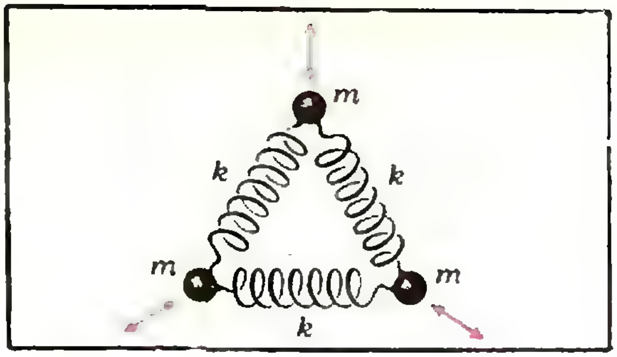


Рис. 2.

Ф279. Цилиндр, изготовленный из нетеплопроводящего материала, разделен нетеплопроводящей перегородкой на две части, объемы которых V_1 и V_2. В первой части находится газ при температуре T_1 под давлением p_1. Во второй — такой же газ, но при температуре T_2 и под давлением p_2. Какая температура установится в цилиндре, если убрать перегородку?

Ф280. Источник света находится на расстоянии $3a$ от линзы с фокусным расстоянием a. Во сколько раз изменится средняя освещенность пятна на экране, который находится на расстоянии $1{,}5\,a$ от линзы, если между источником и линзой поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины $0{,}5\,a$? Показатель преломления стекла равен n.

Ф281. В схеме, изображенной на рисунке 1, *а*, первоначально ключ K разомкнут. Э. д. с. первой батареи $E_1 = 1$ *в*, а ее внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2$ *ом*. Э. д. с. второй батареи $E_2 = 2$ *в*, внутреннее сопротивление $r_2 = 0{,}4$ *ом*. Емкость конденсатора $C = 10$ *мкф*. На какую величину изменится заряд конденсатора при замыкании ключа, если диод имеет вольтамперную характеристику, показанную на рисунке 1,*б*?

Ф282. Найти частоту «симметричных» колебаний системы, показанной на рисунке 2. Массы всех шаров m, коэффициенты упругости пружинок k.

Г. Л. Коткин

Решения задач

М222—М230; Ф233—Ф237

М222. *Докажите, что у каждого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.*

Предположим, что, любые две грани некоторого выпуклого многогранника имеют различное число сторон. Рассмотрим ту грань Г, у которой число сторон наибольшее; пусть оно равно m. Следовательно, число сторон у любой из остальных граней строго меньше m. Значит, и количество оставшихся граней строго меньше m (ведь даже если бы существовали 1-угольники и 2-угольники, мы смогли бы набрать всего лишь $m-1$ разных многоугольников). С другой стороны, к грани Г примыкают ровно m других граней многогранника (к каждой стороне — по одной). Мы получили противоречие.

Стало быть, какие-то две грани обязательно имеют равное число сторон.

Приведенное решение почти дословно повторяет решение следующей, довольно известной задачи (на «принцип Дирихле» *)). *В кинотеатре «Октябрь» на последнем сеансе обязательно найдутся два человека, число знакомых у которых одинаково.*

Однако наша задача геометрическая по существу — в ее решении неявно используется условие выпуклости многогранника — там, где утверждается, что к грани, имеющей m сторон, примыкают m граней. Это значит, что к каждому ребру грани многогранника примыкает ровно одна грань, и к разным ребрам этой грани примыкают разные грани. Однако это неверно для невыпуклых многогранников — на рисунке 1 к ребрам a, b примыкает одна и та же грань α, так что в подсчете граней она учитывается дважды, и приведенное выше рассуждение становится неправильным.

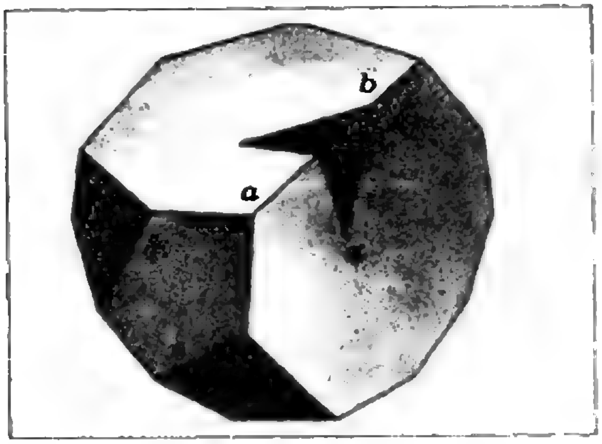


Рис. 1.

Утверждение задачи тем не менее сохраняется и для невыпуклых многогранников (без «сквозных дыр») — его доказательство основано на формуле Эйлера *)

$$В - Р + Г = 2;$$

оно довольно громоздко и не столь изящно, чтобы приводить его здесь.

Г. А. Гальперин

М223. *Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 28 — совершенное: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.) Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.*

Пусть $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$, где $p_1, \ldots, p_m$ — различные простые, $r_1, \ldots, r_m$ — натуральные числа (согласно основной теореме арифметики, каждое целое число $n > 1$ представляется в таком виде единственным образом).

Делители числа n — это числа вида

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m},$$

где $0 \leqslant k_1 \leqslant r_1, \ldots, 0 \leqslant k_m \leqslant r_m$. Поэтому сумма всех делителей числа n (включая 1 и n) равна произведению

$$S = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{r_1}) \ldots (1 + p_m + \ldots + p_m^{r_m}).$$

Так как n — совершенное число, то S должно быть равно $2n$, то есть быть числом четным. Но если n — квадрат целого числа, то все показатели $r_1, \ldots, r_m$ — четные числа, поэтому каждая круглая скобка в произведении S

$$\underbrace{(1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{r_i})}_{1 + r_i \text{ слагаемых}}$$

есть число нечетное, следовательно, и S нечетное.

Получили противоречие, значит, совершенное число не может быть полным квадратом.

Некоторые читатели свои решения выводят из формулы $2^{p-1}(2^p - 1)$ для чет-

---

*) См. статью А. И. Орлова «Принцип Дирихле», «Квант», 1971, № 7.

*) См. статью А. П. Савина «Карты и раскраски», «Квант», 1972, № 4.

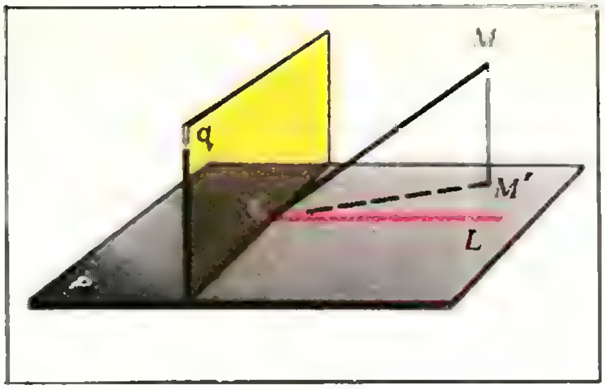


Рис. 2.

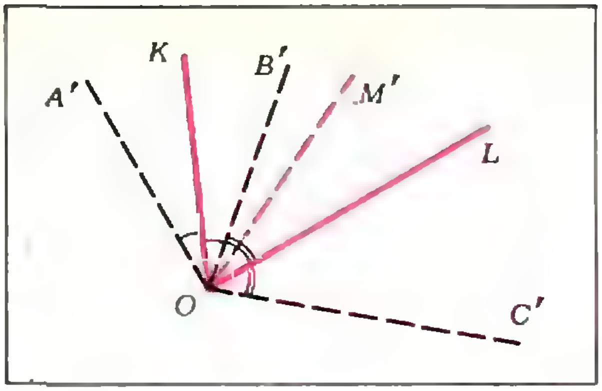


Рис. 3.

ных совершенных чисел *). Такие решения неполны: ведь пока никто не доказал, что не существует нечетных совершенных чисел.

М224. *У трехгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Докажите, что попарные углы между тремя этими биссектрисами либо все тупые, либо все острые, либо все прямые.*

Самое простое решение этой задачи основано на понятии скалярного произведения векторов. Напомним, что скалярным произведением векторов **a** и **b** называется число

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi,$$

где $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$ — длины векторов **a** и **b**, φ — угол между ними. Таким образом, угол между **a** и **b** острый, прямой или тупой, если соответственно $\mathbf{ab} > 0$, $\mathbf{ab} = 0$ и $\mathbf{ab} < 0$. Конечно, для любых векторов $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$. Нам потребуется еще дистрибутивность (распределительное свойство) скалярного произведения: для любых трех векторов **a**, **b** и **c**

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

(это свойство подробно обсуждалось в «Кванте», 1972, № 6).

Пусть дан трехгранный угол. Направим по его ребрам векторы единичной длины **a**, **b** и **c**. Тогда векторы $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ идут по биссектрисам плоских углов. Скалярные произведения

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \\ (\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}+\mathbf{a}) = \\ (\mathbf{c}+\mathbf{a})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \end{array}\right\}\ 1 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}$$

одинаковы — таким образом, углы между биссектрисами будут одновременно острыми, прямыми или тупыми. Такое решение предлагал и автор задачи Э. Г. Готман.

Для тех, кто незнаком с векторами, приведем более наглядное, чисто геометрическое объяснение. Отметим сначала такой факт. Если OL — луч, лежащий в плоскости p, OM — луч, не перпендикулярный этой плоскости, OM' — проекция луча OM на плоскость p, то угол LOM острый, прямой или тупой в зависимости от того, острый, прямой или тупой угол LOM'; действительно, если через точку O провести плоскость q перпендикулярно лучу OL, то точки M и M' всегда лежат по одну и ту же сторону от плоскости q (ведь $MM' \perp p$ и $q \perp p$, см. рис. 2). Пусть OA, OB, OC — ребра трехгранного угла; OK, OL, OM — биссектрисы углов AOB, BOC, COA; p — плоскость, проходящая через OK и OL. OA', OB', OC', OM' — проекции лучей OA, OB, OC, OM на плоскость p.

Лучи OA и OC симметричны лучу OB относительно прямых OK и OL соответственно. Поэтому OA' и OC' симметричны OB' относительно тех же прямых, причем все три луча OA, OB и OC составляют одинаковые углы с плоскостью p.

Рассмотрим сначала ситуацию в плоскости p — для проекций. Если $\sphericalangle KOL < 90^\circ$ (рис. 3), то $\sphericalangle A'OC' = 2\sphericalangle KOL < 180^\circ$ содержит внутри себя лучи OK, OL, ясно, что углы, которые составляют прямые OK и OL с биссектрисой OM' угла $A'O'C'$ — острые. Если $\sphericalangle KOL > 90^\circ$ (рис. 4), то $\sphericalangle A'OB' + \sphericalangle B'OC' = 2\sphericalangle KOL > 180^\circ$, поэтому биссектриса OM' угла $A'OC'$ составляет с OK и с OL тупые углы. (Случай $\sphericalangle KOL = 90^\circ$ рассмотрите сами.)

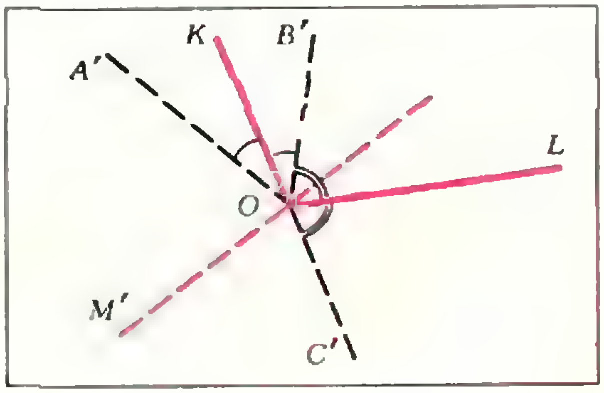


Рис. 4.

---

*) См. «Квант», 1971, № 8, с. 2.

Из факта, упомянутого выше, теперь сразу следует, что углы LOM и KOM — острые, тупые или прямые, если таков угол KOL.

Н. Б. Васильев

М225. *Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски размером 50 × 50 клеток (каждая клетка доски равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через свое ребро на соседнюю клетку; при этом разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? Какое наименьшее?*

Пусть мы каким-то образом прокатили кубик из левого нижнего угла доски в правый верхний. Будем считать, что после каждого перекатывания через ребро на клетке доски отпечатывается число, записанное на той грани кубика, которая опиралась на эту клетку.

Отпечатавшиеся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{99}$ выпишем подряд в строчку, а их сумму обозначим через Σ:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{99}=\Sigma.$$

Если числа на всех гранях кубика заменить средним числом 3,5, то сумма отпечатавшихся чисел будет равна

$$\Sigma_{\text{ср}}=3{,}5\cdot 99=346{,}5.$$

Нам необходимо определить наибольшее и наименьшее значения Σ. Оценим для этого величину $|\Sigma-\Sigma_{\text{ср}}|$.

Самое важное свойство чисел в последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_{99}$ заключается в следующем. Пусть в этой последовательности число α встретилось два раза подряд (α — одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Так как числа α и $(7-\alpha)$ находятся на противоположных гранях кубика, то нетрудно проверить, что между двумя встречающимися подряд числами α обязательно содержится число $7-\alpha$. Поэтому для каждого $1\leqslant\alpha\leqslant 3$ возможны три ситуации:

1) либо чисел α в последовательности столько же, сколько и чисел $7-\alpha$;

2) либо чисел α ровно на одно больше, чем чисел $7-\alpha$;

3) либо чисел α ровно на одно меньше, чем чисел $7-\alpha$.

В случае 1) от замены всех чисел α и $7-\alpha$ на 3,5 их вклад в Σ не изменится. В случаях 2) и 3) от замены всех чисел α и $7-\alpha$ на 3,5 их вклад в Σ увеличится или уменьшится на $(3{,}5-\alpha)$. В результате вся сумма увеличится или уменьшится самое большее на

$$(3{,}5-1)+(3{,}5-2)+(3{,}5-3)=4{,}5.$$

Таким образом,

$$342=\Sigma_{\text{ср}}-4{,}5\leqslant\Sigma\leqslant\Sigma_{\text{ср}}+4{,}5=351.$$

Значения $\Sigma_{\max}=351$ и $\Sigma_{\min}=342$ действительно достигаются, если катить кубик так, как это показано на рисунках 5 и 6.

Г. А. Гальперин

М226. *В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии (но, естественно, по другую сторону и на той же прямой; рис. 7). Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину исходного квадрата?*

Докажем, что попасть в четвертую вершину ни один из кузнечиков не может.

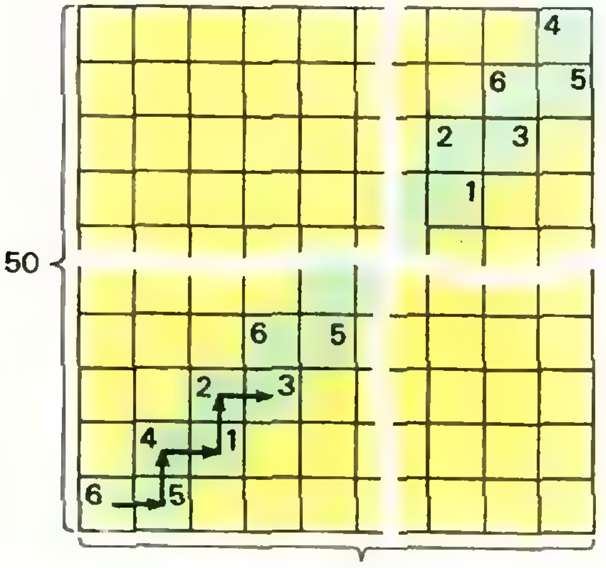


Рис. 5.

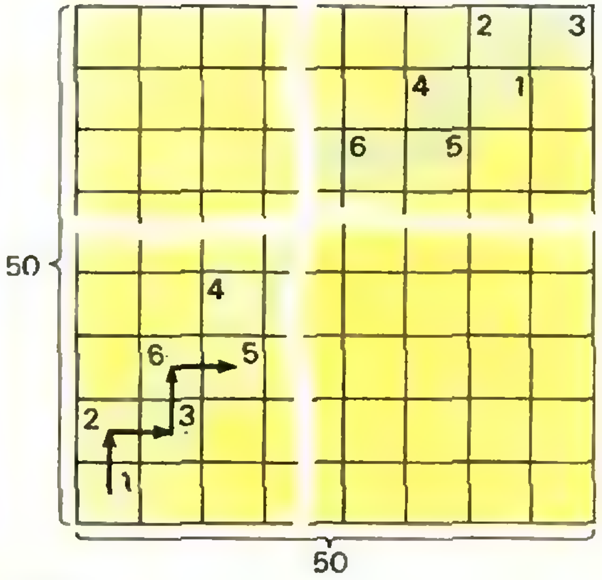


Рис. 6.

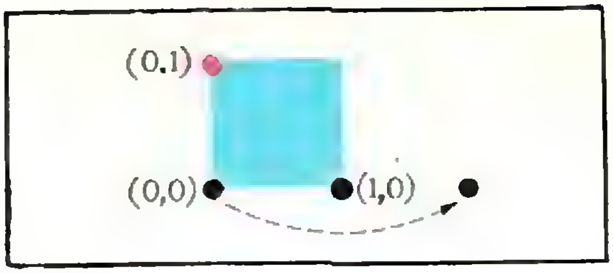


Рис. 7.

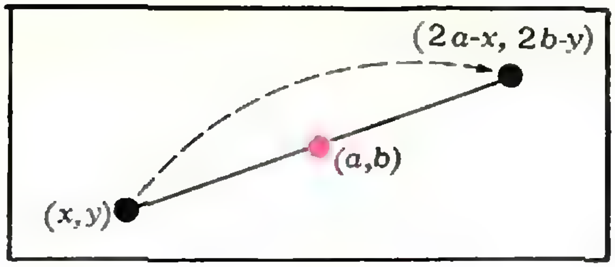


Рис. 8.

Введем координаты на плоскости так, чтобы три точки, в которых находятся кузнечики в самом начале, получили координаты: (0, 0), (0, 1) и (1, 0). Если кузнечик сидит в точке (x, y) и прыгает через кузнечика (a, b), то он оказывается в точке $(2a-x, 2b-y)$ (рис. 8). Отсюда видно, что при прыжках четность обеих координат у каждого кузнечика сохраняется. Поэтому в те точки, у которых обе координаты нечетны,— в частности, в точку (1, 1) — ни один из кузнечиков попасть не может.

Это решение можно объяснить и без координат. На рисунке 9 изображено множество точек: синих, красных и черных. (Этими цветами мы пометили кузнечиков, чтобы отличать их друг от друга). Нетрудно проверить, что при симметрии относительно любой своей точки это множество точек переходит в себя, причем точка каждого цвета переходит в точку того же цвета. Отсюда следует, что каждый кузнечик может попасть только в точку своего цвета.

Докажите, что каждый кузнечик после нескольких прыжков может оказаться в любой точке своего цвета. Попробуйте также ответить на более трудный вопрос: могут ли два кузнечика оказаться одновременно в любых двух заданных точках соответствующего цвета? в какие тройки точек могут попасть одновременно три кузнечика?

На вопрос этот существует простой и красивый ответ, но мы не будем лишать читателей удовольствия найти его самостоятельно, а вернемся к нему в одном из следующих номеров журнала.

М227. *На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.*

Очевидно, что если хотя бы одна из диагоналей четырехугольника $KLMN$ (рис. 10) параллельна стороне параллелограмма $ABCD$, то площадь четырехугольника s равна половине площади параллелограмма S.

Предположим теперь, что диагональ LN не параллельна AD. Зафиксируем положения точек L, M и N и посмотрим, как меняется площадь s в зависимости от положения точки K на стороне BC. Поскольку площадь треугольника LMN не меняется, а площадь треугольника KLN с фиксированным основанием LN пропорциональна расстоянию от точки K до прямой LN, то ясно, что при движении точки K от B к C площадь четырехугольника $KLMN$ будет меняться монотонно: возрастать, если $LC>BN$, и убывать, если $LC<BN$. Нам известно, что если $KM \parallel AB$, то площадь s равна половине S; но так как величина s меняется монотонно, то значит, при всех других положениях точки K площадь s будет или больше, или меньше $S/2$.

Таким образом, $s=S/2$ только тогда, когда либо $LN \parallel AD$, либо $KM \parallel AB$, что и требовалось доказать.

Можно было бы обойтись и без соображений монотонности (впрочем, весьма поучительных), а просто выразить отношение площадей s/S через длины отрезков $|BC| = |AD| = a$, $|AB| = |CD| = b$, $|AM| = x_1$,

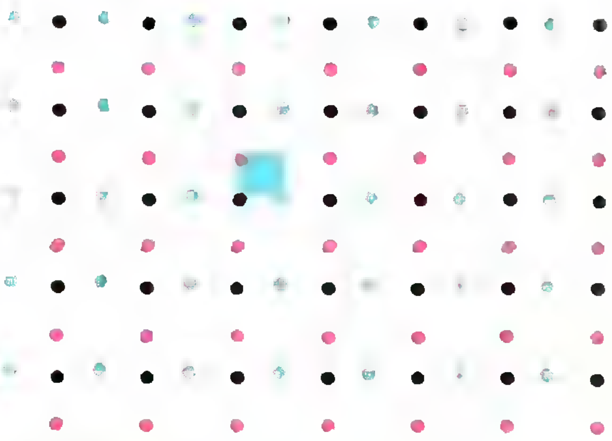


Рис. 9.

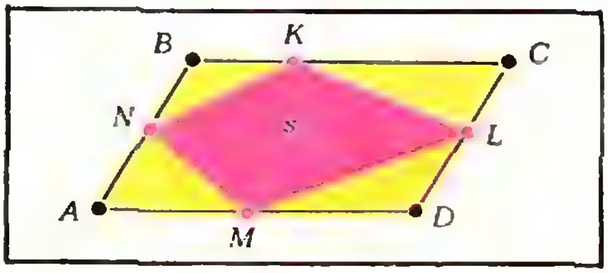


Рис. 10.

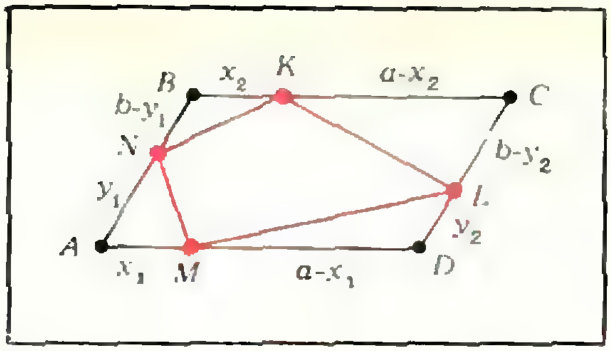


Рис. 11.

$|BK|=x_2$, $|AN|=y_1$, $|DL|=y_2$ (рис. 11):

$$\frac{s}{S}=1-\frac{x_1y_1+x_2(b-y_1)}{2ab}-$$

$$-\frac{(a-x_2)(b-y_2)+(a-x_1)y_2}{2ab}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{2ab}$$

Отсюда видно, что $\frac{s}{S}=\frac{1}{2}$ только если $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$.

M228. *Лист клетчатой бумаги размером $n\times n$ клеток раскрасили в n цветов (каждую клетку закрасили в один из цветов или не закрасили вообще). Правильной называется раскраска, при которой в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно «докрасить» весь лист правильным образом, если первоначально были правильно закрашены*

а) n^2-1 *клетка* (рис. 12);

б) n^2-2 *клетки*;

в) n *клеток*?

а) Ответ: *можно*. Докажем даже более общее утверждение: *если правильно закрашены все клетки квадрата $n\times n$, кроме некоторых клеток одной строки (или одного столбца), то квадрат можно правильно докрасить.*

Пусть, например, недокрашены некоторые клетки первой строки. Покрасим каждую такую клетку в тот цвет, который еще не встречается в ее столбце. Нужно доказать, что в первой строке при этом не может оказаться двух клеток одинакового, скажем, красного, цвета. Для этого рассмотрим прямоугольник $(n-1)\times n$, полученный из квадрата вычеркиванием первой строки. Поскольку раскраска была правильной, то в каждой из $n-1$ строк прямоугольника красный цвет встречался один раз,— следовательно, всего красных клеток в нем $n-1$, а в каждом из n столбцов прямоугольника красная клетка встречалась не более одного раза,— следовательно, красная клетка не встречалась только в одном из столбцов прямоугольника. Следовательно, лишь в одной клетке первой строки квадрата может появиться этот цвет.

б) и в) Ответ: *вообще говоря, нельзя*. Примеры приведены на рисунках 13 и 14 (здесь $n=6$; аналогичные примеры можно, конечно, привести и для любого n). Тот же ответ: *нельзя* верен, конечно, и для промежуточного между n и n^2-2 числа закрашенных клеток (в качестве примера можно взять «промежуточный» между 13 и 14 рисунок). С другой стороны, кажется совершенно очевидным, что если в квадрате размером $n\times n$ правильно закрашено менее n клеток, то его можно правильно докрасить, хотя аккуратное доказательство этого факта написать непросто. Еще более интересная задача — найти какие-либо простые условия на раскраску части клеток квадрата $n\times n$, необходимые и достаточные для докрашиваемости, в духе «теоремы о различных представителях» (см. гл. 5 книги М. Холла «Комбинаторика», решение задачи M15 в «Кванте» № 11, 1970 г. или статью М. И. Башмакова «Паросочетания и транспортные сети» в № 4 за тот же год).

Н. Б. Васильев

M229. *В центре квадрата находится полицейский, а в одной из вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что максимальная скорость по-*

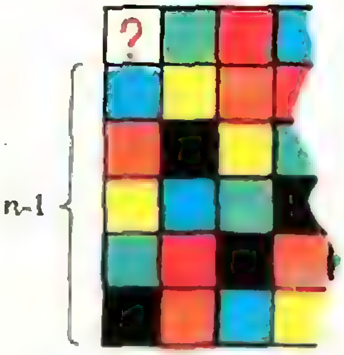


Рис. 12.

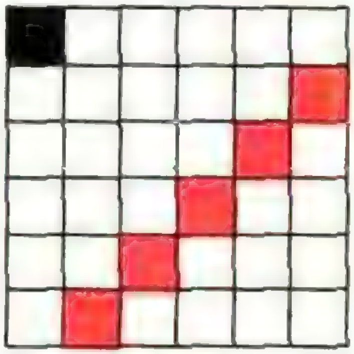


Рис. 13.

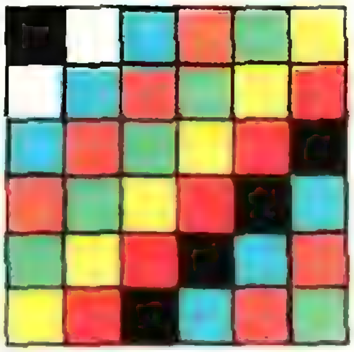


Рис. 14.

лицейского равна u, а гангстера — v. Цель полицейского — оказаться с гангстером на одной стороне квадрата. Докажите, что

а) *если* $\frac{u}{v} > \frac{1}{3}$, *то он может добиться своей цели;*

б) *если* $\frac{u}{v} < \frac{1}{3}$, *то гангстер может помешать ему это сделать.*

В условии задачи ничего не говорится о том, что произойдет с полицейским и гангстером в случае, если $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$. В приводящемся здесь решении разбирается и этот вопрос.

Введем систему координат с началом в центре исходного квадрата $ABCD$ и осями, параллельными его сторонам. Положим сторону квадрата $ABCD$ равной 1 и будем считать, что максимальная скорость гангстера $v = 1$ (нам ведь важно лишь отношение u/v). Точки, в которых находятся полицейский и гангстер, обозначим через П $(x_П, y_П)$ и Г $(x_Г, y_Г)$ соответственно.

а) Пусть $u > \frac{1}{3}$. Докажем, что тогда полицейский достигнет своей цели (то есть окажется с гангстером на одной стороне квадрата; будем говорить, что в этом случае он догоняет (или ловит гангстера).

Обозначим через Г′ точку с координатами $\left(\frac{1}{3}x_Г, \frac{1}{3}y_Г\right)$; очевидно, что если точка Г движется по контуру квадрата $ABCD$ с максимальной скоростью $v = 1$, то Г′ движется по контуру подобного ему квадрата $A'B'C'D'$ (рис. 15) с максимальной скоростью $v_{Г'} = \frac{1}{3}$.

Полицейский будет ловить гангстера в несколько этапов.

Первый этап. Полицейский догоняет Г′. Это всегда можно сделать, так как $u > v_{Г'}$.

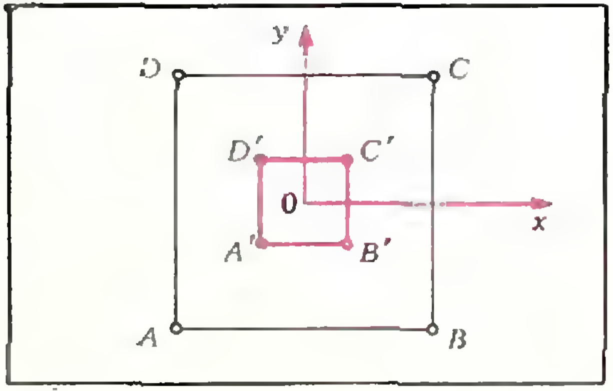


Рис. 15.

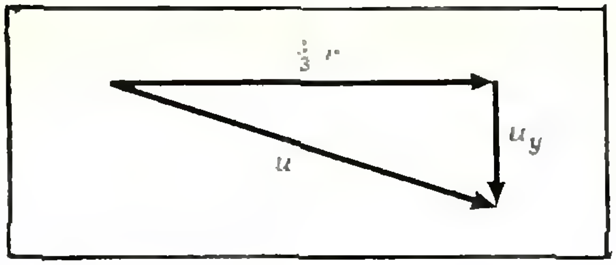


Рис. 16.

Первый этап считается законченным, когда точки П и Г′ совпадают.

Второй этап. Можно считать без ограничения общности, что к концу первого этапа точка Г окажется на стороне AB; тогда $x_П = \frac{1}{3}x_Г$.

На протяжении всего второго этапа полицейский должен двигаться таким образом, чтобы все время выполнялось равенство $x_П = \frac{1}{3}x_Г$; понятно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы то же соотношение все время имело место для горизонтальных составляющих скоростей полицейского и гангстера. Так как $u > \frac{1}{3}v$, то по оси Oy полицейский может развивать любую скорость, не превосходящую $\sqrt{u^2 - \left(\frac{1}{3}v\right)^2}$, (рис. 16). Потребуем еще, чтобы на втором этапе полицейский двигался к стороне AB с максимальной по оси Oy скоростью. Возможны два случая:

1) Г остается все время на AB. Тогда П через некоторое время достигнет AB, и следовательно, гангстер будет «пойман»; задача решена.

2) В какой-то момент Г уйдет со стороны AB. Как только Г достигнет границы AB (будем считать, точки B) начинается

Третий этап. К началу этого этапа точки Г и B совпадают, а точка П находится от каждой из сторон AB и BC на расстоянии, не большем $\frac{1}{3}$. На третьем этапе полицейский должен с максимальной скоростью *приближаться по перпендикуляру* к той стороне, на которой находится гангстер (если Г = B, то безразлично, к какой именно,— к стороне AB или же к стороне BC).

Чтобы добежать из точки B до точки A или до точки C, гангстеру понадобится единица времени, а полицейскому, чтобы достигнуть соответствующей стороны (AB или BC), понадобится строго меньше единицы времени. Следовательно, полицейский «поймает» гангстера на одной из сторон AB или BC. Тем самым случай а) полностью разобран.

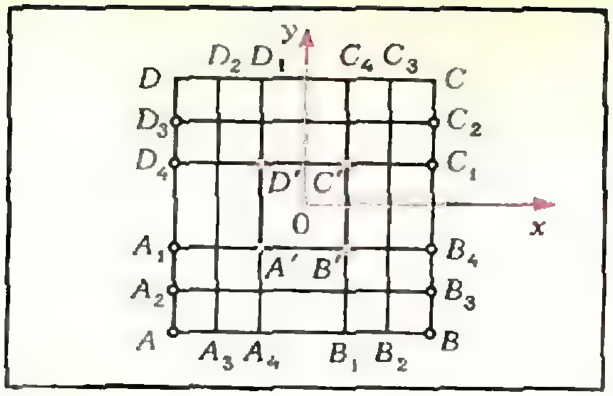


Рис. 17.

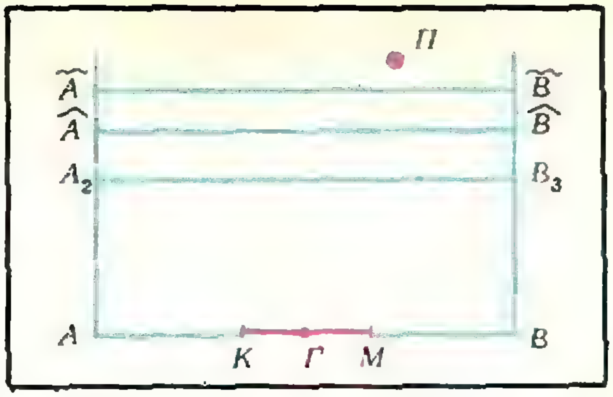


Рис. 18.

б) Пусть теперь $u < \frac{1}{3}$. Покажем, что в этом случае гангстер может выбрать такую *стратегию*, при которой полицейский не сумеет его «догнать».

Понятно, что если $u = \frac{1}{3}$ (напомним, что $v = 1$), то гангстеру будет труднее «убежать» от полицейского. Посмотрим, что будет в этом, самом неблагоприятном для гангстера случае.

В центре квадрата $ABCD$ построим квадрат $A'B'C'D'$, подобный исходному с коэффициентом подобия $k = {}^1/_3$; проведем прямые A_2B_3, A_1B_4, D_4C_1, D_3C_2, параллельные стороне AB, и прямые A_3D_2, A_4D_1, B_1C_4, B_2C_3, параллельные BC, так, чтобы $AA_3 = A_3A_4 = AA_2 = A_2A_1 = B_1B_2 = B_2B = D_4D_3 = D_3D$ (рис. 17).

Пусть в самом начале гангстер Г находится в середине стороны AB, а полицейский П — над прямой A_2B_3. Проведем две вспомогательные прямые $\hat A\hat B$ и $\tilde A\tilde B$, параллельные AB, так, чтобы полицейский П оказался над прямой $\tilde A\tilde B$ (рис. 18).

Покажем, что мы всегда можем выбрать некоторый отрезок KM так, чтобы он содержал середину стороны AB и чтобы из любой его точки ганстер Г успел бы добежать до любой из вершин A или B раньше, чем полицейский П успеет добежать от $\hat A\hat B$ до AB. В самом деле, расстояние от $\hat A\hat B$ до AB больше ${}^1/_6$; следовательно, П понадобится больше ${}^1/_2$ единицы времени для того, чтобы добежать от $\hat A\hat B$ до AB; значит, в качестве отрезка KM мы можем выбрать, например, отрезок, симметричный относительно середины стороны AB, с длиной, строго меньшей $2\left(3|A\hat A| - \frac{1}{2}\right)$.

Опишем теперь *стратегию* гангстера Г. Пока полицейский П находится выше прямой $\tilde A\tilde B$, гангстер остается на месте — в середине AB. Рано или поздно полицейский достигнет $\tilde A\tilde B$ (иначе он никогда не поймает гангстера); при этом возможны две ситуации:

(1) либо $x_П \neq \frac{1}{3} x_Г$,

(2) либо $x_П = \frac{1}{3} x_Г$.

Если имеет место случай (2), то Г начинает бегать с максимальной скоростью по отрезку KM вправо — влево. Если при этом $x_П = \frac{1}{3} x_Г$ все время, то горизонтальная составляющая скорости полицейского должна быть равна $\frac{1}{3}$ горизонтальной составляющей скорости гангстера; а так как последняя равна 1, то, следовательно, горизонтальная составляющая скорости П должна быть равна $\frac{1}{3}$, то есть u — максимальной скорости полицейского. Но, значит, вертикальная составляющая скорости П равна нулю, и поэтому полицейский все время будет находиться на $\tilde A\tilde B$ и никогда не поймает Г. Поэтому случай (2) все время быть не может (*так как такая стратегия для полицейского заведомо ошибочна*), полицейский сойдет с $\tilde A\tilde B$ и при этом $x_П \neq {}^1/_3\, x_Г$.

Будем считать, что гангстер замечает то, что полицейский сошел с прямой $\tilde A\tilde B$, *достаточно быстро*, например, еще до того, как полицейский достиг прямой $\hat A\hat B$.

Итак, сейчас у нас $x_П \neq \frac{1}{3} x_Г$, П — выше прямой $\hat A\hat B$, Г — на отрезке KM.

Дальнейшее поведение Г должно быть таково. Предположим, без ограничения общности, что $x_П < \frac{1}{3} x_Г$; тогда Г с максимальной скоростью движется вправо к точке B (или же если $x_П > \frac{1}{3} x_Г$, то он должен двигаться влево — к точке A). В силу выбора отрезка KM, полицейский не успеет добежать до прямой AB за то время, которое потребуется гангстеру, чтобы достичь точки B; *значит, П не сможет поймать* Г на стороне AB. Далее, поскольку мы предположили, что в «начальный» момент $x_П < \frac{1}{3} x_Г$ и Г бежит вправо со скоростью $3u$, то неравенство $x_П < \frac{1}{3} x_Г$ будет иметь место все время. Поэтому, когда Г достигнет точки B, то П будет находиться левее прямой B_1C_4 (рис. 19).

Теперь Г бежит с максимальной скоростью по стороне BC к ее середине. Чтобы добежать до середины, Г требуется $^1/_2$ единицы времени; за это время П пройдет путь длины не более чем $^1/_6$, и следовательно, не успеет достигнуть прямой B_2C_3.

Итак, мы пришли к уже рассмотренной конфигурации: Г — в середине стороны BC, а П — левее прямой B_2C_3. При этом точка Г из середины стороны AB переместилась в середину стороны BC; значит, прошла по крайней мере 1 единица времени. Дальнейшее поведение Г аналогично описанному выше. Совершенно очевидно, что при такой стратегии гангстера полицейский не «поймает» его ни за какое конечное время.

Таким образом, мы знаем, каково должно *быть поведение гангстера в самом «плохом»* случае: $u = \frac{1}{3}$; понятно, что при $u < \frac{1}{3}$ указанная для него стратегия будет тем более верной.

Г. А. Гальперин, А. Б. Ходулев

М230. *Докажите, что из любого выпуклого равностороннего (но не обязательно правильного) пятиугольника можно вырезать правильный треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной пятиугольника (рис. 20).*

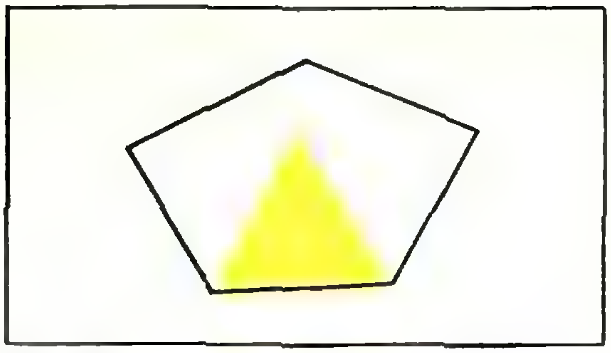


Рис. 20.

Предположим, что для некоторого *равностороннего выпуклого пятиугольника* $ABCDE$ со стороной, равной единице, утверждение задачи неверно. Можно считать, что наибольшая из диагоналей — AD, что точки A и D лежат на горизонтальной прямой (D правее A), точки B и C — в ее верхней полуплоскости, причем C не ближе к прямой AD, чем B (рис. 21). Ясно, что

$$1 < |AD| < |AE| + |ED| = 2. \qquad (*)$$

Поскольку в треугольниках ABD и ACD сторона AD — наибольшая, углы ABD и ACD, а тем более ABC и BCD все больше 60°, следовательно, равносторонние треугольники, построенные на сторонах AB, BC и CD, должны пересекаться отрезком AD (ведь *каждый из них*, по предположению, пересекается контуром пятиугольника, а отрезками AB, BC и CD эти треугольники пересечься не могут). Таким образом, углы BAD и CDA меньше 60°.

Отметим на отрезке AD точки B_1, C_1 и на его продолжении — точку C_3, для которых $|AB_1| = |C_1D| = |B_1C_3| = 1$, и построим в верхней полуплоскости равносторонние треугольники AB_1B_2, C_1DC_2, $B_1C_3C_4$ (рис. 22). Точка B должна лежать где-то на дуге B_1B_2 с центром A, точка C — на дуге C_1C_2 с центром D. С другой стороны, поскольку $|BC| = 1$ и C лежит не ниже B (но и не выше, чем на расстоянии $\sqrt{3}/2$ от прямой AD), то точка C должна лежать правее дуги C_2C_4 с центром B_1. Но из (*)

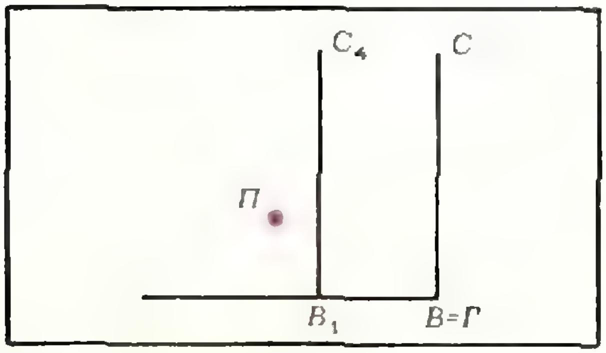


Рис. 19.

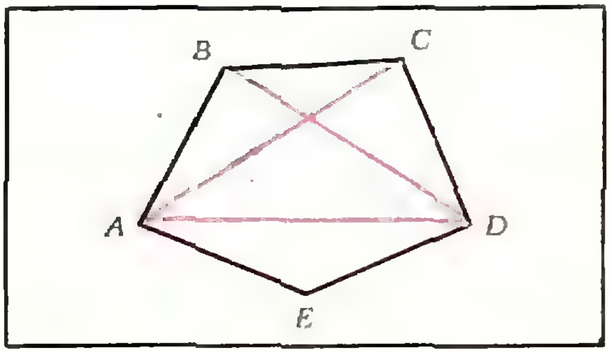


Рис. 21.

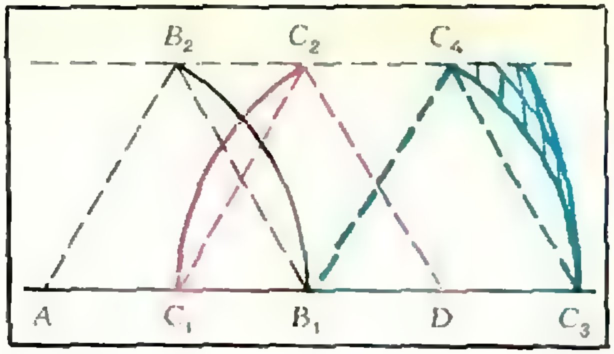


Рис. 22.

следует, что $\triangle C_1DC_2$ расположен левее $\triangle B_1C_3C_4$, поэтому дуга C_1C_2 расположена левее дуги C_3C_4. Получили противоречие. Значит, углы BAD и CDA не могут быть одновременно меньше 60°, и существует хотя бы один равносторонний треугольник (построенный либо на стороне AB, либо на BC, либо на CD), который не будет пересекаться контуром пятиугольника.

Из различных решений задачи **М230** мы выбрали именно это, поскольку оно поддается обобщению и позволяет доказать утверждение задачи **М230** для любого равностороннего выпуклого $(2n+1)$-угольника.

Н. Б. Васильев

Ф233. *При скоростном спуске лыжник скользит вниз по склону ($\varphi=45°$), не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $k=0{,}1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости лыжника $F_c=\alpha v^2$, где α — постоянная величина, равная 0,7 н/(м/с)². Какую максимальную скорость может развить лыжник, если его масса 70 кг?*

Рассмотрим движение лыжника, спроектировав все действующие на него силы на оси координат, направленные параллельно наклонной плоскости, которую образует склон, и перпендикулярно к ней (рис. 23).

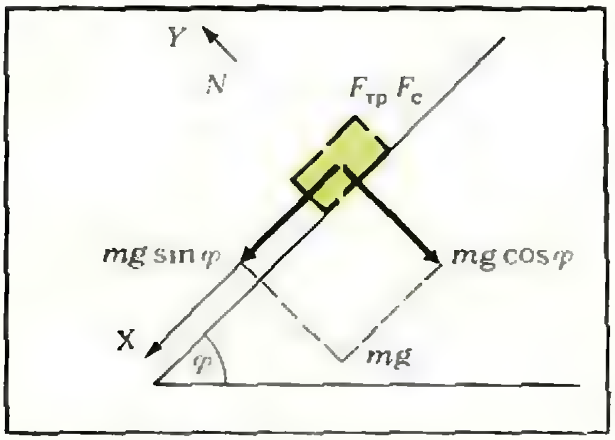


Рис. 23.

Так как вдоль оси Y лыжник не перемещается, то

$$N-mg\cos\varphi=0. \qquad (1)$$

Проекция силы тяжести на ось X, равная $mg\sin\varphi$, и сила трения $F_{тр}=kN$ не зависят от скорости движения лыжника, а сила сопротивления воздуха $F_c=\alpha v^2$ возрастает с увеличением скорости лыжника. Поэтому ясно, что при увеличении скорости лыжника наступит такой момент, когда сумма силы сопротивления воздуха и силы трения станет по абсолютной величине равна проекции силы тяжести. После этого скорость лыжника перестанет возрастать, и лыжник будет двигаться равномерно. Скорость v_{max}, при которой это произойдет, и есть максимальная скорость лыжника.

Запишем уравнение равномерного движения лыжника вдоль оси X:

$$mg\sin\varphi-kN-\alpha v_{max}^2=0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдем

$$v_{max}=\sqrt{\frac{mg}{\alpha}(\sin\varphi-k\cos\varphi)}=$$

$$=\sqrt{\frac{70\cdot 9{,}8}{0{,}7}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0{,}1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\approx 25\ (м/с).$$

Ф234. *Взрывная камера заполняется смесью метана и кислорода при комнатной температуре и давлении $p_0=760$ мм рт. ст. Парциальные давления метана и кислорода одинаковы. После герметизации камеры в ней происходит взрыв. Найти установившееся давление внутри камеры после охлаждения продуктов сгорания до первоначальной температуры, при которой давление насыщенных паров воды $p_н=17$ мм рт. ст.*

Запишем прежде всего уравнение реакции взрыва:

$$CH_4+2\,O_2=CO_2+2\,H_2O.$$

Из этого уравнения видно, что каждый моль метана соединяется с двумя молями кислорода. В результате реакции получается 1 моль углекислого газа и 2 моля воды.

До взрыва парциальные давления метана и кислорода были одинаковы и равны $\frac{1}{2}p_0$. Согласно уравнению газового состояния давление газа пропорционально числу молей газа. Тогда из равенства парциальных давлений метана и кислорода следует, что в сосуде находилось одинаковое число молей этих газов. Следовательно, при взрыве весь кислород прореагирует с метаном, причем в сосуде останется еще половина первоначального количества метана, который не вступил в реакцию.

Таким образом, после взрыва в сосуде будут находиться метан, углекислый газ и вода, и полное давление будет равно сумме парциальных давлений метана, углекислого газа и водяного пара:

$$p = p_{CH_4} + p_{CO_2} + p_{H_2O}.$$

После охлаждения смеси газов до первоначальной температуры парциальное давление оставшегося метана будет равно половине его первоначального парциального давления, то есть $\frac{1}{4}p_0$.

Число молей углекислого газа в сосуде равно числу молей прореагировавшего, а значит, и оставшегося метана. Поэтому парциальное давление углекислого газа будет также равно $\frac{1}{4}p_0$.

Теперь выясним, каково давление водяных паров. Предположим, что вся образовавшаяся при взрыве вода находится в парообразном состоянии. Так как число молей воды в два раза больше числа молей оставшегося в сосуде метана, то парциальное давление паров воды должно быть равно $\frac{1}{2}p_0 = 380$ *мм рт. ст.* Это, однако, больше давления насыщенных паров воды. Следовательно, бо́льшая часть водяных паров при охлаждении сконденсируется, и парциальное давление насыщенных паров воды в сосуде будет равно $p_н = 17$ *мм рт. ст.*

Окончательно после взрыва и охлаждения смеси полное давление в сосуде

$$p = p_{CH_4} + p_{CO_2} + p_{H_2O} =$$

$$= \frac{1}{4}p_0 + \frac{1}{4}p_0 + p_н = 397 \text{ мм рт. ст.}$$

При решении мы пренебрегли тем, что в результате конденсации воды объем, занимаемый газом, уменьшился. Это допустимо, так как объем воды в жидком состоянии мал по сравнению с объемом пара.

Ф235. *Маленькая капля воды падает в воздухе с постоянной скоростью благодаря тому, что на нее со стороны воздуха действует сила трения, вызванная столкновениями молекул воздуха с каплей. Как изменится скорость падения капли при увеличении температуры воздуха?*

Испарением капли пренебречь.

На водяную каплю, движущуюся в воздухе, действуют две силы: сила тяжести и сила сопротивления. Если эти силы одинаковы по абсолютной величине, то капля движется с постоянной скоростью. Величина этой скорости, очевидно, зависит как от массы капли, так и от силы сопротивления, вызванной соударениями с каплей молекул воздуха. При изменении температуры воздуха изменяется скорость теплового движения молекул. Поэтому естественно ожидать, что скорость падения капли тоже изменится.

Теперь проведем количественные расчеты.

Рассмотрим столкновения молекул воздуха с каплей и найдем, как зависит сила сопротивления от скорости теплового движения молекул. При этом будем считать, что:

1) столкновения молекул с каплей — упругие;

2) молекулы, сталкивающиеся с каплей, движутся или вертикально вверх, или вертикально вниз;

3) скорости всех молекул одинаковы.

Эти допущения упрощают рассуждения, но при этом они не изменяют реальной картины явления.

Вначале рассмотрим столкновение параллельного пучка частиц с неподвижной стенкой. Обозначим площадь поперечного сечения пучка s, скорость частиц u, число частиц в единице объема n. За время Δt со стенкой сталкиваются те молекулы, которые находятся от нее на расстоянии, не большем чем $u\Delta t$. Число таких частиц равно $su\Delta tn$, их общая масса $m = su\Delta tnm_0$ (m_0 — масса одной частицы), а импульс

$$mu = su^2\Delta tnm_0.$$

После упругого столкновения импульс частиц меняется на противоположный, поэтому изменение импульса равно

$$\Delta(mu) = 2mu.$$

Это означает, что на частицы со стороны стенки и на стенку со стороны частиц действуют средние силы, равные по абсолютной величине

$$F = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = 2su^2nm_0.$$

Таким образом, сила, действующая на стенку, пропорциональна квадрату скорости частиц относительно стенки.

Теперь рассчитаем силу сопротивления для движущейся капли. Обозначим скорость капли v, а скорость теплового движения молекул воздуха u. Молекулы, налетающие на каплю снизу, движутся относительно капли со скоростью $u+v$, а налетающие на каплю сверху — со скоростью $u-v$. Поэтому снизу на каплю действует сила $F_1 = k(u+v)^2$, а сверху — $F_2 = k(u-v)^2$ (k — коэффициент пропорциональности, не зависящий от скоростей v и u).

Результирующая сила

$$F = F_1 - F_2 = 4\,kuv.$$

Итак, сила сопротивления, действующая на каплю, пропорциональна скоростям u и v. Кроме этой силы, на каплю действует еще сила тяжести Mg. При равномерном движении

$$Mg = 4\,kuv,$$

откуда

$$v = \frac{Mg}{4ku}.$$

То есть скорость падения капли обратно пропорциональна тепловой скорости движения молекул воздуха. Но, как известно, $u\sim\sqrt{T}$. Следовательно,

$$v\sim\frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Поэтому при увеличении температуры воздуха скорость падения капли уменьшится.

Ф236. *Определить период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E=300$ в/см. Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантельки длины l ($l=10^{-8}$ см), на концах которой находятся две материальные точки массы m ($m=10^{-24}$ г), несущие на себе заряды $+e$ и $-e$ соответственно ($e=1{,}6\cdot10^{-19}$ к).*

В положении устойчивого равновесия молекула располагается вдоль поля (рис. 24). Если ее вывести из этого состояния, то возникает вращательный момент, поворачивающий молекулу вокруг ее центра тяжести. Этот момент создают электрические силы F_1 и F_2, действующие на заряды со стороны электрического поля (рис. 25).

Если рассматривать заряды каждый в отдельности, то можно сказать, что электрические силы для них играют роль возвращающих сил. Поэтому заряды колеблются подобно математическим маятникам длиной $\frac{l}{2}$.

Воспользуемся этой аналогией и запишем период колебаний молекулы так:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l/2}{g'}},$$

где g' — ускорение, которое электрическое поле сообщает каждому заряду. Так как $g'=\frac{F_{эл}}{m}$, а $F_{эл}=eE$, то

$$g'=\frac{eE}{m}.$$

Поэтому окончательно

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g'}}=2\pi\sqrt{\frac{lm}{2eE}}\approx2\cdot10^{-11}\ c.$$

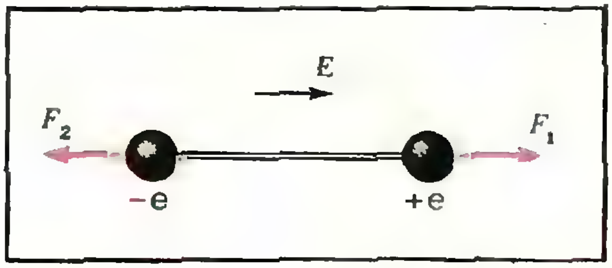


Рис. 24.

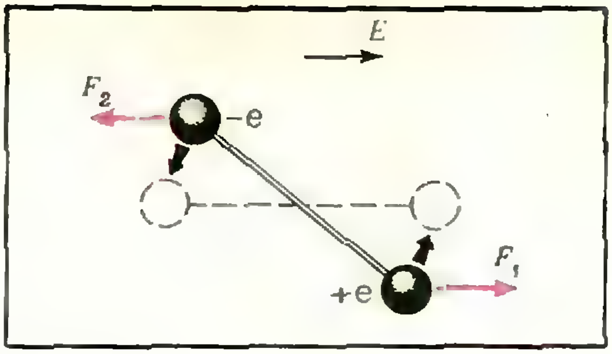


Рис. 25.

Ф237. *Почему лицо фехтовальщика в проволочной маске не видно публике, а спортсмен видит все так же хорошо, как и без маски?*

Отвечая на этот вопрос, остановимся на двух наиболее существенных факторах.

Во-первых, лицо человека в маске освещено гораздо хуже, чем сама маска и окружающие предметы. Поэтому свет, отраженный лицом, очень слаб по сравнению со светом, идущим от маски и других предметов. Вот почему для наблюдателя из публики лицо фехтовальщика в маске практически неразличимо. Сам же спортсмен, наоборот, хорошо видит ярко освещенные предметы вокруг себя на фоне слабого света, отраженного внутренней стороной проволочной маски. К тому же изображение маски в глазу спортсмена получается сильно размытым (несфокусированным), так как маска расположена слишком близко к глазу.

Аналогично объясняется, почему днем невооруженным глазом нельзя увидеть звезд: солнечный свет, рассеянный атмосферой, гораздо сильнее света звезд.

Во-вторых, поскольку проволочная сетка находится близко от лица спортсмена, она закрывает для наблюдателя довольно большую часть лица. В то же время спортсмену эта маска почти не мешает.

В заключение рассмотрим еще одну подобную задачу — почему днем с улицы ничего не видно внутри комнаты, если смотреть через окно, занавешенное сетчатой тканью? Очевидно, в этом случае тот факт, что сильно освещенная снаружи занавеска отражает много света по сравнению с предметами внутри комнаты, играет решающую роль. Если смотреть из комнаты на улицу, то яркие предметы будут хорошо видны, так как внутренняя сторона занавески освещена слабо. Однако, видно будет значительно хуже, если в комнату попадают прямые солнечные лучи и стены комнаты хорошо отражают свет,— тогда и изнутри занавеска освещена хорошо. Чтобы хорошо видеть то, что происходит на улице, необходимо в этом случае подойти вплотную к окну.

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Механические колебания

В. А. Тихомирова

Гармоническим колебательным движением называют движение, происходящее по закону

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Здесь x — смещение тела из положения равновесия, x_0 — амплитуда колебаний, $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ — фаза колебаний, ω — циклическая частота, которую можно связать с частотой колебаний ν или периодом колебаний T соотношениями $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, и φ_0 — начальная фаза. Наибольшую трудность при изучении этих величин вызывает обычно понятие фазы колебаний. Из уравнения (1) видно, что, зная фазу колебаний и амплитуду, можно определить не только положение тела в данный момент времени, но и направление движения тела. Поэтому говорят, что фаза колебаний *характеризует стадию колебательного движения* в рассматриваемый момент. Начальная фаза показывает, с какой стадии начался колебательный процесс. Пусть, например, математический маятник (рис. 1, *а*) колеблется с начальной фазой $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Это означает, что он начинает двигаться из положения равновесия влево. Через четверть периода, когда фаза колебаний $\varphi = \omega t + \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$, маятник дойдет до крайнего левого положения (рис. 1, *б*) и т. д. Особенно важными понятия фазы и начальной фазы становятся при сравнении или сложении нескольких колебаний.

Уравнение (1) — это кинематический закон, описывающий гармоническое колебание и связывающий основные кинематические величины, характеризующие это движение. Вспомним, когда возможно такое движение, от чего зависят амплитуда, частота и начальная фаза колебаний. Самые простые и наглядные примеры колебательных систем — это пружинный (рис. 2) и математический маятники. Будем говорить только о свободных (или собственных) колебаниях этих маятников *).

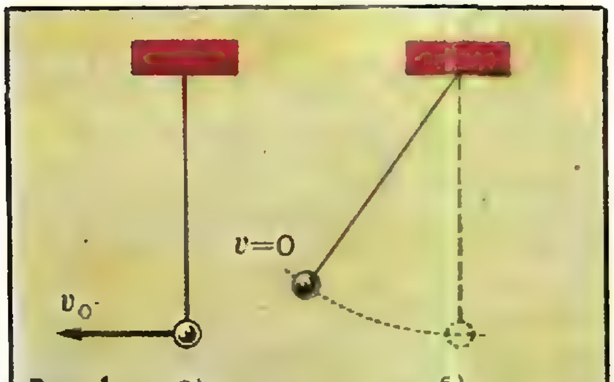


Рис. 1. а) б)

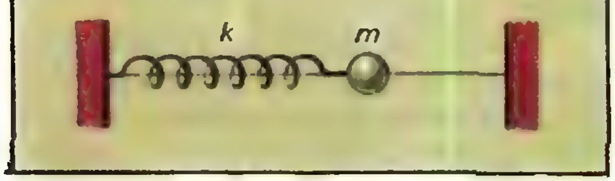


Рис. 2.

---

*) Уравнение (1) описывает и вынужденные колебания.

Если каким-нибудь образом вывести маятник из состояния равновесия, сообщив ему некоторую начальную энергию, он будет совершать периодически повторяющееся движение. Отличительной особенностью колебаний по сравнению с остальными видами периодических движений является то, что существует особое положение — положение равновесия, к которому маятник периодически возвращается, но не останавливается в этом положении, а продолжает двигаться дальше по инерции.

Следовательно, в системе, обладающей инертностью, обязательно должна быть так называемая возвращающая сила. В пружинном маятнике это — сила упругости, в математическом — составляющая силы тяжести. Возвращающая сила связана со смещением маятника от положения равновесия:

$$F_{\text{в}} = -kx.$$

Это равенство по виду напоминает закон Гука для упругих деформаций:

$$F_{\text{упр}} = -k_{\text{упр}}x,$$

где x — величина деформации, $k_{\text{упр}}$ — коэффициент упругости. Поэтому возвращающую силу часто называют квазиупругой силой (приставка «квази» означает «как бы»), а k — коэффициентом квазиупругости. Коэффициент k зависит от природы возвращающей силы.

Таким образом, основной закон динамики — второй закон Ньютона для гармонических колебаний записывается так:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x. \qquad (2)$$

Решением этого уравнения и является выражение (1).

Начальная фаза φ_0 зависит, конечно, только от начальных условий. Циклическая частота ω зависит от m и k, характеризующих инертные и квазиупругие свойства системы, следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Но если вы забыли эту формулу, то вспомнить ее помогут простые физические соображения и метод размерностей.

Действительно, чем больше коэффициент квазиупругости k, тем больше ускорение маятника в любой момент времени, тем быстрее маятник совершает колебания. Чем больше масса маятника, тем меньше его ускорение, тем медленнее происходят колебания.

Запишем зависимость ω от m и k в таком виде:

$$\omega = Ak^{\alpha}m^{\beta},$$

где A — безразмерный коэффициент пропорциональности, α и β — безразмерные показатели степени. Теперь воспользуемся правилом размерностей, по которому размерности левой и правой частей любого равенства должны быть одинаковыми, то есть

$$[\omega] = [k^{\alpha}]\,[m^{\beta}].$$

В системе СИ $[\omega] = \text{с}^{-1}$, $[k] = \text{кг}\cdot\text{с}^{-2}$, $[m] = \text{кг}$, поэтому

$$\text{с}^{-1} = \text{кг}^{\alpha}\text{с}^{-2\alpha}\,\text{кг}^{\beta}.$$

Найдем, при каких α и β это равенство обратится в тождество. Для этого приравняем показатели степени у одинаковых оснований слева и справа и получим систему

$$\begin{cases} -1 = -2\alpha, \\ \alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ и } \beta = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Коэффициент A, который в самом деле равен 1, методом размерностей найти, конечно, нельзя.

Теперь об амплитуде колебаний. Конечно, она зависит от энергии, которую сообщили маятнику в начальный момент. Конкретнее поговорим об этом при решении следующей задачи.

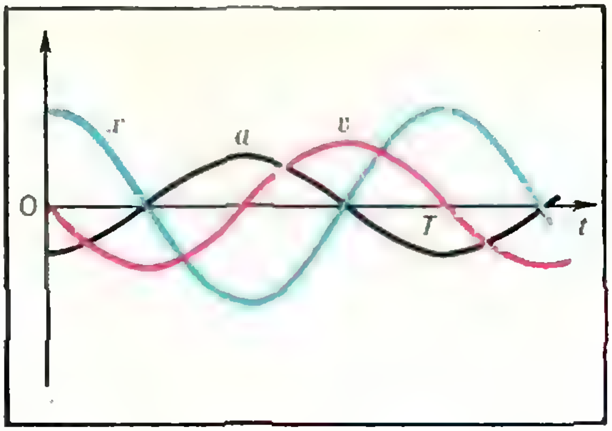


Рис. 3.

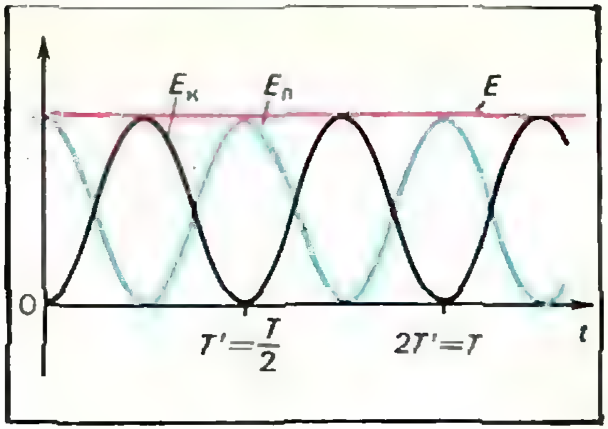


Рис. 4.

Задача 1. *Пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω и амплитудой x_0. Найти максимальные значения ускорения и скорости маятника, а также величину его механической энергии.*

По второму закону Ньютона для гармонических колебаний

$$a = -\omega^2 x.$$

Поскольку смещение x меняется по гармоническому закону, а ω^2 — величина постоянная, то ускорение маятника a тоже меняется по гармоническому закону, причем его амплитуда

$$a_0 = \omega^2 x_0.$$

Знак минус в уравнении движения говорит о том, что колебания ускорения противоположны по фазе колебаниям смещения.

Раз смещение маятника и его ускорение меняются со временем по гармоническому закону, то естественно предположить, что и скорость маятника меняется по такому же закону. Строгие расчеты действительно подтверждают эти предположения. Амплитуду колебаний скорости можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии.

Механическая энергия маятника E складывается из кинетической энергии шарика $E_к = mv^2/2$ и потенциальной энергии упругой деформации пружины $E_п = kx^2/2$. При прохождении положения равновесия, когда невесомая пружина недеформирована, а скорость шарика v_0 максимальна, полная энергия

$$E = E_{к\,max} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

В момент наибольшего удаления шарика от положения равновесия, когда его скорость равна нулю, а деформация пружины максимальна, энергия

$$E = E_{п\,max} = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Полная энергия маятника с течением времени не меняется (мы рассматриваем незатухающие свободные колебания), поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2},$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_0 = \omega\,x_0.$$

Колебания скорости опережают по фазе колебания смещения на четверть периода, то есть на $\frac{\pi}{2}$.

Графики зависимости смещения x, скорости v и ускорения a от времени даны на рисунке 3.

Итак, полная механическая энергия, самым тесным образом связанная с амплитудой смещения x_0 или с амплитудой скорости v_0, есть величина постоянная. Но ведь она скла дывается из кинетической и потенциальной энергии. Запишем выражение для потенциальной энергии упругой деформации:

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2 \omega t = \frac{kx_0^2}{4}(1 + \cos 2\omega t).$$

Отсюда видно, что потенциальная энергия тоже меняется с течением времени по гармоническому закону, но частота ее колебаний в 2 раза больше частоты колебаний смещения маятника.

Кинетическую энергию можно представить как разность полной энергии, равной $E = \frac{kx_0^2}{2}$, и потенциальной энергии:

$$E_к = E - E_п = \frac{kx_0^2}{4}(1 - \cos 2\omega t).$$

Следовательно, кинетическая энергия изменяется в противофазе по сравнению с потенциальной. Графически это показано на рисунке 4, где T' — период колебаний энергии, а T — период колебаний смещения.

Мы видим, что рассматривая колебания, можно говорить не только о колебаниях смещения, скорости, ускорения, но также и о колебаниях кинетической и потенциальной энергий. Теперь рассмотрим несколько конкретных задач и убедимся в том, что для их решения достаточно выяснить природу возвращающей силы, записать для нее соответствующее выражение, а также воспользоваться законом сохранения энергии.

Задача 2. *На чашку весов, подвешенную на пружине, падает с высоты h груз массы m и остается на чашке (рис. 5, а). Коэффициент упругости пружины равен k. Массы пружины и чашки малы по сравнению с массой груза. Определить амплитуду и период свободных колебаний чашки с грузом.*

Система, действительно, будет совершать колебания, так как она представляет собой пружинный маятник, расположенный вертикально. Но, кроме силы упругости пружины, на чашку с грузом действует еще сила тяжести. Какова ее роль? Эта сила, оказывается, изменяет положение равновесия системы, смещая его вниз на величину Δx (рис. 5, б).

Рассмотрим две системы координат: OX и $O'X'$. Запишем закон движения маятника в первой системе:

$$ma = -kx + mg.$$

Но

$$x = x' + \Delta x.$$

Величину Δx можно найти из условия равенства сил тяжести и упругости в положении равновесия: $mg = k\Delta x$. Поэтому

$$ma = -kx' - k\frac{mg}{k} + mg,$$

то есть

$$ma = -kx'.$$

Следовательно, ускорение системе сообщает только сила упругости.

Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Амплитуду колебаний найдем, исходя из закона сохранения энергии.

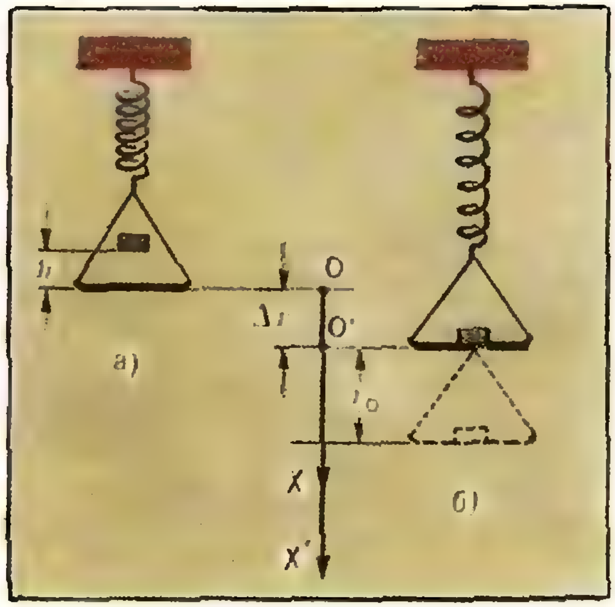


Рис. 5.

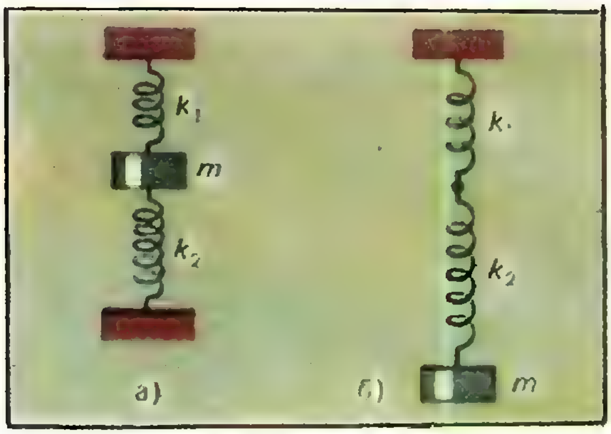


Рис. 6.

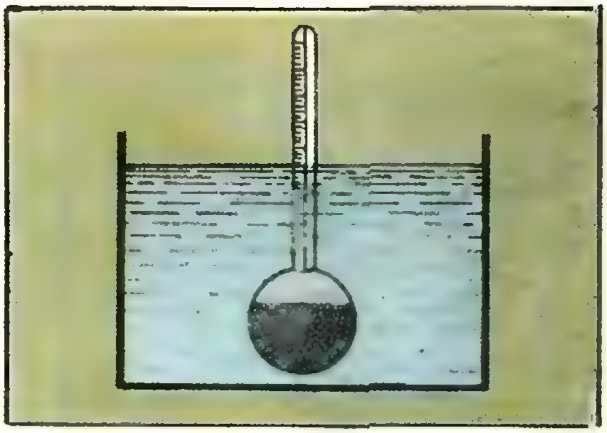


Рис. 7.

В начальный момент груз обладает потенциальной энергией тяготения. В момент, когда пружина максимально растянута, потенциальная энергия упругой деформации запасена в пружине (за начало отсчета высот принимаем наинизшее положение чашки с грузом, поэтому во втором случае груз не обладает никакой энергией). Приравняем эти энергии *):

$$mg\left(h+\Delta x+x_0\right)=\frac{k\left(\Delta x+x_0\right)^2}{2},$$

где

$$\Delta x=\frac{mg}{k}.$$

Отсюда

$$x_0=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}$$

Задача 3. *Найти частоту колебаний маятников, изображенных на рисунке 6. Коэффициенты упругости пружин равны k_1 и k_2, масса груза m. Массами пружин пренебречь.*

Рассмотрим сначала первый маятник (рис. 6, *а*). Если сместить груз из положения равновесия, например, вниз на величину x, то верхняя пружина дополнительно растянется на длину x, а нижняя — сожмется тоже на x. Но обе дополнительные силы упругости направлены вверх, то есть они возвращают груз в положение равновесия, поэтому можно записать: $ma=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)\,x$. По уравнению движения маятника

$$a=-\omega^2x,$$

поэтому

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.$$

Во втором случае (рис. 6, *б*) при смещении груза из положения равновесия вниз на величину x обе пружины растянутся, но их удлинения x_1 и x_2 будут разными. Однако

$$x_1+x_2=x.$$

Так как пружины невесомы, силы упругости должны быть одинаковыми*): $k_1x_1=k_2x_2$. Поэтому закон движения груза:

$$ma=-k_1x_1=-k_2x_2=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\,x,$$

откуда

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)\,m}}.$$

Заметим, что частота колебаний первого маятника больше, чем частота колебаний второго.

---

*) Это можно сделать, так как чашка невесома, и начальная энергия чашки с грузом равна энергии падающего груза.

*) Рассмотрим, например, вторую пружину. На нее со стороны первой пружины действует сила $F_1=k_1x_1$, направленная вверх, и со стороны груза действует сила F_2, равная по третьему закону Ньютона силе упругости второй пружины и направленная вниз (то есть $F_2=k_2x_2$). Запишем уравнение движения для пружины: $m_2a_2=F_2-F_1=k_2x_2-k_1x_1$. Так как пружина невесома, то есть $m_2=0$, то $k_2x_2=k_1x_1$.

Действительно,

$$\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}-\sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)\,m}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{(k_1+k_2)-\sqrt{k_1k_2}}{\sqrt{k_1+k_2}}\right]>0,$$

так как среднее арифметическое $\frac{k_1+k_2}{2}$ всегда больше или равно среднему геометрическому $\sqrt{k_1k_2}$.

Задача 4. *Ареометр массой m представляет собой шарик, заполненный дробью, и цилиндрическую трубку с поперечным сечением S. Он помещен в жидкость с плотностью ρ (рис. 7). Ареометр погружают в жидкость несколько глубже, чем это нужно для его равновесия, и затем отпускают. Найти период свободных колебаний ареометра.*

В положении равновесия сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой. Если ареометр глубже погружен в жидкость, выталкивающая сила становится больше силы тяжести, возникает равнодействующая сила, направленная вверх. Пройдя по инерции положение равновесия, ареометр оказывается погруженным в жидкость меньше, чем это нужно для равновесия, возникает равнодействующая сила, направленная вниз. Таким образом, изменение выталкивающей силы выполняет роль возвращающей силы:

$$\Delta F_{\text{выт}}=-\rho g\Delta V=-\rho gSx$$

(знак минус говорит о том, что изменение выталкивающей силы противоположно изменению объема погруженной части ареометра). Следовательно, в этом случае $k=\rho gS$, поэтому

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}.$$

Задача 5. *Математический маятник длиной l укреплен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости с углом наклона α. Найти положение равновесия маятника и период его колебаний.*

Поскольку маятник находится на тележке, скатывающейся с наклонной плоскости с ускорением $a=g\sin\alpha$, то его положением равновесия будет положение, при котором маятник движется относительно плоскости с тем же ускорением a, что и тележка.

На шарик действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения нити $F_{\text{н}}$. Равнодействующая этих сил в положении равновесия и должна сообщить шарику ускорение a:

$$F_{\text{р}}=ma=mg\sin\alpha.$$

Из рисунка 8 видно, что это возможно только в том случае, когда нить маятника перпендикулярна к наклонной плоскости.

Итак, составляющая силы тяжести вдоль плоскости, равная $mg\sin\alpha$, должна обеспечить маятнику ускоренное движение по наклонной плоскости. Сила натяжения, всегда перпендикулярная к траектории движения шарика относительно тележки, тоже не может выступать в роли возвращающей силы. Поэтому остается одна сила — составляющая силы тяжести, перпендикулярная к плоскости и равная $mg\cos\alpha$. Можно сказать, что маятник совершает колебания как бы в ином поле тяжести с ускорением свободного падения $g'=g\cos\alpha$.

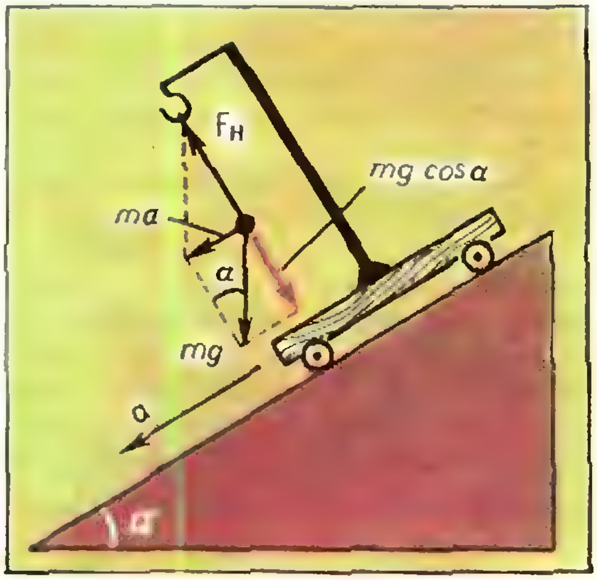


Рис. 8.

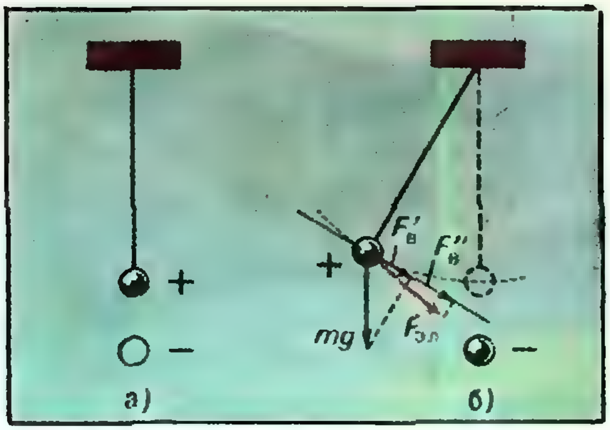


Рис. 9.

Период таких колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}.$$

Задача 6. *Маятник состоит из металлического шарика, подвешенного на шелковой нити. Как изменится период его колебаний, если шарику сообщить положительный заряд, а другой шарик, заряженный отрицательно, поместить внизу, на одной вертикали с нитью маятника (рис. 9, а)?*

Кроме силы тяжести и силы натяжения нити, на заряженный шарик маятника действует еще электрическая сила притяжения к противоположно заряженному шарику, находящемуся ниже. Эта сила, как и сила тяжести, будет давать составляющую на направление движения (рис. 9, *б*), что увеличит возвращающую силу:

$$F_в = F'_в + F''_в.$$

При этом увеличится среднее значение ускорения маятника, а период, соответственно, уменьшится. Положение равновесия маятника останется вертикальным.

Упражнения

1. Математический маятник, состоящий из нити длиной 243 *см* и стального шарика диаметром 4 *см*, совершает гармонические колебания с амплитудой 10 *см*. Определить скорость шарика при прохождении положения равновесия и наибольшее значение возвращающей силы. Плотность стали равна 7,8 *г/см*^{3}.

2. Тело массой M, скрепленное с пружиной, совершает колебания с амплитудой x_0 на гладком горизонтальном столе. В тот момент, когда тело проходит положение равновесия, на него сверху падает и прилипает к нему кусок пластилина массы m. Как изменится амплитуда колебаний?

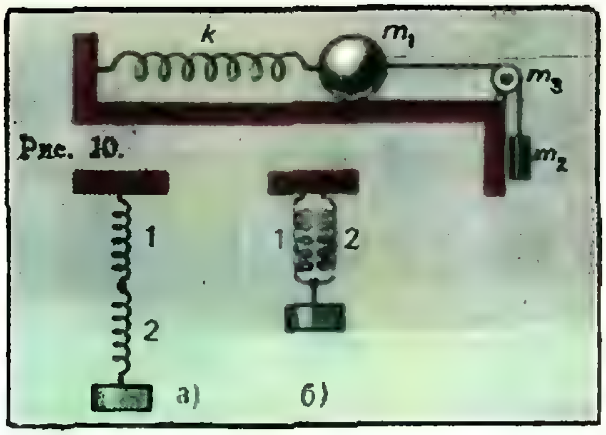


Рис. 10.

Рис. 11.

3. Шар массой $m_1 = 0{,}2$ *кг* лежит на абсолютно гладкой поверхности. С помощью нити, перекинутой через блок, к нему прикреплен груз массой $m_2 = 0{,}1$ *кг* (рис. 10). Блок представляет собой тонкостенный цилиндр массой $m_3 = 0{,}3$ *кг*. При равновесии этой системы легкая пружина растянута на $\Delta l = 5$ *см*. Определить циклическую частоту свободных колебаний шара, если груз без толчка немного оттянули вниз и отпустили.

4. Груз массой 0,5 *кг*, подвешенный на невесомой пружине, колеблется с частотой 0,4 *гц*. Каковы будут частоты колебаний того же груза на двух таких пружинах, если один раз они соединены последовательно, а другой раз параллельно (рис. 11)?

5. В U-образную трубку налита ртуть. Найти период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения трубки S, масса ртути m и плотность ртути ρ.

6. Горизонтальная подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой x_0. Какова может быть максимальная частота этих колебаний, если лежащий на подставке предмет не отделяется от нее?

7. Лифт поднимается вверх сначала с ускорением a_1 в течение времени t_1, затем с замедлением a_2 в течение времени t_2. В лифте находится математический маятник длиной l. Сколько колебаний он совершит за время движения?

8. Как изменится период колебания маятника (см. задачу 6 в статье), если отрицательно заряженный шарик поместить в точке подвеса?

Л. Е. Садовский

«Прикладная математика» — новая специальность в технических вузах

Инженерам любой специальности необходимы знания в области фундаментальных дисциплин, сложившихся в ходе многовекового исследования законов мира. Важнейшие из этих дисциплин: математика и физика. Развиваясь в процессе деятельности человека, они сами оказываются поразительной силой, способствующей прогрессу знаний и техники.

Основные факты, полученные точными науками (теоремы, физические законы и т. п.), составляют научный капитал, который, в отличие от действующей техники и технологии производства, почти не стареет со временем. Яркой иллюстрацией стабильности и преемственности знаний в области фундаментальных дисциплин может служить сопоставление частей современного математического образования. Здесь и созданная более 2000 лет назад «школьная» геометрия и еще более древние основы алгебры. С ними соседствуют дифференциальное и интегральное исчисления, а также аналитическая геометрия и линейная алгебра. Эти разделы стандартного курса высшей математики в вузах имеют примерно двухсотлетний возраст. Наконец, современные методы решения оптимизационных задач (на определение наибольших и наименьших значений функций) — в том числе линейное, нелинейное и динамическое программирование, принцип максимума и т. п. — немногим старше двадцати — тридцати лет. В то же время некоторые из них сами являются удачным синтезом давно известных методов перебора различных вариантов и новых соображений, обеспечивающих определенную целенаправленность (и, следовательно, экономичность) подобного перебора. Методы оптимизации включены в учебные планы специальностей с повышенной математической подготовкой.

Более старые разделы науки сосуществуют с новыми и ими не отменяются. Меняется лишь относительный вес отдельных частей, методика обучения, оценки значимости тех или иных разделов. Так, например, по новой программе средней школы систематический курс математики вводится на год раньше (в четвертом классе). В нем рано появляются теоретико-множественные понятия, алгебраическая символика, современная терминология, начала геометрии, а в старших классах — начала математического анализа и исследование элементарных функций.

Аналогичный процесс перестройки программы математических курсов, перенос акцентов на новые разделы, некоторое сокращение «традиционных» разделов, потерявших прежнее значение, происходит и в высшей школе. Во многом эта перестройка оказалась вызванной современной научно-технической революцией, о которой столь часто теперь говорят и пишут. Бесспорно, что одним из важнейших условий этой революции явился прогресс в области математических знаний и вычислительной техники. Быстродействующие электронные цифровые вычислительные машины (ЭВМ), созданные математиками в содружестве с инженерами, за тридцать последних лет существенно расширили возможности исследований (не только математических!), вызвали переоценку ценностей, внесли принципиально новое в сферу управления экономикой, в управление процессами производства, в его автоматизацию и т. п.

ЭВМ преподносят нам еще один пример преемственности и стабильности математических идей: можно проследить два направления, слияние которых отмечено созданием ЭВМ. Одно из них идет от Блеза Паскаля (1623—1662) и его счетной машины (см. «Квант», 1973, № 8, с. 10). Второе — от Готфрида Лейбница (1646—1716); он хотел разработать математический аппарат, пригодный для проведения рассуждений и доказательств теорем, и построить на основе этого аппарата машину, способную проводить доказательства автоматически.

Первая линия продолжалась в работах по созданию все более совершенных счетных машин: арифмометров, автоматических суммирующих машин и т. п. Вторая поддерживалась работами Джорджа Буля (1815—1864), заложившего основы алгебры логики, затем Фреге и Расселом, которые и создали собственно теорию исчисления высказываний (математическую логику), и другими математиками.

По-видимому, впервые оба эти направления соприкоснулись в идеях Чарльза Бэбеджа (1792—1871), в проекте его аналитической машины предусмотрены важнейшие части ЭВМ: ячейки памяти для хранения данных, арифметические устройства, устройство, управляющее работой машины (программа).

Современные ЭВМ — это синтез идей, восходящих к Паскалю и Лейбницу. Эти идеи вместе с возможностями современной общей алгебры привели к созданию теории алгебраических моделей вычислительных машин и теоретическому программированию.

ЭВМ требуют надлежащего математического обеспечения — а его создают люди. По данным одной из крупнейших в мире фирм, производящих вычислительную технику, современные ЭВМ лишь на 40% — «железо», на остальные же 60% — математическое обеспечение (то есть программы решения различных задач, трансляторы, диспетчеризация времени по отдельным задачам и т. п.). В штате этой фирмы и ее филиалов работают 100 000 математиков. По некоторым оценкам стоимость создания программного обеспечения достигает 80% стоимости десятилетней эксплуатации ЭВМ. Предназначенные первоначально для решения научных (вычислительных) задач, ЭВМ, оказались незаменимыми в сфере управления и обработки информации*).

Любопытно, что так называемые счетно-аналитические машины**), предназначенные для обработки информации (в частности, для бухгалтерских расчетов), в последующем (до появления ЭВМ) использовались для решения научных задач. Сопряжение их в системы совместно работающих машин предшествовало созданию современных ЭВМ. Сейчас 80% всех ЭВМ используется для обработки информации и для управления. Сложность задач управления, огромный объем информации, подлежащей обработке, потребовали создания специализированных систем и способствовали превращению искусства управления в науку.

До последних лет внимание привлекала автоматизация тех или иных процессов производства (в металлургии, химии, пищевой промышленности). Речь шла о проведении известной работы новыми средствами. Вузы давно готовят инженеров по автоматизации конкретных производств (в настоящее время более чем по 350 специальностям). Автоматизация производства приводит обычно к существенному сокращению обслуживающего персонала, в то время как автоматизация процессов управления к резкому сокращению обслуживающего персонала не приводит. Эффект от автоматизации управления состоит в проведении новыми средствами новой работы, осуществить которую старыми средствами невозможно. Кроме того, с помощью новых средств в ходе самого процесса работы можно добиться оптимизации тех или иных величин, подобно тому как в процессе полета космической ракеты в наземных управляющих центрах удается провести упреждающие расчеты и провести коррекцию скорости и других параметров.

Одно из новых средств — это автоматизированные системы управления (АСУ). Их основная задача — автоматизация управления на тех или иных уровнях (отдельное предприятие, отдельная отрасль хозяйства или транспорта, государство и даже содружество государств). Цель управления — достижение обоснованных и по возможности наилучших решений в проведении различного рода мероприятий.

АСУ в практическом решении задач опираются на современную вычислительную технику, а в методологическом плане — на современные разделы математики (теорию управления, исследование операций*), математическое программирование, системный анализ, случайные процессы и многие другие).

---

*) Понятие информации является в математике одним из начальных, его нельзя определить (подобно понятию множества) с помощью иных более элементарных понятий. Здесь же под термином «информация» можно понимать некоторую совокупность фактов или данных, несущих содержательные сведения о чем-либо. Понятие содержательности относительно. Так например, для окончившего среднюю школу сообщение о том, что Средиземное и Черное моря соединены проливами, не содержит новых сведений, тогда как для лица, географию не изучавшего, это сообщение содержит нечто новое.

**) Счетно-аналитические машины работают с данными, нанесенными на специальные карты (перфокарты) в виде пробивок (перфораций). В комплект машин входят: *табулятор* (суммирующая машина), *мультиплейер* (умножающая машина), *сортировальный автомат* (осуществляет простейшие логические операции — подбор массивов карт по определенным признакам), *перфоратор* (наносит данные на карты) и другие устройства.

*) *Операцией* называется всякое действие (или система действий), подчиненное единому замыслу и направленное к достижению определенной цели. Примерами операций могут служить: система мероприятий по переброске грузов из пунктов производства в пункты потребления в кратчайшее время (с минимальными затратами); запуск группы искусственных спутников для организации систем связи и т. п. Исследование операций связано с выбором такой системы действий, которая по определенным признакам (*критериям*) предпочтительнее других (*оптимальна*).

Естественно, что создание и эксплуатация подобных систем предусматривает наличие вычислительной техники и надлежащего математического обеспечения.

В девятой пятилетке планируется создание более 1500 различных АСУ и подготовка более 75 тысяч инженеров по комплексному обеспечению эксплуатации всех звеньев АСУ и ее информационной базы *).

Более чем в 40 вузах страны подготовка таких специалистов начата. Несколько лет в университетах и крупнейших вузах ведется подготовка инженеров-математиков (или математиков-инженеров). За прошедшие годы страна получила примерно 10 тысяч инженеров-математиков. С 1969 года специальность «инженер-математик» преобразована в новую специальность — «прикладная математика», имеющую несколько специализаций. Основные из них:

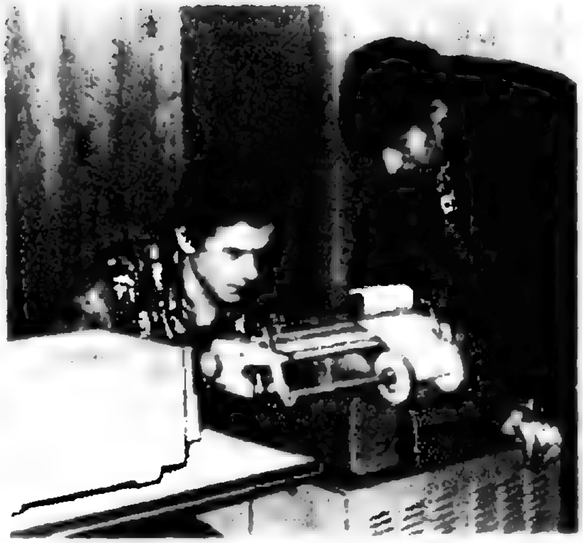
1) математическое обеспечение АСУ,
2) математическое обеспечение ЭВМ,
3) применение средств вычислительной техники (к решению инженерных, экономических, управленческих и других задач).

В девятой пятилетке планируется подготовить 50 тысяч математиков-прикладников.

Проблемы, с которыми сталкивается инженер-математик, весьма разнообразны и по своему происхождению, и по трудности. Поэтому охарактеризовать их можно лишь в общих чертах.

Специалисты по математическому обеспечению АСУ занимаются, в основном, проектированием принципиальных схем АСУ, математическим описанием и выбором оптимальных вариантов процессов производства, управления, сбора и обработки информации, построением оптимальных объемных планов (на год, квартал), оперативным планированием (например, суточным), экономико-статистическими исследованиями (от взаимосвязей со смежными производствами и реализации продукции до системы материального поощрения) и другими.

АСУ представляет собой своеобразную иерархическую систему. В ней цель каждой подсистемы состоит в принятии определенных решений. При движении от более крупных частей к более мелким происходит постепенная детализация задач. Чем задача конкретнее, тем она, как правило, сложнее. К самым трудным относятся вопросы оперативного планирования и управления. Большие затруднения вызывает установление критериев полезности, оптимальности. Обычно создание обоснованного критерия — часть решения задачи. Примерно таким кругом задач описывается специализация математического обеспечения АСУ — одной из указанных выше специализаций «прикладной математики».



Студенты МИИТа специальности «прикладная математика» на практике в машинном зале. ▲ ▶

Вторая специализация (математическое обеспечение ЭВМ) — это так называемое внутреннее математическое обеспечение ЭВМ: составление наборов (пакетов) программ, направленных на решение определенного круга задач; изучение различных языков программирования; создание трансляторов — устройств, воспринимающих текст программ, написанных на «почти человеческом» языке, и переводящих их на язык машины; исследование различных режимов работы отдельной ЭВМ и вычислительных систем, разработка структуры вычислительного процесса.

Третья специализация (применение средств вычислительной техники) связана с подготовкой математиков для поисковых работ в различных областях техники, технологии, экономики, обработки информации, управления. Здесь требуется умение сформулировать задачу на языке математики — построить ее «математическую модель», изучить эту модель, установить, если это требуется, критерии полезности и выявить условия, их оптимизирующие.

Основная характеристика специальности «прикладная математика» — широкая математическая подготовка и отличное владение ЭВМ в соединении со знанием ряда общетеоретических (физика, механика) и инженерных дисциплин (электротехника, радиоэлектроника, теория автоматического управления, инженерная графика).

Становление специальности «прикладная математика» сопровождалось существенным увеличением объема математических курсов (до 1700 часов) и курсов по ЭВМ

---

*) Инженеров по конструированию и эксплуатации ЭВМ наши вузы выпускают уже много лет.

(около 400 часов)*). Изучение многих математических дисциплин сочетается с работой на ЭВМ — решением ряда конкретных задач.

Всего в рабочем плане специальности из 4700 учебных часов около 2600 часов отведено математике АСУ и ЭВМ. Поэтому специалисты в указанной области и классифицируются как математики.

Подготовка математиков-прикладников ведется в университетах и наиболее крупных втузах страны (в частности, в Ленинградском и Львовском политехнических, Харьковском радиотехническом, Казанском авиационном институтах, в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта, в МАИ, МИЭМ, МИФИ, ФИЗТЕХе, МИИТе).

МИИТ, например, одним из первых в стране (наряду с МИЭМом) начал готовить инженеров-математиков, и с 1969 года он ведет подготовку математиков-прикладников по всем трем указанным выше специализациям. МИИТ готовит также инженеров-электриков по ЭВМ и по АСУ, инженеров по автоматике в промышленности, автоматике, телемеханике и связи на транспорте.

В **ФИЗТЕХе** математики-прикладники специализируются в области «исследование операций и больших систем».

Чтобы стать математиком-прикладником, вовсе не обязательно стремиться в университеты или в столичные города. Эта возможность открыта любителям математики, физики и их приложений во многих учебных заведениях страны. Все студенты, специализирующиеся по прикладной математике, получают прекрасную математическую подготовку, овладевают дисциплинами общественного и инженерного цикла и вычислительной техникой. На последнем курсе они знакомятся с новейшими ЭВМ, их математическим обеспечением, процессами обработки информации. И самое существенное — овладевают методами прикладной математики, усваивают мировоззрение математика-прикладника. Это означает, что на первый план выдвигается развитие математического мышления, его культуры, а не усвоение некоторого перечня рецептов, алгоритмов, программ, которыми все равно нельзя запастись на все случаи жизни: каждая новая задача связана, как правило, со специфической ситуацией, в которой старые рецепты, алгоритмы, методы уже не работают. Требуются новые — нужно уметь их создавать.

Полученные знания и умение решать конкретные задачи открывают для выпускника широкие и заманчивые перспективы. Научные и проектные институты, конструкторские бюро и лаборатории, вычислительные центры и АСУ богаты широким ассортиментом интересных и сложных проблем, которые ждут своего решения, ждут инженеров-математиков.

---

*) В их числе: линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, общая алгебра, теория графов и комбинаторика, численные методы, теория функций комплексной переменной и специальные функции, функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, математическая логика, теория информации и кодирования, теория массового обслуживания, теория игр и исследование операций, методы оптимизации, теория надежности и планирования эксперимента, электронные вычислительные машины и программирование, теория алгоритмических языков, элементы и устройства АСУ.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы рассказывали о Московском институте инженеров железнодорожного транспорта. В этом номере мы помещаем варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в 1973 году.

Математика

Вариант 1

(**специальности**: мосты и тоннели, промышленное и гражданское строительство, экономика строительства, экономика транспорта, эксплуатация транспорта, строительство железных дорог, промышленная теплоэнергетика, тепловозостроение, строительные и дорожные машины).

1. Двое рабочих A и B начали уборку картофеля с участка в 8 часов утра с одинаковой производительностью. В 9 часов к ним присоединился третий рабочий C. В 11 часов B и C ушли, остальную часть участка доделал один A за 6 часов.

За сколько часов каждый рабочий смог бы убрать участок, работая отдельно, если известно, что рабочему C нужно для этого на 5 часов меньше, чем A?

2. Решить неравенство

$$|x^2-3x|+x-2<0.$$

3. Высота правильной треугольной призмы равна h. Прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Найти полную поверхность призмы.

4. Решить уравнение

$$\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0.$$

Вариант 2

(**специальности**: автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, автоматика и телемеханика в промышленности).

1. Мальчик и автобус одновременно отправились от железнодорожной станции к пляжу. Через некоторое время мальчик встретил автобус, возвращавшийся с пляжа. Он успел пройти еще некоторое расстояние от места первой встречи с автобусом, когда тот же автобус, идущий второй раз от станции к пляжу, догнал его. Известно, что расстояние между пунктами первой и второй встречи составляет 4/15 расстояния от станции до пляжа. Во сколько раз скорость автобуса больше скорости мальчика?

2. При каких значениях a корень уравнения

$$\frac{a+3}{x+1}-\frac{5-3a}{x-2}=\frac{ax+3}{x^2-x-2}$$

не меньше 1?

3. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Одна из диагоналей параллелепипеда равна a и образует с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней — угол β. Найти объем параллелепипеда.

4. Найти $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$.

Вариант 3

(**специальность**: прикладная математика)

1. Несколько человек купили облигации. Деньги вносили по очереди, причем каждый последующий вносил на 2 рубля больше, чем предыдущий. На облигации пал выигрыш в сумме 460 руб. Выигрыш был разделен пропорционально внесенной каждым сумме денег. Сколько человек участвовало в покупке облигаций, если известно, что их было меньше 20 человек и первый получил при разделе выигрыша 20 руб., а внес целое число рублей.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0.$$

3. Найти площадь треугольника, вписанного в окружность, если концы его стороны, равной 20 *см*, отстоят от касательной, проведенной через противолежащую вершину, на 25 *см* и 16 *см*.

4. Известно, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=m$. Найти $\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta$.

Физика

1. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии $l=40$ *см* от начала пути шарик побывал дважды: через $t_1=2$ *с* и $t_2=3$ *с* после начала движения. Определить начальную скорость и ускорение движения шарика, считая его постоянным.

2. Маленький шарик массой m, привязанный к нити, вращается в горизонтальной плоскости, отстоящей от точки подвеса нити на расстояние h. Скорость вращения по величине постоянна. Найти частоту вращения маятника.

3. На стержне длиной 1,5 *м*, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, укреплены два тела с массами $m_1=2$ *кг* и $m_2=3$ *кг*. Определить скорость второго тела при переходе стержня из горизонтального в вертикальное положение. Первое тело отстоит от оси вращения на 0,5 *м*, второе — на 1 *м*. Массой стержня пренебречь.

4. Найти время, необходимое математическому маятнику длиной $l=1$ *м*: а) на прохождение расстояния от точки максимального отклонения до положения равновесия; б) на прохождение первой половины этого расстояния; в) на прохождение второй половины этого расстояния.

5. Два одинаковых свинцовых шарика движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 40$ *м/с* и $v_2 = 20$ *м/с*. Определить, на сколько градусов они нагреются в результате неупругого центрального столкновения. Удельная теплоемкость свинца $c=130$ *дж/кг·град*.

6. Определить среднюю плотность планеты ρ, продолжительность суток на которой $t=6$ *ч*, если на ее экваторе пружинные весы показывают на 10% меньший вес, чем на полюсе. Гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *м³/кг · с²*.

7. Электромотор питается от батареи с э. д. с. 12 *в*. Какую механическую мощность развивает мотор при протекании по его обмотке тока 2 *а*, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток 3 *а*?

8. Электронагревательные приборы, на которых помечено $P_1=600$ *вт*; $U_1 = 220$ *в* и $P_2 = 400$ *вт*; $U_2 = 220$ *в*, включены последовательно в сеть с напряжением 220 *в*. Какая мощность будет выделяться на каждом из них?

9. В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}05$ *тл*, вращается стержень длиной $l=1$ *м* с постоянной угловой скоростью $\omega = 20$ *рад/с*. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна силовым линиям магнитного поля. Найти разность потенциалов, возникающую на концах стержня.

10. По горизонтальным рельсам, расположенным в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ *тл*, скользит проводник длиной $l = 1$ *м* с постоянной скоростью $v = 10$ *м/с*. Концы рельсов замкнуты на постоянное сопротивление $R = 2$ *ом*. Определить, какое количество тепла выделяется на сопротивлении за 1 секунду. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

11. Рубиновый лазер излучает в импульсе $N = 2 \cdot 10^{19}$ световых квантов с длиной волны $\lambda = 6{,}94 \cdot 10^{-5}$ *см*. Чему равна средняя мощность вспышки лазера, если ее длительность $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$ *с*?

В. И. Коровин,
Ю. М. Лужнов,

Московский институт электронного машиностроения

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы уже рассказывали о МИЭМе. В этом номере мы публикуем варианты вступительного письменного экзамена по математике в 1973 году.

Вариант 1

1. Прямоугольный участок площадью 420 *м²* нужно обнести проволочным забором и разгородить по диагонали пополам. Определить размеры участка, если на это потребовалось 111 *м* проволоки. Какой формы прямоугольный участок с той же площадью нужно выбрать, чтобы на это потребовалось наименьшее количество проволоки?

Решить уравнения

2. $\sqrt{x+1}-\sqrt{a-x}=1$, где $a>0$.

3. $$\sqrt{2\sin(x+2)-\sqrt{2}\cos^2 x} = \sqrt{\sin x\,(2\cos 2-\cos x)}.$$

4. Решить неравенство
$$(\log_3^2 x^2+2\log_3 x-2)\,(2^{2x}-9)^2<0.$$

5. Один из двухгранных углов трехгранного угла равен A; прилежащие к данному двугранному углу плоские углы равны α и β. Найти третий плоский угол.

Вариант 2

1. Для изготовления проволочного каркаса прямоугольного параллелепипеда, у которого одна из сторон основания вдвое больше другой, потребовалось 140 *см* проволоки. Найти стороны основания параллелепипеда, если его полная поверхность равна 504 *см²*. Какие размеры должен иметь параллелепипед данной формы и данной поверхности, чтобы на изготовление его проволочного каркаса потребовалось бы наименьшее количество проволоки?

Решить уравнения

2. $\sqrt{x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{2}$.

3. $$\sqrt{\sin x\,(2-\cos x)} = \sqrt{2\sin x-\operatorname{tg} 3\cos x\,(2-\cos x)}.$$

4. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} \log^2_{1/81} x-\log_{1/81} x-1<0, \\ x^2-13x+30<0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом α. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

В. А. Тонян

Московский авиационный институт

О МАИ мы подробно рассказывали в «Кванте» № 6 за 1973 год. Сейчас на всех факультетах МАИ, кроме факультета прикладной математики, все вступительные экзамены проводятся в письменной форме, причем по математике проводятся два экзамена: по алгебре и по геометрии с тригонометрией. В варианты по математике и по физике наряду с примерами и задачами включаются теоретические вопросы. Абитуриенты, поступающие на факультет прикладной математики, сдают по математике устный и письменный экзамены, поэтому для их варианты письменного экзамена по математике не содержат теоретического вопроса. Помещенные ниже материалы познакомят читателей с вариантами заданий, предлагавшимися на вступительных экзаменах в МАИ в 1973 году.

Математика

Факультет прикладной математики

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}=1.$$

2. Из двух городов навстречу друг другу одновременно выехали автобус и такси. Когда такси прошло половину пути, автобусу осталось до конца маршрута 19,2 *км*, а когда автобус проехал половину пути, такси осталось до конца маршрута 12 *км*. Найти отношение скоростей такси и автобуса, если скорости такси и автобуса на всем пути постоянны, и каждый должен приехать в тот город, из которого выехал другой.

3. При каких действительных значениях a сумма квадратов корней уравнения

$$2\log_4(2x^2-x+2a-4a^2)+\log_{0.5}(x^2+ax-2a^2)=0$$

больше единицы?

4. Две окружности радиусов R и $\frac{R}{2}$ касаются друг друга внешним образом. Один из концов отрезка длины $2R$, образующего угол 30° с линией центров, совпадает с центром окружности меньшего радиуса. Какая часть отрезка лежит вне окружностей?

5. Вершина правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ совпадает с отрезком, соединяющим центры верхнего и нижнего оснований куба. Стороны основания $ABCD$ параллельны соответствующим сторонам основания куба. Найти объем части куба, лежащей внутри пирамиды, если $\angle ASB = \operatorname{arctg} {}^4/_3$, а ребро куба равно единице.

Письменный экзамен по алгебре

Вариант 2

1. Решение квадратного уравнения. Формулы Виета.

2. Решить уравнение

$$2^{x-1}(2^x+3^{x-1})=9^{x-1}.$$

3. Найти сумму первых семи членов геометрической прогрессии, сумма первого и четвертого членов которой равна 9, а сумма второго и третьего равна 6.

4. Скорый поезд проходит расстояние между станциями на 3,5 часа быстрее товарного. Если бы каждый поезд шел то время, которое тратит другой поезд на путь между станциями, то скорый поезд прошел бы на 350 *км* больше, чем товарный. Если бы скорость каждого поезда была увеличена на 10 *км/ч*, то скорый поезд прошел бы расстояние между станциями на 2,4 часа быстрее товарного. Вычислить скорости поездов и расстояние между станциями.

5. При каких значениях a неравенство

$$\frac{x^2\log_2 a^2+x+\log_a 2}{2x-3-x^2}<1$$

выполняется для любых значений x?

Письменный экзамен по геометрии

Вариант 3

1. Доказать теорему синусов.

2. Вычислить $(\sin\alpha-\sin\beta)\sin\alpha+(\cos\alpha-\cos\beta)\cos\alpha$, если $\sin\frac{\alpha-\beta}{4}=a$.

3. Решить уравнение:

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x.$$

4. В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке F. Из вершины C проведена прямая CK, параллельная боковой стороне AD, которая пересекает продолжение BD в точке L так, что $DF=BL$. Найти отношение $AB:CD$.

5. Круг радиуса R и равносторонний треугольник со стороной $R\sqrt{3}$ лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Одна из сторон треугольника лежит в плоскости круга. Отрезок, соединяющий центры круга и треугольника, образует с их плоскостями углы, равные 30°. Найти длину части стороны треугольника, лежащей внутри круга.

Физика

Билет 1

1. Изоляторы и проводники. Закон сохранения электрических зарядов.

2. Какое количество теплоты выделится при конденсации 20 *г* водяного пара при 100° С и охлаждении полученной воды до 20° С? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ *дж/кг град*. Удельная теплота парообразования воды при 100° С $r = 539$ *ккал/кг*.

3. Груз весом 100 *н* лежит на абсолютно гладкой наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонтом. Какую силу нужно приложить к грузу параллельно плоскости, чтобы удержать его в равновесии? Найти силу реакции плоскости.

4. Два шарика с массами $m_1 = 2$ *г* и $m_2 = 3$ *г* движутся в горизонтальной плоскости со скоростями, соответственно равными $v_1 = 6$ *м/с* и $v_2 = 4$ *м/с*. Направления движения шариков составляют друг с другом угол $\alpha = 90°$. Шарики неупруго соударяются. Чему равен суммарный импульс этих шариков после удара?

5. На расстоянии $d = 0{,}14$ *м* от вершины вогнутого зеркала находится предмет, высота которого $l = 0{,}06$ *м*. Фокусное расстояние зеркала $F = 0{,}11$ *м*. Найти высоту L изображения предмета.

Билет 2

1. Конденсаторы. Емкость плоского конденсатора.

2. Летчик стреляет с самолета из пушки. Скорость самолета относительно Земли 900 *км/ч*. Скорость снаряда относительно самолета 750 *м/с*. Определить начальную скорость снаряда относительно Земли, если а) выстрел производится в направлении полета, б) в противоположную сторону.

3. Какой массы состав может вести электровоз равномерно вверх по уклону 0,004, если сила тяги электровоза равна 250 *кн*, а коэффициент трения $k = 0{,}06$?

4. В радиатор автомобиля влили 2 *л* воды при 40° С, а затем добавили 4 *л* при 85° С. Определить температуру смеси.

5. Какая сила действует на проводник длиной 10 *см* в однородном магнитном поле с магнитной индукцией 2,6 *тл*, если ток в проводнике 12 *а*, а угол между направлениями тока и линиями индукции а) 90°, б) 30°?

Билет 3

1. Законы преломления света. Полное отражение света.

2. Скорость распространения волны в среде равна 200 *м/с*. Вычислить период колебаний, если ближайшее расстояние между точками, колеблющимися в противоположных фазах, равно 20 *см*.

3. Магнитный поток, пронизывающий контур проводника, равномерно изменился на 0,6 *вб* так, что э. д. с. индукции оказалась равной 1,2 *в*. Найти время изменения магнитного потока и силу индукционного тока, если сопротивление проводника 0,24 *ом*.

4. На горизонтальном участке пути автомобиль двигался со скоростью 72 *км/ч* в течение 10 *мин*, а подъем преодолевал со скоростью 36 *км/ч* в течение 20 *мин*. Чему равна средняя скорость на всем пути?

5. Пассажирский реактивный самолет имеет 4 двигателя, развивающих силу тяги 10 *Т* каждый, и летит со скоростью 900 *км/ч*. Сколько керосина израсходуют двигатели на перелет в 4000 *км*? К. п. д. двигателей 0,25. Теплота сгорания керосина $q = 46{,}2 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

Билет 4

1. Фотоэлектрический эффект. Фотоэлементы и их применение.

2. Человек массой 60 *кг* бежит со скоростью 8 *км/ч*. Догнав тележку, движущуюся со скоростью 2,9 *км/ч*, он вскакивает на нее. Какова будет скорость тележки после этого, если ее масса 80 *кг*?

3. В стакане находится 100 *г* воды при температуре 10° С. В нее опущено 40 *г* льда при температуре —10° С. Что останется в стакане после выравнивания температур?

Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4200$ *дж/кг град*. Удельная теплоемкость льда $c_2 = 2100$ *дж/кг град*. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

4. Тело свободно падает с высоты 80 *м*. Какой путь проходит оно в последнюю секунду падения?

5. При силе тока 10 *а* выделяется во внешней цепи мощность 200 *вт*, а при силе тока 15 *а* мощность во внешней цепи 240 *вт*. Каково внутреннее сопротивление, э. д. с. и сила тока короткого замыкания генератора?

Билет 5

1. Законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака.

2. Человек высотой $h = 1{,}75$ *м* находится на расстоянии $r = 6$ *м* от столба. На каком расстоянии от себя человек должен положить горизонтально на землю плоское зеркало, чтобы видеть в нем верхушку столба высотой $h = 7$ *м*?

3. В каком диапазоне длин волн работает радиопередатчик, если емкость его колебательного контура может меняться от 60 *пф* до 240 *пф*, а индуктивность составляет 50 *мкгн*?

4. Какова высота телевизионной башни в Останкине, если шарик, падая с башни без начальной скорости, последние 185 *м* пути пролетел за 2 *с*? Сопрстивление воздуха не учитывать.

5. Самолет при разбеге имеет максимальную скорость $v = 75$ *м/с*, длина разбега перед взлетом $S = 500$ *м*, масса самолета $m = 19$ *т*, коэффициент трения $k = 0{,}02$. Движение во время разбега считать равноускоренным. Какова должна быть минимальная мощность двигателей, чтобы обеспечить взлет самолета?

Московское высшее техническое училище

Московское ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана — старейшее техническое учебное заведение нашей страны, основанное в 1830 году. Сейчас МВТУ готовит инженеров широкого профиля по новой технике для работы в научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро и на заводах машиностроительной и приборостроительной промышленности.

Подготовка инженеров по специальностям МВТУ, охватывающим почти все отрасли новой техники в машиностроении и приборостроении, осуществляется по индивидуальным планам и программам с широкой теоретической, общеинженерной, специальной и практической подготовкой.

При МВТУ организовано подготовительное отделение, которое готовит слушателей для поступления на дневные факультеты училища.

Ниже мы помещаем варианты письменной работы по математике и билеты устного экзамена по физике в МВТУ в 1973 году.

Математика

Вариант 1

1. Трое рабочих могут выполнить работу за 1 час. 20 мин., работая вместе. Первый из них, работая один, может выполнить эту работу вдвое скорее третьего и на 1 час скорее второго. За какое время каждый, работая отдельно, может выполнить эту работу?

2. В куб со стороной a вписан шар. Определить радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

3. Решить уравнение

$$1-\sin^4 x-\frac{5}{3}\cos^4 x=0.$$

4. Решить уравнение

$$10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99.$$

5. Решить неравенство

$$\frac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}>2.$$

Вариант 2

1. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна 1/8 суммы квадратов членов.

2. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость, наклоненная к катетам треугольника под углами α и β соответственно. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью треугольника.

3. Решить уравнение

$$\sin x+\cos x\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}.$$

4. Решить уравнение

$$\log_3^2 4x-\log_3 12x=1.$$

5. Решить неравенство

$$\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2}<0.$$

Физика

Билет 1

1. Давление атмосферы. Опыт Торричелли. Величина атмосферного давления. Единицы измерения давления.

2. Спектры испускания. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

3. Предмет высотой 5 *см* находится на расстоянии 12 *см* от вогнутого зеркала с фокусным расстоянием 10 *см*. Где и какого размера получится изображение предмета?

Билет 2

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытные обоснования. Броуновское движение. Диффузия в газах, жидкостях и твердых телах. Взаимодействие молекул.

2. Ход лучей в призме и плоскопараллельной пластинке. Полное внутреннее отражение. Предельный угол.

3. Под каким углом к горизонту необходимо бросить тело, чтобы горизонтальная дальность его полета была вдвое больше высоты подъема? Сопротивление воздуха не учитывать.

Билет 3

1. Магнитное поле прямого проводника с током и катушки с током. Действие магнитного поля на ток.

2. Энергия кинетическая и потенциальная. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике. Единицы измерения энергии.

3. В двух баллонах газобаллонного автомобиля содержится газ (горючее для двигателя) под давлением 200 *ат*. Емкость каждого баллона 80 *л*. Сколько килограммов газа было израсходовано за время поездок, если давление в баллонах понизилось до 100 *ат*? Температура 0° С. Плотность горючего при нормальных условиях 0,6 *кг/м*^{3}

Ленинградский государственный университет

Ленинградский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. А. А. Жданова готовит специалистов по математике и физике на трех факультетах.

Математико-механический факультет имеет специальности: математика, механика, астрономия и гидроаэродинамика.

Студенты физического факультета получают специальности: физика, геофизика, радиофизика и электроника.

Факультет прикладной математики — процессов управления выпускает специалистов по прикладной математике.

Вступительные экзамены на математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления проводятся в августе, а на физический факультет — в июле. Ниже мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в ЛГУ в 1973 году.

Математика

Вариант 1

(математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления)

1. Машинно-тракторная станция должна послать в совхоз для выполнения определенной работы некоторое количество тракторов, причем известно, что 10 тракторов выполнят эту работу за 12 рабочих дней. Кроме того, известно, что совхоз выплачивает в течение всего периода работ в совхозе ремонтной бригаде 30 руб. за 1 день и каждому трактористу 4 руб. 80 коп. за 1 день работы в совхозе и 4 руб. за перегон трактора в совхоз и обратно (в течение периода работ тракторы находятся в совхозе). При каком количестве тракторов суммарная оплата рабочим за выполнение всех работ будет наименьшей? Чему равна минимальная оплата рабочим?

2. Решить уравнение

$$(2+a)\cos^2 x+\sin x\cos x=(1-a)\sin^2 x$$

при всех значениях параметра a.

3. Выбрать число b так, чтобы наибольшее значение функции

$$|-2x^2+x+b|$$

на промежутке $0\leqslant x\leqslant 1$ было наименьшим.

4. В прямоугольнике $ABCD$ дано: $AB=a$, $AD=b$. Найти на стороне AB точку E, для которой $\measuredangle CED=\measuredangle AED$.

5. В конусе высота равна диаметру основания. Через некоторую образующую конуса проведена плоскость, касательная к боковой поверхности конуса, и в этой плоскости через вершину конуса проведена прямая под углом α к образующей. Найти угол, который составляет проведенная прямая с плоскостью основания.

Вариант 2

(химический и психологический факультеты и экономический факультет (кроме отделении политэкономии))

1. Из сосуда емкостью в v литров, наполненного p-процентным раствором кислоты, отлили некоторое количество раствора и добавили такое же количество q-процентного раствора ($q<p$). Крепость полученного раствора оказалась в k раз меньше крепости раствора, который получится, если при переливании вместо q-процентного раствора использовать раствор в 2 раза большей крепости. Сколько было израсходовано q-процентного раствора?

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{x}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$(\cos 2x+\cos x+1)^2=$$
$$=2(2\cos x+1)(\cos 2x-\cos x).$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) проведена медиана AD. Найти угол BAD, если угол при вершине B равен α.

5. В правильной треугольной пирамиде известны радиус r круга, описанного около основания, и угол α наклона боковой грани к плоскости основания. Найти радиус описанного шара.

Вариант 3

(геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета)

1. Рабочий по плану за несколько дней должен был изготовить 260 деталей. Первые 2 дня он работал по плану, а в последующие дни рабочий перевыполнял план, изготовляя ежедневно на 10 деталей больше, чем это предусматривалось планом. Поэтому уже за 2 дня до срока было изготовлено 268 деталей. Сколько деталей должен был изготовлять рабочий по плану за один день?

2. Решить уравнение

$$2\log_{\sin x}\operatorname{tg} x+\log_{\operatorname{tg} x}\sin x=3.$$

3. На плоскости найти геометрическое место точек, координаты которых x и y удовлетворяют уравнению

$$x=|x-y^2|+y.$$

4. Определить площадь трапеции, если ее основания равны 6 *см* и 11 *см*, одна из боковых сторон — 4 *см*, а сумма углов при нижнем основании равна $\pi/2$.

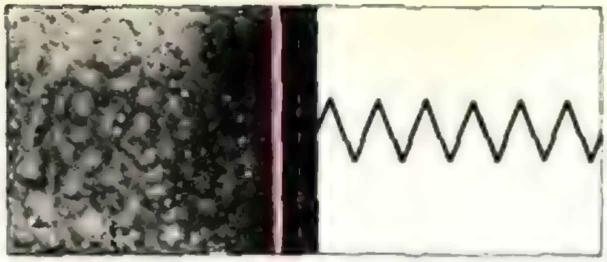


Рис. 1.

5. Две равные правильные четырехугольные пирамиды расположены в пространстве так, что их основания совпадают, а вершины расположены по разные стороны от общей плоскости основания. Известно, что сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найти радиус шара, вписанного в восьмигранник, образованный этими пирамидами.

Вариант 4

(биолого-почвенный и географический факультет)

1. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 54 *км*, и через 2 часа встречаются. Не останавливаясь, они продолжают движение с той же скоростью, и второй прибывает в A на 54 минуты раньше, чем первый в B. Определить скорости велосипедистов.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(2+4\cos^2 x)=2.$$

4. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18 *см*, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Отрезок касательной между боковыми сторонами 2 *см*. Найти основание треугольника.

5. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро равно l. Через центр основания проведена плоскость параллельно одной из сторон основания и параллельно противоположному боковому ребру. Найти площадь сечения.

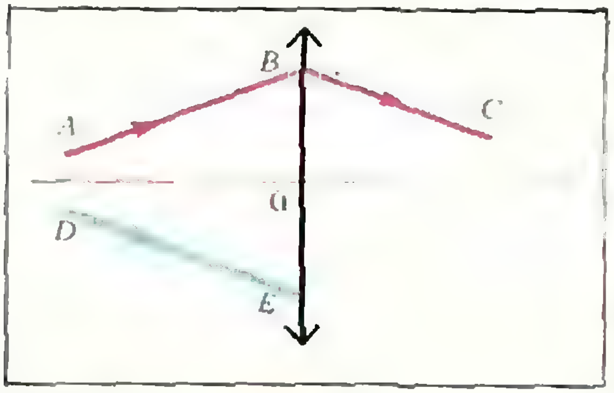


Рис. 2.

Физика

(математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, физический факультет)

1. Свинцовая пуля массы m, летящая со скоростью v, попадает в первоначально покоящийся свинцовый шар массы M и застревает в нем (удар лобовой). При каком отношении масс пули и шара они нагреются до наибольшей температуры?

2. Нижние концы очень легкой лестницы-стремянки соединены веревкой. Найти ее натяжение T, когда электромонтер весом P поднялся по стремянке до ее середины. Пол идеально гладкий. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол α.

3. В ящике, перекрытом перегородкой (рис. 1), находится один моль одноатомного идеального газа при нормальных условиях. Сразу за перегородкой расположена в свободном состоянии пружина с поршнем, находящимся в пустоте. Коэффициент упругости пружины k. Перегородку убирают. Какие давление, температура и объем установятся в системе, если нет теплового взаимодействия с внешней средой? В новом положении равновесия пружина сжата не до отказа. Площадь поршня S. Теплоемкостью поршня пренебречь.

4. В блюдце налито m *г* воды, а сверху ставится перевернутый вверх дном нагретый стакан с тонкими стенками. До какой абсолютной температуры T_1 (наименьшей) должен быть нагрет стакан вместе с находящимся в нем воздухом, чтобы после остывания до температуры T_0 окружающего воздуха в него оказалась бы втянутой вся вода? Атмосферное давление p_a, площадь сечения стакана S, высота h, удельный вес воды d. Объем налитой воды меньше объема стакана. Явлениями испарения, поверхностного натяжения и расширения стакана пренебречь. Блюдце считать широким, так что высота налитой в него воды мала.

5. Найти механическую работу, совершенную электрическими силами при повороте ручки настройки конденсатора *переменной* емкости, подключенного к батарее с э. д. с. $E = 300$ *в*. Емкость при этом меняется от $C_1 = 10$ *мф* до $C_2 = 100$ *мф*.

6. Облучая металлический шар светом, наблюдаем фотоэффект. Как изменится красная граница фотоэффекта, если на шар поместить положительный заряд q? Радиус шара R_0. Вылетающие электроны регистрируются на расстоянии $R \gg R_0$ от центра шара.

7. На рисунке 2 показан ход луча ABC через линзу. Построить путь луча DE после его прохождения через линзу.

ИНФОРМАЦИЯ

«Прикладная математика» в техникумах

Нет сомнений в том, что читателям журнала «Квант» будет интересно познакомиться с одной из самых молодых и в то же время очень увлекательных специальностей, связанных с математикой. Называется эта специальность —«прикладная математика».

Специальность эта очень дефицитна, в первую очередь в связи с большим развитием электронно-вычислительной техники и связанным с этим значительным расширением сферы применения математических методов. Сейчас в самых различных отраслях народного хозяйства нужна целая армия математиков-прикладников. Они должны уметь применять математические методы, участвуя в решении разнообразных прикладных задач, начиная от постановки задачи и кончая последним этапом — составлением программы решения задачи на электронно-вычислительной машине. Эти специалисты должны уметь с помощью инженера-математика или самостоятельно создавать алгоритмы решения задач и записывать их в виде программ на языке конкретной машины или на одном из алгоритмических языков.

В средние специальные учебные заведения на специальность «прикладная математика» принимаются юноши и девушки, окончившие 8 или 10 классов общеобразовательной средней школы. В первом случае курс обучения длится 2 года 10 месяцев, во втором — только 1 год 10 месяцев, так как окончившие 10 классов принимаются сразу на второй курс.

Недавно Министерство высшего и среднего специального образования СССР утвердило новый учебный план. По этому плану все предметы обязательного курса объединены в общеобразовательный цикл, общематематический цикл (математический анализ, линейная алгебра и аналитическая геометрия, математическая логика, теория вероятностей и математическая статистика) и специальный цикл, состоящий из двух частей:

а) общеспециальные предметы (алгоритмические языки, программирование и вычислительная математика; математическое программирование; основы вычислительной техники и организация вычислительных работ; исследование операций);

б) профилирующие предметы (основы экономики и применение математических методов в решении ее задач; применение математических методов в системах автоматизации и управления, а также в естественнонаучных исследованиях).

В течение всего курса обучения учащиеся проходят 3 вида практики. На 2-м курсе учащиеся в процессе учебной практики составляют программы для решения небольших учебных задач на электронно-вычислительных машинах. На 3-м курсе в рамках технологической практики учащиеся под руководством опытных инженеров-математиков пишут курсовые работы, решая задачи, имеющие практическое значение. Вслед за этой практикой идет преддипломная, которая является непосредственной подготовкой к работе над дипломным проектом.

Для поступления в средние специальные учебные заведения по специальности «прикладная математика» необходимо сдать 2 экзамена: устный по математике и письменный по литературе.

Приводим адреса средних специальных учебных заведений, где имеется специальность «прикладная математика»:

1. Московский математический техникум — г. Москва, 105264, Измайловский бульвар, д. 19. Общежития ММТ не имеет, **и принимаются в техникум только лица, постоянно прописанные в Москве или Московской области.**
2. Ленинградский механический техникум — г. Ленинград, Песочная набережная, д. 14 (общежития техникум не имеет).
3. Днепропетровский техникум автоматики и телемеханики — г. Днепропетровск, ул. Дзержинского, д. 2/4.
4. Ростовский электро-технический техникум — г. Ростов-на-Дону, 24-я линия, д. 2/15.
5. Челябинский политехнический техникум — г. Челябинск, ул. Гагарина, д. 7.
6. Средне-технический факультет Тульского политехнического института — г. Тула, проспект Ленина, д. 90.
7. Ковровский энерго-механический техникум — Владимирская обл., г. Ковров, ул. Шмидта, д. 48.

Ю. Д. Кабалевский

Телевидение готовит в вуз

На отделении математики московских телекурсов в мае рассматривались темы «вписанные и описанные шары», «цилиндр и конус», «решение задач из различных разделов стереометрии», «о доказательствах в математике», «доказательство неравенств». По темам стереометрии мы предлагаем для самостоятельного решения ряд типичных задач из домашних заданий.

Математика

1. (МИФИ, 1973). По окружности в противоположных направлениях движутся два тела, причем первое — равномерно со скоростью v, а второе — равноускоренно с линейным ускорением a. В начальный момент они находились в одной точке окружности A, причем скорость второго тела была равна нулю. Через какое время произойдет первая встреча этих тел, если вторая встреча произойдет в точке A?

2. (МИФИ, 1973). В основании четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной a. Плоскости, проходящие через вершину пирамиды и диагонали основания, наклонены к плоскости основания соответственно под углами φ и ψ. Найти объем пирамиды, если ее высота пересекает одну из сторон основания пирамиды.

3. (МИФИ, 1973). Высота прямого кругового конуса равна H. Две взаимно перпендикулярные образующие делят окружность основания на две дуги, одна из которых вдвое короче другой. Найти объем конуса.

4. На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь части поверхности сферы, лежащей вне конуса, составляет $^1/_2$ площади основания конуса. Найти угол между высотой и образующей конуса.

5. В шар радиуса R вписана прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α, а ее наибольшая боковая грань есть квадрат. Найти объем призмы.

6. (МГУ, 1972). В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BSC = 90°$, $\angle ASC = \angle ASB = 60°$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на поверхности шара радиуса 3 *м*. Доказать, что ребро SA является диаметром этого шара, и найти объем пирамиды.

7. (МГУ, 1972). Три шара попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с катетом, равным 3 *см*, и противоположным углом в 30°. Определить радиусы данных шаров.

В конце мая на телекурсах были изучены темы «о доказательствах в математике» и «доказательство неравенств». По этим темам мы предлагаем вам ряд задач.

8. Доказать, что если $a + b = 1$, где a и b — действительные числа, то

$$\text{а) } a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}; \quad \text{б) } a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}.$$

9. Доказать, что если $a, b, c, d > 0$, то

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd},$$

причем знак равенства имеет место лишь при $a = b = c = d$.

10. Доказать, что если $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$, $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, $n \geqslant 2$, то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n,$$

при этом знак равенства имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

11. Доказать, что если $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots$ $\ldots, a_n > 0$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

причем знак равенства имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

12. Доказать, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию, то

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

13. Доказать, что при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $n^n \leqslant (n!)^2$.

14. Доказать, что если $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi)} \geqslant 4.$$

15. Доказать, что если $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi)} > 8.$$

Физика

На отделении физики телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы в апреле и мае читались лекции и проводились практические занятия по разделам «Геометрическая оптика», «Волновые и квантовые свойства света», «Строение атома.

Атомное ядро». Предлагаем читателям журнала несколько типичных для домашних заданий задач по этим разделам.

1. В лифте на невесомой пружине, длина которой в нерастянутом состоянии $l = 60$ *см*, подвешен точечный источник света массой $m = 80$ *г*. Расстояние от точки подвеса пружины до пола покоящегося лифта $L = 180$ *см*. Определить, во сколько раз изменится освещенность пола под источником, если лифт начнет двигаться вверх равноускоренно с ускорением $a = 2{,}4$ *м/с*^{2}. Коэффициент жесткости пружины $k = 1{,}6$ *н/м*.

2. На высоте $h = 1{,}5$ *м* от освещаемой поверхности расположен точечный источник света, над которым параллельно поверхности расположили полупрозрачное зеркало, отражающее $k = 0{,}6$ падающего на него света. При этом освещенность поверхности под источником увеличилась в $m = 1{,}2$ раза. Найти высоту H, на которой расположено зеркало.

3. Изображение предмета в вогнутом сферическом зеркале в 2 раза больше самого предмета. Определить, на сколько надо передвинуть предмет вдоль оптической оси, чтобы его изображение оказалось в 3 раза меньше самого предмета. Фокусное расстояние зеркала $F = 1$ *м*.

4. Параллельный пучок лучей белого света падает нормально на трехгранную призму с преломляющим углом $\varphi = 30°$. Найти угол δ между лучами красного и синего цвета после прохождения призмы. Показатели преломления призмы для красного и синего цветов равны соответственно $n_к = 1{,}51$ и $n_с = 1{,}54$.

5. На глубине $h = 2{,}5$ *м* под водой находится источник света. На поверхности воды плавает квадратный плот, причем его центр находится непосредственно над источником. Какой должна быть минимальная длина l стороны плота, чтобы ни один луч света не выходил из воды в воздух? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

6. Предмет находится на расстоянии $l = 1$ *м* от экрана. Если между предметом и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 0{,}2$ *м*, то резкое изображение предмета на экране будет при двух положениях линзы. Найти расстояние x между этими положениями линзы.

7. Собирающая линза, находящаяся в воздухе, имеет фокусное расстояние $F_1 = 30$ *см*. Если ее поместить в жидкость с показателем преломления $n = 1{,}63$, то линза превращается в рассеивающую с фокусным расстоянием $F_2 = -120$ *см*. Определить показатель преломления материала линзы.

8. Дифракционная решетка, имеющая $N = 200$ штрихов на миллиметр, освещается нормальным к решетке пучком лучей белого света. Полученный на экране, параллельном решетке, дифракционный спектр первого порядка имеет ширину (расстояние между первыми максимумами красного света с длиной волны $\lambda_к = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$ *см* и синего с $\lambda_с = 4{,}4 \cdot 10^{-5}$ *см*) $\Delta l = 60$ *мм*. Определить расстояние от дифракционной решетки до экрана.

9. Точечный источник света, потребляющий электрическую мощность $P = 10$ *вт*, излучает монохроматический свет частоты $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ *гц*. Определить максимальное расстояние, с которого человек может видеть источник, если наименьший световой поток, воспринимаемый глазом, должен содержать $k = 10^3$ фотонов в секунду, а площадь зрачка $S = 10$ *мм*^{2}. Световая отдача лампочки $n = 0{,}02$ от потребляемой мощности. Поглощением света в атмосфере пренебречь. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж·с*.

10. Работа выхода электронов для никеля $A = 5{,}2$ *эв*. Найти скорость электронов, вылетающих с поверхности никеля при освещении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ *см*. Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж·с*, скорость света $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с*.

11. Протон начинает двигаться в электрическом поле из состояния покоя и приобретает скорость $v = 2{,}8 \cdot 10^8$ *м/с*. Найти ускоряющую разность потенциалов, учитывая зависимость массы от скорости. Масса покоя протона $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*, заряд $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, скорость света $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ *м/с*.

12. Ионизационная камера электрической емкостью $C = 6{,}0 \cdot 10^{-11}$ *ф* была заряжена до разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 600$ *в*. После облучения камеры γ-лучами разность потенциалов на ней снизилась до $\Delta\varphi_2 = 200$ *в*. Найти дозу излучения, прошедшего через камеру, в рентгенах, если объем камеры $V = 60$ *см*^{3}. Один рентген создает в сухом воздухе $n = 2{,}08 \cdot 10^9$ пар ионов в одном кубическом сантиметре. Заряд иона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*.

13. При единичном акте деления ядра урана выделяется энергия $W = 200$ *Мэв*. Определить, за какой промежуток времени первоначальная загрузка урана в реакторе $m = 10$ *кг* уменьшится на $\eta = 2\%$. Мощность реактора $P = 1$ *Мвт*.

14. Определить энергию, выделяющуюся при синтезе $m = 1{,}0$ *г* гелия из дейтерия и трития по следующей реакции:

$$ {}_1H^2 + {}_1H^3 \to {}_2He^4 + {}_0n^1, $$

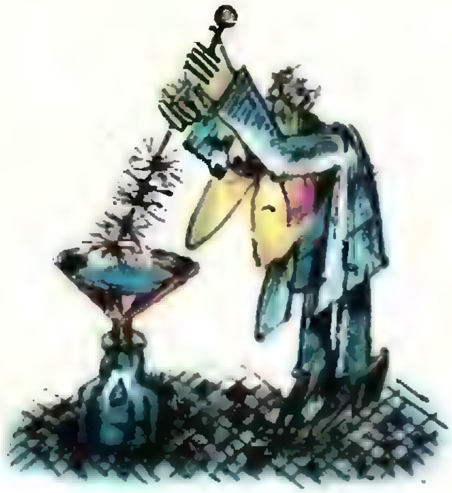
если массы ${}_1H^2$, ${}_1H^3$, ${}_2He^4$, ${}_0n^1$ соответственно равны $m_1 = 2{,}01410$ *аем*, $m_2 = 3{,}01605$ *аем*, $m_3 = 4{,}00260$ *аем*, $m_4 = 1{,}00866$ *аем*. Одна атомная единица массы соответствует энергии $\Delta W = 931$ *Мэв*.

А. Н. Борзяк,
А. Я. Диденко,
П. Т. Дыбов,
И. А. Дьяконов,
В. В. Рощупкин

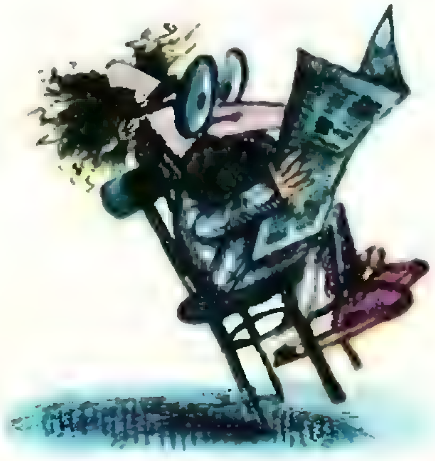
«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Почему, когда вы наливаете воду в бутылку через воронку, вода в воронке иногда «застревает»?



2. Человек сидит на стуле и откидывается назад так, что только-только сохраняет равновесие. Что произойдет, если человек будет поднимать ноги, выпрямив колени?



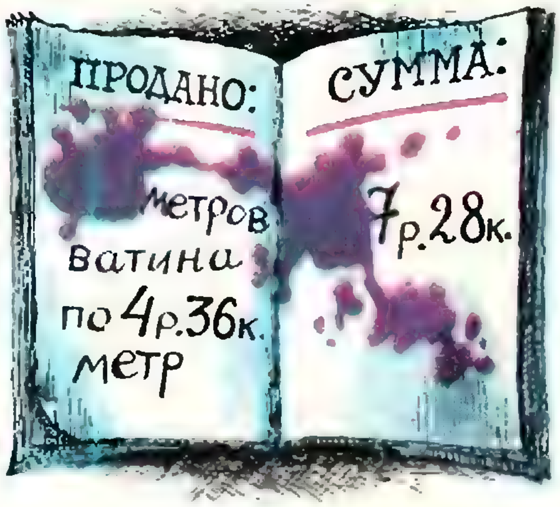
Рисунки Э. Назарова.

3. На почтовом ящике написано: «Выемка писем производится 5 раз в день с 7 до 19 часов». И, действительно, в первый раз почтальон подходит к ящику в 7 часов утра, а в последний — в 7 часов вечера.

Через какие интервалы времени вынимают письма из ящика?

4. При ревизии торговых книг магазина одна из записей в книге оказалась залитой чернилами (см. рисунок). Невозможно было разобрать число проданных метров, но было ясно, что число это — целое. Было также ясно, что вырученная сумма не превосходит 1000 рублей.

Мог ли ревизор восстановить запись?



5. Найти двузначное число, равное сумме числа десятков и квадрата числа единиц.

ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

I

Вот я нарисовал три точки (рис. 1). Нарисовал так, что если их попарно соединить, получится правильный (то есть равносторонний) треугольник (рис. 2). Впрочем, взятые точки и без соединения создают, так сказать, «впечатление» треугольника.

А если точек четыре, — можно ли их расположить аналогичным образом? Оказывается — нет; убедитесь в этом сами. И пять точек тоже не годятся. Но шесть точек расположить в требуемом порядке уже можно (рис. 3). При этом новый — «шеститочечный» — треугольник получается из «трехточечного» линейным увеличением последнего в два раза; это и вызывает добавление новых точек (рис. 4).

Сколько еще точек нужно добавить, *чтобы «впечатление» треугольника* сохранилось? Ответ найти нетрудно: четыре. Соответствующий треугольник — он получается линейным увеличением исходного в три раза — изображен на рисунке 5.

Продолжая добавлять точки, будем получать все новые и новые треугольники. Именно, к уже имеющимся десяти точкам добавим пять, затем к пятнадцати получившимся — еще шесть точек, к ним еще семь и т. д. (сделайте рисунки самостоятельно!).

Попытаемся теперь выяснить, сколько же точек нужно иметь, чтобы из них можно было составить «треугольную конфигурацию».

В наших примерах сначала точек было 3, 6, 10; потом 15, 21, 28, . . . Эти числа, по вполне понятным причинам, называются *треугольными*. Мы хотим выяснить, какой вид имеют треугольные числа. Сделать это нетрудно, если заметить, что

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

. . . .

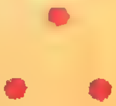


Рис. 1.

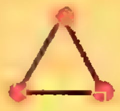


Рис. 2.

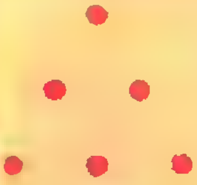


Рис. 3.

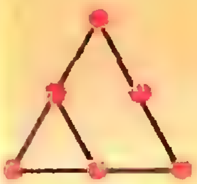


Рис. 4

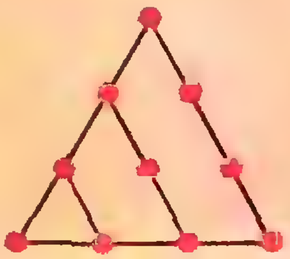


Рис. 5.

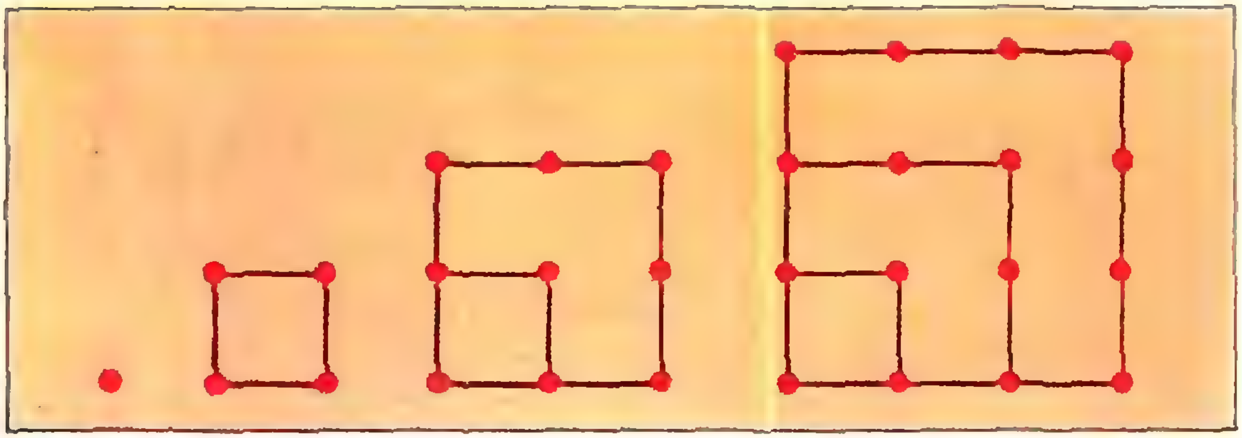


Рис. 6.

Бросается в глаза закономерность, по которой составлены эти числа. Можно доказать, что эта закономерность имеет место и дальше. Значит, если n-е треугольное число обозначить через T_n и считать, что $T_1 = 1$, то будет справедлива следующая формула:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

На вид она довольно проста, однако для вычисления явно не пригодна. Чтобы придать ей более удобную для вычисления форму, заметим, что в правой части равенства равноудаленные от начала и конца слагаемые в сумме дают одно и то же число, а именно $n + 1$.

Теперь все очень просто: напишем нашу формулу два раза, поменяв во втором случае порядок слагаемых на обратный:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n,$$

$$T_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Сложим эти два равенства «столбиком»; тогда в левой части получим $2T_n$, а в правой — число $n + 1$, взятое n раз. Итак, $2T_n = n(n+1)$, откуда

$$T_n = \frac{1}{2} n (n+1).$$

Примененный здесь метод вычисления дал нам возможность упростить довольно громоздкое выражение. В связи с этим хочется привести традиционный рассказ о мальчике по имени Карл, блестяще применившем этот метод при решении аналогичной задачи.

«Однажды учитель начальной школы, которую посещал Карл, желая подольше занять ребят, предложил им трудную задачу: сложить числа 1, 2, 3 и т. д. до 100. Учащиеся погрузились в вычисления . . . Маленький Карл заметил, что пары чисел 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и т. д. в сумме дают 101. Подсчитав в уме, что таких пар 50, он написал на своей грифельной доске ответ — 5050 и подал ее учителю. Учитель был очень удивлен . . .»

Будущее показало, что учителю удивляться не следовало: маленький Карл стал впоследствии великим Карлом Фридрихом Гауссом, прозванным «королем математиков» еще при жизни!

2

Кроме треугольных чисел существуют также числа *квадратные, пятиугольные, шестиугольные* и т. д. Они связаны соответственно с квадратом, правильным пятиугольником, правильным шестиугольником и т. д.

Обозначим n-е квадратное число через K_n, а n-е пятиугольное — через $П_n$; тогда

$$K_n = n^2, \quad П_n = \frac{1}{2} n (3n-1).$$

Чтобы получить эти равенства, нужно каждое из чисел K_n и $П_n$

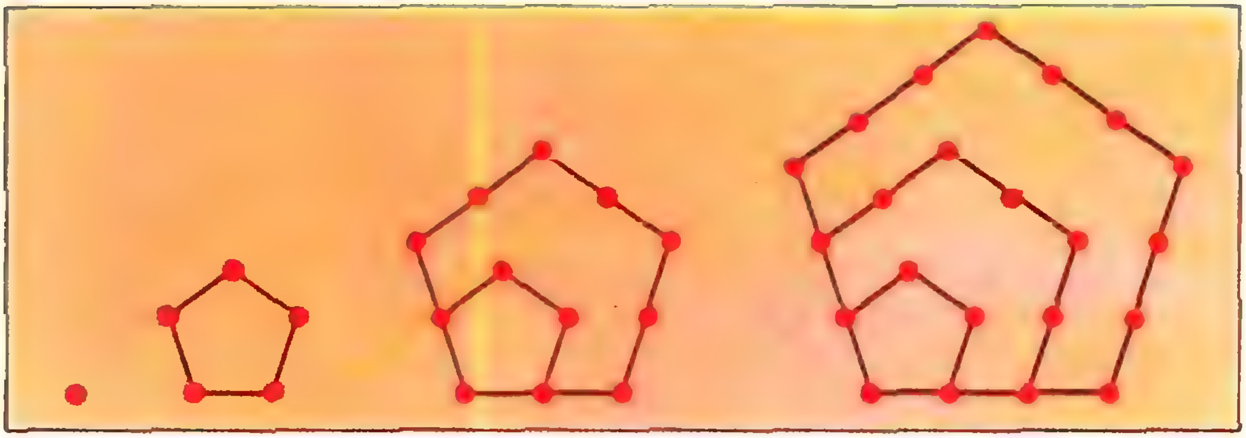


Рис. 7.

представить в виде соответствующей суммы (см. рис. 6 и 7) и применить уже известный нам метод «спаривания» слагаемых. Соответствующие вычисления проделайте сами.

Аналогично можно найти выражения и для шестиугольных, семиугольных и т. д. чисел. Мы решим более общую задачу — найдем формулу для любого *k-угольного* числа.

3

Итак, пусть $F_n^{(k)}$ обозначает n-е k-угольное число. Рассмотрим k-угольник, порождающий это число (см. рис. 8). Возьмем одну из вершин этого многоугольника, например, A, и проведем из нее все диагонали. Сколько их будет? Подсчитаем.

Вершину A можно соединить с каждой из остальных $(k-1)$ вершин; но при соединении A с двумя соседними с ней вершинами мы получим не диагонали, а стороны многоугольника. Значит, диагонали получаются при соединении A с $(k-1)-2 = k-3$ вершинами. Это и есть число диагоналей.

Проведя диагонали из вершины A, мы разобьем k-угольник на $k-2$ треугольника (см. рис. 9). Каждый из этих треугольников связан с n-м треугольным числом T_n. Зная же T_n, мы можем посчитать число точек в данном k-угольнике, то есть найти формулу для $F_n^{(k)}$. В самом деле, в каждом треугольнике T_n точек, а треугольников $k-2$. Итого — $(k-2)\,T_n$ точек. При этом точки, лежащие на диагоналях, мы считали два раза — ведь диагональ является общей стороной двух смежных тре-

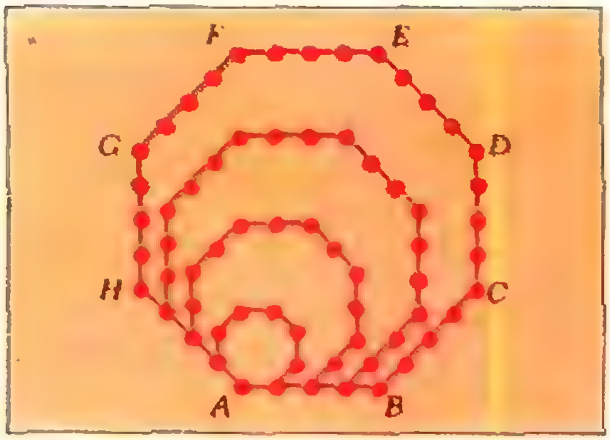


Рис. 8.

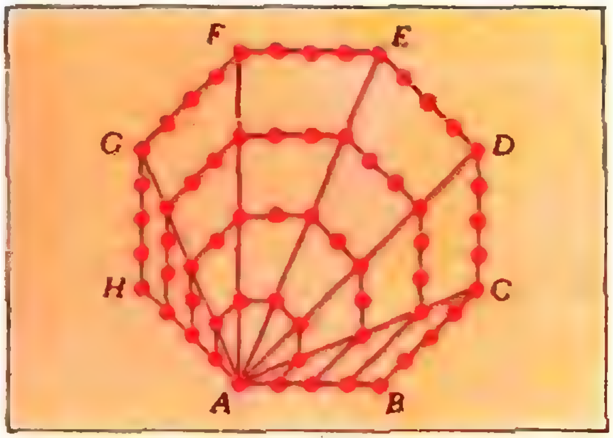


Рис. 9.

угольников, а точку A, которая является общей для всех треугольников $k-2$ раза.

Уточним наш подсчет: на каждой диагонали n точек, а если отбросить точку A, то $n-1$ точка; значит, $(n-1)(k-3)$ точек мы считали по два раза; а точку A мы считали $k-2$ раза и получили при этом на $k-3$ точки больше, чем следовало. Следовательно, из выражения $(k-2)T_n$ нужно вычесть число $(n-1)(k-3)$ и число $k-3$. Это дает для $F_n^{(k)}$ следующее выражение:

$$F_n^{k} = (k-2)T_n - \\ - (n-1)(k-3) - (k-3).$$

Подставив сюда значение T_n, получим после элементарных преобразований искомую формулу:

$$F_n^{(k)} = \frac{1}{2} n\,[(k-2)n + 4 - k].$$

Полагая, в частности, в этой формуле $k = 3, 4, 5$, получим соответственно формулы для T_n, K_n, Π_n.

4

Многоугольные, или, как их часто называют, *фигурные* числа были известны еще в глубокой древности. Предполагают, что впервые они появились в VI веке до нашей эры — в школе Пифагора. В дальнейшем многие математики интересовались этими числами. Про них доказано много важных и трудных теорем. Приведем одну из них: *всякое натуральное число есть либо сумма не более трех треугольных чисел, либо сумма не более четырех квадратных чисел, либо сумма не более пяти пятиугольных чисел и т. д.*

Эту теорему сформулировал без доказательства один из крупнейших математиков XVII века **Пьер Ферма**. Она привлекла внимание многих выдающихся математиков — **Эйлера**, **Лагранжа**, **Лежандра**, **Гаусса**. Каждый из них внес свой вклад в ее доказательство, но полностью теорема была доказана лишь в XIX веке французским математиком **Коши**.

Решите на досуге

1. От неверно выполненного умножения (неверна одна из цифр произведения) остались лишь такие следы:

$$\begin{array}{r} \times\ {*}0{*} \\ 5\ 1 \\ \hline \\ +\ {*}{*}0{*} \\ \hline {*}{*}46{*} \end{array}$$

Найти множимое ${*}0{*}$.

2. В шифрованной телеграмме

send more money

(«пришлите больше денег») число $\overline{money}$ есть сумма чисел $\overline{send}$ и $\overline{more}$.

Какие цифры зашифрованы буквами, если $\overline{money}$ — наибольшее из возможных в этой задаче?

3. $$\begin{array}{r} \times\ {*}{*}2 \\ {*}2 \\ \hline {*}00{*} \\ {*}{*}{*}{*}\ \ \\ \hline {*}{*}{*}11 \end{array}.$$

Найти сомножители и произведение.

4. Наборщик должен был набрать выражение

$$\overline{abcd}^2 \times 0, \ldots,$$

где $\overline{abcd}$ — четное четырехзначное число, и $0, \ldots$ — десятичная дробь. Наборщик набрал так:

$$abcd \times 20, \ldots$$

Тем не менее оказалось, что оба эти выражения численно равны. Найти число $\overline{abcd}$ и дробь $0, \ldots$

П. Ю. Германович

КАК ИЗМЕРИТЬ МОЛЕКУЛУ?

Н. А. РОДИНА

Наши основные знания о молекулах можно выразить очень простыми словами:

1. Все тела состоят из мельчайших частиц — атомов и молекул.
2. Атомы и молекулы находятся в состоянии непрерывного движения. Это движение является вечным, не прекращаясь ни при каких условиях.
3. Молекулы всех тел взаимодействуют друг с другом. В разных веществах они взаимодействуют по-разному, в зависимости от вида молекул и от расстояний между ними.

Эти три положения называют основными положениями молекулярно-кинетической теории.

В науке, пожалуй, мало найдется таких областей знания, которые имели бы столь длительную и столь плодотворную историю развития, как знания о молекулах. Упоминание о мельчайших частицах вещества имеется в рукописях, относящихся к XII веку до нашей эры. Значит, уже в течение 32-х веков, то есть 3200 лет, создаются эти знания! Многие великие ученые вложили свой труд в создание молекулярно-кинетической теории. В наше время строение молекул и их поведение изучены достаточно полно для того, чтобы даже перестраивать молекулы, создавать вещества с заранее заданными свойствами. Созданы искусственные рубины, каучук, пластмассы, лекарства и витамины. Вы, наверное, читали о том, с каким трудом добывались раньше эти вещества в естественном виде: рубины добывали из-под земли, каучук — из сока тропических деревьев, пластмасс раньше не знали совсем.

Итак, молекулы изучены хорошо, и их продолжают изучать и в наше время. Более того, основные направления развития современной физики связаны с применением знаний о строении вещества. Это нужно иметь в виду тому, кто собирается в будущем заниматься физикой.

Наш рассказ о молекулах будет посвящен определению размеров молекул.

Можно ли вообразить себе, насколько малы эти размеры? Можно ли, например, показать при помощи пальцев хотя бы расстояние между молекулами воздуха, которое примерно в 10 раз больше диаметра самой молекулы?

Размеры молекул были определены во многих опытах. Опишем один из них; этот опыт провел около 60-ти лет назад английский ученый Роберт Рэлей.

В чисто вымытый большой сосуд налили воду и на поверхность ее поместили каплю оливкового масла. Капля растеклась по поверхности воды и образовала круглую пленку. Постепенно площадь пленки увеличивалась, но затем растекание прекратилось, и площадь перестала изменяться. Рэлей предположил, что молекулы расположились в один ряд, то есть толщина пленки стала равна как раз размеру одной молекулы,

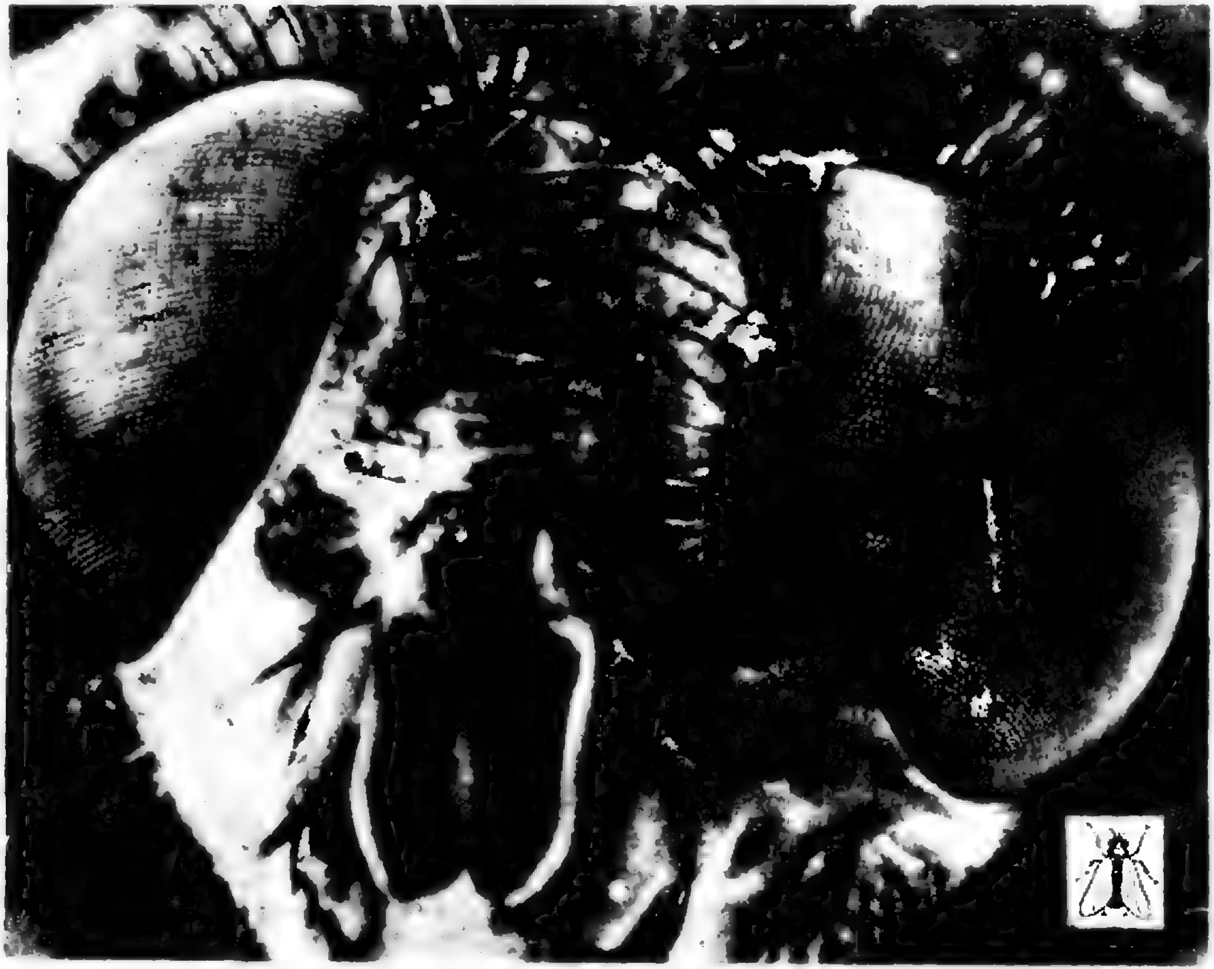


Рис. 1.

и решил определить эту толщину. При этом, конечно, нужно учесть, что объем пленки равен объему капли.

По тем данным, которые были получены в опыте Рэлея, рассчитаем толщину пленки и узнаем, чему равен линейный размер молекулы масла. Капля имела объем 0,0009 $см^3$, а площадь образовавшейся из нее пленки была равна 5500 $см^2$. Отсюда толщина пленки

$$d = \frac{V}{S} = \frac{0{,}0009}{5500}\ см = 0{,}00000016\ см.$$

В опыте Рэлея объем капли был определен по ее массе и плотности масла. Масса капли была равна 0,0008 *г*, плотность масла 0,9 $г/см^3$. Подсчитайте по этим данным объем капли.

Многочисленные опыты показали, что молекулы разных веществ отличаются по размерам. Но когда хотят оценить диаметр молекул (если принять, что они имеют форму шариков), берут величину 0,00000001 *см* *).

Можно ли представить себе частицу, имеющую такие размеры?

Посмотрите на фотографию головки обыкновенной комнатной мухи, сделанную при сильном увеличении (рис. 1). По бокам головки вы видите глаза мухи, они состоят из отдельных элементов, так называемых фасеток. На фотографии каждая фасетка имеет диаметр примерно 1 *мм*. А теперь посмотрите на рисунок, где муха изображена в натуральную величину. Весь глаз мухи имеет диаметр, меньший миллиметра.

---

*) Вы уже, наверное, заметили, какими длинными числами записываются размеры молекул. Более кратко данное число можно записать так: 10^{-8} *см*. Как перейти от одной записи к другой, вы поймете, если сосчитаете, на каком месте после запятой стоит значащая цифра в числе 0,00000001.

Теперь постарайтесь представить себе размер каждой фасетки глаза. Так вот — молекула еще примерно в 100 000 раз меньше такой фасетки!

Конечно, такую частицу нельзя увидеть невооруженным глазом. Но может быть, ее можно увидеть в микроскоп? Каким для этого должно быть увеличение микроскопа?

Капля воды диаметром в 0,5 *см* при увеличении в 2000 раз будет иметь размеры классной комнаты, но и тогда в ней нельзя будет различить отдельные молекулы. При увеличении еще в 2000 раз капля будет иметь в поперечнике 20 *км*, и ее «зернистое» строение начнет вырисовываться перед нашими глазами. Но нужно увеличить ее еще в 250 раз, чтобы увидеть, наконец, строение молекулы воды, но . . . такое увеличение (в общей сложности в 10^9 раз) получить нельзя.

В настоящее время при помощи специальных микроскопов (электронных микроскопов) получают фотографии, на которых можно различить отдельные молекулы, но только такие, которые имеют большие размеры по сравнению с молекулами воды.

На фотографии (рис. 2) вы видите молекулы белка, диаметр которых примерно в 100 раз больше, чем у воды. Зная, что фотография сделана при увеличении в 73 000 раз, попробуйте примерно оценить диаметр молекулы белка.

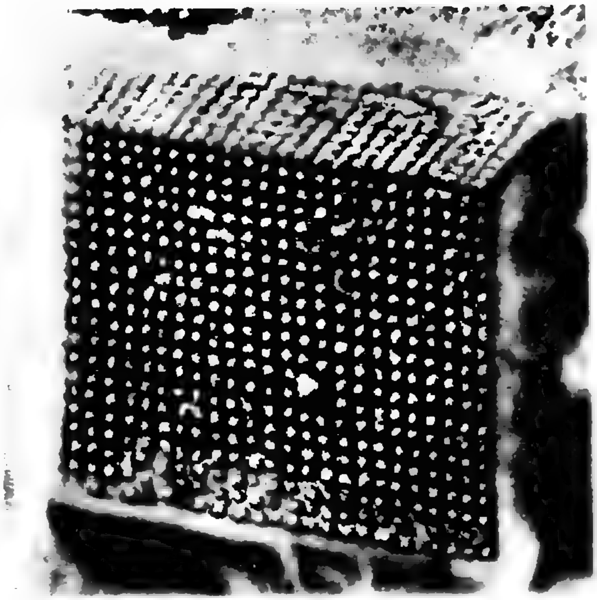


Рис. 2.

И, наконец, советуем вам самим проделать опыт по определению размеров молекул масла. Конечно, повторить опыт Рэлея трудно, так как для этого нужно иметь специальный сорт масла и сделать точные измерения. И все же попробуйте! Наградой вам будет сознание, что вы определили величину, которая сравнима с размерами молекул.

Для опыта удобно воспользоваться чистым машинным маслом. Сначала определите объем одной капли этого масла. Придумайте сами, как это сделать при помощи пипетки (капельницы) и мензурки (можно воспользоваться мензуркой, которой отмеривают лекарства).

Налейте в тарелку воды и на ее поверхность поместите (конечно, при помощи той же самой пипетки!) каплю масла. Когда капля растечется, измерьте диаметр пленки линейкой, положенной на края тарелки. Если поверхность пленки не будет иметь форму круга, то или подождите, когда она примет такую форму, или сделайте несколько измерений и определите ее средний диаметр. Затем вычислите площадь пленки и ее толщину. Какое число вы получили? Во сколько раз оно больше размера молекулы масла (0,0000002 *см*)?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Сигналы. Спектры»

2. От $2\cdot10^3$ *гц* до $3\cdot10^5$ *гц*.

К статье «О силе шахматных фигур»

1. $P_{Кр}(n)=\frac{4(n-1)(2n-1)}{n^2}$,

$$P_Ф(n)=\frac{2(n-1)(5n-1)}{3n},$$

$$P_Л(n)=2(n-1),\quad P_С(n)=\frac{2(n-1)(2n-1)}{3n},$$

$$P_К(n)=\frac{8(n-1)(n-2)}{n^2},$$

$$P_П(n)=\frac{(n-1)(3n-4)}{n(n-2)}.$$

Легко убедиться, что при $n=8$ из этих формул получаются подвижности фигур, найденные в статье. При четном n белопольный и чернопольный слоны имеют одинаковую подвижность; при нечетном n подвижнее слон того цвета, каких полей больше (найдите эти подвижности самостоятельно). Делением $P_x(n)$ на $P_н(n)$ получается сила фигуры x.

2. Для того чтобы найти подвижность фигуры x при $n\to\infty$, надо вычислить соответствующий предел. Для фигур с ограниченным перемещением по доске (король, конь, пешка) получаем:

$$P_{Кр}(\infty)=\lim_{n\to\infty}P_{Кр}(n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n-1)(2n-1)}{n^2}=$$
$$=8\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=8,$$

аналогично $P_К(\infty)=8$, $P_П(\infty)=3$. Конечно, эти значения легко предвидеть, если внимательно посмотреть на рисунки 1, 5, 6 статьи: с ростом n доля полей, с которых число ходов фигуры отличается от полученного значения, стремится к нулю.

Движения ферзя, ладьи и слона носят линейный характер, и, очевидно, их подвижность при $n\to\infty$ неограниченно возрастает. Однако для этих фигур можно получить асимптотические оценки:

$$P_Ф(n)\approx\frac{10}{3}n,\quad P_Л(n)\approx2n,\quad P_С(n)\approx\frac{4}{3}n.$$

Из последних формул следует, что силы дальнобойных фигур при больших значениях n находятся приблизительно в следующем отношении:

$$F_Ф(n):F_Л(n):F_С(n)\approx5:3:2.$$

3. Уравнение $F_Л(n)=F_С(n)=F_К(n)$ имеет два корня: $n=8$ и $n=3$.

Уравнение $F_{Кр}(n)=F_С(n)$ имеет один корень $n=6$.

4. $\frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{6}$.

5. $\frac{1}{12}n(n-2)^2(2n^3-12n^2+23n-10)$

при четных n и $\frac{1}{12}(n-1)(n-3)(2n^4-12n^3+25n^2-14n+1)$ при нечетных n. Заметим, что уже для четырех ферзей эту задачу решить до сих пор не удалось.

6. Из задачи 2 следует, что две ладьи сильнее.

8. Подвижность коня на бесконечной доске равна

1, если $a=b=0$;

4, если $a=b\neq0$ или одно из чисел a, b равно нулю, а другое — нет;

8 во всех остальных случаях.

К статье «Механические колебания»

1. $v_0\approx0{,}2$ *м/с*; $F_{max}=0{,}1$ *н*.

2. $x_0=x_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}$.

Указание. Воспользоваться законом сохранения импульса при ударе и законом сохранения энергии при колебаниях.

3. $\omega=\sqrt{\frac{m_3g}{M(m_1+m_2+m_3)}}\approx$
$\approx5{,}8\,c^{-1}$.

4. $\nu_1=0{,}28$ *гц*, $\nu_2=0{,}56$ *гц*.

5. $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho gS}}$.

6. $\nu_{max}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}}$.

Указание. В крайнем верхнем положении ускорение подставки не должно превышать ускорения силы тяжести.

7. $n = \frac{t_1\sqrt{g+a_1}+t_2\sqrt{g-a_2}}{2\pi\sqrt{l}}$.

8. Период колебаний не изменится, так как электрическая сила всегда перпендикулярна направлению движения шарика.

К статье «Московский институт инженеров железнодорожного транспорта»

Математика

Вариант 1

1. A — за 15 *ч*, B — за 15 *ч*, C — за 10 *ч*.
2. $1-\sqrt{3} < x < 2-\sqrt{2}$.
3. $\frac{6\sqrt{6}h^2 \operatorname{ctg}\alpha \sin(45^\circ+\alpha)}{\sin\alpha}$.
4. $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6}+n\pi$, k, n — целые числа.

Вариант 2

1. В 4 раза.
2. $2/3 < a \leqslant 4$, $a \neq 2\frac{4}{7}$.
3. $\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\beta\sin\alpha}{2\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$.
4. $\frac{1}{2}(2a^2-a^4+1)$.

Вариант 3

1. 12 человек.
2. $x = (1+\sqrt{5})/2$.
3. $S = 200$ *см*^{2}.
4. $m-1$.

Физика

1. $v_0 = 0{,}33$ *м/с*; $a = 0{,}13$ *м/с*^{2}.
2. $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$.
3. $v_2 = 3{,}4$ *м/с*.
4. $t_1 = 0{,}5$ *с*; $t_2 \approx 0{,}33$ *с*; $t_3 \approx 0{,}17$ *с*.
5. $\Delta T = 3{,}5^\circ$.
6. $\rho = 3{,}03\cdot10^3$ *кг/м*^{3}.
7. $P = 8$ *вт*.
8. $P_1 = 96$ *вт*; $P_2 = 144$ *вт*.
9. $U = 0{,}5$ *в*.
10. $Q = 5\cdot10^{-3}$ *дж*.
11. $P = 28{,}8\cdot10^2$ *вт*.

К статье «Московский институт электронного машиностроения»

Вариант 1

1. Обозначив через x и y стороны прямоугольника, можем составить следующую систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 420 \\ 2(x+y)+\sqrt{x^2+y^2} = 111. \end{cases}$$

Подставляя значения x из первого уравнения во второе, получим

$$2\left(x+\frac{420}{x}\right)+\sqrt{x^2+\frac{420^2}{x^2}} = 111.$$

Обозначим $x+\frac{420}{x} = t$, тогда $2t+\sqrt{t^2-840} = 111$, откуда $t = 41$. Теперь $x+\frac{420}{x} = 41$, $x_1 = 20$, $y_1 = 21$ и $x_2 = 21$, $y_2 = 20$.

Длина проволочного забора выражается формулой $l(t) = 2t+\sqrt{t^2-840}$ Эта функция возрастающая, и потому принимает наименьшее значение при наименьшем возможном значении t. Но $t = x+\frac{420}{x} \geqslant 2\sqrt{420}$, и равенство возможно только при $x = \frac{420}{x}$, то есть при $x = y$.

Ответ. Размеры участка 20 *м* × 21 *м*, наименьшее количество проволоки потребуется для квадратного участка.

2. Имеем: $-1 \leqslant x \leqslant a$. Освобождаясь от радикалов двукратным возведением в квадрат, получаем:

$$4x^2-(4a-4)x+a^2-4a = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{a-1}{2}+\frac{\sqrt{2a+1}}{2},$$

$$x_2 = \frac{a-1}{2}-\frac{\sqrt{2a+1}}{2}.$$

Проверка показывает, что подходит только x_1.

Ответ. $x = \frac{a-1}{2}+\frac{\sqrt{2a+1}}{2}$.

3. Возводя в квадрат и упрощая, получаем уравнение,

$$\cos x(2\sin 2-\sqrt{2}\cos x+\sin x) = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то подстановка в исходное уравнение дает:

$$\sqrt{2\sin x\cos 2} = \sqrt{2\sin x\cos 2}.$$

Но $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ и $\cos 2 < 0$, значит $\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Пусть теперь $2\sin 2-\sqrt{2}\cos x+\sin x=0$, тогда $2\sin 2>\sqrt{3}$, поскольку $\sin 2>\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\sin x-\sqrt{2}\cos x=$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos x\right)=$$

$$=\sqrt{3}\sin(x-\varphi)\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{3}\left(\text{здесь}\quad\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

и последнее уравнение корней не имеет.

Ответ. $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

4. Неравенство выполняется, если

$$\begin{cases}\log_3^2 x^2+2\log_3 x-2<0,\\ 2^{2x}-9\neq 0.\end{cases}$$

Из первого неравенства находим: $\frac{1}{3}<x<\sqrt{3}$, из второго $x\neq\log_2 3$. Проверим, находится ли точка $\log_2 3$ в промежутке $\left(\frac{1}{3},\ \sqrt{3}\right)$. Легко видеть, что $\log_2 3>1$; сравним $\log_2 3$ и $\sqrt{3}$, или 3 и $2^{\sqrt{3}}$: $2^{\sqrt{3}}>2^{1{,}6}=2^{\frac{8}{5}}>3$, так как $3^5<2^8$, потому $\sqrt{3}>\log_2 3$.

Ответ: $\frac{1}{3}<x<\log_2 3$, $\log_2 3<x<\sqrt{3}$.

5. $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos A$.

Вариант 2

1. 3 *см* × 6 *см* × 26 *см*; 6 *см* × 12 *см* × 10 *см*.

2. $x=\frac{a}{2}+\sqrt{a-1}$ при $a\geqslant 2$, при $a<2$ решений нет.

3. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

4. $3<x<10$.

5. $a\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

К статье «Московский авиационный институт»

Математика

Вариант 1

1. $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Указание. Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, сделать замену $\frac{x^2-4x+3}{2-x}=t^2$; показать, что достаточно рассмотреть случай $x\leqslant 1$.

2. 5 : 4.

3. $-1<a<0$, $\frac{2}{5}<a<\frac{1}{2}$.

4. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$. Указание. Показать, что данный отрезок пересекает бо́льшую окружность в двух точках и один из концов отрезка лежит вне этой окружности.

5. $1-\sqrt{3}/3$.

Вариант 2

2. $x=\lg 3/\lg 1{,}5$. Указание. Поделив обе части уравнения на 3^{2x}, после преобразований получим $9y^2+3y-2=0$, где $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Решив квадратное уравнение, найдем: $y=1/3$.

3. 127; 127/8.

4. 60 *км/ч*, 40 *км/ч*, 420 *км*.

5. $a>1$. Указание. Обозначив $\log_2 a$ через t и заметив, что $2x-3-x^2<0$ для любых значений x, данное неравенство после преобразований можно записать в виде $(2t+1)x^2-x+\frac{1}{t}+3>0$. Этот квадратный трехчлен положителен для всех значений x, если $2t+1>0$ и $D<0$ (D — дискриминант). Решив систему неравенств

$$\begin{cases}2t+1>0,\\ (24t^2+19t+4)\,t>0,\end{cases}$$

найдем: $t>0$.

Вариант 3

2. $8a^2(1-a^2)$. Указание. Раскрыть скобки и привести выражение к виду $1-\cos(\alpha-\beta)$.

3. $x_1=-\pi/4+\pi k$, $x_2=\pi k$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

4. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Воспользоваться подобием треугольников DFC и BFA и DFA и LFC.

5. $R\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. Указание. Показать, что одна из вершин треугольника лежит внутри круга, длина отрезка, соединяющего центры треугольника и круга, равна R.

Физика

Билет 1

2. $Q=rm+cm(t_1-t_2)\approx 5{,}3\cdot 10^4$ *дж*.
3. $F=50$ *н*, $N=85$ *н*.
4. $p=16{,}8\cdot 10^{-3}$ *кг·м/с*.
5. $L=0{,}175$ *м*.

Билет 2

2. а) $v_0=1000$ *м/с*; б) $v_\text{п}=500$ *м/с*.
3. $m=400$ *т*.
4. $t=70^\circ$ C.
5. а) $F=3{,}12$ *н*, б) $F=1{,}56$ *н*.

Билет 3

2. $T=2\cdot 10^{-3}$ *с*.
3. $\Delta t=0{,}43$ *с*, $I=5{,}75$ *а*.
4. $v_\text{ср}=13{,}3$ *м/с*.
5. $m=138$ *т*.

Билет 4

2. $v = 5$ *км/ч*.
3. $m_{\text{льда}} = 10$ *г*.
4. $h = 35$ *м*.
5. $r = 0{,}8$ *ом*, $E = 28$ *в*, $I = 35$ *а*.

Билет 5

2. $S_1 = 1{,}3$ *м*.
3. В диапазоне 206—103 *м*.
4. $H = 525$ *м*.
5. $W_{\min} = 4125$ *квт*.

К статье «Московское высшее техническое училище»

Математика

Вариант 1

1. 3 часа, 4 часа, 6 часов.
2. $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.
3. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, k — целое.
4. $x = \pm 1$.
5. $1 < x < 2$.

Вариант 2

1. 12, 6, 3, ...
2. $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.
3. $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k — целое.
4. $x_1 = 9/4$, $x_2 = 1/12$.
5. $4 < x < 6$.

Физика

Билет 1

3. 60 *см*, 25 *см*.

Билет 2

3. $\operatorname{arctg} 2$.

Билет 3

3. 9,6 *кг*.

К статье «Ленинградский государственный университет»

Математика

Вариант 1

1. 30 тракторов, 816 рублей.

2. Если $a = 1$, то $x_1 = \pi/2 + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

если $\frac{-\sqrt{10}-1}{2} \leqslant a < 1$ или $1 < a \leqslant \frac{\sqrt{10}-1}{2}$, то

$$x_{1,2} = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{9-4a-4a^2}}{2(1-a)} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

если $a < \frac{-\sqrt{10}-1}{2}$ или $a > \frac{\sqrt{10}-1}{2}$, то решений нет.

3. $b = 7/16$.

4. Задача имеет решение $a \geqslant b$, при этом точка E находится на расстоянии $a - \sqrt{a^2-b^2}$ от точки A.

5. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right)$.

Вариант 2

1. Задача имеет решение при $k \leqslant 2$, тогда израсходовано $\frac{(k-1)p}{(k-1)p+(2-k)q}v$ (*л*).
2. $1 \leqslant x < 4(2+\sqrt{3})$.
3. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. $\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$.
5. $\frac{1+3\cos^2\alpha}{2\sin 2\alpha}r$.

Вариант 3

1. 26 деталей.
2. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$
4. 20,4 *см*.
5. $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 4

1. 12 *км/ч*, 15 *км/ч*.
2. $-3/4 < x < 1$.
3. $x = \pi/3 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
4. 6 *см* или 3 *см*.
5. $\frac{2}{9}al$.

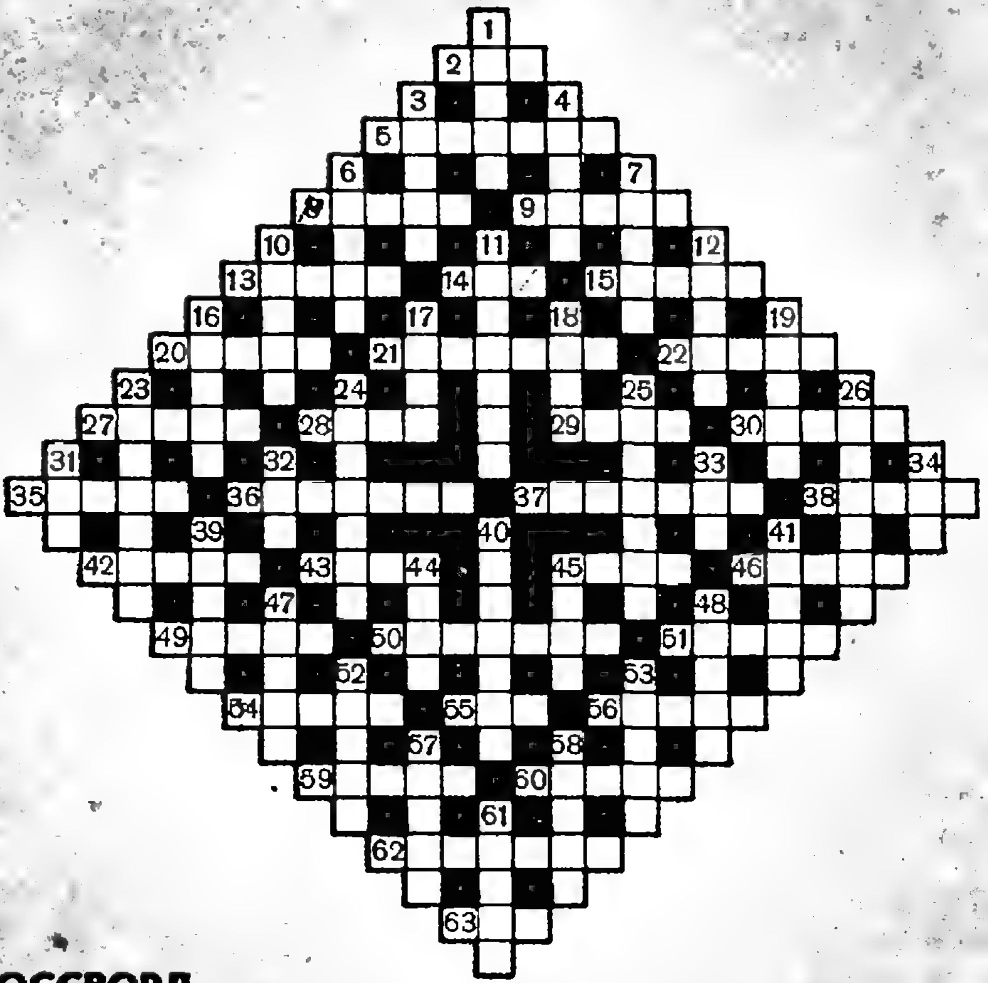
Физика

1. $\frac{m}{M} = 1$.

2. $T = \frac{P}{4}\operatorname{ctg}\alpha$.

3. $$p = \frac{k}{S}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16}\frac{V_0^2}{S^2} + 3\frac{RT_0}{k}} - \frac{3}{8}\frac{V_0}{S}\right);$$

$$T = T_0 - \frac{k}{3R}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16}\frac{V_0^2}{S^2} + 3\frac{RT_0}{k}} - \frac{3}{8}\frac{V_0}{S}\right)^2;$$



КРОССВОРД

По горизонтали

2. «Половина» прямой линии. 5. Необычная звезда. 8. Элементарная частица. 9. Химический элемент платиновой группы. 13. Единица светового потока. 14. Английский естествоиспытатель XVII века, автор основного закона теории упругости. 15. Сторона треугольника. 20. Граница фигуры на плоскости. 21. Оптический прибор. 22. Инертный газ. 27. Математический знак. 28. Немецкий физик XIX века. 29. Поток фотонов. 30. Простейшая деформация упругого тела. 35. Результат решения. 36. Математическое действие. 37. Результат математической операции. 38. Двучлен. 42. Единица э. д. с. 43. Галоген. 45. Электрод. 46. Диэлектрик. 49. Электрод. 50. Часть прямой линии. 51. Колебания, распространяющиеся в пространстве. 54. Конец отрезка. 55. Цифра. 56. Геометрическое тело. 59. Выдающийся немецкий физик XX века. 60. Древнегреческий механик. 62. Древнегреческий математик. 63. Выдающийся датский физик XX века.

По вертикали

1. Французский математик XVIII века. 3. Французский физик XVIII века. 4. Мера инертности тела. 6. Немецкий физик XIX века. 7. Английский физик-теоретик XX века. 10. Трансурановый элемент. 11. Зависимая переменная величина. 12. Единица индуктивности. 16. Тригонометрическая функция угла. 17. Известный русский физик XIX века. 18. Математический знак. 19. Отрезок прямой, заключенный внутри окружности. 23. Элементарная частица. 24. Благородный металл. 25. Составная часть атома. 26. Геометрическое тело. 31. Трехзначное число. 32. Мера времени. 33. Заряженная частица. 34. Поток электрических зарядов. 39. Сосуд, используемый в физике низких температур. 40. Раздел математики. 41. Геометрическая мера. 44. Основная единица в системе СИ. 45. Газ. 47. Двузначное число. 48. Оптический термин. 52. Часть измерительного прибора. 53. Квант света. 57. Химический элемент. 58. Способ научного исследования. 61. Объективное свойство природы.

Продолжается подписка на второе полугодие 1974 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят принимать участие в олимпиадах, горят желанием в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще «не зажглись» физикой или математикой, интерес которых к точным наукам еще дремлет. «Квант» в целом — журнал, который учит думать и работать, а не журнал для «легкого чтения».

Наш журнал полезен так же и учителям. Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. Он систематически печатает статьи по новым программам, разъясняет материал, еще не вошедший в учебник.

В 1974 году «Квант» помещает не только отдельные задачи для младших школьников, но и публикует заметки для них в разделе «Квант» для младших школьников».

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ • К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа»; т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

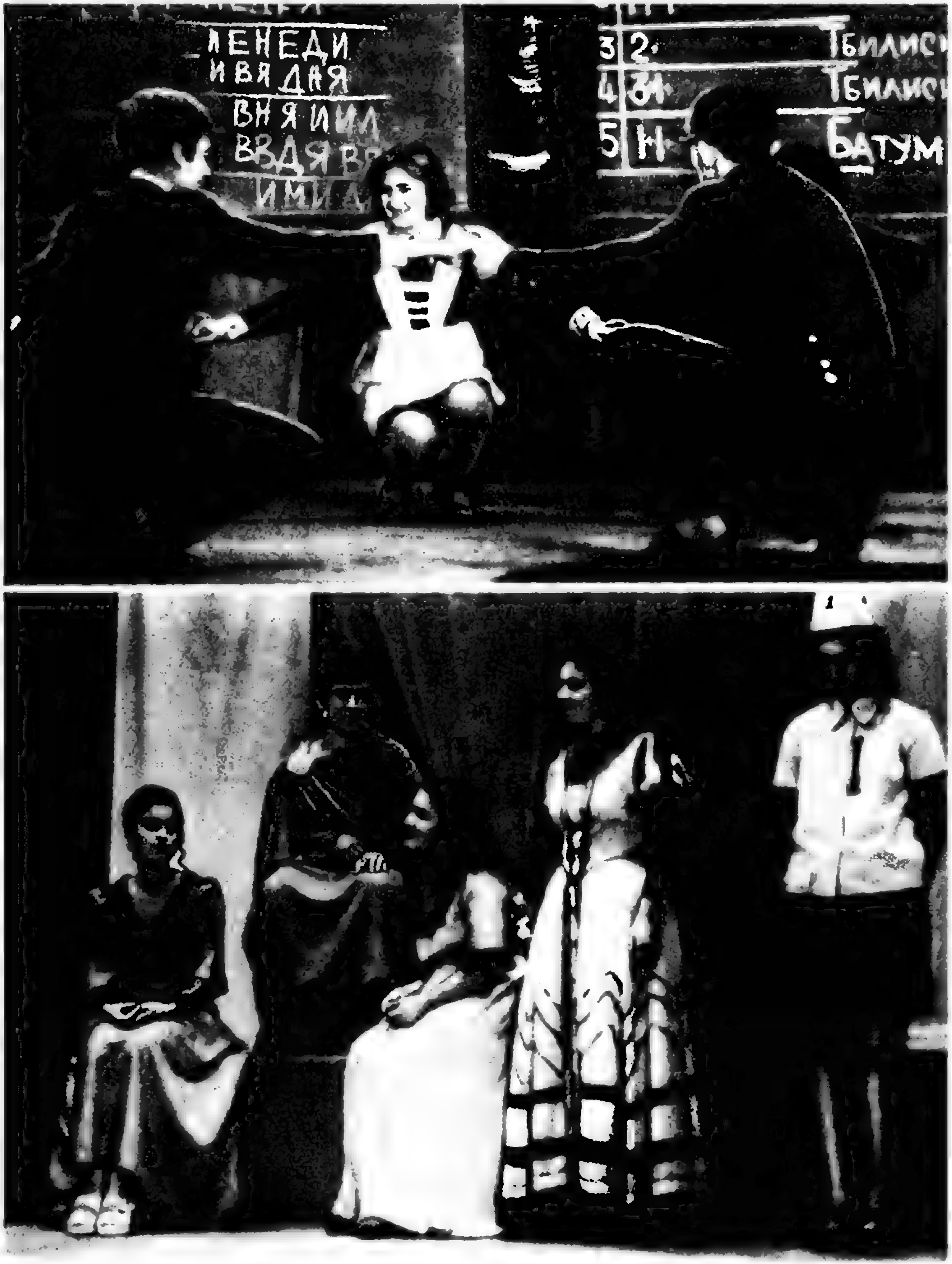
Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.

12
квант
квант
квант
5
квант
10
квант
11
квант
1



С 4 по 9 ноября 1973 года в Батуми проходил пятый праздник юных математиков Закавказья. Здесь вы видите два снимка, сделанные во время праздника. На верхнем — «ванна Архимеда», на нижнем — сцена из спектакля «Бал у принцессы Арифметики». О празднике и о спектакле вы можете прочитать на страницах 62 и 66.

Возьмите в руку журнал с изображенными на первой странице обложки кругами и сделайте рукой несколько равномерных вращательных движений в плоскости страницы с изображением. Круги начнут «вращаться». О том, как создается эта иллюзия, можно прочитать в заметке «Вращение, которого нет» на с. 12 этого номера журнала.

НОМЕР
7

Основан в 1970 году.

Квант

1974
7

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

3 Академику П. Л. Капице

4 *М. А. Гинцбург.* Планеты, о которых мы мало знаем
13 *М. И. Рейтман.* Транспортная задача
21 *М. А. Грабовский.* Как физики определяют кривизну параболы
24 *Н. С. Рубина.* О языках иностранных

Математический кружок

29 *Э. Г. Белага.* Вычисление многочленов — от Ньютона до наших дней

Задачник «Кванта»

36 Задачи М271—М275; Ф283—Ф287
38 Решения задач М231—М235; Ф238—Ф242

Практикум абитуриента

Варианты вступительных экзаменов в вузы

49 *С. С. Белявский.* Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина
50 *Э. А. Голубов.* Уральский государственный университет им. А. М. Горького
52 *С. Е. Каменецкий, В. И. Крупич, Н. Е. Парфентьева, Л. Н. Постникова, М. М. Чернецов, Г. А. Шадрин.* Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина
54 *Г. Л. Луканкин, Ю. М. Колягин.* Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской
56 *Н. В. Коновальцев, В. Н. Новиков.* Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского
57 *В. С. Колпаков, Р. Н. Сахарова.* Ярославский политехнический институт
58 *Н. Р. Гулькаров, Ф. З. Закриллаев, Е. В. Пак, А. У. Умирбеков.* Ташкентский автомобильно-дорожный институт

Рецензии, библиография

60 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги

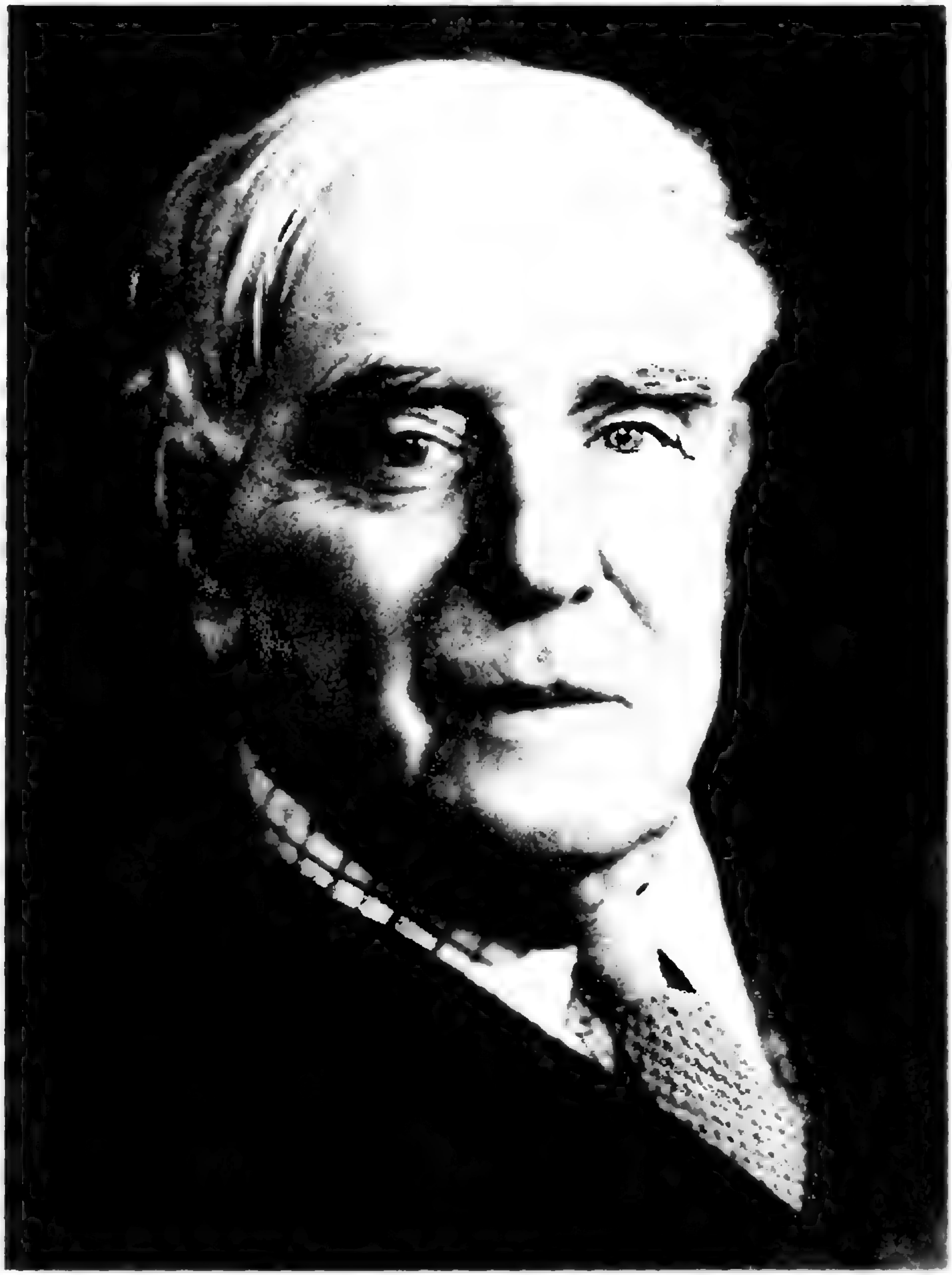
Информация

62 *Л. Г. Лиманов.* Пятый праздник юных математиков Закавказья

«Квант» для младших школьников

65 Задачи
66 Бал у принцессы Арифметики
69 *Н. А. Родина.* Можно ли взвесить молекулу?
72 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 12, 20, 23, 35, 48)*

© *«Квант», 1974 год*



9 июля 1974 года исполняется 80 лет со дня рождения члена редакционной коллегии журнала «Квант», выдающегося советского физика, члена Президиума Академии наук СССР, члена Лондонского Королевского общества, иностранного члена Академий наук США, Швеции, Дании, Польши, Индии и ряда других государств, директора Института физических проблем Академии наук СССР, главного редактора «Журнала экспериментальной и теоретической физики», председателя Координационного совета Московского физико-технического института, Героя Социалистического Труда, лауреата Государственных премий СССР академика Петра Леонидовича Капицы.

Академику П. Л. Капице

Дорогой Петр Леонидович!

Редакционная коллегия журнала «Квант», членом которой Вы являетесь, горячо поздравляет Вас в день Вашего восьмидесятилетия.

Вы — один из крупнейших советских физиков нашего времени. Ваши работы в области физики сверхсильных магнитных полей, физики и техники низких температур, физической электроники пользуются широким международным признанием. В руководимом Вами с момента его основания Институте физических проблем Академии наук СССР выросло и получило прекрасное физическое образование много талантливых ученых, обогативших нашу науку своими исследованиями. Нам, как и нашим читателям, которые успели за короткий срок существования журнала «Квант» познакомиться с несколькими Вашими статьями, особенно приятно отметить постоянно проявляемую Вами любовь к молодежи, живой интерес к проблемам образования.

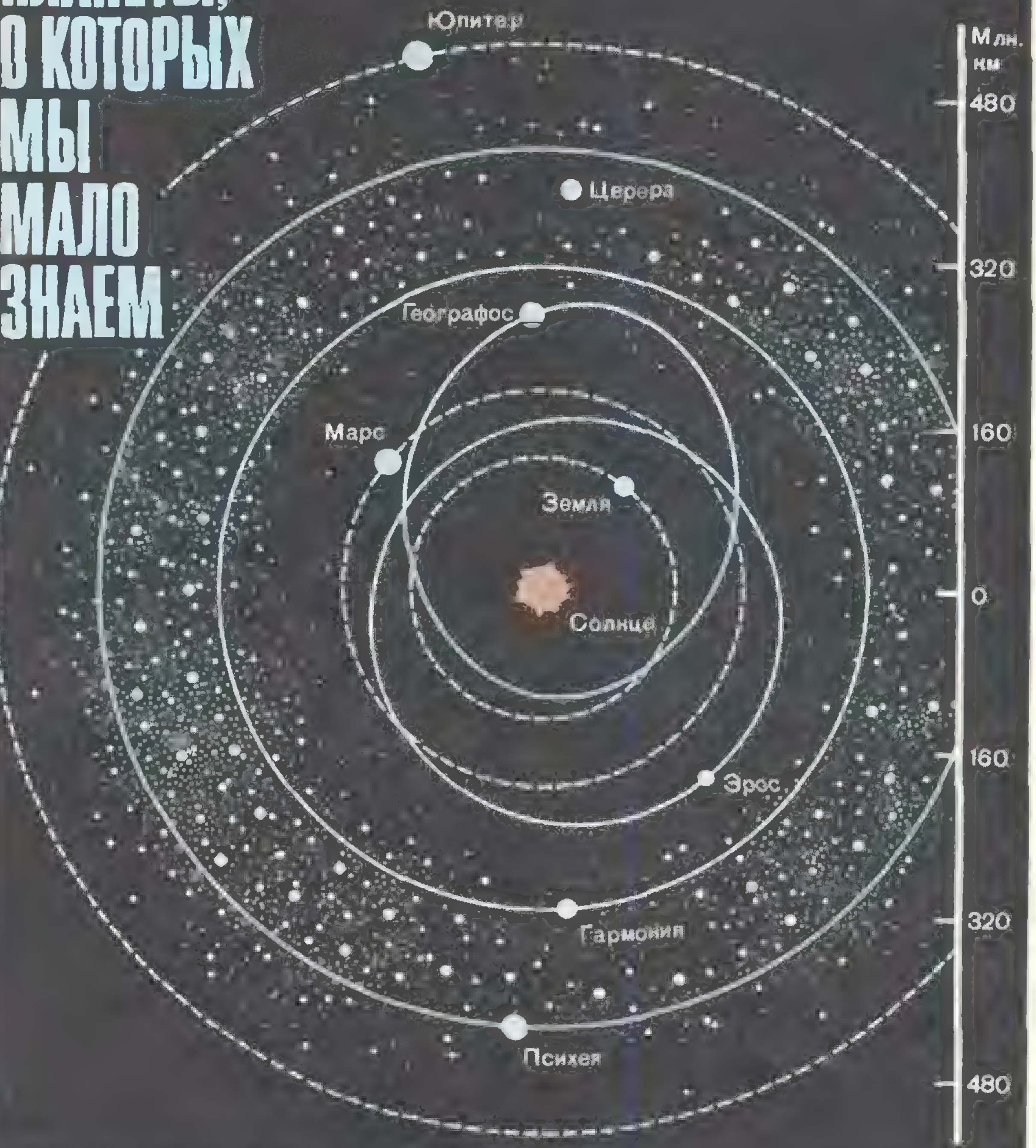
Отмечая Ваш славный юбилей, мы надеемся, что Вы еще не раз порадуете наших читателей оригинальными идеями и великолепными статьями.

Желаем Вам, дорогой Петр Леонидович, долгих лет жизни в наш необычайно интересный век, жизни, которая служит прекрасным примером для молодежи, вступающей на трудные дороги науки.

Н. Розов
А. Колмогоров
И. Слободецкий
М. Смолянский
С. Шварцбурд

М. А. ГИНЦБУРГ

ПЛАНЕТЫ, О КОТОРЫХ МЫ МАЛО ЗНАЕМ


Юпитер
Млн. км
480
320
160
0
160
320
480
Церера
Географос
Марс
Земля
Солнце
Эрос
Гармония
Психея

> [illegible]
>
> Антуан де Сент-Экзюпери
> «Маленький принц»

Введение

Кроме больших планет — Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона — вокруг Солнца обращаются и планеты меньших размеров — астероиды. Первую такую планету, названную Церерой, открыли в 1801 году. Ее диаметр 740 *км*. Затем были открыты Паллада — 490 *км*, Юнона — 200 *км*, Веста —400 *км*. Почти все орбиты астероидов расположены между орбитами Марса и Юпитера (см. рис.). В настоящее время определены орбиты для 1700 астероидов. В современные телескопы различимы около 50 000 астероидов. Вначале названия астероидов брали из греческой мифологии, потом их называли женскими именами. Есть астероиды Вера, Ольга, Валерия, Людмила, Татьяна. Есть астероид Зоя, названный в честь Зои Космодемьянской.

В последние годы астрофизики говорят о важности исследования вещества астероидов и высадки на них космонавтов.

Вещество Земли, особенно земная кора, подвергалось многочисленным превращениям (расплавление, вулканические процессы и другие), изменившим ее первоначальный облик. Луна имеет свою, особую историю, пока еще не разгаданную.

Есть вероятность, что вещество астероидов, напротив, не плавилось и сохранило особенности прошлых эпох. Тогда по нему можно узнать о начальных этапах развития Солнечной системы 4 — 5 миллиардов лет назад — эпохе образования планет.

Можно найти астероидам и практическое применение — сила тяжести на этих малых планетах ничтожна, они могли бы послужить взлетными площадками для грандиозных космических кораблей будущего.

Но существуют и такие планеты, иногда очень большие, раз в десять больше Земли, которые нельзя различить даже в самый лучший телескоп. Это планеты других миров, они обращаются не вокруг Солнца, а вокруг иных светил — далеких звезд. Расстояния до ближайших звезд — несколько световых лет — в тысячи раз больше расстояния от Земли до самой далекой планеты нашей Солнечной системы — Плутона. Свет проходит 300 000 *км* в секунду, за год это составит $9{,}46\cdot10^{12}$ *км*, а до Плутона «всего» $5{,}9\cdot10^{9}$ *км*. В этой статье рассказывается, как можно обнаружить эти планеты и определить их параметры.

Астероиды

Мысль о полете на астероиды и об условиях на этих малых планетах подробно развивал пионер космонавтики К. Э. Циолковский еще 50 лет назад. Циолковского привлекала прежде всего очень небольшая сила тяжести, облегчающая посадку и взлет космического корабля и передвижение человека по поверхности астероида. Возьмем, как и Циолковский, в качестве примера астероид диаметром в 6 *км*, что примерно в 2000 раз меньше диаметра Земли. Таких планет в поясе астероидов несколько тысяч.

Посмотрим, какова сила тяжести на таком астероиде. Ускорение силы тяжести $g = \gamma M/R^2$, где $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$ — масса планеты, ρ — плотность, R — радиус, $\gamma = 6{,}68\cdot10^{-11}$ *м³/кгс²* — постоянная всемирного тяготения. Или $g = \frac{4\pi}{3}\gamma\rho R$. Так же, как это делал Циолковский, примем плотность астероида равной $\rho = 5{,}3\times10^{3}$ *кг/м³*, то есть почти равной средней плотности Земли ($\rho_з = 5{,}5\times10^{3}$ *кг/м³*). Это значение несколько завышено — астероиды вряд ли имеют железное ядро, как Земля, и их средняя плотность около $3\cdot10^{3}$ *кг/м³*. Но для примерных оценок эта разница несущественна. Ускорение g пропорционально радиусу R, значит, на астероиде ускорение силы тяжести примерно в 2000 раз меньше земного: $g = 4{,}9\cdot10^{-3}$ *м/с²*.

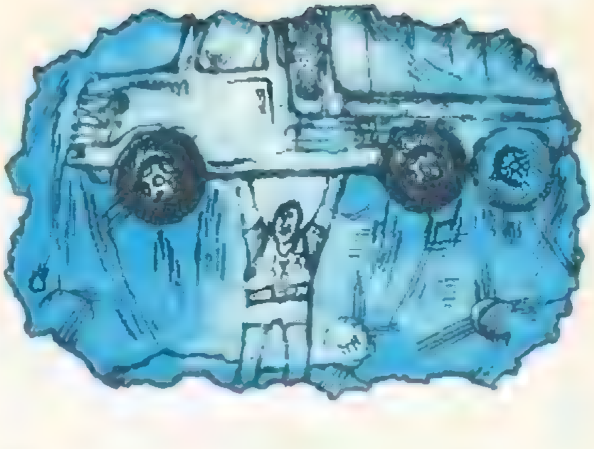
Человек на астероиде подобен сказочному великану. Он легко поднимет и снова положит космический корабль массой 10 тонн (на нашем астероиде корабль весит 50 *н*). Этот великан владеет еще сказочными семимильными сапогами — без всякого напряжения он совершает гигантские прыжки (его тело весит не 900 *н*, а 0,45 *н*).

Прыгнем на Земле на высоту S = 0,5 *м*. Путь и ускорение связаны формулой $S = gt^2/2$, $g = 9{,}81$ *м/с*^{2}. Отсюда $t = \sqrt{2S/g} = 0{,}315$ *с*. Необходимая начальная скорость $v_0 = gt = 3{,}08$ *м/с*.

В первом приближении можно считать импульсы, придаваемые телу на Земле и на астероиде, одинаковыми — они определяются, в основном, мускулами ног, а не силой тяжести (разницей в механике отрыва, в длительности взаимодействия ног с поверхностью придется пренебречь, без пренебрежений нельзя решить никакую физическую задачу). Поэтому одинакова и начальная скорость. Мы будем также считать, что ускорение g не меняется во время прыжка. При $v_0 = 3$ *м/с* на астероиде $S = v_0^2/2g = 1000$ *м* = 1 *км*. Время «прыжка» $t = v_0/g = 7 \cdot 10^3$ *с* = 110 *мин* *).

Предоставим теперь слово Циолковскому **).

«Вы стоите на поверхности астероида прямо, по-земному, но малейшее ваше движение вздымает вас, как пружинку, на воздух. Усилие, нужное для того, чтобы вспрыгнуть на земной порог в 2 вершка, вздымает вас тут на высоту 120 сажен, то есть немного ниже башни Эйфеля ***). Тяжесть настолько мизерна, что с полусаженной высоты вы будете падать в течение 22 секунд — чуть не полминуты!



Если вы нарочно наклонитесь и захотите повалиться на почву подобно подпиленному дереву, то вы будете ждать окончания этого удовольствия несколько минут и удара от падения, конечно, никакого не почувствуете. Если вы подожмете ноги, чтобы сесть, то ноги ваши будут висеть в пространстве без опоры секунд 10, в течение которых вы успеете закурить папиросу...

Лежать и стоять вы можете на острых камнях и тела не изрежете, бока не отлежите...

Бежать по планете и даже ходить очень неудобно: при малейшей таковой попытке вы улетаете кверху. Впрочем, можно бежать гигантскими шагами в несколько сажен каждый, действуя, однако, ногами крайне нежно. Чуть посильнее — и вы начнете кувыркаться в пространстве на первом же шагу, так что другой шаг приходится делать не ногами, а головой, руками, боком, чем придется. Неудобно, неудобно! — хоть сами испытайте».

Все эти факты — не только теория, но уже и практика космонавтики. Вот что пишет космонавт Нейл Армстронг о впечатлениях от бега на Луне *): «Скачки похожи на бег вприпрыжку, но при скачках на Лу-

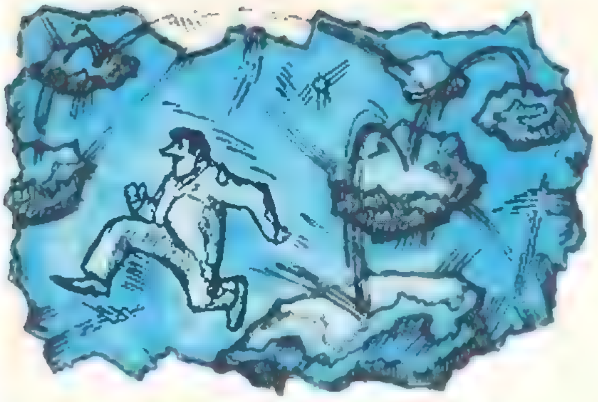
---

*) Мы считаем, что формулы, справедливые для прыжков на Земле, можно применять и на астероидах. На самом деле это правильно, когда высота подъема невелика по сравнению с радиусом планеты.

**) К. Э. Циолковский. Путь к звездам. Изд. АН СССР, 1960.

***) 1 сажень = 48 вершков = 2,13 метра.

*) См. журнал «Земля и Вселенная», № 5, 1970.



не, в отличие от бега, ноги двигаются довольно медленно, создается ощущение медленного бега. Бег, каким мы его знаем на Земле, на Луне воспроизвести невозможно».

Лунное ускорение свободного падения в 6 раз меньше земного, значит, при $v_0 = 3$ *м/с* время каждого шага $t = 2$ *с*. Это и есть «медленный бег».

Обойти поверхность астероида можно не только прыжками. Можно *лечь на спину, на бок и оттолкнуться* ногами от какой-нибудь скалы, придав телу горизонтальную скорость. Вы полетите параллельно поверхности и упадете не скоро — когда слабое притяжение астероида «повернет» вектор скорости. При начальной скорости, большей 5 *м/с*, такой опыт может кончиться плачевно — «воздушный пловец» навсегда улетит в космическое пространство. Первая космическая скорость на нашем астероиде $v_1 = \sqrt{Rg} = 3{,}6$ *м/с*. Вторая космическая скорость $v_2 = 5$ *м/с*.

Поскольку мало́ давление тел на опору, почти нет и силы трения. На Земле при повороте головы корпус остается неподвижным — благодаря силе трения подошв ботинок, создаваемой тяжестью тела.

На астероиде все произойдет поиному. Повернем голову влево — наше тело начнет вращаться вправо (по закону сохранения момента импульса в замкнутой системе голова — корпус).

Все эти «фокусы невесомости» стали обыденной жизнью космонавтов в полете, на протяжении дней и недель, а в будущем — и месяцев.

Ракета «падает» на поверхность астероида очень медленно. Например, с высоты 100 *м* она падает в течение $t = \sqrt{2S/g} = 220$ *с*. Так приятно выглядит посадка на астероид. Никаких тормозных ракет, никаких опасностей толчка при падении (если, конечно, горизонтальная составляющая скорости корабля относительно планеты равна нулю). Благодаря малой силе тяготения астероиды могут послужить естественными «промежуточными» станциями при полетах к Марсу, Юпитеру и Сатурну. Дело не только в расстоянии, но и в разнообразии орбит (рис. 1). Можно выбрать для посадки такой астероид, который по своей орбите доставит корабль именно в то место Солнечной системы, откуда легче всего достичь заданной планеты. Астероид будет играть роль дикого коня, которого оседлали для дальних перелетов. *Масса этого коня — несколько* миллиардов тонн, скорость — десятки километров в секунду.

Для резвых коней нужны и умелые седоки. На астероидах нет ни

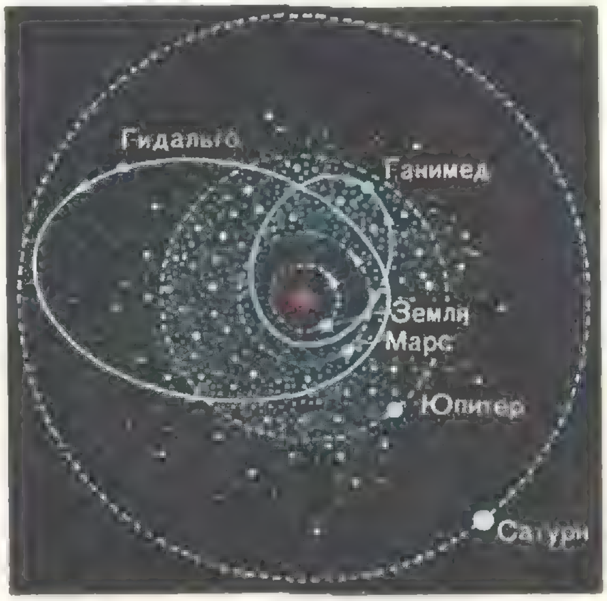
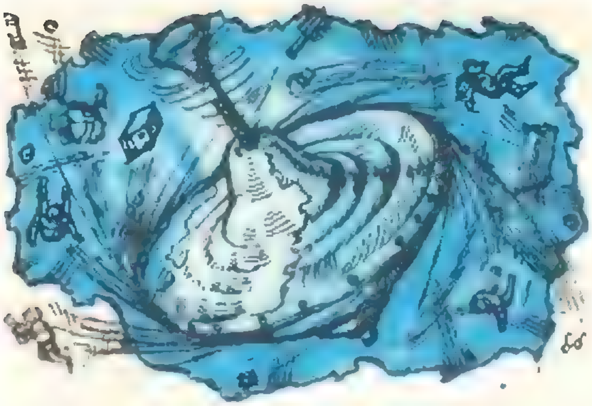


Рис. 1



атмосферы, ни сильного магнитного поля, и человек должен уметь защищать себя от солнечной радиации (рентген, ультрафиолет), быстрых частиц (космические лучи) и микрометеоров. Но за 15 лет космической эры человек этому в какой-то степени уже научился.

Пофантазируем на более конкретные темы: спросим, к каким астероидам люди полетят в ближайшее время. Прежде всего, это астероид Эрос (см. рис. с. 4). Он подходит к Земле на расстояние в $2{,}3\cdot 10^7$ *км* (ближе него к нам подходит только маленький астероид Икар, он приближается на $5{,}7\cdot 10^5$ *км*). Такая «встреча» Эроса с Землей произойдет в июне 1975 года.

Задолго до полета космонавты и инженеры должны хорошо знать, какие на этом астероиде разрешены скорости и ускорения, чтобы какая-нибудь деталь или даже космонавт не улетели в космос. Длина Эроса 35 *км*, его диаметр 10 *км*. Вращается Эрос вокруг своей короткой оси, перпендикулярной к направлению, в котором он вытянут, с периодом в 5 часов.

Для численных оценок можно принять две упрощенные модели Эроса: а) цилиндр, б) сигарообразное тело. Для этих двух моделей можно оценить, во-первых, силу тяготения F_g, которая различна в разных точках поверхности и наименьшую величину имеет на концах астероида, а во-вторых, можно по известной угловой скорости вращения найти центростремительное ускорение. Наибольшее центростремительное ускорение на концах «сигары». В таблице 1 приведены результаты такого расчета на концах астероидов Эрос и Географос.

Таблица 1

Расчетная величина	Эрос		Географос	
	Цилиндр	Сигара	Цилиндр	Сигара
Период вращения (*ч*)	5,2		5,2	
Длина (*км*)	35		3,1	
Диаметр (*км*)	10		0,7	
Ускорение силы тяжести ($\times 10^3$ *м/с²*)	6,64	2,64	0,414	0,121
Центростремительное ускорение при суточном вращении ($\times 10^3$ *м/с²*)	1,92	1,92	0,173	0,173
Относительное ускорение силы тяжести (измерение на поверхности) ($\times 10^3$ *м/с²*)	4,72	0,72	0,241	−0,052

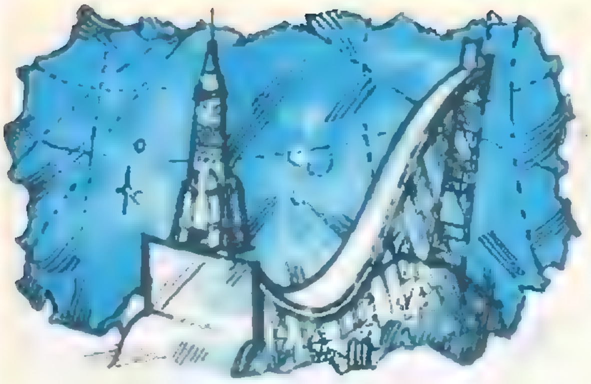
Как мы видим на примере Географоса, астероид может вращаться настолько быстро (расчет при сигарообразной форме), что сила тяготения оказывается слишком малой, чтобы обеспечить нужное центростремительное ускорение для тел, лежащих на поверхности астероида. Поэтому камни и другие предметы будут улетать с поверхности астероида в окружающее пространство. Вес тел оказывается как бы отрицательным *).

В 1976 году Географос подойдет к Земле на расстояние в $40\cdot 10^6$ *км*. В 1972 году недалеко от Земли ($21\cdot 10^6$ *км*) прошел астероид Торо (диаметр 10 *км*).

В качестве космической ракеты хорошо было бы использовать небольшой, диаметром 1 *км*, астероид

---

*) См. учебное пособие «Физика 8», § 47.



Икар. На рисунке 2 показана орбита Икара: в перигелии он подходит к Солнцу на расстояние в $28 \cdot 10^6$ *км*, то есть вдвое ближе Меркурия, а в афелии уходит за орбиту Марса.

В перигелии и афелии — двух крайних точках орбиты — ускорение перпендикулярно к скорости. В эти два момента (точки *1* и *2* на рис. 2) сила притяжения к Солнцу сообщает Икару центростремительное ускорение $a = v^2/R$, но, с другой стороны, $a = \gamma M/R^2$. Отсюда $v = \sqrt{M\gamma/R}$. Перигелий Икар проходит очень быстро и бо́льшую часть времени проводит далеко от Солнца, поэтому средняя температура его довольно низка.

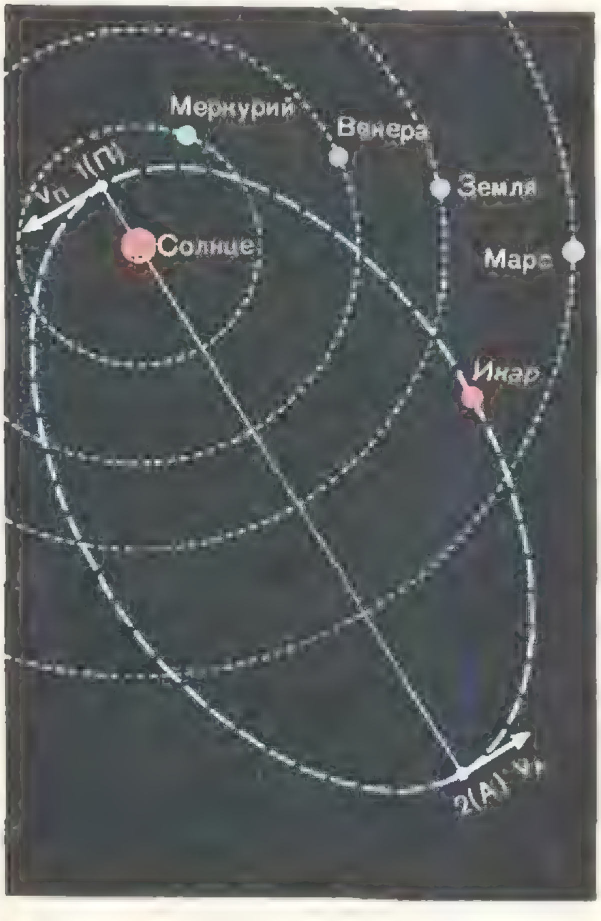


Рис. 2.

То, что спутники с сильно вытянутой орбитой проводят бо́льшую часть времени не в перигелии, не вблизи светила, а наоборот, в афелии, далеко от него, используется при запуске *научных спутников Земли*. Их орбита вытянута, поэтому наиболее интересную часть пути — вдалеке от Земли — они проходят медленно и дают подробные показания о свойствах среды.

Однако в полете к Икару есть свои трудности — это малые размеры и большая скорость астероида относительно Земли.

В Икар трудно «попасть».

Исследовать вещество астероидов не обязательно на их «родине» — за орбитой Марса. Обсуждаются планы искусственного изменения орбиты. Один из таких путей — взрыв на астероиде. Взрывные газы полетят в одну сторону, а астероид (по закону сохранения импульса) — в другую, при этом он немного изменит свою орбиту (рис. 3), приобретя дополнительную скорость Δv. Земля своим притяжением довершит остальное — астероид станет спутником Земли, удобным для изучения.

Планеты других звезд

Планеты других звезд не видны в телескоп. Тем не менее эти планеты были обнаружены.

Звезду хорошо видно, а на движение звезды влияет своим тяготением ее невидимый спутник — планета. Планеты обнаруживают по отклонениям звезды от прямолинейного движения. Внешние силы на систему звезда — планета не действуют (другие звезды далеко), поэтому центр масс движется обычно по прямой и притом равномерно. Звезда, имеющая планету с большой массой, движет-

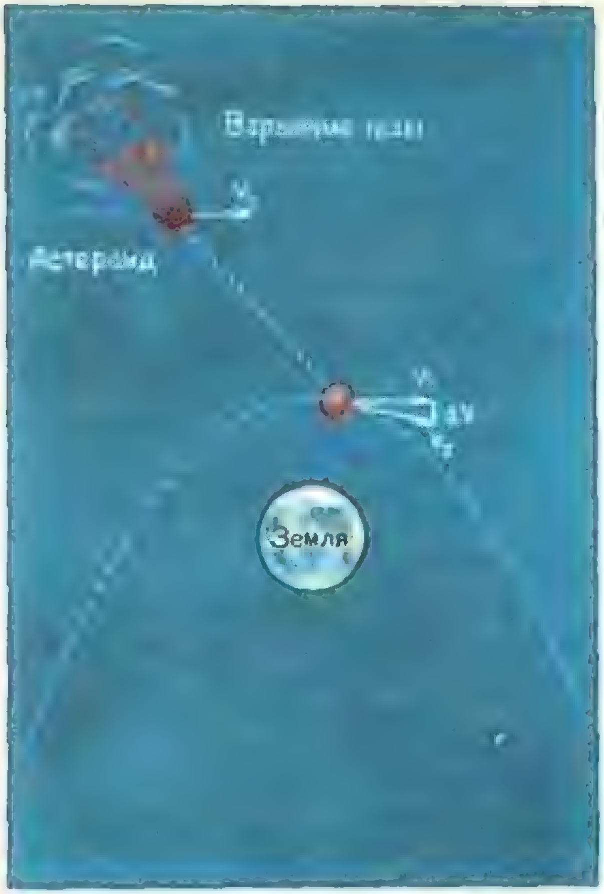


Рис. 3.

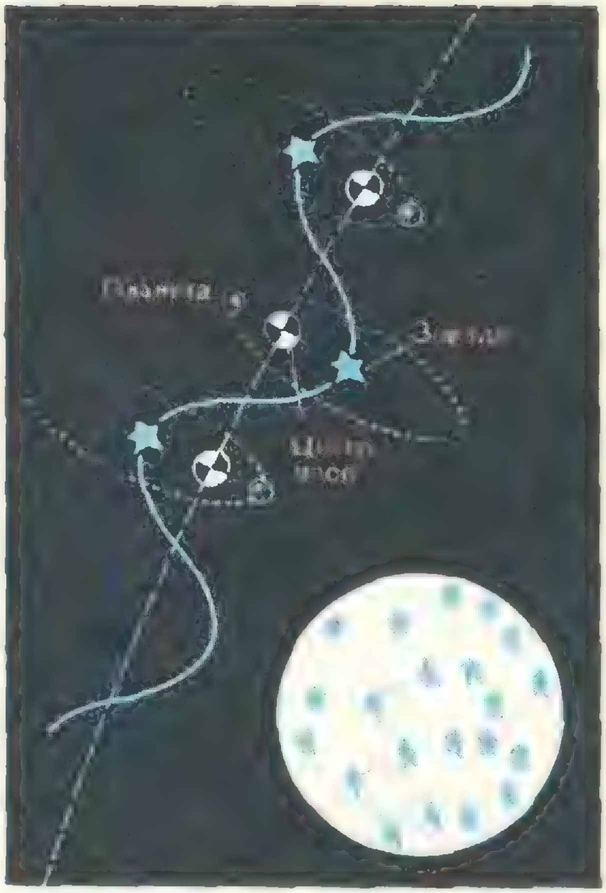


Рис. 4.

ся зигзагами (рис. 4), поскольку звезда и планета расположены по разные стороны их центра масс.

На рисунке 5 показан видимый путь звезды ε в созвездии Эридана. Это оранжево-желтая звезда, похожая на наше Солнце, но с меньшей массой (ее масса составляет 0,7 массы Солнца) и меньшей светимостью (30% светимости Солнца). Она отстоит от нас на расстояние 10,7 световых лет. По отклонению видимого пути звезды от прямой линии удалось установить характеристики планеты: период обращения — 25 лет, среднее расстояние от звезды — 8 астрономических единиц (1 *а. е.* = 149 000 000 *км* —расстояние от Солнца до Земли). Аналогичные искривления траектории обнаружены недавно и у звезды Лаланда 21 185 (расстояние от Земли — 8 световых лет); возможно, и у нее есть планеты.

Звезды, из-за их удаленности, для нас — точечные источники света. Но земная атмосфера приводит к мерцанию, размытию звезды, и вместо точки на фотопластинке оказывается кружок конечного радиуса. (Есть еще и другая причина размытости изображения звезды — погрешности телескопа. Но погрешности современных телескопов меньше атмосферных.) Минимальный диаметр изображения звезды — 0,5 угловой секунды.

Положения звезды на рисунке 5 показаны кружками с диаметром 0,05″ (4 *мм*—0,1″) И в каталогах координаты звезд приводятся с точностью до 0,1″. Такое повышение точности (от 0,5″ до 0,05″) достигается многократными измерениями и статистической обработкой результатов. Но и отклонения траектории, вызванные планетами, не превосходят 0,05″, то есть они находятся «на пределе точности» измерений. Поэтому таблицу 2, в которой приведены результаты измерения движений ближайших звезд, вызванных их темными спутниками с массами порядка масс Юпитера, можно назвать так: «Ближайшие звезды, у которых существуют или подозреваются темные спутники».

Таблица 2

Наименование звезды	Период обращения спутника в годах	Полуось орбиты звезды в секундах дуги
η в созвездии Кассиопея	24	0,019
614 по каталогу Росса	16,5	0,306
Ci 1244	26,5	0,11
Лаланда 21 185	8,0	0,034
70 в созвездии Змееносца	17	0,015
61 в созвездии Лебедь	4,9	0,010

Экспериментальную трудность обнаружения планет показывает пример со звездой Барнарда.

Вблизи нашего Солнца оказалась звезда, очень подходящая для поиска у нее планет. Это звезда Барнарда, названная по имени открывшего ее астронома-любителя. Звезда эта слабая, но движется она с достаточно большой скоростью — 10,3″ в год ($^1/_{360}$ градуса). Ее расстояние от Земли — 5,9 световых лет. Ближе нее расположена только двойная звезда в созвездии Центавра. На рисунке 6 показана измеренная астрономом ван де Кампом траектория звезды Барнарда и вычисленные по этой траектории орбиты ее планет.

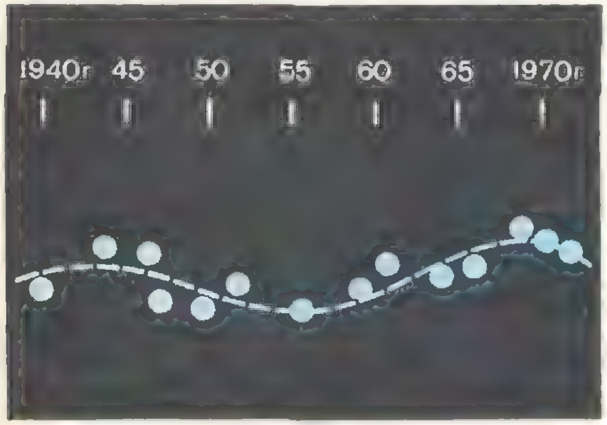


Рис. 5.

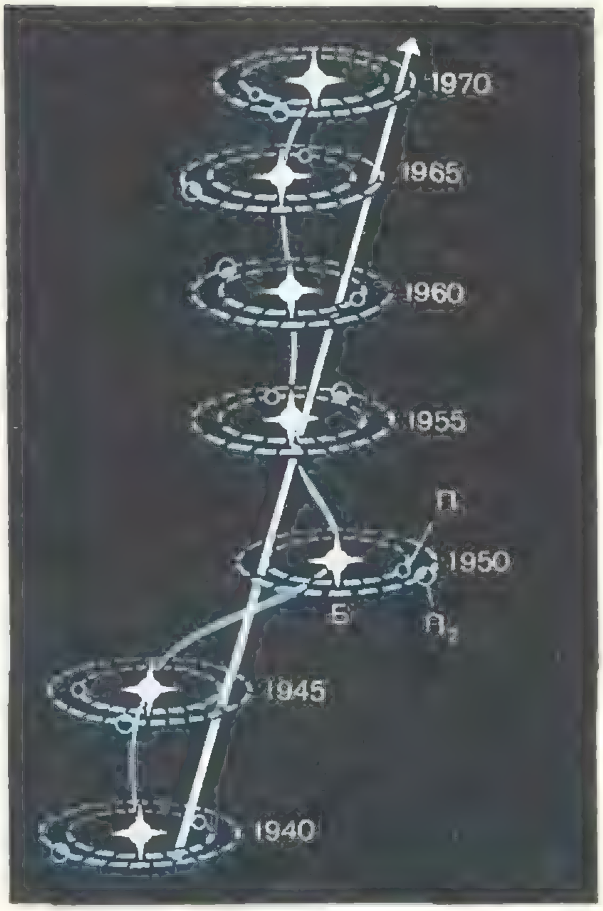


Рис. 6.

30 лет (с 1937 по 1967 год) велись наблюдения. За эти годы ван де Камп изучил и промерил свыше 3.000 фотографий звезды с точностью до 0,01″, то есть до 3 миллионных долей градуса. На фотографиях такое угловое смещение давало линейное смещение в 6 микрон.

Вначале предполагалось, что звезда Барнарда имеет одну планету с периодом обращения 25 лет, масса этой планеты примерно в 1,5 раза больше массы Юпитера. Более тщательный анализ траектории звезды привел в 1969 году к гипотезе о двух планетах с периодами обращения 26 лет и 12 лет и массами, примерно равными массе Юпитера. Орбиты планет почти круговые, расстояния от звезды 2,8 и 4,7 астрономических единиц. Для сравнения напомним, что Юпитер отстоит от Солнца на 5,2 а. е. и имеет период обращения

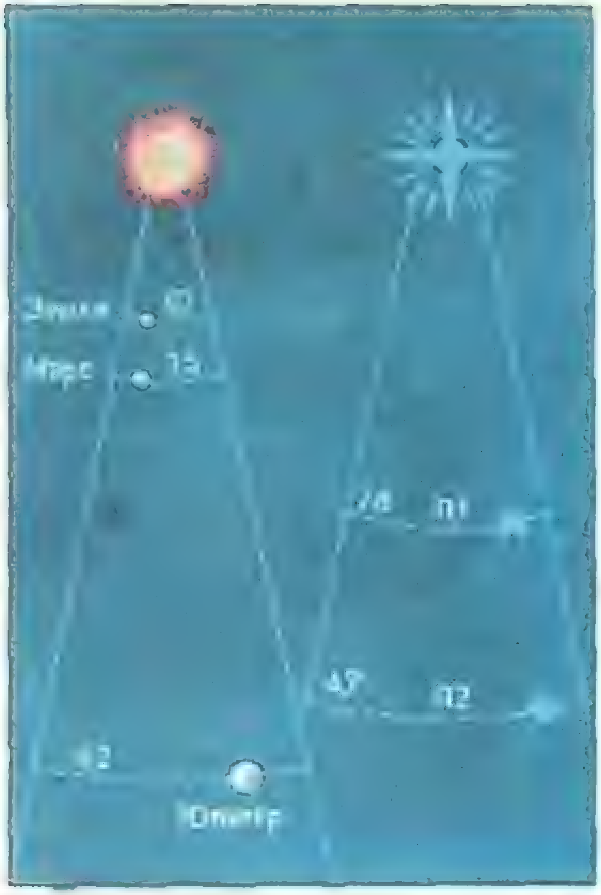


Рис. 7.

12 лет (рис. 7). Но в конце 1973 года была опубликована работа других астрономов, в которой статистический анализ фотоснимков звезды привел к иной траектории, для объяснения которой не нужно предполагать существование планет.

Можно ли преодолеть погрешности наших наблюдений и по искривлению траекторий звезд с достоверностью установить существование планет?

В этом могут оказать помощь наблюдения звезд не с земной, а с лунной поверхности — у Луны нет атмосферы, а диаметр изображений звезд на фотопластинке будет значительно меньше, чем при наблюдениях с Земли. Могут помочь и измерения со спутников, вынесенных за пределы атмосферы Земли, при достаточно совершенной системе их стабилизации в пространстве.

Вращение, которого нет

Возьмите в руку журнал с изображенными на обложке кругами и сделайте рукой несколько равномерных вращательных движений в плоскости страницы с изображением. Рисунок «оживает»: круги начинают вращаться. Нетрудно «закрутить» круги и в другую сторону. Как объясняется эта иллюзия?

Наш глаз обладает свойством удерживать зрительное впечатление в течение долей секунды после того, как видимый предмет уже исчез из поля зрения. Это же относится и к части изображения, которую мы наблюдаем. При перемещении нашего рисунка контрастные по яркости части концентрических кругов перемещаются на сетчатке в такт круговым движениям руки. Мы не можем отличить одну от другой детали однотонного круга, но каждый светлый элемент круга остается в нашем восприятии на определенном месте несколько дольше, чем на самом деле. Так возникает иллюзия перемещения элементов светлых окружностей, а при подходящей скорости — полная иллюзия вращения светлых частей фигуры. На этой стадии эффект аналогичен тому, который мы видим, наблюдая слившиеся воедино спицы быстро вращающегося колеса.

Основа этой иллюзии — так называемый стробоскопический эффект. Он состоит, во-первых, в том, что при прерывистом наблюдении быстро вращающийся предмет кажется неподвижным, а, во-вторых, в том, что быстрая смена изображений отдельных фаз движения тела дает впечатление непрерывного движения.

Первая возможность полнее всего реализуется в стро-

(окончание см. с. 23)

М. И. РЕЙТМАН

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Джо принимает план Бэйта

— Все хорошо, план операции мне нравится, Бэйт, — говорил Джо, расхаживая по номеру дешевой гостиницы и запивая каждую затяжку сигарой добрым глотком виски. Старина Бэйт сидел в кресле у жалкого камина, привычно ощущая подмышкой рукоятку пистолета.

— Еще бы! — процедил Бэйт сквозь искусственные зубы. — Недаром за мной уже пятнадцать лет гоняется полиция всех штатов. Вряд ли я вошел бы в такую цену, если бы только и мог орудовать кастетом. Новинки науки — вот мой конек. Вспомни, Джо, это я впервые ввел вертолеты при ограблении банков. А как я...

— Постой! — прервал Джо расхваставшегося коллегу. — Я ценю тебя, потому и работаю с тобой. И эта твоя новая идея — обчистить за одну ночь три склада с мануфактурой — тоже великолепна. Но шоферы...

— Это железные парни! — воскликнул Бэйт. — Можешь на них положиться! Таких не сцапает ни один фараон!

— Я доверяю этим парням, Бэйт. Но цена! 10 долларов за тонно-милю на грузовиках — да за такую цену я готов таскать вручную! Мы разоримся, даже если все выгорит.

И Джо показал на дешевом гостиничном стуле, как он готов таскать грузы. Стул жалобно скрипнул: именно в таких гостиницах любил Джо обговаривать трудные операции, в них меньше шансов наткнуться на спрятанный полицейский микрофон.

— Но не забывай, Джо, чем парни рискуют... И кроме того, кроме того... я позаботился о том, чтобы заплатить им поменьше. Нет, нет, не надуть — с такими не выйдет. Дело совсем в другом: я применю научный метод.

Джо посмотрел на Бэйта с уважением (как-никак тот когда-то кончил колледж), но все-таки возразил:

— Слушай, Бэйт. Пойми меня, я вкладываю большие деньги, тысячи долларов. Я хочу быть посвященным в суть дела. Только ты попроще, ты же знаешь, я больше отмычкой...

— Хорошо, Джо, — серьезно кивнул Бэйт, понимая, что должен напрячь все свои педагогические способности, иначе дело не пойдет, и он сядет на мель.

— Сколько скупщиков краденого берут мануфактуру?

— Четыре. Первые два по шестьдесят тонн, а два других — по сорок.

— А сколько на складах, помнишь?

— Ты что, смеешься, Бэйт? Я помню эти числа даже во сне: 75, 75 и 50.

Склады	Скупщики				Емкости складов
	1	2	3	4	
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50	75
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	75
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	100	50
Потребности скупщиков	60	60	40	40	

Табл. 1.

— Правильно, Джо! Давай я запишу все это в таблице.

Бэйт сорвал висевший на стене календарь и на обороте изобразил таблицу 1.

— А в правом верхнем углу каждой клетки здесь... — начал Бэйт, но Джо перебил его.

— Ох! Лучше б я не знал этих чисел! Конечно, я узнаю их! Столько эти внуки дьявола просят за перевозку одной тонны груза по каждому маршруту. Например, 100 долларов за тонну с третьего склада к четвертому скупщику, там 10 миль. Нет, лучше я потащу сам!

— Парни рискуют, Джо, — возразил Бэйт. — Давай будем называть эти стоимости тарифами. Итак, как же мы будем возить? По каким маршрутам?

— Ясное дело, где подешевле, — пробормотал Джо, чуя подвох.

— Правильно! Давай занимать перевозками те маршруты, где тарифы поменьше. Здесь дешевле всего везти товар от первого склада к четвертому скупщику — всего пятьдесят долларов. Назовем этот путь маршрутом (1, 4). Его мы наверняка будем использовать!

Склады	Скупщики				Емкости складов
	1	2	3	4	
1	60	120	150	50 40	~~75~~ 35
2	[illegible]	70	90	120	75
3	120	50 50	110	100	~~50~~
Потребности скупщиков	60	~~60~~ 10	40	~~40~~	

Табл. 2.

— Еще бы! И провезти по нему надо как можно больше!

— Правильно! Но больше 40 тонн не провезешь — четвертый скупщик не примет, он тоже рискует. Поставим на этот маршрут 40 тонн, а на маршрут (3, 2) — там тоже 50 долларов — 50 тонн: больше на третьем складе не нашаришь! Получится таблица 2. Я тут заодно подправил емкости и потребности. И в дальнейшем будем ставить перевозки на те маршруты, где поменьше тариф.

— Ты хочешь сказать, что дальше нужно поставить 60 на маршрут (2,1) — там 60 долларов, 10 на (2, 2), в общем... — и Джо нарисовал таблицу 3.

Склады	Скупщики				Емкости складов
	1	2	3	4	
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] 40	~~75~~ 35
2	[illegible] 60	[illegible] 10	[illegible]	90	~~75~~ ~~15~~ 5
3	[illegible]	[illegible] 50	[illegible]	[illegible]	~~50~~
Потребности скупщиков	~~60~~	~~60~~ ~~10~~	40	~~40~~	

Табл. 3.

— Именно так!

— Ха-ха-ха! Значит, и мы что-то смыслим! Ну а теперь осталось только завезти третьему скупщику — Скряге Тому, кстати мы его еще и надуем при расчете. Вот так, как я изобразил в таблице 4.

— Ну и все в порядке! — довольно потер Джо жирные руки. — Нам это обойдется в

$$35 \times 150 + 40 \times 50 + 60 \times 60 + 10 \times 70 + 5 \times 90 + 50 \times 50 = 14500$$

долларов. Не так ли, старина Бэйт? И это называется научный метод? Ставлю доллар против пяти центов, что любой полицейский сообразит, как найти этот план перевозок за 14 500 — ох-ох — 14 500 долларов. Правда, нам приходится здесь использовать маршрут (1, 3) — 150 долларов за тонну, — вдруг помрачнел Джо, вглядевшись в таблицу.

— Ага, Джо, — настал черед торжествовать Бэйту. — Выходит наука все-таки нужна? Мы рассуждали вполне здраво, а все-таки нарвались на использование самого дорогого маршрута. Давай теперь пытаться улучшить план перевозок. Поставим тонну груза на маршрут (1, 1).

— Не выйдет, — возразил Джо.— Нарушится баланс в первом столбце, если я что-то смыслю в этом деле.

— Смыслишь, смыслишь, — успокоил Бэйт. — Но баланс можно восстановить, сняв одну тонну с маршрута (2, 1), не так ли?

— Постой, тогда и во второй строке не будет баланса — на тонну меньше. Хотя, хотя… если добавить еще тонну на (2, 3) и снять с (1, 3), кажется, все будет о'кэй.

— Давай представим это в новой таблице 5 (емкости и потребности нам уже не нужны).

— Там, где я добавлял тонну, стоит знак плюс, а где убирал — минус. А набор клеток, в которых мы произвели изменения (они связаны пунктиром), давай назовем *циклом* *). Итак, что же это нам даст? Провоз одной тонны по маршруту (1,1) — 80 долларов. Их надо добавить. А 150 долларов — провоз тонны на маршруте (1, 3) — наоборот, долой, как и 60 с маршрута (2, 1). Ну и 90 придется прибавить за лишнюю тонну на маршруте (2, 3). Итого, транспортные расходы изменятся на

$$80+90-150-60=-40$$

долларов.

Склады	Скупщики				Емкости складов
	1	2	3	4	
1			35	40	75 35
2	60	10	5		75 15 5
3		50			50
Потребности скупщиков	60	60 10	40	40	

Табл. 4.

— Здорово! 40 долларов можно сберечь! — восхитился Джо. Но это мы поставили на маршрут (1, 4) только тонну. Давай поставим 100 тонн и сбережем 4000, или нет, поставим 400 тонн и тогда еще нам будут доплачивать!

В глазах Джо загорелся огонек алчности, но тут же потух:

— Нет, здесь что-то не так.

— Ясное дело, не так, — согласился Бэйт. — Ведь сколько мы добавим на маршрут (1, 1), столько же придется снять с (1, 3) и (2, 1). А оттуда самое большее можно снять 35 тонн. Ведь не хочешь же ты везти мануфактуру обратно на склад!

— Еще бы!

— Значит, самое большее удастся провезти по маршруту (1,1) 35 тонн; это позволит сэкономить 40×35 = =1400 долларов, и новый план перевозок будет таким, как в таблице 6.

Склады	Скупщики			
	1	2	3	4
1	⊕		⊖ 35	40
2	⊖ 60	10	⊕ 5	
3		50		

Табл. 5.

---

*) *Циклом* называется последовательность клеток, в которых поворачивает «ладья» (она может двигаться лишь по строкам или столбцам таблицы), возвращающаяся в ту же клетку, из которой она вышла.

При этом в каждой строке и в каждом столбце таблицы в цикл входят или две клетки, или ни одной, и, помимо исходной, в цикл включаются лишь заполненные клетки.

[illegible]	Скупщики			
	1	2	3	4
1	35			40
2	25	10	40	
3		50		

Табл. 6.

В клетках, которые не вошли в цикл, все осталось по-старому.

— 1400 долларов — кругленькая сумма! Давай проверять другие пустые клетки. Может набредем на маршрут, который тоже стоит использовать. Вот, например, начнем с клетки (1, 2). Для нее расходы изменятся на

$$120 + 60 - 70 - 80 = 30 > 0.$$

Тысяча чертей! Маршрут (1, 2) использовать не стоит. А, может быть, воспользоваться...

— Не трудись, Джо. Я уже проверял: больше из этого плана не выжмет ни доллара сам Данциг.

— Данциг, Данциг... это не тот ли, который обчистил «Бэнк оф...»?

— *Нет, Джо, он не из наших.* Это тот малый, который придумал этот метод. Правда, еще до него какие-то красные...

... Инспектор Клифф сидел у себя в кабинете на Авеню-стрит, снова и снова всматриваясь в вещественные улики: три мастерски взломанных замка и пепел от тщательно сожженного календаря в гостинице, где совещались грабители. И больше ничего. И все-таки... это напоминает почерк Бэйта, за которым он, Клифф, охотится уже столько лет! К примеру календарь. Зачем он? Может, на нем делались выкладки? Возможно. Но где же искать Бэйта?

— Сержант! Усиленные наряды во все бары города! — крикнул он, осознавая в то же время полную безнадежность своего приказа: в барах Бэйта не будет. На столе инспектора зазвонил телефон. Клифф снял трубку, послушал и закричал:

— Сержант, отставить! Оцепить научную библиотеку штата! Мне — машину и набор наручников!

Немного теории

Что же позволило сэкономить на транспортных расходах 1400 долларов? Проследим за действиями ловких гангстеров. Сначала Бэйт нашел допустимый план перевозок. Метод, которым он при этом воспользовался называется *методом минимального элемента* и понятно почему: в нем перевозки все время ставятся на маршруты с минимальными тарифами, а если будут два маршрута с одинаковым тарифом, то предпочтение, естественно, нужно отдать тому из них, для которого возможная перевозка больше.

Получив допустимый план, Бэйт и Джо стали пытаться улучшить его *распределительным методом*. Это, пожалуй, самый простой, хотя и не самый быстрый способ улучшения плана перевозок. Но прежде чем излагать этот метод в общем виде, сформулируем строго транспортную *задачу линейного программирования*.

Пусть имеется m поставщиков (складов) и n потребителей, a_i — емкость i-го склада, а b_j — потребность j-го потребителя. Пусть x_{ij} — перевозка от i-го поставщика к j-му потребителю. Допустимы только такие планы перевозок, для которых *)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

то есть из каждого склада вывозится все, что там есть, и каждому потребителю привозится все, что ему требуется. Кроме того, заданы тарифы c_{ij}, то есть стоимости перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. В задаче требуется отыскать такой допустимый план перевозок, для которого сумма стоимостей перевозок

---

*) Мы рассматриваем так называемую «закрытую» модель транспортной задачи, для которой $\Sigma a_i = \Sigma b_j$, то есть сумма емкостей (складов) равна сумме потребностей.

$$z = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij} \qquad (2)$$

минимальна.

Сформулированная задача — это *частный случай задачи линейного программирования*, так как «целевая функция» (2), выражающая транспортные расходы, и ограничения (1) линейны.

Сущность распределительного метода состоит в том, что для каждой свободной клетки находится *цикл*, в который входят, кроме нее, только заполненные клетки. С помощью этого цикла определяют, на сколько изменятся транспортные расходы, если ввести в свободную клетку единицу груза. Эта величина k_{ij} называется *индексом свободной клетки* (i, j). Если $k_{ij} < 0$, то в клетку вносится максимально *возможная перевозка* (она равна минимальной перевозке в «отрицательных» клетках цикла), а если $k_{ij} \geqslant 0$, то маршрут (i, j) использовать не стоит и проверяется следующая клетка. Процесс заканчивается, когда выясняется, что для всех свободных клеток $k_{ij} \geqslant 0$.

Оптимальный план следует искать среди планов, в которых заполненные клетки не образуют циклов (см. задачу № 7). Обычно в транспортной задаче число заполненных клеток в точности равно $m + n - 1$, и цикл можно построить единственным образом (например, в рассмотренной задаче число заполненных клеток равно $3 + 4 - 1 = 6$). Если включить в цикл свободные клетки со знаком «+», то после изменения плана в нем может оказаться больше $m + n - 1$ *заполненных клеток* и план будет содержать циклы. Убедиться в этом можно, попытавшись в таблице 5 построить цикл $(1, 1) \to (1, 4) \to (2, 4) \to (2, 1)$.

Поставщики	Потребители		
	1	2	3
1	3 25	2 30	3
2	3	3 0	4 40
3	6	6 50	[illegible]

Табл. 7.

Если число заполненных клеток меньше $m + n - 1$ (такая задача называется вырожденной), то для того, чтобы построить цикл, к заполненным клеткам нужно добавить пустые так, чтобы они с уже заполненными не образовывали *циклов*. *Например*, пусть таблицей 7 задан вырожденный план перевозок (в нем не хватает 1 заполненной клетки).

Здесь можно включить в число заполненных клетку (1, 3) или (2, 1), или (2, 2), или (3, 3). После этого удастся построить цикл для любой свободной клетки. А если включить клетку (3, 1), образующую цикл с клетками (1, 1), (1, 2), (3, 2), то построить цикл с заполненными клетками все равно не удастся. Посмотрим, что дала нам клетка с нулем.

Расходы по первому плану перевозок составят

$$z_1 = 25 \times 3 + 30 \times 2 + 40 \times 4 + 50 \times \times 6 = 595.$$

Найдем индексы свободных клеток:

$$k_{13} = 3 + 3 - 2 - 4 = 0,$$
$$k_{21} = 3 + 2 - 3 - 3 = -1.$$

По маршруту (2, 1) возить выгодно, но сколько можно по нему провезти? min (25,0) = 0. Стало быть, на маршрут (2, 1) можно поставить лишь перевозку 0, получится таблица 8. Расходы по этому новому плану останутся прежними: $z_2 = 595$. Но, тем не менее, операция *перенесения нуля не бессмысленна*: теперь изменятся индексы. Действительно, теперь $k_{13} = 3 + 3 - 3 - 4 = -1 < 0$. То

Поставщики	Потребители		
	1	2	3
1	[illegible] 25	[illegible] 30	3
2	3 0	3	4 40
3	[illegible]	[illegible] 50	[illegible]

Табл. 8.

Парни	Входы			
	1	2	3	4
1. Билл	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] *
2. Джек	[illegible] *	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3. Джим	[illegible]	[illegible] *	[illegible]	[illegible]
4. Боб	[illegible]	[illegible]	[illegible] *	[illegible]

Табл. 9.

есть теперь оказывается выгодным маршрут (1, 3). Его использование с перевозкой 25 тонн приведет к транспортным расходам в сумме $z_3 = 595 - 25 = 570$.

Математическая модель, которую применил Бэйт, — модель транспортной задачи *линейного программирования*, — сейчас очень широко применяется в экономике и управлении производством. Именно с помощью подобных моделей во многих местах управляют перевозкой продуктов в магазины и кирпича на стройки, добиваясь большого сокращения транспортных расходов.

Недостатком описанного метода решения транспортной задачи является необходимость строить циклы, при счете на машине на это уходит основная часть времени, требующегося для решения задачи. Поэтому получили распространение другие методы решения транспортной задачи, которые позволяют сократить число рассматриваемых циклов (метод потенциалов, предложенный впервые советскими учеными), или вообще не требуют построения циклов. Если число складов или число потребителей не слишком велико (до 3—4), то применимо динамическое программирование.

Парни	Входы			
	1	2	3	4
1. Билл	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2. Джек	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3. Джим	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4. Боб	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Табл. 10.

Поставщики	Потребители				Емкости
	1	2	3	4	
1. Билл	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
2. Джек	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
3. Джим	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
4. Боб	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
Потребности	1	1	1	1	

Табл. 11.

Транспортная задача имеет ряд разновидностей и самые неожиданные приложения. Одно из таких приложений мы сейчас рассмотрим.

Задача о назначениях

Два немолодых джентльмена чинно сидели в научной библиотеке штата.

— . . . Уверен, ищейки сюда не сунутся. Итак, в банке 4 входа. Каждый из парней согласен занять любой, но они им кажутся по-разному опасными: у одного входа дежурит полицейская машина, другой выходит на людную улицу, в третьем слишком узкая дверь. Их требования в долларах сведены в таблицу 9.

— Да, аппетиты у парней — дай бог! Но, знаешь, Бэйт, все просто. Ставим Билла на вход № 4, Джека — на № 1, Джима — на № 2, Боба — на № 3, как я пометил крестиками. Кажется лучше не придумаешь.

— Да, здесь-то все ясно. На каждый вход ставим парня, который за него меньше всего требует. Но, Джо, когда ребята узнали, что нами интересуется инспектор Клифф, они запросили больше! Вот в таблице 10 их новые требования.

— Это не честные гангстеры, а вымогатели! — взмолился Джо. — Я уже разорен. И главное, как их теперь распределить? Ну, Боба — на вход № 4, а как остальных?

— Давай применим научный метод, — предложил Бэйт. — Поскольку каждый вход и каждый парень в одном экземпляре, то назначить их — это то же самое, что решить транспортную задачу с исходными данными, как в таблице 11. Здесь парни — это поставщики, а входы — потребители. Давай теперь ее решать, как обычную транспортную задачу, то есть сначала найдем допустимый план перевозок и добавим три нуля, чтобы ликвидировать вырожденность (см. табл. 12).

— А не придется ли нам дробить парней? Уж лучше предоставить это полицейским пулям.

— Нет, результаты всегда будут целыми. Теперь давай подсчитаем индексы:

$k_{12} = 280 + 430 - 420 - 250 = 40 > 0;$
$k_{13} = 290 + 430 - 250 - 420 = 50 > 0;$
$k_{14} = 320 + 430 - 250 - 400 = 100 > 0;$
$k_{31} = 370 + 420 - 420 - 320 = 40 > 0;$
$k_{32} = 370 + 420 - 420 - 320 = 50 > 0;$
$k_{34} = 330 + 420 - 320 - 400 = 30 > 0;$
$k_{41} = 280 + 400 - 430 - 200 = 50 > 0;$
$k_{42} = 350 + 400 - 420 - 200 = 130 > 0;$
$k_{43} = 340 + 400 - 420 - 200 = 120 > 0.$

— Нам повезло, Джо, план оптимален! Ты видишь, все индексы больше нуля, улучшить план невозможно. Кажется, мы предусмотрели все.

— Нет, не все, — раздался негромкий голос.

Рядом стояли инспектор Клифф и трое полицейских, из-за их спин выглядывал Скряга Том.

Парни	Входы			
	1	2	3	4
1. Билл	1 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2. Джек	0 [illegible]	1 [illegible]	0 [illegible]	0 [illegible]
3. Джим	[illegible]	[illegible]	1 [illegible]	[illegible]
4. Боб	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1 [illegible]

Табл. 12.

Заводы	Объекты				Мощности
	1	2	3	4	
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	100
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	50
Потребности	50	70	40	40	

Табл. 13.

Хранилища	Магазины			Емкости
	1	2	3	
1	[illegible]	7	[illegible]	20
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	20
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	15
4	[illegible]	4	[illegible]	25
Потребности	17	12	32	61 / 80

Табл. 14.

Станки	Работы			
	1	2	3	4
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Табл. 15.

Упражнения

1. На строительство 4 объектов кирпич поступает с 3 заводов. Требуемые количества в тыс. штук и тарифы в руб/тыс. шт. представлены в таблице 13. Требуется найти оптимальный план перевозок.

2. *Четыре овощехранилища каждый день* могут обеспечивать картофелем три магазина в соответствии с таблицей 14.

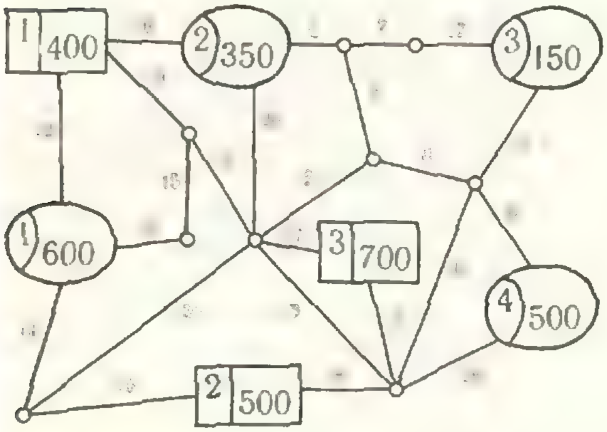
Здесь мощности превышают потребности, это — открытая транспортная задача. Чтобы свести ее к закрытой, нужно ввести еще одного потребителя, для которого тариф равен нулю (ведь на самом деле к нему ничего не везут!), а потребность равна 80 — 61 = 19. Найдите оптимальный план перевозок.

Предметы	Ребята				
	Витя	Боря	Саша	Юра	Коля
Геометрия	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Алгебра	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
История	[illegible]	[illegible]	4	[illegible]	[illegible]
Физика	[illegible]	2	3	[illegible]	[illegible]
Химия	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Табл. 16.

Колодцы	Участки			Возможности
	Сливы	Яблони	Груши	
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	80
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	30
3	[illegible]	40	[illegible]	50
Потребности	100	120	90	

Табл. 17.



3. Найти оптимальный по числу тонно-километров план перевозки угля от шахт (на рисунке они обозначены квадратиками, в которых стоит дневная производительность) к электростанциям (они обозначены кружками, в которых стоит дневная потребность). Малые кружки обозначают дополнительные промежуточные пункты, все расстояния в километрах.

4. Назначить пять станков на выполнение 4 видов работ (один станок останется свободным), если стоимость работы каждого станка дается таблицей 15, а производительности одинаковы.

5.— Все! С завтрашнего дня начинаем новую жизнь,— обратился Витя к Боре, Саше, Юре и Коле, которые уныло рассматривали свои четвертные табели.— Нужно подтянуться. Каждый из нас будет проверять других по одному предмету.

— А кто по какому?

— Это мы решим, сравнив оценки. Вот я их выписал (см. табл. 16).

Долго спорили друзья, глядя на таблицу. А как в действительности им лучше всего распределить обязанности?

6. Для поливки разных участков сада, на которых растут сливы, яблони и груши, служат три колодца, но они могут дать ограниченное количество воды. Потребность в воде разных участков сада, возможности колодцев (в ведрах) и среднее расстояние от каждого из них до соответствующего участка сада (в метрах) указаны в таблице 17.

Очевидно, в колодцах воды не хватит $(80 + 30 + 50 < 100 + 120 + 90)$, но сад тянется вдоль реки, до которой 120 *м*. Как лучше организовать полив?

7. Показать, что в оптимальном плане перевозок заполненные клетки не должны содержать циклов.

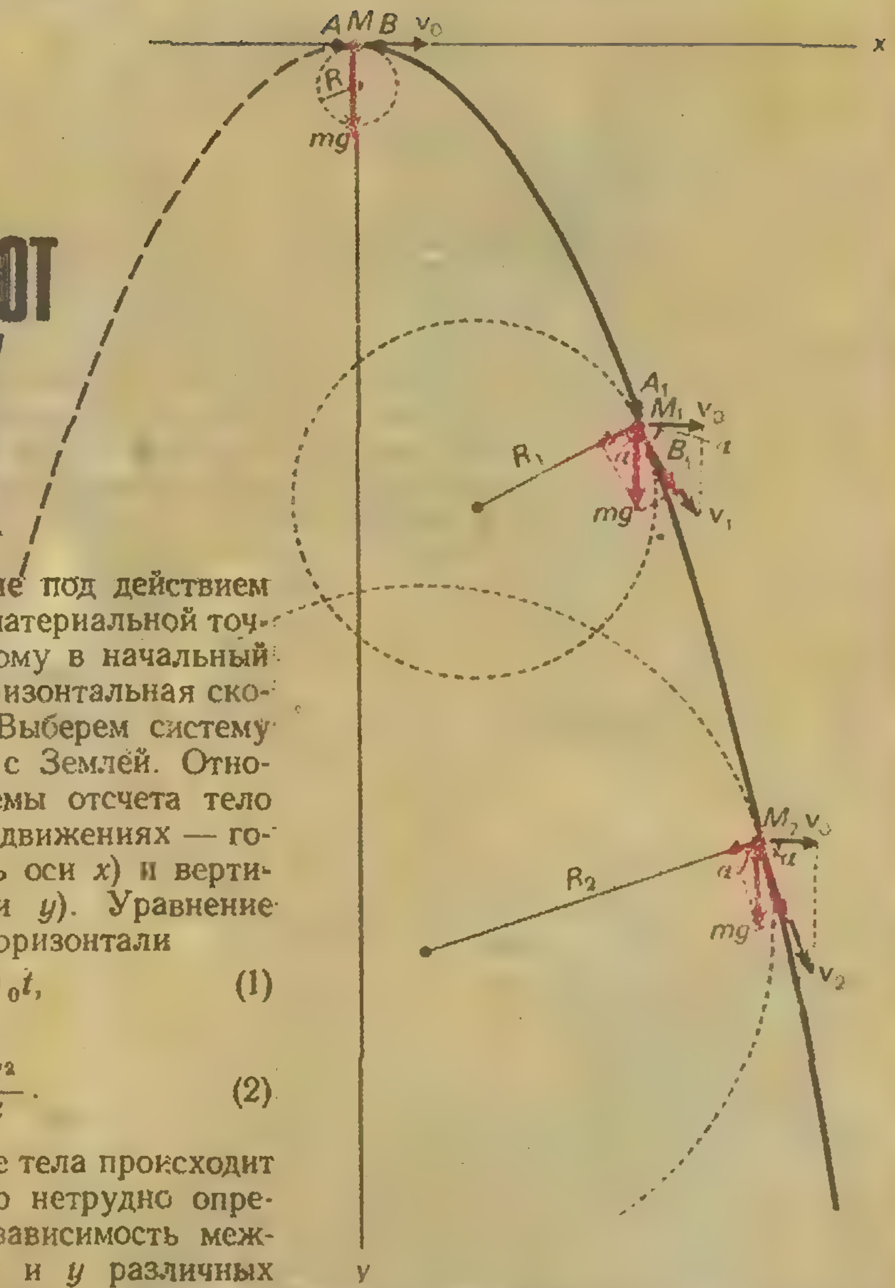
Читатели о пространственном лабиринте

В «Кванте» № 3 за этот год на 4-й с. обложки была напечатана заметка «Пространственный лабиринт». Многие читатели заметили, что пройти по этому лабиринту невозможно, тем самым есть возможность занять своих друзей на целый вечер. Однако наш читатель О. М. Костенок из Москвы предлагает решить другую задачу: как проделать еще одно отверстие, чтобы по лабиринту можно было пройти? О. М. Костенок предлагает сделать отверстие в полу второго этажа (на клетке d4 по шахматной терминологии).

Наверняка есть и другие варианты размещения еще одного отверстия, после чего по лабиринту можно будет пройти. Вопрос лишь один: где сделать это отверстие, чтобы лабиринт был возможно более запутанным?

М.А.ГРАБОВСКИЙ

КАК ФИЗИКИ ОПРЕДЕЛЯЮТ КРИВИЗНУ ПАРАБОЛЫ



Рассмотрим движение под действием силы тяжести тела (материальной точки массы m), которому в начальный момент сообщена горизонтальная скорость, равная v_0. Выберем систему отсчета, связанную с Землей. Относительно этой системы отсчета тело участвует в двух движениях — горизонтальном (вдоль оси x) и вертикальном (вдоль оси y). Уравнение движения тела по горизонтали

$$x = v_0 t, \qquad (1)$$

по вертикали —

$$y = \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Суммарное движение тела происходит по кривой, которую нетрудно определить, установив зависимость между координатами x и y различных точек траектории тела. Для этого из уравнений (1) и (2) выразим y через x. Получим

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{gx^2}{2v_0^2}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) выражает зависимость между координатами x и y всех точек криволинейной траектории, описанной брошенным телом.

Известно, что камень, брошенный горизонтально с крыши высокого здания или высокого обрыва, движется по кривой, которая называется параболой. Траектория камня во время полета искривляется, отклоняясь от прямолинейного горизонтального движения. Степень искривления может быть большей или меньшей в зависимости от начальной скорости. Можно ли как-нибудь оценить степень искривления траектории? Для этого пользуются понятием кривизны кривой.

Что такое кривизна плоской кривой линии?

Рассмотрим этот вопрос на примере параболы, описанной телом, брошенным горизонтально с некоторой высоты с начальной горизонтальной скоростью v_0 (см. схематический рисунок). «Достроим» левую часть параболы, которая могла бы быть описана телом, если бы ему сообщили начальную горизонтальную скорость в противоположном направлении ($-v_0$). Эта часть параболы на рисунке вычерчена пунктиром. Выделим у вершины параболы (точка M, координаты которой (0, 0)) небольшую дугу AMB такую, чтобы середина дуги совпадала с вершиной параболы. Теперь подберем окружность такого радиуса, чтобы она прошла через три точки дуги AMB, то есть через середину дуги и ее концы. Это можно сделать, так как известно, что через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность и притом только одну. Обратная величина радиуса полученной окружности $1/R$ определяет приближенное значение кривизны параболы в ее вершине. Это приближение будет тем точнее, чем меньше длина дуги AMB. Кривизна в точке и определяется величиной, обратной радиусу этой «предельной» окружности.

Теперь определим кривизну параболы в произвольной точке M_1. Для этого выделим небольшую дугу параболы $A_1M_1B_1$ такую, чтобы точка M_1 была серединой этой дуги. Вновь будем подбирать окружность такого радиуса, чтобы она прошла через точки A_1, M_1 и B_1. Эта окружность бóльшего радиуса, чем в первом случае ($R_1 > R$). Кривизна параболы в точке M_1 приближенно равна $1/R_1$. Таким же образом можно определить кривизну параболы в любой ее точке. Следовательно, параболу можно рассматривать как кривую линию, состоящую из бесконечно большого числа бесконечно малых дуг убывающей кривизны, по которым движется тело.

Радиус кривизны любой плоской кривой находят с помощью дифференциального исчисления. Что же касается кривизны параболы — траектории движения тела, точнее, его центра тяжести под влиянием притяжения к земле, то ее можно определить, пользуясь сведениями из механики.

Итак, в какой-то момент времени t тело находится в точке M_1 параболы (см. рис.). На тело во время его движения действует только сила тяжести *). Сила тяжести сообщает всем телам одинаковое ускорение, направленное по вертикали вниз и равное g. Ускорение силы тяжести g можно разложить на две составляющие: $g \sin\alpha$ — направленная по касательной, то есть по направлению суммарной скорости тела v в данный момент времени t (тангенциальная) составляющая, и $g\cos\alpha$ — нормальная (центростремительная) составляющая, где α — угол, образованный начальной скоростью v_0 и касательной скоростью v_1 в точке M_1. По мере продвижения тела по параболе разложение постоянного ускорения g на составляющие будет происходить по-разному, так как угол α возрастает от нуля до $\pi/2$. Тангенциальная составляющая ускорения по мере продвижения тела по параболе будет увеличиваться а нормальная — уменьшаться.

Определим значение центростремительной составляющей ускорения тела в момент времени t при движении его по бесконечно малой дуге радиуса R_1:

$$a_{\text{цс}} = \frac{v_1^2}{R_1}, \text{или } g\cos\alpha = \frac{v_1^2}{R_1},$$

но так как $v_1 = \frac{v_0}{\cos\alpha}$, то

$$g\cos\alpha = \frac{v_0^2}{R_1\cos^2\alpha}.$$

---

*) Предполагается, что высота, с которой брошено тело, не очень велика, так что не следует учитывать изменение g.

Отсюда радиус кривизны параболы в точке M_1

$$R_1=\frac{v_0^2}{g\cos^3\alpha}. \qquad (4)$$

Итак, радиус кривизны в любой точке параболы определяется величиной квадрата скорости v_0 и величиной куба косинуса угла α, образованного векторами начальной скорости v_0 и полной скорости v. Радиус кривизны параболы увеличивается (кривизна ее уменьшается) по мере продвижения по ней летящего тела.

Теперь, пользуясь формулой (4), определим радиус кривизны в вершине параболы. В этом случае угол α равен нулю, так как v_0 совпадает с v. Значит, $R=\frac{v_0^2}{g}$.

Этот же результат можно было бы получить сразу. В начальный момент движения тело испытывает только центростремительное ускорение

$$g=\frac{v_0^2}{R}.\ \text{Отсюда}\ R=\frac{v_0^2}{g}.$$

Найдем радиус кривизны параболы вблизи точек падения тела, где скорость, касательная к траектории движения, направлена почти отвесно. В этом случае $R=\frac{v_0^2}{g\cos^3\alpha}\to\infty$, так как $\alpha\to\frac{\pi}{2}$, а $\cos\alpha\to0$. Отметим, что теперь ускорение силы тяжести направлено почти по касательной к траектории, а роль центростремительного ускорения свелась к нулю.

Найдем теперь радиус кривизны в такой точке M_2 параболы, где касательная скорость v_2 в два раза больше начальной скорости v_0:

$$R_2=\frac{v_0^2}{g\cos^3\alpha}=\frac{v_0^2}{g}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{8v_0^2}{g},$$

так как угол $\alpha=60°$.

Можно решать и задачи другого типа. Например, задав координаты точки, определить радиус кривизны параболы в этой точке.

Вращение, которого нет

(Окончание. Начало см. с. 12)

боскопических аппаратах. Если частота засвечивающих импульсов (при интервале между импульсами менее 0,1 *с*) в точности равна частоте исследуемого периодического процесса, то глаз исследователя видит одну «застывшую» стадию этого периодического процесса. Стало быть, зафиксировав в таком эксперименте неподвижную картинку, можно, зная частоту вспышек, установить частоту исследуемого процесса. Точность современных стробоскопов порядка 0,001%.

Вторая возможность, реализованная в нашем забавном примере, на самом деле имеет значительно более серьезные применения. На этом принципе работают современный кинематограф и телевидение.

Диск с прорезями (обтюратор) вращается перед объективом кинопроекционного аппарата. Затемнения на экране необходимы, чтобы скрыть продергивания кадров фильма. Обычно кадры сменяются 24 раза в секунду (обтюратор прерывает свет вдвое чаще), а угловые перемещения движущихся на экране тел не превышают 0,03 *рад/с* относительно зрителя. При этих условиях наблюдается знакомая всем картина непрерывного движения объектов на экране.

Электронный луч телевизионной трубки пробегает строка за строкой все поле экрана и возвращается в исходное положение за время, соизмеримое с так называемой критической частотой мелькания (50—60 *гц*), при которой глаз в силу инерции зрения не отличает прерывистого изменения яркости от непрерывного.

Л. Верес

Н. С. РУБИНА

О ЯЗЫКАХ ИНОСТРАННЫХ

> *...Всякое изучение иностранных языков развивает ум, сообщая ему гибкость и способность проникать в чужое мировоззрение*
>
> Д. И. Писарев

Знаете ли вы, сколько существует на свете языков? Ученые полагают, что около трех тысяч. Около трех тысяч «живых» языков и примерно столько же «мертвых»!

Язык является как наукой, так и средством общения. Как наукой языком интересуются в основном только языковеды. Но любой человек, независимо от его наклонностей, всегда интересуется языком как средством общения. И как средство общения язык, несомненно, доступен каждому независимо от его способностей.

Ах, с каким бы удовольствием я себя выпорол!

«Не знаю языков. Ах, с каким бы удовольствием я себя выпорол! Без знания языков чувствуешь себя, как без паспорта». Вот как горько сожалеет великий мастер русского слова Антон Павлович Чехов о незнании иностранных языков. «Зачем я не знаю языков? Мне кажется, беллетристику я переводил бы великолепно. Когда я читаю чужие переводы, то произвожу в своем мозгу перемены слов и перестановки, и получается у меня нечто легкое, эфирное, подобное кружевам».

Зависть белая! Она ведь не порок. Наоборот, один из сильнейших стимулов в любом творчестве. Приди она к писателю раньше, заставь его изучать языки, и мы читали бы теперь произведения многих зарубежных авторов в переводе Чехова. Но этого не произошло. Правда, не ясно, нужно ли нам сожалеть об этом.

Я был там словно глухонемой

> *...Успех всякой умственной деятельности зависит главным образом от того, насколько такая деятельность сочетается с желанием овладеть предметом*
>
> П. Хэгболдт

Мнение, что всякий образованный человек обязательно должен в той или иной степени владеть иностранным языком, прочно вошло в нашу жизнь. И мнение это никто не пытается опровергнуть, дабы не быть скомпрометированным и не прослыть невеждой. Более того, если раньше школьник слышал о пользе иностранного языка (а заодно и учил его) с пятого класса, то теперь все это зачастую начинается уже в детском саду и нередко не кончается даже с завершением образования. Таким образом, число лет, отведенных на изучение одного иностранного языка, получается двузначным. Но факт этот, несомненно положительный, не в полной мере соответствует закону о переходе количества в качество. Речь идет о многократно наблюдаемом явлении: те, кто по многу лет изучают иностранный язык, в конечном итоге либо не владеют им совсем, либо почти не владеют.

Недавно из поездки в Лондон вернулся один мой знакомый. Талантливый математик, он блестяще защитил докторскую диссертацию, когда ему не было еще тридцати лет. Несмотря на свою молодость, он завоевал авторитет в науке, работы его были переведены на многие языки, и вот ему предложили поехать в Англию для встречи и обмена опытом с зарубежными коллегами. В этой поездке советскую делегацию сопровождал переводчик, и молодой ученый, хотя он и не говорил на английском языке, чувствовал себя уверенно, даже не подозревая о трудностях, с которыми предстояло ему столкнуться.

«Я был там словно глухонемой, — жаловался он по приезде, — никакого контакта с зарубежными математиками не получилось. Доклад свой я с помощью переводчика сделал, на этом все и кончилось. Русский язык там почти никто не знает, а я не владею английским. Литературу по своей специальности читаю на трех европейских языках, но говорить не могу ни на одном из них. Переводчик? Переводчик хорошо знает язык, но не математику. Я пытался вести научную беседу через переводчика, но получалось очень длинно и как-то беспомощно, так как он обычно не мог уяснить себе даже суть проблемы. Да разве можно требовать от переводчика знания математики, физики и других наук? А вот мне бы не мешало овладеть навыками английской речи в школе, институте и аспирантуре, где я этот язык изучал. Тогда я не придавал ему никакого значения и, «проходя» его тринадцать лет, фактически проходил мимо него. Вот я и наказан. Поездка, от которой я так много ждал и которая могла бы принести мне столько пользы, оказалась пустой...».

Итак, еще один человек, который бы с удовольствием себя выпорол за то, что сам себя ограбил.

Самоограбление, кстати, будучи явлением, в сущности, редким, при изучении иностранных языков стало почти закономерностью. А о причине этой закономерности несложно догадаться, прочитав высказывание Питера Хэгболдта.

В известном сборнике «Физики продолжают шутить» (М., «Мир», 1968) напечатана новелла о том, что думают о целесообразности изучения иностранных языков представители типично «не языковых» профессий.

Говорят, что великий физик Гиббс был очень замкнутым человеком и обычно молчал на заседаниях ученого совета университета, в котором он преподавал. Но на одном из заседаний, когда решался вопрос о том, чему уделять в новых учебных программах больше места — математике или иностранным языкам, он не выдержал и произнес речь. «Математика — это язык!» — сказал он.

Что ж, речь Гиббса никак не назовешь бессодержательной, хотя она и отнюдь не в пользу иностранных языков. Математика, по его мнению,— это язык, на котором могут изъясняться и понимать друг друга все ученые мира без помощи слов.

Этого же мнения придерживался и мой знакомый. До некоторых пор.

На каком, собственно, языке вы делали доклад?

Кто возьмет на себя смелость утверждать, что овладеть иностранным языком — дело не хитрое? Разве что тот, кто никогда этим не занимался. А вот пытался ли кто-нибудь установить, насколько хорошо надо владеть иностранным языком, чтобы использовать его в своей работе, не попадая при этом в курьезную ситуацию? Этого, по-видимому, не пытался сделать никто. А практика между тем показывает, что разница между незнанием языка и знанием его «постольку-поскольку» порой весьма незначительна! В уже упоминавшемся сборнике есть прекрасный пример такого «знания».

Известный венгерский физик Лео Сциллард читал свой первый доклад на английском языке. После доклада к нему подошел физик Джексон и спросил: «Послушайте, Сциллард, на каком, собственно, языке Вы делали доклад?». Сциллард смутился, но тут же нашелся и ответил: «Разумеется, на венгерском, разве Вы этого не поняли?». «Конечно, понял. Но зачем же Вы натолкали в него столько английских слов?» — отпарировал Джексон.

Пример этот не только весьма поучителен, но и полезен: он помогает определить минимальный уровень владения языком.

Определение это можно сформулировать так: *уровень владения иностранным языком не должен быть ниже того, при котором иностранец безошибочно узнает в нем свой родной язык.*

А что, если знать все слова?

Вилка 1. *Предмет из столового прибора в виде ручки с двумя, тремя или четырьмя зубьями, которым берут и кладут в рот куски пищи.* 2. *В различных областях техники — орудие, приспособление или какое-нибудь устройство в виде вил, с раздвоенным концом.* 3. *В шахматной игре — положение, при котором пешка угрожает сразу двум фигурам.*

Толковый словарь русского языка

15 сентября. Вчера поспорил с Сергеем, что к концу года выучу все английские слова. Вот удивится Анна Ивановна! Анна Ивановна — самая лучшая наша учительница. Ничего ей пока говорить не буду . . .

25 октября. Большой словарь открыл и закрыл. Его наверняка бы никто никогда не осилил. Я взял пока маленький, на 10 000 слов. Учу слова на «А». Серега смеется, говорит, чем словарь зубрить, лучше рыбок разводить . . .

12 ноября. Сегодня на уроке Анна Ивановна сказала, что для того, чтобы научиться говорить по-английски, надо больше читать. А я вот так, например, думаю. чего ж читать, когда слова еще не все знаю? Сначала все слова надо выучить, а потом уже браться за чтение. Начал учить слова на «В» . . .

28 декабря. Странно как-то получается. Слово знаю, а в тексте его не узнаю. В четверти по английскому тройка вышла. Столько слов знаю, а говорить пока совсем не могу. Ничего, вот когда все слова выучу, тогда наверняка заговорю. Еще две четверти впереди . . .

23 января. Сегодня не выдержал и все рассказал Анне Ивановне. Не могу больше слова учить. Пока на «В» учил, на «А» все забылись. Столько вызубрил слов и все без толку: ни говорить, ни читать, ни переводить лучше не стал. Только время зря потратил. Прав был Серега, чем словарь зубрить . . .

Из дневника Вити Л., ученика 7-го класса

Успех всякой деятельности, несомненно, во многом зависит от того, какие методы используются для его достижения. Это в полной мере относится и к изучению иностранных языков. По количеству методов, используемых для их изучения, иностранные языки занимают, пожалуй, одно из первых мест. Правда, по качеству эти методы далеко не равноценны, но каждый из них непременно находит себе поклонников.

Так, известный французский методист Гуэн, обладая феноменальной памятью, взял толстый немецкий словарь и, вопреки голословным утверждениям Вити Л., что это, дескать, невозможно, выучил из него наизусть все слова. Кроме того, он основательно освоил немецкую грамматику. Полагая, что всесторонне овладел языком, Гуэн поехал в Германию слушать лекции в университете.

Велико, однако, было его разочарование, когда он обнаружил, что, несмотря на приобретенный им «багаж», он не только не понимает немецкой речи, но и сам ничего не может сказать. Говорить и понимать — вот чему, оказалось, он не научился.

Но в чем же дело? Почему, несмотря на вложенный труд, «словозубрежный» метод не принес успеха?

Прежде всего, видимо, потому, что любое слово живет полной жизнью только во фразе. Взятое отдельно, оно мертво. Мертвым оказался и весь «словарный запас» Гуэна.

К тому же в разных предложениях одно и то же слово может иметь не только разное, но даже противоположное значение. Так например, английское слово *odds* переводится как *первенство*, *разногласие*, *преимущество*, *шансы*.

Совершенно очевидно, что знание одного из значений этого слова не дает возможности даже угадать другие его значения.

Слово odds — не исключение. Большинство слов в языке имеют не одно, а множество значений, которые познаются из множества фраз путем языкового опыта. Из одного предложения можно узнать только одно значение слова.

Таким образом, учит нас языковый опыт, а не словарь. Словарь — лишь посредник при первом знакомстве, и злоупотреблять им не следует.

Залог успеха

> *Со знанием должно быть обязательно связано умение...*
> *Печальное явление, когда голова ученика наполнена бо́льшим или ме́ньшим количеством знаний, но он не научился их применять, так что о нем приходится сказать, что хотя он кое-что знает, но ничего не умеет.*
> А. Дистерверг

Из чего же складывается языковый опыт и как его приобрести?

Если мы обратимся к толковому словарю за значением слова «опыт», то получим определение, которое, несомненно, поможет нам ответить на поставленный вопрос. Согласно толковому словарю опыт — это совокупность практически усвоенных знаний, умений, навыков.

Значит, для накопления языкового опыта необходимо, прежде всего, практическое применение полученных знаний. Иными словами, для того, чтобы научиться говорить и понимать, писать и читать на иностранном языке, следует как можно чаще это делать, используя для этого всякую возможность.

Речь наша состоит из единиц, которые сохранились в памяти потому, что мы часто слышали или встречали их при чтении. Чтение, таким образом, является не только одной из основных целей, но и важнейшим средством изучения иностранного языка. Обогащая наш словарный запас, оно способствует углублению уже накопленных знаний. Читая, мы не только знакомимся с новыми словами, но и узнаем, в зависимости от контекста, другие значения известных нам слов. Кроме того, как пример правильного использования изучаемого лексического материала, чтение представляет собой для нас важнейшую форму практики.

Но для того, чтобы чтение на иностранном языке приносило пользу и удовлетворение, необходимо соблюдать следующие условия.

Материалы для чтения должны соответствовать уровню владения языком на данном этапе, и подбирать их следует, руководствуясь принципом «от простого к сложному». Начинать лучше всего с адаптированной литературы, постепенно переходя к чтению оригинальной.

Чтение — это прежде всего источник получения информации, поэтому при выборе книг на иностранном языке желательно сочетать приятное с полезным и читать то, что вас особенно интересует, — будь то классика, приключенческая литература или детективы. Кроме того, старшеклассникам рекомендуется читать интересующие их статьи из иностранных научно-популярных журналов, так как это подготавливает их к чтению зарубежной литературы по выбранной специальности.

Важно также соблюдать следующее правило: читать систематически, прочитывать ежедневно хотя бы одну страницу иностранного текста.

Далее, при чтении на иностранном языке по возможности следует избегать перевода. Перевод зачастую сравнивают с костылем, который нам не нужен, когда мы можем ходить без него. «Ходить» в данном случае означает читать так, чтобы улавливать содержание, не останавливаясь на форме. Полное понимание при чтении приходит только с практикой.

Это же относится и к пониманию «на слух». «Научить» свое ухо воспринимать иностранную речь не менее важно, чем научиться говорить, писать и читать на этом языке. Нередко даже хорошо владеющие языком люди, впервые оказавшись за границей, чувствуют себя поначалу растерянными, ничего не понимая из того, что говорят вокруг. У иных даже создается впечатление, будто они слышат магнитофонную запись, воспроизводимую на повышенной скорости. Однако через некоторое время ощущение беспомощности проходит, так как ухо постепенно адаптируется к непривычному темпу речи.

Научиться понимать «на слух» — одна из основных задач при изучении иностранного языка. Для этого необходима постоянная практика. Иначе говоря, чтобы научиться слышать, надо как можно больше слушать.

Начинать лучше всего с пластинок, прослушивая один и тот же текст до тех пор, пока не будет достигнуто полное его понимание. При выборе пластинок на иностранном языке следует придерживаться того же принципа, что и при выборе материалов для чтения: «от простого к сложному».

Когда понимание пластинок не будет вызывать трудностей, можно начать прослушивание радиопередач на иностранном языке. Воспринимать естественную речь, конечно, намного сложнее, чем работать с пластинкой или магнитофонной лентой. Но отчаиваться, столкнувшись с трудностями, не следует: понимание радиопередач на иностранном языке приходит постепенно. Поэтому так же, как и читать, слушать речь на иностранном языке желательно ежедневно, уделяя этому хотя бы минут пятнадцать.

Не правда ли, трудно представить себе шофера, который безупречно знал бы правила уличного движения, все приемы вождения машины, знал бы, как машина устроена, но... не умел бы ее водить? Не менее трудно вообразить себе математика, знающего множество формул, но не умеющего ими пользоваться при решении простейших задач. Зато ни у кого почему-то не вызывает изумления тот факт, что, много лет изучая иностранный язык, основательно усвоив его грамматику и выучив к тому же массу слов, многие не могут заставить себя произнести на нем фразу. В чем же дело?

Учась выполнять математические операции, мы делаем ошибки и не стыдимся этого. Учась водить машину, шофер тоже неизбежно где-то ошибается, но продолжает свой путь. Но вот многие из тех, кто изучает иностранный язык, настолько страшатся (или стесняются) своих ошибок, что предпочитают «правильно» молчать. Результат говорит сам за себя: никому пока еще не доводилось научиться говорить, сохраняя при этом молчание.

Об этом же свидетельствует высказывание известного полиглота, члена Академии наук Эстонской ССР, профессора Пауля Ариетэ:

«... В языках я больше всего люблю и ценю возможность общения, живого разговора. Свои научные работы я пишу на 15 языках, а говорю на 20 языках. Эти «ножницы» объясняются тем, что новый язык я начинаю учить с разговорной части.

... Уже больше 30 лет преподаю я в Тартуском университете иностранные языки. Мой главный принцип — как можно скорее заставить студентов «заговорить»... Те, кто стесняются, боясь сделать ошибку в ударении, неправильно употребить тот или иной оборот, никогда не научатся свободно говорить. Смелость, так же как и в любом другом деле, — залог успеха при изучении языков».

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Вычисление многочленов — от Ньютона до наших дней

Э. Г. Белага

§ 1. Многочлены — инструмент вычислителя

> *Ну, начнем! Когда мы доберемся до конца этой истории, будем знать больше, чем теперь.*
>
> Г. Х. Андерсен

В необозримом царстве функций многочлены занимают, на первый взгляд, очень скромное место. Однако это первое впечатление обманчиво.

Многочлены, действительно, предельно просты: алгебраическая запись

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

является одновременно и формулой для вычисления значений многочлена*). Хотя выражения типа $\cos x$, $\sqrt[5]{x}$, 10^x или $\log_2 x$ намного лаконичнее, с вычислительной точки зрения они бессодержательны: для вычисления, скажем чисел $\cos 17^\circ$, $\sqrt[5]{2}$, $10^{0{,}13}$ или $\log_2 7$ нужны специальные приближенные формулы (или таблицы, составленные с помощью тех же формул). Как правило, в таких формулах появляются многочлены: например,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

(ошибка в интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ меньше одной десятимиллионной!).

А ведь тригонометрические, степенные и т. п. (*элементарные*) функции — это самые простые из функций анализа, изучаемых и используемых математиками, физиками, инженерами. Известный математик-вычислитель пишет в своей книге *): «Поскольку с многочленами легко обращаться, большая часть классического численного анализа основывается на приближении многочленами».

Так как вычислять многочлены приходится часто, то важно научиться делать это как можно проще. Мы расскажем об эволюции методов вычисления значений многочленов с момента зарождения (XVII век). Впрочем, слово «эволюция» здесь не вполне уместно: история этих методов — скорее очень длинный роман с интересной, но краткой завязкой, однообразным действием и неожиданной развязкой.

§ 2. Схема Горнера

> *По правде говоря, здесь возникает сомнение, или вернее вопрос, которого миновать нельзя, не поставив его и на него не ответив.*
>
> А. Данте. Пир (1303 г.)

Общепринятый сейчас способ вычисления многочленов восходит к Ньютону и называется схемой Горнера. Эта универсальная (то есть применимая к любому многочлену) схема предельно проста и изящна. Она получается из формулы (1) вынесением за скобки x всюду, где это возможно:

---

*) Чтобы упростить выкладки, мы ограничимся многочленами с единичным коэффициентом при старшем члене ($a_0 = 1$); там, где это будет необходимо, мы поясним, как поступать в общем случае ($a_0 \neq 1$).

*) Р. В. Хемминг. Численные методы. М., «Наука», 1972.

$$f(x) = (\ldots(((x + a_1)x + a_2)x + a_3)\ldots)x + a_n. \quad (2)$$

Порядок действий при вычислении $f(x)$ определяется скобками в (2): сначала сложение внутри самой внутренней пары скобок (его результат обозначим через p_1), затем умножение и сложение внутри следующей пары скобок (результат p_2) и т. д.:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 = x + a_1; \\ p_2 = p_1x + a_2; \\ p_3 = p_2x + a_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = p_{n-1}x + a_n, \quad f(x) = p_n; \end{array}\right. \quad (3)$$

всего $n - 1$ умножений и n сложений *).

Схема Горнера настолько совершенна, что вопрос о возможности ее улучшения не возникал два с половиной века и был задан «вслух» впервые лишь в 1954 году! Постановка этого вопроса (ответ на него предполагался отрицательным) имела важные и неожиданные последствия.

§ 3. Индивидуальные схемы

> *—Вы позволите мне записать эту романтическую историю, сэр? — спросил потрясенный мистер Снодграсс. —Сколько угодно, сэр, сколько угодно, еще пятьдесят таких, если они вам по вкусу.*
>
> Ч. Диккенс

Уже в курсе школьной алгебры мы встречаемся с примерами многочленов, для которых существуют необычайно экономные схемы; единственный их недостаток — *они не универсальны.*

Сравнивая разные схемы по числу операций, мы будем объединять операции сложения и вычитания в группу «($\pm$)-*операций*», а гораздо более трудоемкие операции умножения и деления — в группу «($\times$, :)-*операций*» **).

(а) Многочлен $f(x) = x^{2^k}$ можно вычислить за k умножений (а не за 2^k по Горнеру):

$$p_1 = x \cdot x = x^2,$$
$$p_2 = p_1 \cdot p_1 = x^4, \ldots,$$
$$p_k = p_{k-1} \cdot p_{k-1}; \quad f(x) = p_k.$$

(б) Многочлен $f(x) = x^{15}$ можно вычислить за пять ($\times$, :)-операций, так как $f(x) = x^{15} = x^{16} : x = x^{2^4} : x$.

(в) Многочлен $f(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ вычисляется по формуле геометрической прогрессии: $f(x) = (x^{n+1} - 1) : (x - 1)$.

(г) Многочлен $f(x) = x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1$ есть бином Ньютона: $f(x) = (x + 1)^n$.

Число примеров можно, конечно, увеличить.

Упражнения *)

1. Докажите, что многочлены (а) и (б) не могут быть вычислены быстрее.

2. В «Задачнике «Кванта» № 12 за 1973 год была помещена задача (М240): *доказать, что многочлен* $f(x) = x^n$ *может быть вычислен не более чем за* $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$ ($\times$, :) *операций* (n *— натуральное число*).

Пользуясь результатом этой задачи, оцените число операций для вычисления многочленов (в) и (г).

3. Постройте экономные схемы для многочленов:

(I) $f(x) = x^8 + x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 1;$

(II) $f(x) = x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + nx + n + 1;$

(III) $f(x) = x^{2n} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + C_{2n}^4 x^{2n-4} + \ldots + C_{2n}^{2n-2} x^2 + 1;$

(IV) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}.$

§ 4. Каждому многочлену — свою схему?

> *Тогда я решил тем же способом разделаться и с остальными медведями.*
>
> Э. Распэ. Мюнхаузен среди белых медведей.

А что если для каждого многочлена существует своя схема, гораздо более экономная, чем схема Горнера?

---

*) Если $a_0 \neq 1$, то мы положим $p_1 = a_0x + a_1$ (число умножений при этом возрастает на единицу).

**) Читается: «*плюс-минус*-операции», «*умножить-разделить*-операции».

*) Упражнения — это части нашего рассказа. Поэтому, если они не решаются, следует разбирать их решения, помещенные в конце номера (с. 72).

Такие схемы можно было бы искать либо исходя из особенностей отдельного многочлена (искусно комбинируя его коэффициенты), либо сконструировав универсальный метод построения схем, намного более экономных, чем схема Горнера, но, возможно, для некоторых многочленов не наилучших. Недостаток первого подхода в том, что для каждого многочлена придется придумывать свои приемы, и нет никакой гарантии, что нам это всегда удастся; позже (в § 10) мы увидим, что второй путь надежнее во всех отношениях.

Само собой разумеется, что оба эти метода уместны лишь в тех случаях, когда конкретный многочлен приходится вычислять так часто, что стоит потратить и время, и усилия, чтобы построить для него хорошую схему. Многочлены же «разового пользования» проще вычислять, скажем, по схеме Горнера.

Возможно, подобные рассуждения и привели в 1955 году к открытию универсальной схемы совершенно нового типа для многочлена шестой степени. Мы проиллюстрируем основную идею этой схемы на примере более простой схемы — для многочленов степени 4. Пусть

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d; \qquad (4)$$

положим

$$\begin{cases} p_1 = x \cdot (x + A); \\ p_2 = (p_1 + B)(p_1 + x + C) + D \\ f(x) = p_2 \end{cases} \qquad (5)$$

где A, B, C и D — параметры.

Пример. Многочлен $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 2$ можно вычислять по схеме: $p_1 = x(x + 1)$, $f(x) = (p_1 - 1)(p_1 + x + 5) + 7$, содержащей два (вместо трех по Горнеру) умножения и пять (вместо четырех) (±)-*операций*; здесь $A = 1$, $B = -1$, $C = 5$, $D = 7$.

Выпишем явное выражение для $p_2(x)$:

$$p_2(x) = x^4 + (2A + 1)x^3 + (A^2 + A + B + C)x^2 + (AB + B + AC)x + BC + D;$$

приравняв коэффициенты $f(x)$ и $p_2(x)$, выразим параметры, входящие в формулу (5), через коэффициенты (4):

$$\begin{aligned} A &= (a - 1)/2; \\ B &= c - b \cdot A + A^2(A + 1); \qquad (6) \\ C &= b - B - A(A + 1); \\ D &= d - BC. \end{aligned}$$

Из этих формул ясно, что схема (5) универсальна.

Операции (6) мы будем называть *предварительной обработкой коэффициентов* многочлена; разумеется, они не включаются в число операций схемы: ведь для каждого данного многочлена они выполняются лишь однажды, а наша задача — научиться быстро считать значения произвольного, но фиксированного многочлена при разных x.

§ 5. Универсальная схема степени n

> *— Я думаю, — сказал глубокомысленно Пятачок, — что если бы Иа встал под деревом, и Пух встал к нему на спину, и я встал на плечи Пуха...*
> *— И если бы спина Иа-Иа неожиданно треснула, то мы бы все здорово посмеялись, — сказал Иа.*
>
> А. А. Милн. Винни Пух

В 1958 году была найдена общая универсальная схема с предварительной обработкой коэффициентов. Структура этой схемы для многочлена четной степени ($n = 2k$) напоминает пирамиду — в основании лежит схема (5) (в ее «прочности» мы уже убедились), содержащаяся в схеме степени 6, которая содержится в схеме степени 8 и т. д.:

$$\begin{cases} p_1 = x(x + b_1), \\ p_2 = (p_1 + b_2)(p_1 + x + b_3) + b_4, \\ p_3 = p_2(p_1 + b_5) + b_6, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_k = p_{k-1}(p_1 + b_{2k-1}) + b_{2k}, \\ f(x) = p_k, \quad k \geqslant 2; \end{cases} \qquad (7.k)$$

схема (7.2) — это и есть схема (5). Результат схемы (7.k) — многочлен $p_k(x)$ степени $n = 2k$; многочлен же нечетной степени $n = 2k + 1$ можно представить в таком виде:

$$f(x) = x(x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{2k}) + a_{2k-1}; \qquad (8)$$

многочлен в круглых скобках вычисляется по схеме (7.k). В итоге схема содержит k умножений и $2k+1$ сложений для многочлена четной степени $n=2k$ и $k+1$ умножений и $2k+2$ сложений для многочлена нечетной степени $n=2k+1$ (с учетом (7.k) и (8)).

Упражнения

4. Найдите формулы предварительной обработки коэффициентов, аналогичные формулам (6), для схемы (7.3) вычисления многочленов шестой степени.

5. Докажите индукцией по $k \geqslant 2$ универсальность схемы (7.k).

Начиная с третьей строки, схема (7.k) очень напоминает схему Горнера (3); разница лишь в том, что теперь после каждого умножения степень увеличивается не на единицу, а на два.

Итак, нам удалось уменьшить число умножений по сравнению со схемой Горнера вдвое. Какой ценой? Из решения упражнения 5 видно, что процесс вычисления параметров $b_1, b_2, \ldots, b_{2k}$ по коэффициентам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ очень сложен, — он включает в себя решение серии уравнений с одним неизвестным степени $k-1$, $k-2$, ... Это означает, в частности, что при $k \geqslant 6$ ($n \geqslant 12$) *формул* вычисления параметров нет *), хотя, разумеется, их значения могут быть найдены приближенными методами с любой степенью точности.

Здесь возникает еще одно затруднение, оказавшееся, правда, преодолимым. До сих пор мы не уточняли, значения каких — действительных или комплексных — многочленов мы вычисляем. Схема Горнера применима и в том, и в другом случае, схема же (7.k) преимущественно «комплексная» — действительным коэффициентам могут соответствовать комплексные параметры. Появление комплексных чисел при вычислении действительных многочленов намного увеличивает число арифметических операций *). К счастью, в 1960 году схему (7.k) небольшим усложнением удалось превратить в действительную; однако полные доказательства в этом случае уже очень непросты.

§ 6. О схемах вообще...

> *—Минуточку, минуточку — раздались протестующие голоса. — Избегайте, пожалуйста, научных терминов, объясняйте популярно.*
> *—Верно! — подтвердили остальные.— Говорите понятнее... Что такое лес?*
> Я. Осенка. Загородная прогулка в 2050 году.

Пришло время спросить, нет ли схем, более экономных, чем схема (7.k)? Но тогда неизбежен и вопрос — что такое схема?

Определение. (I). *Схема с предварительной обработкой коэффициентов* — это последовательность арифметических операций, в которых участвуют переменная x, параметры $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и результаты предшествующих операций. Результат последней операции назовем *результатом схемы*. (II). Если при некотором наборе значений параметров $b_1, \ldots, b_m$ результат схемы есть данный многочлен степени n, то мы скажем, что схема *представляет* этот многочлен. (III). Если схема представляет многочлен, то процесс вычисления по его коэффициентам соответствующего набора значений параметров назовем *предварительной обработкой коэффициентов*. (IV). Схема называется *универсальной степени n*, если она представляет любой многочлен степени n вида (1).

---

*) Под формулой обычно понимают набор арифметических операций, корней, степеней. Вы, наверное, знаете, что Э. Галуа и Н. Абель, гениальные (и оба очень рано умершие) математики XIX века, доказали, что для нахождения корней многочленов пятой и более высоких степеней таких общих формул не существует (см. «Квант», 1973, № 10, с. 3—12).

*) Одно «комплексное» сложение — это два «действительных», одно «комплексное» умножение — четыре (!) умножения и два сложения.

Примеры. 1. Схема $(7.k)$ — универсальная (степени $n = 2k$); то же верно и для схемы Горнера (параметры — сами коэффициенты).

2. Схема $p(x) = (x^{n+1} - b_1) : (x - b_2)$ представляет многочлен (в) § 3 при $b_1 = b_2 = 1$.

Упражнение

6. Докажите, что общее число S_N схем (всех степеней), содержащих не более N операций, конечно и не превосходит числа*) $[(3N - 1)! : (2N - 1)!]^2$.

§ 7. ... И о наилучшей из них, в частности

Положение, в котором мы находимся, заставляет нас прибегать ко всестороннему изучению предмета.

Платон

Теперь наш вопрос о наилучших схемах степени n приобрел точный смысл, и можно дать на него точный ответ: *схема из § 5 почти наилучшая* — любая универсальная схема степени n содержит не менее $\frac{n-1}{2}$ $(\times, :)$-*операций* и не менее $n - 1$ $(\pm)$-*операций*.

Справедливость этого утверждения можно вывести из двух важных свойств схем:

1) число m параметров универсальной схемы степени n не меньше числа коэффициентов, то есть $m \geqslant n$;

2) в промежутке между двумя $(\times, :)$-*операциями* любой (не обязательно универсальной) схемы может появиться не более двух *по-настоящему новых* параметров (все остальные будут «лишними»), а между двумя $(\pm)$-*операциями* — не более одного.

Второе свойство стоит сформулировать более строго: если схема содержит r $(\times, :)$-*операций* (или s $(\pm)$-*операций*), то число m параметров либо сразу не больше $2r + 1$ (соответственно $s + 1$), либо без ущерба для свойств схемы может быть уменьшено до $2r + 1$ (соответственно, $s + 1$), то есть $m \leqslant 2r + 1$ и $m \leqslant s + 1$.

Итак, $n \leqslant m \leqslant 2r + 1$ и $n \leqslant m \leqslant s + 1$, отсюда $\frac{n-1}{2} \leqslant r$ и $n - 1 \leqslant s$.

— Но вы совсем забыли о схеме Горнера! — прервет нас читатель, которому больше по душе классическая ясность схем без предварительной возни с коэффициентами. — Ведь она не зря кажется предельно экономной!

— Схема Горнера действительно наилучшая среди схем, в которых параметрами являются сами коэффициенты. Недостаток места не позволяет нам изложить красивое, но не очень простое доказательство этого факта, найденное в 1960 году.

А теперь займемся двумя сформулированными выше свойствами схем, сначала вторым.

§ 8. Параметры в операциях

Дама сдавала в багаж
диван,
чемодан,
саквояж,
картину,
корзину,
картонку
и маленькую собачонку.

С. Я. Маршак

Наше определение схемы (с. 32) не накладывало никаких ограничений на форму ее записи. Мы назовем *элементарной* запись схемы типа «одна строка — одна операция», когда запоминается (и обозначается своим символом) результат каждой операции схемы; примеры: эпиграф (хотя это и не схема, а скорее багажная квитанция), схема для многочлена x^{2^k} (§ 3) — в ней каждый результат используется больше одного раза и потому нуждается в запоминании.

Не для всех схем элементарная форма записи является единственной: если результат какой-то операции используется лишь однажды, то эту операцию можно сразу включить в ту строку, в которой участвует ее результат. (Примеры: каждая

---

*) Чтобы иметь возможность сравнивать схемы, разумно для обозначения их параметров использовать буквы, например, из последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$; понятно, что тогда схемы, отличающиеся лишь *названиями* параметров, считаются одинаковыми.

строка схемы (3), начиная со второй, включает две операции, а схемы (7.*k*) — не менее трех.). Интересно, что схема (7.*k*) не допускает записи меньше, чем в две строки, так как результат первого умножения используется многократно, а схема (3) — допускает (формула (2)).

Переходя к доказательству свойства 2), рассмотрим элементарную форму записи схемы и обозначим через $q_1, \ldots, q_r$ результаты $\left(\times,:\right)$-*операций*. Перепишем схему в «$\left(\times,\cdot\right)$-форме»: «одна строка — одна $\left(\times,:\right)$ *операция*». При этом число $(\pm)$-*операций* может заметно возрасти — *мы ведь не запоминаем их результаты*; но сейчас нас интересует только число $\left(\times,:\right)$-*операций*, а оно остается прежним. Первые r строк схемы в «$\left(\times,:\right)$-форме» имеют вид

$$q_j = (A_j \pm B_j \pm \ldots) \times : \\ (C_j \pm D_j \pm \ldots),\ 1 \leqslant j \leqslant r, \qquad (9)$$

где $A_j, B_j, \ldots, C_j, D_j, \ldots$ — это либо b_i, либо x, либо q_s, где $s < j$. Если $\left(\times,:\right)$-*операция* из q_r не была заключительной операцией исходной схемы, то мы объединим в строку

$$q_{r+1} = A \pm B \pm \ldots \qquad (10)$$

все те $(\pm)$-*операции*, которые еще остается выполнить. Обозначим теперь через d_j' и d_j'' алгебраические суммы всех параметров b_i в левой и правой скобках (9), а через d_{r+1} — в (10) (даже если их кое-где в (9) и (10) нет вовсе). Перепишем теперь (9) и (10), пользуясь новыми параметрами d_j', d_j'' $(1 \leqslant j \leqslant r)$, d_{r+1}. Полученная схема будет универсальной, и предварительная обработка коэффициентов состоит в вычислении параметров b_i для исходной схемы (9), (10), а затем уже параметров d_j', d_j''. Новая схема представляет все многочлены, что и исходная, и содержит по два параметра d', d'' на каждую $\left(\times,\cdot\right)$-*операцию* плюс, возможно, еще один параметр d_{r+1}.

Доказательство для $(\pm)$-*операций* аналогично; соответствующие построения выполните самостоятельно.

§ 9. Параметры универсальной схемы

> *Я нарочно заостряю, упрощаю и карикатурю мысль.*
>
> В. В. Маяковский. Как писать стихи

«Причина» справедливости неравенства $m \geqslant n$ для универсальных схем очень проста: *если схема степени n универсальна, то есть представляет все многочлены степени n, то каждому такому многочлену должен соответствовать свой набор параметров; поэтому «число» различных наборов параметров должно быть не меньше «числа» разных многочленов.*

Однако, пожелай мы придать этому объяснению точный смысл, нам не хватило бы этого номера «Кванта». Удовлетворимся же тем, что разберем

Иллюстративный пример. Пусть $n = 2$, $f(x) = x^2 + a_1x + a_2$. Каждый конкретный многочлен можно изобразить точкой на плоскости с координатами a_1, a_2. Если для схемы $m < n = 2$, то она либо совсем не содержит параметров $(m = 0)$, либо содержит один параметр $(m = 1)$. В первом случае схема представляет единственный многочлен (точка на плоскости), во втором — семейство многочленов, которое изобразится на «плоскости многочленов» в виде некоторой «хорошей» кривой.

Скажем, схема $p = (x + b)(x - b) + bx = x^2 + bx - b^2$ представляет все многочлены, изображаемые точками параболы $(a_1 = b,\ a_2 = -b^2)$ или $a_2 = -a_1^2$.

Вся тонкость в том, что коэффициенты выражаются через параметры (согласно схеме) *арифметическими* средствами — поэтому-то наша кривая многочленов, представимых схемой, и будет *«нормальной»* кривой, содержащей лишь *«ничтожную часть»* точек плоскости. Возможно, читателям известно, что существуют кривые, которые заполняют всю плоскость (см. книгу Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп», с. 78), так что соответствующие схемы (*существование их в принципе невозможно!*) представляли бы все многочлены степени 2 и были бы универсальными.

§ 10. И последний

> *Девочке четырех с половиной лет прочли «Сказку о рыбаке и рыбке». — Вот глупый старик, — возмутилась она, — просил у рыбки то новый дом, то новое корыто. Попросил бы сразу новую старуху.*
>
> К. Чуковский. От двух до пяти

Итак, мы доказали (§§ 7—9), что достоинства универсальных схем почти исчерпаны схемой § 5. Но остается еще возможность искать для каждого многочлена свою схему, намного более экономную, чем та, которую можно для него получить, используя (7.k) — (8) или какую-нибудь другую универсальную схему. Правда, девочка из эпиграфа, убежденная в силе универсальных методов, предостерегает нас от увлечения поисками все новых и новых сверхэкономичных индивидуальных схем для отдельных многочленов (вроде схем § 3); сейчас мы *покажем* бесполезность таких поисков.

Отметим, прежде всего, что индивидуальную схему степени n разумно считать «сверхэкономичной», если она содержит «ненормально мало» (по сравнению с универсальными схемами) либо $\left(\times,:\right)$-*операций*, либо $(\pm)$-*операций* и если общее число ее операций не больше, скажем, $100\,n$ (для сравнения: общее число операций схемы Горнера равно $2n-1$).

Возьмем любую индивидуальную схему для конкретного многочлена степени n и заменим в ней все числа буквами b_1, b_2, ...; при этом получим схему, удовлетворяющую всем требованиям определения § 6.

Пример. Схема многочлена (в) из § 3 после замены чисел 1, 1 буквами b_1, b_2 превращается в схему $p(x)=(x^{n+1}-b_1):(x-b_2)$, представляющую все многочлены вида

$$f(x)=x^n+a\,x^{n-1}+a^2x^{n-2}+\ldots+a^{n-1}x+a^n$$

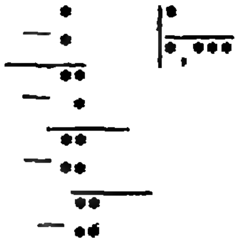
(при $b_1=a^{n+1}$, $b_2=a$) и только их.

После такой замены из всех сверхэкономичных индивидуальных схем получится лишь конечное число разных схем (см. упражнение 6), каждая из которых представляет, согласно § 9, лишь «ничтожную часть» многочленов степени n.

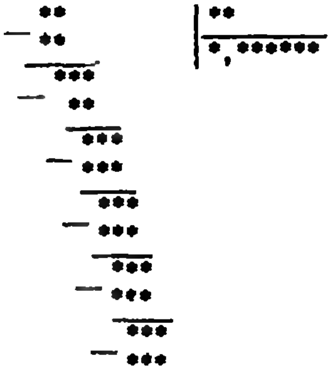
Итак, многочлены, которые могут быть вычислены быстрее, чем за $\frac{n-1}{2}$ $\left(\times,:\right)$-*операций* или $(n-1)$ $(\pm)$-*операций*, — исключение из общего правила. Тем не менее, при построении схемы для конкретного многочлена стоит использовать его особенности, если они бросаются в глаза.

Ребусы

1.



2.



* — цифра, в разных местах * может обозначать разные цифры).

3.

```
   × ннн
      ччч
+  чннч
   ччнч
   чнч
   нччнч
```

(н обозначает нечетные цифры, в разных местах, возможно, различные, ч — четные).

Л. П. Мочалов

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 сентября 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М271, М272» или «...Ф283». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем своим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по математике» или «...новая задача по физике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

В этом номере журнала «Задачник «Кванта» составлен из задач, предлагавшихся на заключительном туре Всесоюзных олимпиад по математике и физике 1974 года. Некоторые из задач здесь приводятся в измененном или обобщенном виде.

Задачи

М271 — М275; Ф283 — Ф287

М271. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, ..., n в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними? (9, 10 кл.)

А. И. Плоткин

М272. Даны две окружности радиусов R и r, касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB. (9 кл.)

Е. В. Саллинен

М273. На отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ задана функция f. Известно, что эта функция неотрицательна и $f(1)=1$. Кроме того, для любых двух чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$ и $x_1+x_2\leqslant 1$, выполнено неравенство

$$f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2).$$

а) Докажите, что какова бы ни была функция f, удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех x будет выполнено неравенство $f(x)\leqslant 2x$.

б) Верно ли, что для всех x

$$f(x)\leqslant 1{,}9\,x\ ?$$

(10 кл.)

А. В. Попов

М274. Найдите наименьшее число вида

а) $|11^k-5^l|$;
б) $|36^k-5^l|$;
в) $|53^k-37^l|$,

где k и l — натуральные числа. (8, 9 кл.)

Ф. Г. Шлейфер

М275* а) На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 3.

б) Докажите аналогичное утверждение для n векторов с суммой 0, длина каждого из которых не превосходит 1.

в) Можно ли заменить число 3 в задаче а) меньшим? Постарайтесь улучшить оценку также в задаче б). (9, 10 кл.)

М. Л. Гервер

Ф283. Заряженные шарики с одинаковой массой, расположенные на расстоянии l друг от друга, отпустили (без начальной скорости). Через t секунд расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между шариками, если их отпустить с начального расстояния $3l$? (9 кл.)

Ф284. Найти ускорение a, с которым падает круглая металлическая пластинка в однородном магнитном поле, параллельном поверхности Земли. Пластинка падает вертикально вниз и ориентирована своей плоскостью параллельно магнитному полю и перпендикулярно поверхности Земли. Толщина пластинки d много меньше ее радиуса R, масса m, индукция магнитного поля B, ускорение свободного падения g. (10 кл.)

Ф285. В неотапливаемом помещении работает холодильник с терморегулятором. В момент подключения холодильника к сети температура на улице, в помещении и в холодильнике была одна и та же. Считая температуру на улице постоянной, изобразите приближенно на графиках, как менялась температура в помещении после подключения холодильника. Рассмотрите три случая: 1) холодильник пустой; 2) заполнен продуктами; 3) дверца холодильника открыта. Все три графика зависимости температуры от времени начертите на одном рисунке. (8—9 кл.)

Ф286. При исследовании упругих свойств стальной проволоки длиной l установили, что если один конец ее закрепить, а другой повернуть на угол α вокруг оси, то возникает момент упругих сил $M = k\alpha$. После этого из проволоки навили пружину радиуса R с шагом много меньше R. Рассчитать коэффициент упругости пружины (считать, что упругие свойства стали после навивки пружины полностью восстанавливаются). (9 кл.)

Ф287. Канал проходит по мосту над шоссе. Изменяется ли давление на мост, если по каналу движется один раз пустая, а другой — нагруженная баржа? (8 кл.)

Решения задач

М231—М235; Ф238—Ф242

М231. *Найдите все решения в натуральных числах уравнения*

$$n^x + n^y = n^z.$$

Очевидно, что n должно быть не меньше двух. Считая $x \leqslant y \leqslant z$, перепишем наше уравнение в виде

$$n^{z-x} - n^{y-x} = 1. \qquad (*)$$

Если предположить, что y строго больше x, то из (*) будет следовать, что единица делится на n ($n \geqslant 2$); но это не так, значит, $y = x$. С учетом этого равенства получаем:

$$n^{z-x} = 2,$$

откуда $n = 2$, $z - x = 1$.

Итак, данное уравнение имеет бесконечное множество решений в натуральных числах: $n = 2$, $y = x$, $z = x + 1$, x — любое натуральное число.

Р. Егорян.

М232. а) *Докажите, что к конечному множеству точек на плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить еще одну точку так, что это свойство сохранится.*

б) *Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек на плоскости?*

а) Отметим, что для заданных точек A и B точка C, лежащая вне прямой AB и вне полосы, образованной перпендикулярами к прямой AB в точках A и B, образует с точками A и B невырожденный тупоугольный треугольник (см. рис. 1). Для каждой пары точек из заданного конечного множества построим полосу и прямую в соответствии с рисунком 1. Конечное число полос конечной ширины и прямых, очевидно, не покроют всей плоскости, следовательно, существует точка, образующая с каждой парой точек из заданного множества тупоугольный треугольник, что и требовалось доказать.

б) Ответ: вообще говоря, не справедливо.

Приведем следующий пример. Рассмотрим множество, состоящее из точек полуокружности без одного конца диаметра (рис. 2). Легко видеть, что такое множество

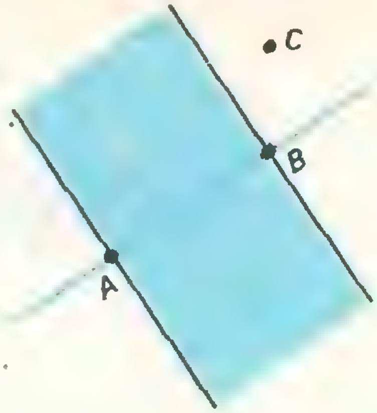


Рис. 1.

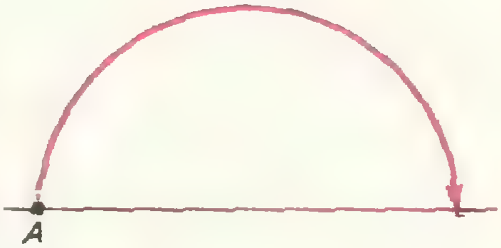


Рис. 2.

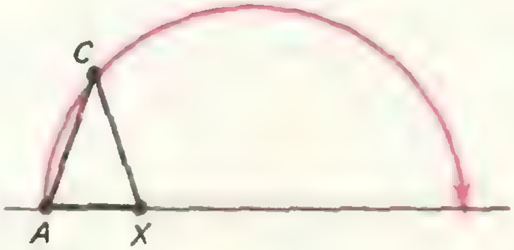


Рис. 3.

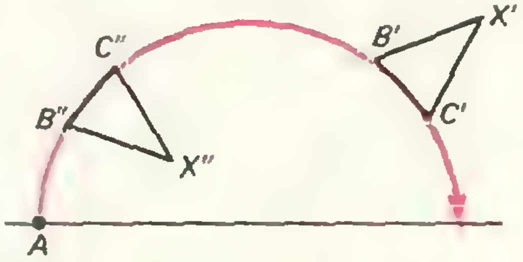


Рис. 4.

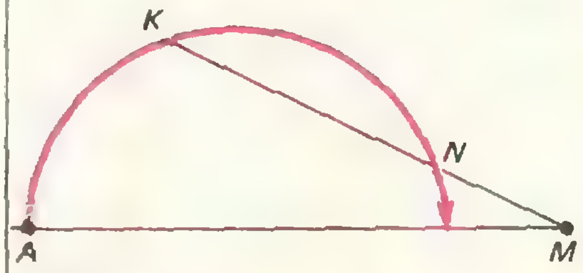


Рис. 5.

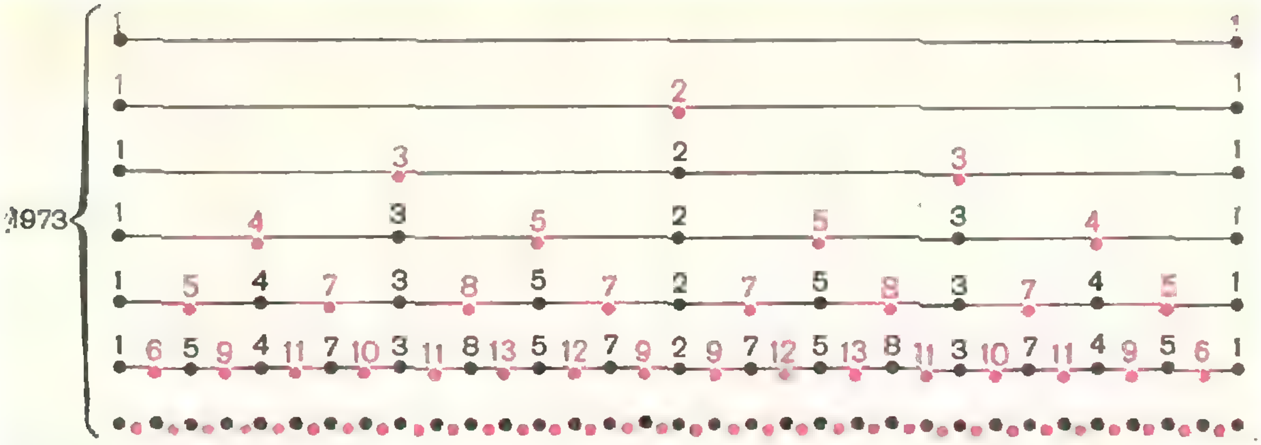


Рис. 6.

удовлетворяет условиям задачи. Докажем что к нему нельзя добавить уже ни одной точки (это почти очевидно). В самом деле, если точка лежит внутри полуокружности на ее диаметре (рис. 3, точка X), то всегда можно найти такую точку C на полуокружности, что треугольник ACX будет остроугольным. То же самое имеет место для всех точек, лежащих вне полуокружности или внутри, но вне ее диаметра (рис. 4, точки X' и X''; соответствующие точки B', C' и B'', C'' выбираются «достаточно близкими»). Если же точка выбирается на диаметре вне полуокружности (рис. 5, точка M), то имеет место вырождение — на рисунке 5 точки M, N, K оказываются на одной прямой.

П. С. Панков

М233. *В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее — 1973 раза. Сколько раз будет написано число 1973?*

Выпишем подряд строки чисел, образующиеся в результате очередного шага,— всего 1973 строки (рис. 6). Получим некоторую таблицу. Попробуем выяснить, сколько раз в n-й строке этой таблицы встретится число n (понятно, что в каждой следующей строке — с номером, большим n,— число n будет встречаться точно столько же раз, сколько и в n-й: все вновь образующиеся числа будут уже больше n).

Будем говорить, что в нашей таблице встречается пара натуральных чисел (a, b), если числа a и b стоят рядом в одной строке, причем b справа от a. Докажем следующее утверждение: *если натуральные числа a и b взаимно просты, то пара (a, b) встречается в таблице ровно один раз; если же a и b имеют общий делитель (отличный от 1), то пара (a, b) не встретится в таблице ни разу.*

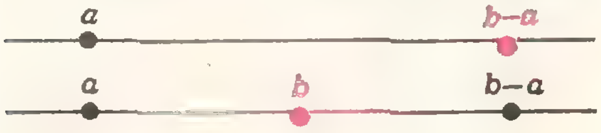


Рис. 7.

Положим $\max(a, b) = m$; доказательство проведем индукцией по m. При $m = 2$ утверждение, очевидно, верно. Предположим теперь, что оно уже доказано для всех таких пар (a, b) натуральных чисел, что $\max(a, b) < m$; докажем утверждение для пар с $\max(a, b) = m$.

Рассмотрим случай $a \leq b = m$ (случай $m = a > b$ аналогичен).

Пара (a, b) может встретиться в таблице в том и только том случае, если в ней встречалась пара $(a, b - a)$ (рис. 7). Очевидно, что числа (a, b) и $(a, b - a)$ имеют одни и те же общие делители; в частности, являются одновременно либо взаимно простыми, либо нет. Для пары $(a, b - a)$ утверждение справедливо по предположению индукции. Поэтому, если a и b взаимно просты, то пара (a, b) встретится в таблице, так как в ней встречается пара $(a, b - a)$, и притом ровно один раз; если же a и b не являются взаимно простыми, то пары $(a, b - a)$ в таблице нет, и, значит, нет и пары (a, b). Утверждение доказано. Теперь уже легко ответить на вопрос, *сколько раз будет написано число n на нашем отрезке* (то есть в n-й строке таблицы). *Каждый раз, когда n пишется как* сумма двух соседних чисел a и $b = n - a$, оно встречается в парах (a, n) и $(n, n - a)$. Мы доказали, что это бывает ровно один раз для каждого a, меньшего n и взаимно простого с ним (тогда, конечно, и $n - a$ взаимно просто с n). Итак, ответ таков: каждое число n будет написано на отрезке столько раз, сколько существует натуральных чисел, меньших n и *взаимно простых* с ним.

Число 1973 — простое (проверьте!). Поэтому оно встретится 1972 раза.

Н. Б. Васильев

М234. *Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка — четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют $^1/_3$ их длины. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две стороны которого составляют по $^1/_3$ соответствующих сторон 8-угольника, и так далее. Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (то есть образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам).*

Обозначим через M_0 исходный квадрат, через M_1, M_2, M_3, ...— многоугольники, получаемые из M_0 последовательным отрезанием уголков. Удобно рассмотреть также многоугольник N_k, вершинами которого служат середины сторон M_k ($k = 0, 1, 2, ...$.)

Пусть A — произвольная вершина многоугольника M_k— а B и C — соседние с ней вершины. Чтобы получить из многоугольника M_k многоугольник M_{k+1}, нужно от каждой вершины A многоугольника M_k отрезать треугольник B_2AC_2 (см. рис. 8) такой, что точки B_2 и C_2 делят, соответственно, отрезки $[AB]$ и $[AC]$ в отношении 1 : 2. Пусть B_1 и C_1— середины отрезков $[AB]$ и $[AC]$, то есть соседние вершины многоугольника N_k; тогда

$$|AC_2| = \frac{2}{3}|AC_1|,$$
$$|AB_2| = \frac{2}{3}|AB_1|. \qquad (1)$$

При переходе от многоугольника N_k к многоугольнику N_{k+1} точки B_1 и C_1 остаются его вершинами, но уже не соседними: между ними появляется новая вершина A_1 — середина отрезка $[B_2C_2]$. Таким образом, многоугольник N_{k+1} получается из многоугольника N_k добавлением к каждой его стороне $[B_1C_1]$ треугольника типа $B_1A_1C_1$.

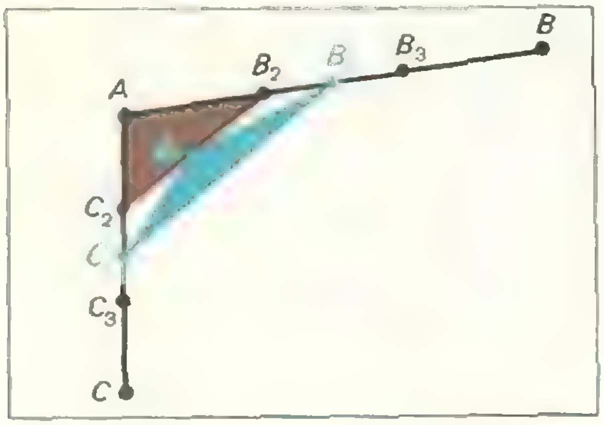


Рис. 8.

Из (1) следует, что площади отрезаемых и добавляемых треугольников связаны такими соотношениями:

$$S(B_2AC_2) = \frac{4}{9}S(B_1AC_1). \qquad (2)$$

$$S(B_1A_1C_1) = \frac{1}{3}S(B_1AC_1). \qquad (3)$$

Пусть x_k, — площадь многоугольника N_k, y_k— площадь M_k. Просуммировав (2) и (3) по всем вершинам A многоугольника M_k, получим:

$$y_k - y_{k+1} = \frac{4}{9}(y_k - x_k), \qquad (4)$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{3}(y_k - x_k); \qquad (5)$$

отсюда

$$(y_{k+1} - x_{k+1}) = \frac{2}{9}(y_k - x_k) \qquad (6)$$

и

$$\frac{y_k - y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} = \frac{4}{3}. \qquad (7)$$

Отметим точки x_0, x_1, x_2, ... и y_0, y_1, y_2, ... на числовой оси (рис. 9 и 10). Из соотношения (6) следует, что длина отрезка $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ в $4\frac{1}{2}$ раза меньше длины отрезка $[x_k, y_k]$. Рассмотрим точку u, делящую отрезок $[x_k, y_k]$ в отношении 3:4; тогда

$$\frac{y_k - u}{u - x_k} = \frac{4}{3}. \qquad (8)$$

Учитывая (7) и (8), получим, что

$$\frac{y_{k+1} - u}{u - x_{k+1}} = \frac{4}{3}; \qquad (9)$$

значит, точка u делит в том же отношении 3:4 и отрезок

$$[x_{k+1}, y_{k+1}].$$

Возьмем самый первый отрезок нашей последовательности: $[x_0, y_0] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; в отношении 3:4 его делит точка u, такая, что $\dfrac{1-u}{u-\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}$, то есть

$$u = \frac{5}{7}. \qquad (10)$$

В силу сказанного, эта точка делит в отношении 3:4 все отрезки $[x_k, y_k]$ ($k = 0, 1, 2, ...$); значит, каждый следующий отрезок последовательности $[x_k, y_k]$ полу-

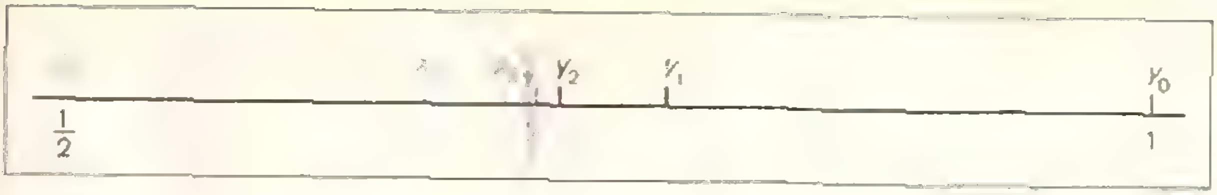


Рис. 9.

чается из предыдущего сжатием к точке a в $4\frac{1}{2}$ раза. Таким образом, точка a является *единственной общей точкой* всех этих отрезков. (Можно выписать и точные формулы для x_k и y_k: $x_k = \frac{5}{7} - \left(\frac{2}{9}\right)^k \times \frac{3}{14}$, $y_k = \frac{5}{7} + \left(\frac{2}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{7}$; но нам они не понадобятся. Читатели, знакомые с понятием предела последовательности, конечно, заметили, что a является общим пределом последовательностей x_k и y_k; по существу мы именно это и доказали.) Отсюда уже следует, что площадь искомой фигуры M (являющейся пересечением всех многоугольников M_k) равна a; действительно, M содержится в любом M_k и содержит любой N_k *(докажите!)**); *следовательно, площадь* M должна быть заключена между x_k и y_k (при всех k), а этому требованию удовлетворяет единственное число: $a = \frac{5}{7}$.

Можно было бы решать эту задачу и не вводя многоугольников N_k, используя лишь соотношение, определяющее последовательность $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{5}{9}$, y_2, y_3, ...:

$$y_k - y_{k+1} = \frac{1}{9}(y_k - y_{k-1}).$$

При этом площадь M находится как предел площадей M_k (последовательность $(y_k - y_{k-1})$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию).

А. Зеленский (г. Шахтерск) *обобщил* задачу **M234** на тот случай, когда от каждой стороны отсекаются отрезки, составляющие $\frac{1}{p}$ этой стороны, где p — любое число, большее 2. Площадь получающейся в таком случае фигуры равна $\frac{p^2 - 2p + 2}{p^2 - 2p + 4}$; при $p = 3$ получаем ответ $\frac{5}{7}$.

С. Конягин

M235. *По арене круглого цирка радиуса 10 м бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов, на которые он поворачивал, не меньше 2998 радиан.*

Обозначим отрезки, которые пробегает лев, через $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а углы, на которые он при этом поворачивает,— через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ (всего k отрезков и $k-1$ поворот). Представим движение льва следующим образом.

Пусть лев пробежал отрезок $AA_1 = x_1$. Повернем вокруг него (то есть вокруг точки A_1) арену на угол α_1 так, чтобы отрезок x_2 оказался продолжением отрезка x_1. После того как лев пробежит отрезок $A_1A_2 = x_2$, повернем вокруг него арену на угол α_2 так, чтобы отрезок x_3 стал продолжением отрезка x_2 и так далее. Тогда лев будет бежать по прямой и пробежит отрезок $AA_k = 30\,000$ (м), где A — начальная точка, а A_k — *конечная*.

Проследим за движением центра арены — точки O. Вначале точка O поворачивается вокруг точки A_1 на угол α_1, затем — вокруг точки A_2 на угол α_2 и так далее. Всякий раз центр арены O отстоит от центра вращения не больше, чем на 10 м, так как центр вращения — это лев, находящийся внутри арены. Поэтому при первом повороте точка O переместится не более чем на $\alpha_1 \cdot 10$ (м), при втором — не более чем на $\alpha_2 \cdot 10$ (м) и так далее ($\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ измеряются в радианах). Всего точка O переме-

---

*) Это чисто теоретико-множественный факт: если $M_k \supset M_{k+1} \supset N_{k+1} \supset N_k$ для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$, и $M = \bigcap\limits_k M_k$, то $M \supset N_k$.

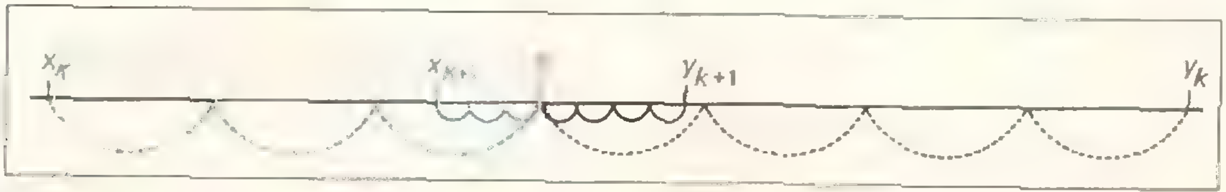


Рис. 10.

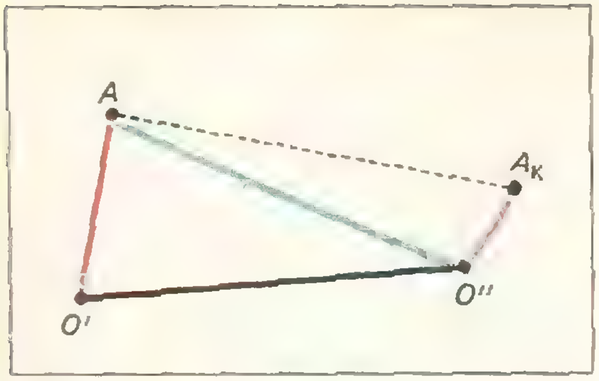


Рис. 11.

стится не более, чем на $(\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1})\cdot 10$(*м*), то есть

$$O'O''\leqslant(\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1})\cdot 10\ (м)$$

(см. рис. 11 — здесь O' — начальное, O'' — конечное положение точки O).

Поскольку $O'A\leqslant 10$ (*м*), $O''A_k\leqslant 10$ (*м*) и $AA_k=30\,000$ (*м*), то $O'O''\geqslant 29980$ (*м*). Отсюда

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}\geqslant\frac{O'O''}{10}\geqslant 2998\ (рад).$$

И. Н. Бернштейн

Ф238. *Имеются две проволоки квадратного сечения, сделанные из одного и того же материала. Сторона сечения одной проволоки $a_1=1$ мм, а другой $a_2=4$ мм. Для того чтобы расплавить первую проволоку, через нее нужно пропустить ток $I_1=10$ а. Какой ток нужно пропустить через вторую проволоку, чтобы она расплавилась?*

Считать, что количество тепла, уходящего в окружающую среду за 1 с, пропорционально разности температур проволоки и среды и площади поверхности проволоки, причем коэффициент пропорциональности одинаков для обеих проволок.

Если проволока находится в тепловом равновесии со средой (ее температура не меняется), то количество тепла, которое выделяется в проволоке при прохождении тока за единицу времени, равно количеству тепла, отдаваемому в окружающее пространство. Когда проволока нагрета до температуры плавления, достаточно небольшого увеличения тока, чтобы проволока начала плавиться — добавочное количество тепла, выделяемое током, будет идти на плавление. Поэтому нам необходимо найти ток, который соответствует температуре плавления проволоки.

Количества тепла, отдаваемые проволоками за единицу времени, равны $Q_1=kS_1\Delta T=4ka_1 l\Delta T$ и $Q_2=kS_2\Delta T=4ka_2 l\Delta T$, где k — коэффициент пропорциональности, S_1 и S_2 — площади поверхностей проволок, l — их длина и ΔT — разность температур проволоки и среды. Обозначим сопротивления проволок R_1 и R_2 соответственно.

Запишем условия теплового равновесия:

$$I_1^2R_1=4ka_1l\Delta T,\qquad I_2^2R_2=4ka_2l\Delta T,$$

где R_1, R_2 — сопротивления проволок. Разделив второе равенство на первое, получим:

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2=\frac{a_2}{a_1}\,\frac{R_1}{R_2}.$$

Так как $R_1=\rho\dfrac{l}{a_1^2}$ и $R_2=\rho\dfrac{l}{a_2^2}$, где ρ — удельное сопротивление материала проволоки, то

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2=\frac{a_2^3}{a_1^3}.$$

Отсюда найдем

$$I_2=I_1\frac{a_2}{a_1}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}=80\ a.$$

Ф239. *Колесо радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра колеса постоянна.*

Как известно, траекторию криволинейного движения точки в течение малого промежутка времени всегда можно считать дугой окружности. Определить радиусы окружностей, по которым движутся точки колеса A и B в тот момент, когда радиус-вектор точки A горизонтален, а радиус-вектор точки B составляет угол α с вертикалью (рис. 12.)

Если точка движется по окружности, то ее центростремительное ускорение на-

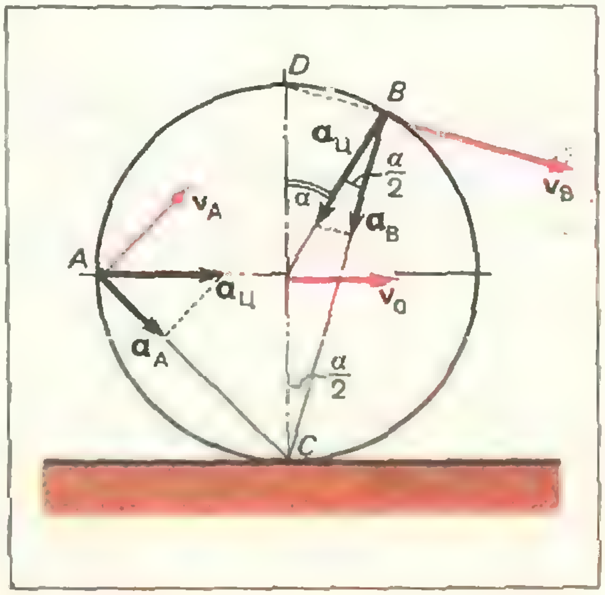


Рис. 12.

правлено перпендикулярно к скорости **v** точки и равно по абсолютной величине $\frac{v^2}{R}$, где R — радиус этой окружности. Поэтому ясно, что мы сможем определить R, если будем знать скорость точки **v** и ее ускорение **a** в направлении, перпендикулярном к этой скорости.

Вначале найдем скорости точек A и B относительно Земли. Это можно сделать, например, складывая линейные скорости вращения точек в системе координат, связанной с центром колеса и движущейся поступательно параллельно горизонтальной плоскости, со скоростью движения этой системы координат, то есть со скоростью центра колеса относительно плоскости. Можно воспользоваться менее привычным, зато более простым способом. В рассматриваемый нами момент времени точка C, касающаяся плоскости, неподвижна относительно плоскости, и можно считать, что все колесо поворачивается относительно этой точки (мгновенного центра вращения). Угловые скорости вращения всех точек колеса относительно мгновенного центра вращения одинаковы и равны, в частности, угловой скорости вращения центра колеса:

$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

(v_0 — скорость центра колеса). Это означает, что скорость точки B, перпендикулярная к отрезку BC, равна

$$v_B = \omega \cdot BC = \frac{v_0}{r} BC.$$

Из треугольника BCD видно, что $BC = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$v_B = 2v_0 \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично, скорость точки A $\mathbf{v}_A$, перпендикулярная к AC, равна по абсолютной величине

$$v_A = \omega \cdot AC = 2v_0 \cos\frac{\pi}{4} = v_0\sqrt{2}.$$

Теперь найдем ускорения точек B и A, перпендикулярные к скоростям этих точек. Полные ускорения этих точек — это, очевидно, центростремительные ускорения $a_ц$ в системе координат, связанной с центром колеса. Действительно, так как колесо движется относительно плоскости равномерно, то ускорения точек колеса в системе координат, связанной с плоскостью, совпадают с их ускорениями в системе координат, движущейся поступательно вместе с центром колеса. Поэтому центростремительные ускорения точек A и B направлены к центру колеса и равны по абсолютной величине $a_{ц\cdot A} = a_{ц\cdot B} = \frac{v_0^{2*}}{r}\Big)$.

Ускорения же точек A и B, перпендикулярные к скоростям $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$, — это проекции ускорений $\mathbf{a}_{ц.\,A}$ и $\mathbf{a}_{ц.\,B}$ на направления, перпендикулярные к $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$. Они равны соответственно

$$a_A = a_{ц.\,A}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{v_0^2}{2r}\sqrt{2},$$

$$a_B = a_{ц.\,B}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v_0^2}{r}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, в данный момент точки A и B движутся по окружностям, радиусы которых определяются из соотношений

$$\frac{v_A^2}{R_A} = \frac{v_0^2}{2r}\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \frac{v_B^2}{R_B} = \frac{v_0^2}{r}\cos\frac{\alpha}{2},$$

или.

$$\frac{(v_0\sqrt{2})^2}{R_A} = \frac{v_0^2}{2r}\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \frac{\left(2v_0\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{R_B} = \frac{v_0^2}{r}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$R_A = 2r\sqrt{2} \quad \text{и} \quad R_B = 4r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ф240. *Шар-зонд, имеющий нерастяжимую оболочку, поднялся на максимальную высоту и совершает малые колебания около равновесного уровня. Найти период этих колебаний, считая, что на такой высоте плотность воздуха* ρ *убывает с высотой равномерно на величину* $\delta = 1{,}2\cdot 10^{-2}\,\rho$ *через каждые* $h = 100$ *м. Трением шара о воздух пренебречь.*

Прежде всего покажем, что шар-зонд действительно колеблется. На него действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и выталкивающая архимедова сила $\mathbf{F}_в$. Обе силы направлены по вертикали, но в противоположные стороны. Очевидно, что в положении равновесия

$$mg = F_в,$$

где m — масса шара, $F_в = \rho V g$ (V — объем шара).

Если в силу каких-то случайных обстоятельств шар сместится из положения равновесия, изменится величина выталкивающей силы. Причем, при смещении шара вверх $F_в$

---

*) Так как колесо катится без проскальзывания, то линейные скорости вращения всех точек на ободе колеса равны скорости поступательного движения центра колеса.

уменьшится, а при смещении вниз — увеличится. Таким образом, в обоих случаях возникает равнодействующая сила, равная изменению выталкивающей силы и направленная к положению равновесия. Найдем ее величину.

Пусть шар сместится из положения равновесия на x. Так как плотность воздуха изменяется с высотой равномерно, то

$$\frac{\Delta\rho}{\delta}=\frac{x}{h},$$

где $\Delta\rho$ — изменение плотности воздуха на высоте x. Тогда

$$\Delta F_{\text{и}}=-\Delta\rho Vg=\frac{-\delta Vg}{h}x$$

(знак «минус» указывает на то, что сила $\Delta F_{\text{и}}$ направлена всегда к положению равновесия).

Мы видим, что равнодействующая сила, действующая на шар, направлена к положению равновесия и пропорциональна отклонению шара от положения равновесия. Это означает, что шар совершает гармонические колебания, подобные колебаниям груза на пружинке (для которой $F=kx$). Роль коэффициента жесткости пружины в этом случае играет величина

$$k'=\frac{\delta Vg}{h}.$$

Поэтому период колебаний шара равен

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}=2\pi\sqrt{\frac{mh}{\delta Vg}}.$$

Так как $m=\rho\cdot V$, то

$$T=2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\delta g}}=2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{100\cdot\rho}{1{,}2\cdot 10^{-2}\rho\cdot 10}}\approx$$
$$\approx 180\ (c).$$

Ф241. *Кольцо массы m может скользить по стержню длины L. Сила трения между ними F. Определить, какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить стержню, чтобы он пролетел сквозь кольцо, если вначале кольцо покоится.*

Опыт проводится в невесомости.

Задача решается точно так же, как задача Ф228 (см. «Квант», 1974, № 5). Поэтому

$$v_0=\sqrt{2LF\frac{M+m}{Mm}},$$

где M — масса стержня.

Ф242. *Камера-обскура представляет собой прямоугольный ящик, в одной из стенок которого имеется круглое отверстие. Освещенность изображения Солнца, которое получается на противоположной стенке камеры — экране, падает вдвое при удалении от центра изображения к краю на 0,9 радиуса изображения. Во сколько раз освещенность передней стенки камеры больше, чем освещенность в центре изображения?*

Каждая точка изображения Солнца освещается не всем Солнцем, а только тем его участком, который виден из этой точки в малом телесном угле, ограниченном отверстием камеры-обскуры. Так как отверстие камеры мало и Солнце находится очень далеко, то можно считать, что этот телесный угол одинаков для всех точек изображения Солнца. Ясно, что освещенность точки изображения Солнца пропорциональна той площади поверхности Солнца, которая видна из данной точки.

Изменение освещенности изображения связано с тем, что по мере удаления точки от центра изображения участок Солнца, освещающий данную точку, приближается к краю Солнца, и когда участок «заходит» за край Солнца, его площадь уменьшается. Освещенность изображения точки падает вдвое, когда уменьшается вдвое площадь «освещающего» точку участка Солнца. При этом, как видно из рисунка 13, в данную точку попадает луч, идущий от края Солнца и проходящий через центр отверстия камеры. Это позволяет найти угол, под которым видно Солнце из точек передней стенки камеры-обскуры:

$$\frac{\alpha}{2}\approx\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{0{,}9R}{l},$$

где l — длина камеры-обскуры. Угол же,

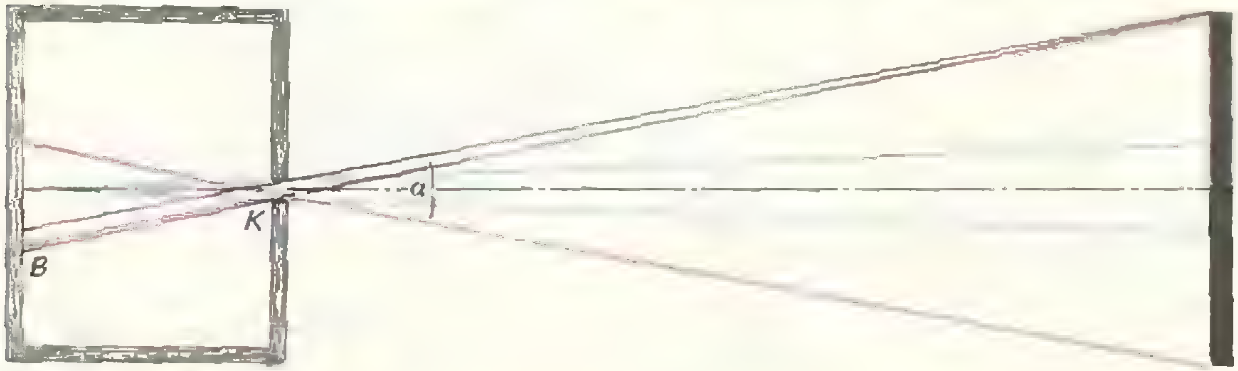


Рис. 13.

под которым виден участок Солнца, освещающий центр изображения, равен

$$\frac{\alpha_1}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \frac{r}{l},$$

где r — радиус отверстия камеры-обскуры. Найдем соотношение между радиусом отверстия r и радиусом изображения Солнца R. Край изображения Солнца — это, очевидно, точка B, в которую попадает луч, идущий от края Солнца через край K отверстия. Так как Солнце находится очень далеко, то лучи, идущие от края Солнца, можно считать параллельными. Это означает, что $r = 0{,}1R$.

Поэтому

$$\frac{\alpha_1}{2} = \frac{0{,}1R}{l}.$$

Отношение освещенностей передней стенки камеры и центра изображения в камере равно отношению площади поверхности Солнца к площади участка Солнца, освещающему центр изображения (или, что то же, отношению телесных углов, под которым видно Солнце и соответствующий участок Солнца:

$$\frac{E_п}{E_1} = \frac{S}{s}.$$

Так как $S = \pi\left(L\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2$, где L — расстояние до Солнца, а $L\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ — радиус Солнца и $s = \pi\left(L\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\right)^2$, то

$$\frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}\right)^2 = 81.$$

И. Ш. Слободецкий

Правильные решения задач **М216—М230** прислали (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи): *А. Абдуррахманов* (Баку) **21, 27**; *П. Агаронов* (Баку) **16, 18, 20, 21, 26, 27**; *С. Агеев* (Воронеж) **16, 21—30**; *Д. Азов* (Челябинск) **16, 21—23, 27, 28**; *Г. Айрапетян* (Ереван) **27, 28**; *С. Актершев* (Москва) **26, 27**; *В. Алекин* (Москва) **21**; *И. Алексеева* (Миасс Челябинской обл.) **26, 27**; *Н. Аманов* (Алма-Ата) **16**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **18, 23, 27**; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) **16, 21, 22, 26—28**; *П. Баньковский* (Уральск) **16, 19, 21**; *А. Бараов* (Москва) **16, 20, 27, 28, 30**; *А. Барсунов* (Пятигорск) **21, 26, 27**; *В. Басманов* (Воронеж) **16, 21, 23, 26, 27**; *Л. Басов* (Пржевальск) **16—19, 21**; *И. Бахмутский* (Львов) **16, 18, 20, 21, 23, 26—28**; *Е. Башкиров* (Минск) **26, 27**; *Е. Бекия* (Батуми) **16**; *С. Беломпецкий* (Киржач Владимирской обл.) **24, 26, 27**; *С. Беляев* (Тарасовский р-н Ростовской обл.) **27**; *А. Бенис* (Шуя Ивановской обл.) **19—21**; *А. Берлин* (Бобруйск) **16, 18, 19—30**; *М. Биктимиров* (Ленинск Кзыл-Ординской обл.) **16**; *Б. Блехман* (Конотоп) **21, 22**; *А. Блох* (Харьков) **17, 18, 22, 23, 25—27**; *А. Брысьев* (Тюльган Оренбургской обл.) **16, 20, 27**; *А. Булатов* (Челябинск) **26**; *Б. Буртман* (Ташкент) **21, 26, 27**; *А. Вальков* (Ташкент) **16—18, 20—23, 26—29**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **26, 27, 30**; *А. Векслер* (Ташкент) **27**; *И. Величко* (Ленинград) **21**; *И. Вертгейм* (Пермь) **21, 22, 24**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **27**; *В. Винокуров* (Москва) **16, 21, 26, 27**; *И. Винокуров* (Москва) **21, 26—28**; *А. Волков* (Челябинск) **16, 18, 26, 27**; *Г. Воль* (Ворошиловград) **26, 27**; *А. Выборнов* (п. Развилка Московской обл.) **21**; *О. Габриелян* (Баку) **18**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **26—28, 30**; *Л. и М. Гандельсман* (Ленинград) **16**; *Д. Гашибаязов* (Тбилиси) **27**; *И. Голдовский* (Брянск) **18**; *А. Гончаров* (Никополь) **16—23, 25—30**; *Г. Горбчук* (Новосибирск) **27**; *М. Грабельковский* (Воронеж) **26—29**; *В. Гребень* (д. Белоуша Брестской обл.) **16**; *М. Грибелюк* (Москва) **21**; *А. Григорян* (Баку) **16, 18, 19, 21—27, 29, 30**; *А. Гринберг* (Кишинев) **27**; *В. Гришкевич* (п/о Самохваловичи Минской обл.) **26, 27**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **21, 22, 26, 27**; *И. Гуща* (Осиповичи Могилевской обл.) **27**; *В. Данилов* (Москва) **16, 18, 20**; *К. Данильченко* (Волгоград) **16, 20—23, 26, 27, 30**; *С. Даркембаев* (Алма-Ата) **16—21**; *С. Девятериков* (Кирово-Чепецк Кировской обл.) **16, 21, 26, 27**; *П. Дедик* (Москва) **21—24, 26, 27, 29, 30**; *Н. Денисов* (Москва) **27**; *И. Довжиков* (Ленинград) **27**; *Э. Дяченко* (Киев) **22, 24, 27, 28**; *Р. Егорян* (Раздан) **16—18, 22, 27**; *А. Екимов* (п. Лебяжье Курганской обл.) **16**; *А. Еременко* (Харьков) **16, 18, 19, 20, 26**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **18**; *Г. Зайцев* (Кимры Калининской обл.) **26, 27**; *М. Закс* (Пермь) **26, 27, 29**; *А. Заргирян* (Тбилиси) **27**; *В. Захаров* (Евпатория) **27**; *О. Захарченко* (Киев) **22, 24, 26, 27**; *С. Зенович* (Ташкент) **26—28**; *П. Зозуля* (п. Гребенки Киевской обл.) **16, 18, 20**; *С. Золотарев* (Москва) **16, 26**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **16, 21, 22, 26—28**; *П. Иванов* (п/о Полибино Псковской обл.) **16, 23**; *Т. Иванова* (Москва) **16, 18, 21**; *Ж. Идирисов* (Алма-Ата) **16, 20—22, 26—28**; *А. Измайлов* (Баку) **24, 27**; *С. Ильинков* (Харьков) **16—18, 20, 26—30**; *Ш. Иммухаметов* (Казань) **21, 23**; *И. Иовик* (Магнитогорск) **27**; *А. Калюжный* (Киев) **16, 21—23, 26, 27**; *А. Карабегов* (Ереван) **26, 27**; *В. Карапетян* (Севан) **22**; *А. Кац* (Баку) **27**;

П. Кацыло (Москва) **16, 26—29;** *П. Кирсанов* (Москва) **26;** *Л. Клименок* (Москва) **27;** *М. Кобозев* (Киев) **21, 22, 27;** *В. Кобылецкий* (Баку) **16, 18, 20, 26, 27;** *А. Колодин* (Коломыя Ивано-Франковской обл.) **21, 22, 24, 26, 27;** *С. Коляда* (Киев) **16, 21, 22, 24, 27, 30;** *Л. Копытковский* (Лунинец Брестской обл.) **27;** *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **16, 17;** *В. Костанян* (Баку) **27;** *С. Костеша* (Челябинск) **27;** *А. Котанов* (п. Цалка ГССР) **27;** *Л. Кофман* (Таллин) **16;** *И. Крюков* (Старый Самбор Львовской обл.) **21, 22;** *Н. Кудрин* (Коломна Московской обл.) **27;** *А. Кукуш* (Киев) **26, 27, 30;** *А. Кумахов* (с. *II* Лескен КБАССР) **27;** *А. Куряндчик* (Вильнюс) **26, 27;** *А. Кутыркин* (Пенза) **21, 22;** *С. Лапасиков* (Обоянь Курской обл.) **26, 28, 30;** *М. Левин* (Витебск) **17, 18, 27;** *М. Левин* (Таллин) **23;** *С. Лифиц* (Харьков) **16, 21;** *Ю. Лобач* (Евпатория) **26, 27;** *М. Любич* (Харьков) **16, 19—23, 25—27, 29, 30;** *С. Ляпин* (Петриков Гомельской обл.) **16, 17, 21, 27;** *Г. Мавзитов* (д. Средние Челны ТАССР) **27;** *М. Маилян* (Ереван) **27;** *А. Макаричев* (Львов) **16—18, 20—22, 24, 26—29;** *С. Макаров* (Саратов) **26—28;** *С. Малинский* (Полтава) **21—24, 27, 28, 30;** *Г. Мамедов* (Баку) **27;** *А. Марков* (Москва) **26, 27, 29;** *С. Мельник* (Харьков) **16, 18, 20—26, 28, 29;** *А. Мехович* (Владивосток) **27;** *В. Мильман* (Минск) **26, 27;** *А. Мирошниченко* (Харьков) **18;** *Ю. Михайлов* (Ленинград) **21—23;** *Л. Михлин* (Курск) **16, 18, 20—22, 27—30;** *А. Морозов* (Новосибирск) **21;** *Ю. Муранов* (Москва) **21;** *Г. Мустафаев* (Сиазань Аз. ССР) **27;** *К. Мхитарян* (Ереван) **16—22, 25—28;** *А. Навасардян* (Ереван) **27;** *Ю. Неретин* (Москва) **26, 27;** *Н. Нецветаев* (Ленинград) **16, 20—23, 25—28, 30;** *А. Николаев* (Москва) **20;** *И. Новиков* (Куйбышев) **16;** *С. Нужный* (Куйбышев) **16, 18, 21, 23—25, 27—30;** *С. Охитин* (Оренбург) **16, 20, 26—28;** *И. Панин* (Апатиты) **16, 20—23, 26, 27;** *Е. Пасике* (Харьков) **26, 27;** *В. Пелипенко* (Воронеж) **26—29;** *О. Печерский* (Орджоникидзе) **16;** *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **16—18, 20, 26, 27, 29, 30;** *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **16;** *А. Поносов* (Пермь) **21, 22, 24—30;** *В. Поркшеян* (Ростов-на-Дону) **18, 21, 24, 27, 30;** *Р. Портной* (Черновцы) **21, 27, 29, 30;** *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) **27;** *В. Прасолов* (Ворошиловград) **26, 27, 29;** *Ю. Протас* (Кагул МССР) **18, 23, 27;** *С. Путинцев* (Кемерово) **16, 18, 20, 22, 23, 25—28;** *Л. Рабинович* (Тула) **21—23, 25—30;** *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) **18, 20—23, 25, 27;** *А. Рашковский* (Харьков) **26, 27;** *А. Резников* (Киев) **16, 21, 22, 26, 27;** *А. Репецкий* (Краматорск Донецкой обл.) **16, 18—21;** *Г. Родин* (Ленинград) **21, 23;** *Р. Рожков* (Москва) **26, 27;** *Ф. Рожков* (Рязань) **26, 27;** *М. Рожкова* (Киев) **18;** *Е. Романовский* (Киев) **26—28, 30;** *В. Рубашевский* (Киев) **20, 21, 27, 28;** *Н. Рундквист* (Свердловск) **16;** *А. Рыбаков* (Муром) **26;** *А. Рязанов* (Новокузнецк) **16, 18—22, 26, 27, 29;** *И. Салоед* (Евпатория) **19;** *П. Самовол* (Гайворон Кировоградской обл.) **18, 27;** *С. Сатановский* (Харьков) **16, 17, 19—21, 23, 26, 27;** *В. Семененко* (Ставрополь) **21—23, 26, 27;** *Н. Семченкова* (Джетыгара Каз. ССР) **18;** *А. Синченко* (Москва) **27, 28;** *Г. Скляр* (Харьков) **26—30;** *С. Скоков* (д. Соковни г. Слободской) **27, 28;** *Л. Славин* (Москва) **26—28;** *В. Слепой* (Фрунзе) **28;** *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **16—27, 29, 30;** *А. Слинкин* (Москва) **16—24;** *И. Смирнов* (Москва) **27, 30;** *А. Соломахов* (Москва) **26, 27, 29;** *Ю. Сопкин* (Ижевск) **26—28;** *К. Стемпак* (Польша) **21—24;** *С. Табачников* (Москва) **16, 20;** *А. Тарнопольский* (Коростень) **21;** *А. Тимофеева* (Выборг) **26;** *А. Ткач* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.) **16, 18, 21, 27;** *О. Толстикова* (Архангельск) **21;** *А. Тонких* (с. Октябрьское Липецкой обл.) **27;** *М. Торонджадзе* (Тбилиси) **16, 18, 21;** *В. Трухин* (Рязань) **21;** *Э. Туркевич* (Черновцы) **16—30;** *А. Тюлягин* (Москва) **21, 23—25;** *В. Урываев* (Москва) **26, 27;** *В. Филоненко* (Днепропетровск) **27;** *С. Финашин* (Ленинград) **16, 20, 22, 23, 26—29;** *С. Фомин* (Ленинград) **21—23;** *А. Фридман* (Рига) **18, 27;** *С. Харебцов* (Воронеж) **16, 18;** *М. Харитонов* (Павлоград Днепропетровской обл.) **16, 18, 20, 26, 27;** *П. Химич* (Валуйки Белгородской обл.) **18, 20, 27, 28;** *А. Хомич* (Брест) **26, 27;** *Г. Храпунович* (Ленинград) **26, 27;** *С. Церковный* (Ленинград) **18, 26, 27;** *И. Цукерман* (Ленинград) **21, 22, 26, 27, 30;** *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) **27;** *М. Чеповецкий* (Ленинград) **26, 27;** *А. Черебатов* (Омск) **16, 20, 22, 23, 26, 27;** *В. Шабаев* (ст. Ерцево Архангельской обл.) **27;** *В. Шапошников* (п. Комсомольский Кирг. ССР) **26, 27;** *Л. Шахнабатова* (Ставрополь) **27;** *К. Шварцман* (Кишинев) **27;** *Е. Шестаков* (Москва) **21, 22, 27;** *М. Шлыкова* (Хабаровск) **16;** *Ю. Шмелев* (Ярославль) **16, 20, 21, 26—30;** *Н. Щербина* (Днепропетровск) **21—24;** *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **18, 21—24, 27;** *А. Эстерлис* (Тбилиси) **16—18, 21, 27;** *И. Юнус* (Харьков) **20—30;** *А. Юнусов* (Кишинев) **27;** *С. Юркевич* (Ленинград) **16, 20—22, 25—28, 30;** *Б. Юсин* (Москва) **21—29;** *Р. Ямилов* (Уфа) **16, 20—22, 24, 26, 27, 29, 30.**

Ю. П. Лысов

Приводим список читателей, приславших решения задач **Ф223—Ф242**. Задачи **Ф223** и **Ф233** правильно решили почти все читатели; правильные решения остальных задач прислали (жирные цифры после фамилии — две последние цифры номера решенной задачи):

Н. Абраменко (Могилев) **30, 36, 38, 40**; *Д. Азов* (Челябинск) **38**; *С. Актершев* (Москва) **28, 34**; *А. Амельченко* (Магнитогорск) **25, 32, 36, 37**; *И. Анкудинов* (Нальчик) **34, 36, 37**; *П. Анциферов* (Фатеж) **34, 36, 38, 39, 40**; *В. Бакуров* (Новосибирск) **25, 28, 29, 32, 34, 36, 38, 40**; *А. Бараов* (Москва) **24, 28, 34, 40**; *А. Барсуков* (Пятигорск) **28, 39**; *Р. Басыров* (д. Каракитяны Тат. АССР) **28, 38, 40**; *М. Белкин* (Пинск) **24—29, 30, 32, 34, 36, 38—41**; *А. Белоусов* (Москва) **28, 30, 32, 34**; *В. Беляев* (Москва) **28, 38, 40, 41**; *В. Бенхан* (Калинин) **37**; *С. Березин* (Кимры) **38**; *Ю. Бляхер* (Душанбе) **28**; *Л. Богомолов* (Одесса) **33, 41**; *С. Бороздин* (Новгород) **25, 28, 29, 32**; *А. Браславец* (Новосибирск) **31—36, 38, 40**; *И. Братовская* (Новосибирск) **24**; *Ю. Бучинскас* (Шяляльский р-н Лит. ССР) **34, 36, 38—40**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **28**; *С. Васильев* (Ленинград) **24**; *Ю. Визгин* (Ленинград) **22, 38—40**; *И. Виняр* (Оргеев) **28, 38**; *А. Волегов* (Свердловск) **36**; *П. Волохов* (п. Криуляны Молд. ССР) **40**; *А. Восканян* (Ереван) **24, 25, 28, 29, 34, 36**; *Р. Габдуллин* (Казань) **37**; *Д. Габриэльян* (Белая Калитва) **40**; *В. Гаврилюк* (Минск) **40, 41**; *М. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) **24—27**; *В. Гальцев* (Оренбург) **38**; *А. Галюченко* (Харьков) **29, 30, 32, 34, 36**; *С. Гаркуша* (Ташкент) **40**; *А. Герман* (Воронеж) **25**; *С. Герц* (Хуст) **32, 40**; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) **40, 41**; *Ю. Гладё* (Тернополь) **24**; *Л. Глазман* (Харьков) **25, 26, 29, 30, 34—38; 40, 41**; *А. Григорьев* (Грозный) **28**; *А. Гринберг* (Кишинев) **29, 40**; *С. Гришин* (Вязьма) **36**; *М. Гулянский* (Магнитогорск) **25, 30, 32, 38**; *А. Гуревич* (Минск) **25, 26, 28—32, 38, 40, 41**; *С. Давтян* (Октемберян) **34, 36, 38, 40, 41**; *А. Давыдов* (Магнитогорск) **25, 29—32, 34, 38**; *С. Даркембаев* (Алма-Ата) **26**; *С. Демидов* (д. Сосновка Вологодской обл.) **36**; *О. Денисов* (Баку) **37**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **28—30, 38**; *Н. Дубровский* (Омск) **38—41**; *Р. Егорян* (Ереван) **25, 28, 31**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **29, 31, 32**; *К. Жакунбеков* (с. Баршатас Семипалатинской обл.) **40**; *В. Железнов* (п. Октябрьский Амурской обл.) **36, 38, 40**; *В. Жук* (Грозный) **27—29, 31, 32, 36, 38—41**; *С. Зазовский* (Новомосковск) **38**; *М. Закс* (Пермь) **40**; *С. Зенович* (Ташкент) **40**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **25, 28, 29, 32, 34, 38, 40**; *В. Иванов* (Железнодорожный) **28**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **24—27**; *А. Измайлов* (Баку) **34, 40**; *А. Илькун* (Зеленодольск) **25, 38, 40**; *А. Казиков* (Рудный) **24**; *С. Каляев* (Сосновый Бор) **38**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **24, 26**; *В. Карлин* (Волоколамский р-н Московской обл.) **24**; *В. Кацман* (Мытищи) **38**; *М. Качановский* (д. Вишевичи Брестской обл.) **24, 25**; *В. Ковальский* (Витебск) **24**; *Л. Коган* (Ленинград) **40**; *Я. Коган* (Глазов) **24, 25, 32, 40**; *С. Корнеев* (Новокузнецк) **25—27**; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) **24, 25, 38, 40, 41**; *Л. Кофман* (Таллин) **24, 34, 40**; *И. Кочегарова* (Рыбинск) **28**; *Г. Коява* (Цхинвали) **32, 36, 38**; *С. Кривонос* (Днепропетровск) **24, 25**; *И. Крюков* (Старый Самбор) **28**; *Н. Кудрин* (Коломна) **38, 40, 41**; *А. Кудряшов* (Саратов) **36**; *В. Кузьмин* (Грозный) **24, 40**; *П. Кузьмин* (Улан-Удэ) **28—32**; *А. Кутанов* (Фрунзе) **24**; *А. Кутлимуратов* (Хорезмская обл. Узб. ССР) **25, 27**; *И. Куцык* (Ярославль) **28, 30, 31, 36, 40, 41**; *Р. Кучкаров* (Хорезмская обл. Узб. ССР) **28, 32**; *Ю. Лавров* (ст. Каневская Краснодарского кр.) **32, 40**; *А. Левитас* (Киев) **36**; *А. Лекчинов* (Шахты) **24; 28**; *А. Лукьянов* (Дубовский) **36**; *П. Лыгденов* (с. Кижинга) **40**; *А. Львов* (Саратов) **28**; *С. Ляпин* (п/о Белокоровичи Житомирской обл.) **24**; *В. Мазалов* (Шауляй) **36, 40**; *М. Маилян* (Ереван) **24**; *А. Макаричев* (Львов) **24, 34, 36—38, 40**; *А. Макаров* (Харьков) **36**; *С. Макаров* (Саратов) **24, 26, 38—40**; *С. Максимов* (Алма-Ата) **37**; *Г. Мамедов* (Баку) **34—38, 40**; *Ю. Маркин* (Харьков) **38**; *А. Марков* (Москва) **38, 42**; *С. Мельник* (Харьков) **24, 28, 32, 38, 40, 41**; *Е. Метт* (Ленинград) **36, 38, 40**; *Л. Миродошвили* (Тбилиси) **38—40**; *А. Молотков* (п/о Кубинка Московской обл.) **36, 38, 40**; *В. Момковский* (Киев) **34**; *Р. Мусин* (с. Никитино Оренбургской обл.) **24**; *Р. Назаргулов* (Стерлитамак) **28, 29**; *И. Никитин* (Ленинград) **29**; *И. Никитин* (Североморск) **28**; *А. Николаев* (Москва) **24, 26, 28**; *Б. Новосядлый* (Чортков) **40**; *С. Нужный* (Куйбышев) **24—26, 28, 29, 31—32, 34, 36, 38—41**; *Г. Оганнисян* (с. В. Арташат Арм. ССР) **36**; *А. Окунь* (Одесса) **28**; *С. Омельченко* (Запорожье) **36**; *С. Онучин* (Пермь) **38, 40**; *Р. Оспанов* (Байрам-Али) **25, 28, 31, 32**; *С. Островская* (Харьков) **34, 38**; *А. Паровичников* (Обнинск) **24**; *Ю. Перфильев* (Саратов) **36, 40**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **24, 26, 28—30, 40—42**; *К. Пирятинский* (Кишинев) **36, 40**; *О. Поваляев* (Подольск) **24, 34, 36, 38—40**; *А. Погуляй* (Уфа) **24, 34, 36**; *М. Поликарпов* (Москва) **24, 35, 36, 38, 40**; *В. Поляков* (Петропавловск) **37**; *А. Полянский* (Челябинск) **34**; *С. Поляруш* (Жабинка) **40**; *В. Прасолов* (Ворошиловград) **31**; *В. Разин* (Белорецк) **38**; *А. Резников* (Киев) **24**; *А. Ремеев* (Ташкент) **33, 34, 36, 38—40**; *С. Рендзиняк* (Стрый) **34, 36, 37**; *В. Решетняк* (Киев) **34, 40, 41**; *А. Решетов* (Грозный) **25, 38**; *М. Рывкин* (Бобруйск) **24, 34, 40**; *В. Рыжиков* (Ахтубинск) **24, 28, 34, 40, 41**; *Я. Ряписов* (Ломоносов) **25, 38, 40**; *Ш. Самиев* (Дангаринский р-н Тадж. ССР) **28, 29**; *В. Свиридов* (Воронежская обл.) **39**; *Р. Сергеев* (д. Перебродье Витебской обл.) **38**; *В. Сержанов* (д. Средне-Белая

Амурской обл.) **36, 37**; *Р. Сирота* (Харьков) **24, 28, 29, 34**; *В. Смоленков* (Ленинград) **24, 38**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **24, 25, 28—30, 32, 34—38, 40**; *А. Степанович* (Москва) **24**; *В. Сторчак* (Кировоград) **24**; *М. Стрибуть* (Лида) **28, 32**; *В. Сусленаров* (Кунгур) **38, 40**; *В. Сычев* (Грозный) **35**; *А. Теванян* (п. Сисиан Арм. ССР) **35, 36, 38**; *Т. Токарев* (Тула) **24**; *Требулева* (Ташкент) **38, 40**; *М. Тульчинский* (Киев) **28**; *Д. Узненко* (Магнитогорск) **24, 25, 28, 31, 32, 34, 36, 40**; *И. Усвят* (Ташкент) **25—29, 31, 32, 34, 36, 39, 40**; *Н. Федин* (Омск) **25—28, 32, 34, 36, 38, 40—42**; *Е. Федоров* (Магнитогорск) **24, 25, 34, 36, 41**; *Д. Фушман*(Черновцы) **26, 27**; *В. Хацимовский* (Красноярск) **24—27**; *А. Холматов* (с. Ярбаши Андижанской обл.) **28—30, 32**; *И. Цифра* (с. Велягино Закарпатской обл.) **28**; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) **38, 40**; *А. Черников* (Воронеж) **36**; *А. Чечулин* (Уфа) **39**; *А. Шабалин* (Магнитогорск) **24, 25**; *М. Шаймухамбетов* (Алма-Ата) **38, 39, 41**; *Ж. Шамурадов* (Ашхабад) **40**; *В. Шишкин* (Октябрьский) **24**; *В. Шапошников* (Фрунзе) **40**; *К. Шварцман* (Кишинев) **24, 39, 40**; *В. Шендрик* (Алма-Ата) **34—36, 38, 39**; *А. Шень* (Москва) **40**; *А. Шестак* (Макаров) **34, 36**; *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.) **34, 36**, *Е. Шестаков* (Москва) **38, 40**; *С. Шишкин* (Медвежьегорск) **24—29, 30, 32**; *В. Шнейдман* (Харьков) **25, 26, 28—32, 34, 36, 38—42**; *С. Шульга* (Киев) **38**; *А. Юдин* (Сызрань) **38**.

С. Г. Семеничинский

Ответы к кроссворду
(см. «Квант», 1974, № 6)

По горизонтали

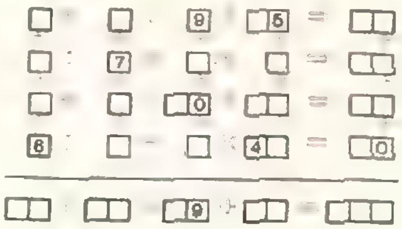
2. Луч. 5. Пульсар. 8. Мезон. 9. Осмий. 13. Люмен. 14. Гук. 15. Катет. 20. Линия. 21. Зеркало. 22. Аргон. 27. Минус. 28. Герц. 29. Свет. 30. Сдвиг. 35. Ответ. 36. Деление. 37. Частное. 38. Бином. 42. Вольт. 43. Бром. 45. Анод. 46. Слюда. 49. Катод. 50. Отрезок. 51. Волна. 54. Точка. 55. Три. 56. Конус. 59. Планк. 60. Герон. 62. Пифагор. 63. Бор.

По вертикали

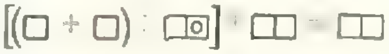
1. Фурье. 3. Кулон. 4. Масса. 6. Вебер. 7. Дирак. 10. Кюрий. 11. Функция. 12. Генри. 16. Синус. 17. Ленц. 18. Плюс. 19. Хорда. 23. Гипербола. 24. Серебро. 25. Нейтрон. 26. Цилиндр. 31. Сто. 32. Век. 33. Ион. 34. Ток. 39. Дьюар. 40. Алгебра. 41. Длина. 44. Метр. 45. Азот. 47. Сорок. 48. Фокус. 52. Шкала. 53. Фотон. 57. Индий. 58. Метод. 61. Закон.

Головоломка

В пустые квадратики поставьте соответствующие цифры, подобрав их так, чтобы, производя последовательно указанные арифметические действия, получать в результате число, стоящее после знака равенства.



Последовательно — значит так, как если бы каждая строка ребуса была снабжена скобками, показывающими последовательность действий по приводимому ниже примеру:



Учтите, что в ребусе числа нижней строки соответственно равны числам последнего столбца. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается цифрой нуль (однако на нуль числа могут оканчиваться).

Л. И. Мочалов

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Варианты вступительных экзаменов в вузы

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Ниже мы помещаем варианты вступительного письменного экзамена по математике, предлагавшиеся поступавшим на факультеты физико-математического профиля Белорусского государственного университета в 1973 году.

Математический факультет

Вариант 1

1. Внутри окружности радиуса R расположены четыре равных окружности меньшего радиуса. Каждая из них касается большей окружности и двух равных ей соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной всеми равными окружностями.

2. В арифметической прогрессии $a_m = n$, $a_n = m$ $(m \neq n)$. Найти a_p.

3. Решить неравенство

$$|x|^{x^2-x-2} < 1.$$

4. Найти значения x в промежутке $[-2\pi, \pi]$, при которых функция $f(x) = \sin x - \cos x$ имеет наименьшее значение.

Вариант 2

1. В треугольной пирамиде все шесть ребер одинаковы. Найти расстояние от центра основания до боковых граней, если радиус вписанного шара равен R.

2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}},$$

если $x = \sqrt{ab}$, $a > b > 0$.

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$$

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Доказать, что если $AB + BD = AC + CD$, то треугольник ABC — равнобедренный.

Факультет прикладной математики

Вариант 3

1. Отношение периметра параллелограмма к его большей диагонали равно k, $k > 2$. Найти углы параллелограмма, если известно, что большая диагональ делит угол параллелограмма в отношении $1:2$.

2. Найти два натуральных числа, разность которых 66, а наименьшее общее кратное 360.

3. Определить, при каких значениях a уравнение

$$2\lg(x+3) = \lg(ax)$$

имеет единственный корень. Найти этот корень.

4. Привести к виду, удобному для логарифмирования,

$$\sin 2\alpha + \cos 4\alpha - \sin 6\alpha.$$

Вариант 4

1. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему шара, описанного около этого конуса, равно k, где $0 < k < 1/8$. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

2. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 660 *км*. В то время, как первый проходит 250 *км*, второй проходит 200 *км*. Найти скорость движения мотоциклистов, считая их движение равномерным, если первый мотоциклист приходит в B на 3 часа раньше, чем второй в A.

3. Решить уравнение

$$-2 + 4\cos^2 x = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{|x+2|-x}{\sqrt{4-x^3}} > 0.$$

Физический факультет

Вариант 5

1. В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрий двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона

основания равна a.

2. Решить неравенство
$$\log_{0,5}(x+1) > \log_2(2-x).$$

3. Решить уравнение
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5.$$

4. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно $\frac{14}{3}$.

Вариант 6

1. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция, диагонали которой перпендикулярны к соответствующим боковым сторонам. Острый угол между диагоналями трапеции равен α. Отрезок прямой, соединяющий вершину при остром угле верхнего основания с центром окружности, описанной около нижнего основания, равен l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

2. Решить уравнение
$$\frac{6\cos^3 2x + 2\sin^3 2x}{3\cos 2x - \sin 2x} = \cos 4x.$$

3. Решить неравенство
$$\frac{x^2 - 3x + 1}{|x^2 - 1|} > 1.$$

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

С. С. Белявский

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы уже рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и образцы билетов устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1973 году.

Математика

Математико-механический факультет
Письменный экзамен по математике

Вариант 1

1. В сосуде имеется несколько одинаковых кранов, которые открывают один за другим через равные промежутки времени. Через 8 часов после того, как был включен последний кран, сосуд был заполнен; при этом оказалось, что первый кран работал в 5 раз больше времени, чем последний. За сколько часов заполнится сосуд, если открыть все краны одновременно?

2. В конус вписан куб с ребром a так, что одно его ребро лежит на диаметре основания конуса; вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, а центр куба лежит на высоте конуса. Определить объем конуса.

3. Решить уравнение
$$\cos^2 x \cdot \cos 2x + \cos 4x + \cos 3x \cdot \cos x + 2\cos^4 x = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$$

4. Даны значения $\lg 24 \approx 1,38021$ и $\lg 25 \approx 1,39794$. Определить без помощи таблиц, сколько нулей содержится после запятой до первой значащей цифры в десятичной записи числа $\sin^{1000}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

Вариант 2

1. Два рабочих разной квалификации выполнили за 3 часа некоторую работу. Если бы первый рабочий начал работу на час раньше, а второй на полчаса позже, то они закончили бы работу на 18 минут раньше, чем в действительности. Если бы второй рабочий начал работу на час раньше, а первый на полчаса позже, то первый рабочий заработал бы на 5 руб. 60 коп. меньше, чем на самом деле. Сколько заработал каждый рабочий в действительности?

2. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро AB равно a, а все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках A и B равны α. Определить объем пирамиды.

3. Найти решения уравнения
$$\frac{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}}{\cos x} = 4\sin x,$$
лежащие в интервале $(0, 2\pi)$.

4. Решить неравенство
$$2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) \geqslant 1.$$

Дополнительные вопросы, предлагавшиеся на устном экзамене по математике

1. Найти область определения функции
$$y = \lg\sqrt{6 - x - x^2}.$$

2. Построить график функции $y = \sqrt{\cos^2 x \cdot \sin x} + \sqrt{\sin^2 x \cdot \cos x}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = a$.

4. Какое из чисел больше: $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ или $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$?

5. Решить уравнение $2^{\sin 3x} = \frac{\sin x}{2}$.

6. Доказать непериодичность функции $y = \cos x + \sin(x\sqrt{2})$.

7. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 7 членов — целые, а следующие — нецелые?

8. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?

9. *Может ли плоскость пересекать пять ребер треугольной пирамиды?*

Физический факультет

Письменный экзамен по математике

Вариант 3

1. В озеро впадают две реки, скорости течения которых одинаковы, на озере течение отсутствует. Пароход выходит из порта B, расположенного на первой реке, и плывет в порт A, расположенный у устья реки, потратив на этот путь $2^3/_4$ часа. Затем пароход плывет дальше из порта A через озеро в порт C на второй реке, затратив на этот путь 3,5 часа. На путь из C в A пароход тратит 3 часа. Сколько времени потребуется пароходу, чтобы подняться вверх по первой реке из порта A в порт B, если известно, что порт A расположен посередине между портами B и C?

2. В равнобедренном треугольнике с углом при основании, равным α, высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определить радиус описанного круга.

3. Решить уравнение

$$(\cos 2x)^{2\cos 3x+4\cos x-1} = \sec 2x.$$

4. Для каждого вещественного a решить неравенство

$$\sqrt{2ax-x^2} \geqslant a-x.$$

Вариант 4

1. Одному буксиру нужно перевести за наименьшее время два понтона вниз по реке на *l км*. Было решено, что один понтон будет отправлен по течению реки самостоятельно, а другой будет некоторое время транспортироваться буксиром, после чего буксир оставит его, вернется за первым понтоном и отбуксирует его до конечного пункта. Сколько времени потребуется на транспортировку буксиром второго понтона, если к конечному пункту оба понтона пришли одновременно и если собственная скорость буксира v *км/ч*, а скорость течения реки u *км/ч*?

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а расстояние от основания высоты до бокового ребра равно a. Определить двугранный угол между боковыми гранями пирамиды.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{7}{12}, \\[2mm] \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{8}{15}, \\[2mm] \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{9}{20}. \end{cases}$$

4. Доказать, что для всех значений x, при которых левая часть имеет смысл, справедливо неравенство

$$(\operatorname{ctg}^2 x-1)(3\operatorname{ctg}^2 x-1)\times$$
$$\times(\operatorname{ctg} 3x \ \operatorname{tg} 2x-1) \leqslant -1.$$

Физика

Математико-механический факультет

Билет 1

1. Третий закон Ньютона. Устройство реактивного двигателя.

2. Разложение белого света призмой. Спектр. Невидимые области спектра. Устройство спектроскопа. Понятие о спектральном анализе.

3. К аккумулятору с внутренним сопротивлением 1 *ом* подключена проволока сопротивлением 4 *ом*, а затем параллельно ей еще одна такая же. Во сколько раз изменится количество теплоты, выделяющееся в первой проволоке, после подключения второй?

Билет 2

1. Гармоническое колебательное движение. Период и частота колебаний. Математический маятник и период его колебаний.

2. Строение ядра атома. Деление ядер урана. Выделение энергии при делении тяжелых ядер.

3. За какое время тело соскользнет с наклонной плоскости с углом β, если по наклонной плоскости с углом α оно движется вниз равномерно ($\beta>\alpha$)?

Билет 3

1. Понятие о волновой и квантовой природе света.

2. Электрический колебательный контур. Превращение энергии в колебательном контуре. Связь периода колебаний контура с его индуктивностью и емкостью.

3. Открытая с двух сторон стеклянная трубка до половины погружена в ртуть. Верхнее отверстие закрывают пальцем и трубку вынимают из ртути, при этом в ней остается столб ртути высотой $h = 22$ *см*. Определить внешнее атмосферное давление, если длина трубки $L = 80$ *см*.

Билет 4

1. Механическая работа. Единицы измерения работы. Мощность, единицы ее измерения.

2. Электрические явления в вакууме. Явление термоэлектронной эмиссии. Электронно-лучевая трубка.

3. Два точечных заряда величиной $q = 3{,}4$ ед. заряда СГСЭ находятся на расстоянии 17 *см*. С какой силой и в каком направлении они действуют на единичный положительный заряд, находящийся на расстоянии 17 *см* от каждого из них?

Физический факультет

Билет 1

1. Магнитное взаимодействие проводников с током. Сила, действующая на проводник с электрическим током в магнитном поле.

2. Почему изотермическое расширение газа возможно только при подведении к нему некоторого количества теплоты?

3. На какую максимальную глубину можно погрузить в воду точечный источник света, чтобы квадратный плот со стороной 4 *м* не пропускал света в пространство над поверхностью воды? Коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$, центр плота находится над источником света.

Билет 2

1. Сложение сил. Равнодействующая сила. Сложение параллельных сил. Условие равновесия тела, имеющего ось вращения.

2. Переносят ли энергию волны, распространяющиеся по поверхности воды?

3. Тело падает с высоты H без начальной скорости. На высоте h оно абсолютно упруго ударяется о площадку, расположенную под углом 30° к горизонту. Определить высоту подъема над точкой удара о площадку.

Билет 3

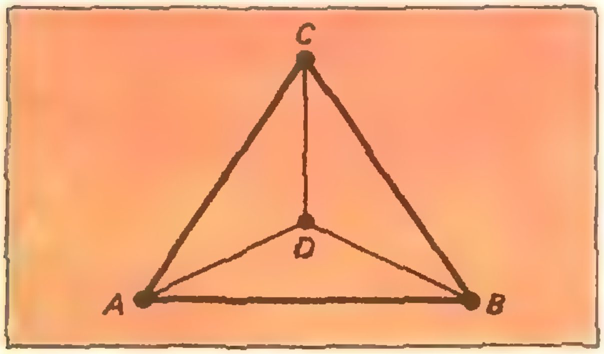
1. Кипение. Зависимость температуры кипения от давления. Удельная теплота парообразования. Конденсация пара.

2. Как изменится освещенность экрана точечным источником света, если параллельно экрану поместить плоское зеркало на таком же расстоянии от источника, как экран.

3. Металлический шар $r = 5$ *см* заряжен до потенциала $U = 150$ *в*. Чему равна напряженность поля в точке, удаленной от поверхности шара на 10 *см*? Как изменится напряженность поля, если шар соединить со вторым шаром радиуса 10 *см*, а затем второй шар убрать?

Билет 4

1. Явления, свидетельствующие о сложном строении атома. Электронная оболочка и ядро. Излучение и поглощение энергии атомом. Энергия связи атомных ядер.



2. Найти сопротивление схемы между точками A и B (см. рисунок), если сопротивление каждого ребра 1 *ом*.

3. Тележка массой $M = 20$ *кг* катится без трения по горизонтальной плоскости. На ней находится брусок массой $m = 2$ *кг*. Коэффициент трения бруска о тележку 0,25. В одном случае к бруску приложена сила $F_1 = 200$ *дн*; в другом $F_2 = 6$ *н*. Найти ускорение бруска и тележки в обоих случаях.

Э. А. Голубов

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы уже рассказывали о математическом факультете Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного педагогического института им. В. И. Ленина.

Физический факультет МГПИ им. В. И. Ленина готовит учителей физики для средней школы по двум специальностям: учитель физики и учитель физики с правом преподавания на иностранном языке (английском или французском).

На факультете работают известные ученые и авторы учебников для высшей и средней школы, профессора Н. Н. Малов, Е. М. Гершензон, Б. М. Яворский, В. И. Левин, член-корреспондент АПН СССР профессор А. В. Перышкин, лауреат Государственной премии, профессор Э. В. Шпольский, лауреат Ленинской премии, профессор М. С. Рабинович и другие.

В составе факультета 6 кафедр: общей и экспериментальной физики, теоретической физики, физики твердого тела, методики преподавания физики, математической физики и общетехнических дисциплин.

Кроме основных курсов, на всех кафедрах читаются разнообразные спецкурсы, организована работа в спецпрактикумах и научных кружках.

При кафедрах физического факультета работают проблемные лаборатории (оптическая, физики полимеров и др.), где сосредоточены большие научные силы. В работе этих лабораторий принимают участие и студенты факультета.

На факультете работает студенческое научное общество.

Для поступления на факультет абитуриенты должны сдать вступительные экзамены, требования к которым определяются общими программами для поступающих в вузы.

Для иногородних абитуриентов работают очно-заочные подготовительные курсы.

В течение всего года занимающимся на курсах высылаются задания и специальные подготовительные материалы. В июле слушатели курсов вызываются в Москву для очных занятий.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике на математический и физический факультеты МГПИ им. В. И. Ленина в 1973 году.

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\log_{x^2-3}8 < -3.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sin 3x + \cos 3x,$$

удовлетворяющие условию $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Через вершину основания правильной треугольной пирамиды под углом α к нему проведено сечение, параллельное противолежащей стороне основания и перпендикулярное к противолежащей боковой грани. Определить объем пирамиды, зная ее апофему a.

4. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_5 \frac{x+7}{16-2x} > \log_5 x.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3}\cos 2x}{1+\cos 2x},$$

удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

3. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину a. Соответствующие им боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Определить объем пирамиды.

4. Два поезда отправляются одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 *км/ч* больше скорости второго. Оба поезда встречаются на расстоянии 28 *км* от середины AB. Если бы первый поезд отправился из пункта A на 45 *мин* позже второго, то оба поезда встретились бы на середине AB. Найти расстояние AB и скорости обоих поездов.

Физический факультет

Вариант 1

1. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого стороны $AB = BC = a$ и угол A равен α. Через сторону AC проведена плоскость под углом φ $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ к основанию. Найти площадь сечения, если известно, что в сечении получился треугольник.

2. Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, так, что сумма крайних членов равна 35, а сумма средних 30.

3. Решить уравнение:

$$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0.$$

4. Решить уравнение:

$$\frac{2^{2x+1}-9}{4} + \frac{2}{4^{x+\frac{1}{2}}} = 0.$$

Вариант 2

1. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

2. Вычислить:

$$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5}}}}\ldots$$

3. Решить уравнение:

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0.$$

4. Решить уравнение:

$$\frac{\log_5(2x+3)}{1-\log_5(2x+3)} + \frac{3}{5-\log_5(2x+3)} = 0.$$

Вариант 3

1. Определить объем пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α. Ребра наклонены к плоскости основания под углом β и равны b.

2. Написать арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, причем сумма первых пяти членов равна $^1/_4$ суммы следующих пяти членов.

3. Решить уравнение:

$$4\sin^2 x + 3\cos^2 x = 6{,}5\sin 2x.$$

4. Решить уравнение:

$$\frac{\log_2(3x-1)}{1+\log_2(3x-1)} = \frac{2}{3+\log_2(3x-1)}.$$

Физика

Математический и физический факультеты

1. Люстра весом 680 *н* подвешена к потолку на металлической цепи, длина которой

$l=3$ *м*. Какова высота h, на которую можно отклонить люстру, чтобы при последующих качаниях цепь не оборвалась? Разрыв цепи наступает при натяжении $F_н = 1360$ *н*.

2. Два груза массой 5 и 3 *кг* подвешены к концам нити, перекинутой через блок. Меньший груз находится на 1 *м* ниже большего. Если предоставить грузам двигаться под действием силы тяжести, то через сколько времени они будут на одинаковой высоте? Трение не учитывать.

3. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением 1 *м/с*². Уклон горы равен 1 *м* на каждые 20 *м* пути. Масса автомобиля равна 900 *кг*, коэффициент трения колес о дорогу 0,1.

4. Санки весом 60 *н* скатываются с горы, которая образует с горизонтом угол 30°. Пройдя по склону 40 *м*, санки развивают скорость 3,6 *м/с*. Вычислить количество теплоты, выделенной при трении полозьев о снег.

5. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v_1 = 400$ *м/с*, пробивает доску, вследствие чего скорость пули уменьшается до $v_2 = 200$ м/с. Температура пули в момент удара 30° С. Какая часть массы пули расплавится, если считать, что на нагрев пули расходуется 80% энергии?

6. В сосуде находится воздух при нормальных условиях. Сосуд закрыт поршнем, площадь которого $S = 1$ *см*², а масса $m = 1{,}5$ *кг*. До какой температуры надо нагреть воздух, чтобы он приподнял поршень? Расширение сосуда при нагревании не учитывать.

7. В сосуде нагревают 1 *л* воды и 50 *г* льда. Начальная температура 0 °С. Сколько времени потребуется, чтобы вода закипела, если мощность нагревателя 500 *вт*, его к. п. д. 60%?

8. Резиновый шар содержит 2 *л* воздуха, находящегося при температуре 20 °С под атмосферным давлением 760 *мм рт. ст.* Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину 10 *м*? Температура воды 4° С.

9. Электровоз движется со скоростью 45 *км/ч* и развивает в среднем силу тяги 4000 *н*. Определить, какой силы ток потребляет двигатель электровоза, если напряжение на зажимах 500 *в*. К. п. д. равен 96%.

10. Электрический чайник с 600 *см*³ воды при 18 °С, сопротивление обмотки которого при накале 20 *ом*, забыли выключить. Через сколько времени после включения вся вода выкипит? Напряжение сети 220 *в*, к. п. д. чайника 60%.

11. Какое количество электроэнергии расходуется на получение 1 *кг* алюминия, если электролиз ведется при напряжении 10 *в*, коэффициент полезного действия всей установки 80%. Атомный вес алюминия 27.

12. В фокусе двояковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ *см* перпендикулярно к оптической оси установлено плоское зеркало. С другой стороны линзы на расстоянии 45 *см* от нее находится светящийся предмет. Где и какое получится изображение этого предмета?

13. Длина волны желтых лучей в воздухе 580 *ммк*. Какова длина волны их в воде?

С. Е. Каменецкий, В. И. Крупич, Н. Е. Парфентьева, Л. П. Постникова, М. М. Чернецов, Г. А. Шадрин

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

МОПИ был организован в 1931 году на базе педагогического техникума имени Профинтерна, начавшего свою работу в 1922 году. В институте имеется 8 факультетов: математический, физический, литературный, естественно-географический, исторический, физического воспитания, романо-германских языков, английского языка, а также факультет повышения квалификации преподавателей педвузов РСФСР, подготовительное отделение на правах факультета, аспирантура и другие учебные подразделения. Институт готовит специалистов широкого и узкого профиля для работы в средней школе по новым программам.

Математический факультет готовит учителей математики для средней школы. На кафедрах факультета ведется подготовка аспирантов по специальностям: *теория функций и функциональный анализ, методика преподавания математики, геометрия и топология, алгебра и теория чисел.*

Физический факультет готовит учителей физики, учителей физики на французском или английском языке и учителей общетехнических дисциплин (со второй специальностью — учитель черчения). На факультете имеется аспирантура по специальностям: *экспериментальная физика, теоретическая физика и методика преподавания физики.*

Подготовительное отделение института, работающее на правах факультета, ведет подготовку с отрывом от производства по следующим специальностям: математика (матфак), физика (физфак), история (истфак), биология и химия (естфак), английский язык (инфак), русский язык и литература (литфак). На подготовительное отделение (по результатам собеседования) принимаются передовые рабочие и колхозники, имеющие непрерывный стаж работы не менее одного года, — по направлениям промышленных предприятий, строек, организаций транспорта и связи, геологоразведочных организаций, колхозов и совхозов, а также демобилизованные из рядов Советской Армии отличники боевой и политической подготовки — по направлению командования воинских частей. Слушатели подготовительного отделения пользуются правами студентов первого курса — обеспечиваются общежитием, получают стипендию. Срок обучения на подготовительном отделении — 8 месяцев; по окончании обучения слушатели сдают выпускные экзамены. Слушатели, получившие на выпускных экзаменах положительные оценки, зачисляются на первые курсы соответствующих факультетов дневного отделения института без сдачи вступительных экзаменов.

Ниже приводятся образцы вариантов письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в МОПИ имени Н. К. Крупской в 1973 году.

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. Упростить выражение $(a \neq 0)$:

$$A = \frac{a^2 + 4}{a\sqrt{\frac{(a^2-4)^2}{4a^2} + 4}}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\lg(x^2-1)}{\lg(1-x)} < 1.$$

3. Около круга радиуса R описана трапеция с острыми углами α и β при большем основании. Найти площадь этой трапеции.

4. Если натуральное число имеет вид $2m^2 + n^2$, то квадрат этого числа может быть представлен в виде $2a^2 + b^2$, где a, b, m, n — не равные между собой натуральные числа. Доказать.

Вариант 2

1. Упростить выражение:

$$A = \frac{\sqrt{(b+2)^2 - 8b}}{\sqrt{b} - \frac{2}{\sqrt{b}}}$$

$(b \neq 0,\ b \neq 2)$ и вычислить его значение при $b = 0{,}0025$.

2. Решить неравенство

$$\frac{\lg(x^2-6x+8)}{\lg(x-8)} > 1.$$

3. Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно k. Найти сумму тангенсов острых углов треугольника.

4. Цифры четырехзначного числа — последовательные, возрастающие числа натуральной последовательности чисел. Найти разность между числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, и данным числом.

Физический факультет

Специальность «физика»

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{x+2}{x+1} = \frac{12}{x-2} + \frac{18x}{(x+1)(2-x)}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$$

3. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно высоте и равно h. Острый угол трапеции равен α. Найти периметр трапеции.

4. Из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч двигался пешеход. Велосипедист, отправившийся одновременно с пешеходом из B в A, встретился с ним через 1 час 12 мин. Прибыв в пункт A, велосипедист повернул обратно и догнал пешехода в 20 км от пункта B. Найти расстояние AB и скорость движения велосипедиста.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\frac{2y-1}{14y^2+7y} + \frac{8}{12y^2-3} = \frac{2y+1}{6y^2-3y}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

3. В трапеции, основания которой равны a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами трапеции.

4. Отправляясь в путешествие, турист рассчитывал истратить в дороге 72 руб. В течение первых 5 дней его расходы совпадали с расчетными, а затем он стал расходовать в среднем на 1 руб. больше намеченного ежедневно. Задержавшись к тому же в пути на 1 день, он вернулся домой, истратив на путешествие на 23 руб. больше, чем намечал. Сколько дней был этот турист в дороге?

Специальность «физика на французском (или английском) языке»

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$\frac{x+9}{x^2-3x-10} - \frac{x+15}{x^2-25} = \frac{1}{x+2}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x.$$

3. Из точки A, отстоящей от плоскости на расстояние a, опущен на плоскость пер-

пендикуляр AO и проведены наклонные AB и AC под углом 45° к плоскости каждая. Угол BOC равен 90°. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить графически уравнение:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$\frac{5}{2+x}-\frac{40}{x^3-4x}=\frac{7}{2-x}.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{3\sin^2 x-1}{\cos^2 x}=1.$$

3. Из точки A, отстоящей от плоскости на расстояние, равное a, опущен на эту плоскость перпендикуляр AO и проведены две наклонные AB и AC под углом 60° к плоскости каждая. Угол BOC равен 120 Найти высоту OD треугольника BOC.

4. Решить графически уравнение

$$x^2-x+2=\frac{x^3-4x}{x^2-2x}.$$

Специальность «общетехнические дисциплины» (с дополнительной специальностью «черчение»)

Вариант 7

1. Периметр прямоугольного треугольника с острым углом α равен $2p$. Найти площадь этого треугольника.

2. Решить уравнение

$$x+1=\frac{6}{x}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x=\cos x.$$

4. Решить неравенство

$$|3x-2|>1.$$

Вариант 8

1. Периметр равнобедренной трапеции с острым углом α равен p. Высота трапеции равна h. Найти площадь этой трапеции

2. Решить уравнение

$$\frac{2}{x+1}=x.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x=1+\cos x.$$

4. Решить неравенство

$$|2x-1|<1.$$

Физика

1. Манометр на баллоне со сжатым газом на складе при $t=-3$ °С показывал давление 80 *атм*. Какое давление покажет манометр в цехе при температуре 17 °С после того, как половина газа будет израсходована?

2. Шарик висит на легкой нерастяжимой нити длиной 1 *м*. Какую минимальную скорость надо сообщить шарику в нижней точке, чтобы он описал полную окружность?

3. Электрический чайник емкостью 2 *л* и мощностью 500 *вт*, полный воды, при $t=20$ °С включили в сеть и забыли выключить. Через какое время возникнет опасность пожара, если к. п. д. чайника 0,7?

4. Зрительная труба, имеющая объектив с оптической силой 2 *дптр*, была настроена на бесконечность. Затем ее перестроили для того, чтобы наблюдать предмет, расположенный на расстоянии 10 *м* от объектива. К чему свелась перестройка?

5. Определить коэффициент трения при движении тела по наклонной плоскости, если скорость равномерного движения тела вверх по наклонной плоскости в 2 раза меньше скорости равномерного движения вниз. Мощность в обоих случаях затрачивается одинаковая, а наклонная плоскость составляет угол 5 с горизонтом

Г. Л. Луканкин, Ю. М. Колягин

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Московский авиационный технологический институт имени К. Э. Циолковского занимается подготовкой инженеров-технологов по новой технике для авиационной и других отраслей промышленности.

В МАТИ имеются следующие факультеты: авиационно-технологический, авиационно-механический, факультет радиоэлектронной аппаратуры и вечерний факультет. Авиационно-технологический факультет готовит инженеров-металлургов по металловедению, оборудованию и технологии термической обработки металлов; литейному производству черных и цветных металлов; обработке металлов давлением; металлургии и технологии сварочного производства. Авиационно-механический факультет готовит инженеров-механиков по самолетостроению, авиационным двигателям, технологии переработки неметаллических материалов. Факультет радиоэлектронной аппаратуры готовит инженеров-механиков по авиационному приборостроению и радиоинженеров-технологов по конструированию и производству радиоаппаратуры.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике 1973 года.

Факультет радиоэлектронной аппаратуры

1. Решить уравнение:

$$\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=\sqrt{2x+7}.$$

2. Решить уравнение:

$\sin x+\sin 2x=\cos x+\cos 2x.$

3. Каждый из равных углов боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равен φ. Расстояние от середины высоты до бокового ребра равно l. Найти высоту пирамиды.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}4x^2-4xy+y^2+2x-y=0,\\4x^2+4xy+y^2+2x+y=0.\end{cases}$$

5. Решить неравенство:

$$|\log_3(3x+1)+1|>2-\log_3(x+1).$$

Авиационно-механический факультет

1. Решить уравнение.

$$(x-2)\lg 25=\lg 5-\frac{1}{2}\lg 5^{x-1}.$$

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{17}\cos 4x+2\sqrt{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=5.$$

3. Из точки ребра двугранного угла, равного α, в одной из его граней проведен отрезок, составляющий с этим ребром угол β. Какой угол образует отрезок с другой гранью?

4. Доказать, что равенство двух комплексных чисел

$$z_1=x+2y+(4x+y-2)i,$$
$$z_2=1-2x+y+(1-2x-y)i$$

невозможно ни для каких действительных чисел x и y.

5. Решить неравенство:

$$(x^2-4)\log_{0,5}x>0.$$

И. В. Коновальцев, В. И. Новиков

Ярославский политехнический институт

Ярославский политехнический институт (до 1973 года он назывался технологическим) был открыт в 1944 году. В институте шесть факультетов: 1) технологический (специальности: технология основного органического и нефтехимического синтеза, химическая технология синтетического каучука, технология резины); 2) факультет технологии электрохимических и лакокрасочных покрытий (специальности: технология электрохимических производств, химическая технология лаков, красок и лакокрасочных покрытий); 3) механический (специальности: машины и аппараты химических производств, автоматизация и комплексная механизация химико-технологических процессов, двигатели внутреннего сгорания, технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты, машиностроение, автомобильный транспорт); 4) инженерно-строительный (специальности: промышленное и гражданское строительство, строительные и дорожные машины и оборудование); 5) общетехнический; 6) вечерний. Обучение на общетехническом факультете ведется по вечерней форме образования. Студенты три года обучаются общим инженерным дисциплинам технологического, механического и строительного профиля, после чего могут перейти на 4 курс вечернего факультета по избранной специальности.

При институте имеется подготовительное отделение с дневной формой обучения. Выпускники института направляются для работы на заводы, в научно-исследовательские и проектные организации.

Математика

(письменный экзамен, 1973 г)

Вариант 1

1. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник; боковая грань, проходящая через один из катетов, образует с плоскостью основания угол α.

Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости под углом β.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2\dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2,\\[2ex]\log_8 x\cdot\log_2(y+1)^2=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

3. Найти область определения функции

$$y=\sqrt[4]{2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}}+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}.$$

Вариант 2

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Найти объем пирамиды.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2,\\x^2+y^2-4x=0.\end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 2x+\cos^4 2x.$$

Вариант 3

1. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} \sqrt{a} + \log_{\frac{y}{\sqrt{b}}} \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x+3)(x-4)} - 1} + \frac{1}{\log_8 (x-4)}$$

4. Решить уравнение

$$|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}} = 1.$$

Физика

Вступительные экзамены в ЯПИ проводятся в полном соответствии с программой по физике для поступающих в вузы. Абитуриенты сдают устный экзамен. На экзаменах каждому абитуриенту предлагается два теоретических вопроса и одна задача. Приведем задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в 1973 году.

1. Автомобиль вторую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза большей, чем первую. Его средняя скорость на всем пути $v_{\text{ср}} = 43{,}2$ *км/ч*. Каковы скорости автомобиля на первой и второй половинах пути?

2. Определить работу A поднятия груза массой $m = 100$ *кг* с ускорением $a = 1$ *м/с²* по наклонной плоскости длиной $l = 2$ *м*. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu = 0{,}1$.

3. Груз массой $m = 100$ *кг* перемещают равномерно по горизонтальной плоскости, прилагая силу F под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить величину этой силы, если коэффициент трения между грузом и плоскостью $\mu = 0{,}3$.

4. Трамвай, масса которого $m = 19{,}6$ *т*, идет по выпуклому мосту со скоростью $v = 32{,}4$ *км/ч*. Радиус кривизны моста $R = 30$ *м*. С какой силой F давит трамвай на мост на расстоянии $s = 15{,}7$ *м* от его середины?

5. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой $m_1 = 5$ *кг* и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $u_2 = 1$ *м/с*. Масса конькобежца $m_2 = 60$ *кг*. Определить работу A, совершенную конькобежцем при бросании гири.

6. Ракета, пущенная вертикально вверх, поднялась на высоту $h = 630$ *км* и начала падать. Какой путь s пройдет ракета за первую секунду свободного падения? Радиус Земли $R = 6370$ *км*. Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g_0 = 9{,}8$ *м/с²*.

7. Определить массу m и количество n молекул водорода, содержащихся в сосуде емкостью $V = 20$ *л* при давлении $p = 2{,}46$ *атм* и температуре $t = 27$ °C.

8. В воде на глубине $h_1 = 1$ *м* находится пузырек воздуха. На какой глубине h_2 этот пузырек воздуха будет иметь втрое меньший объем? Давление атмосферного воздуха $p_0 = 760$ *мм рт. ст.*, плотность воды $\rho = 10^3$ *кг/м³*, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ *м/с²*.

9. Металлическому шару, находящемуся в воздухе ($\varepsilon = 1$), сообщили заряд $q = 1$ *нк*. Радиус шара $R = 15$ *см*. Определить напряженность E и потенциал φ поля: а) вне шара на расстоянии $r = 10$ *см* от поверхности шара, б) на поверхности шара, в) в центре шара.

10. В двух противоположных вершинах квадрата со стороной $a = 30$ *см* находятся заряды $q = 2 \cdot 10^{-7}$ *к*. Найти напряженность E и потенциал φ электрического поля в двух других вершинах квадрата.

11. Какую работу A требуется совершить для того, чтобы два заряда величиной $q = 3 \cdot 10^{-6}$ *к* каждый, находящиеся в воздухе ($\varepsilon = 1$) на расстоянии $r_2 = 60$ *см* друг от друга, сблизить до расстояния $r_1 = 20$ *см*?

12. Одному шару сообщили заряд 13 *нк*, второму 18 *нк*. Затем шары соединили проволокой. Найти окончательное распределение зарядов на шарах. Радиус первого шара $R_1 = 8$ *см*, второго $R_2 = 18$ *см*. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

13. Вольтметр имеет сопротивление $R = 2\,000$ *ом* и измеряет напряжение до $U_1 = 100$ *в*. Какое нужно поставить добавочное сопротивление R_x, чтобы измерить напряжение до $U = 220$ *в*?

14. Найти главное фокусное расстояние F и оптическую силу D двояковогнутой линзы, если расстояние от линзы до предмета $d = 36$ *см*, а до изображения $f = 9$ *см*.

15. Вычислить главное фокусное растояние F плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны $R = 20$ *см*, когда линза находится в воде. Абсолютный показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}5$, воды $n_2 = 1{,}33$.

В. С. Колпаков, Р. Н. Сахарова

Ташкентский автомобильно-дорожный институт

ТАДИ — один из самых молодых вузов нашей страны, он организован в 1972 году. В настоящее время в институте готовят инженеров широкого профиля по специальностям: автомобильный транспорт, автомобильные дороги, строительно-дорожные машины и оборудование, мосты и туннели, экономика и организация автомобильного транспорта.

Со дня основания института функционирует дневное подготовительное отделение.

Ниже приводятся варианты письменных вступительных экзаменов по математике и физике в 1973 году.

Математика

Вариант 1

1. Упростить выражение:

$$\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\cdot\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

2. Решить уравнение:

$$x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6.$$

3. Доказать тождество:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}-\cos 8\alpha\cdot\operatorname{ctg}4\alpha=\sin 8\alpha.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде высота, равная H, образует с боковой гранью угол α. Сечение, проведенное через диагональ основания, наклонено к основанию под углом φ. Определить площадь сечения.

Вариант 2

1. Упростить выражение:

$$\left(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2\right)\times$$
$$\times\frac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x^3+y^3=7,\\x^2y+xy^2=-2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$$

4. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны. Угол между образующей и плоскостью большего основания равен α. Образующая равна l. Определить полную поверхность усеченного конуса.

Физика

Вариант 1

1. Громкость и высота звука.

2. Количество теплоты. Внесистемная единица количества теплоты — калория. Формула подсчета количества теплоты, необходимой для нагревания тела.

3. Последовательное соединение проводников. Реостаты.

4. Энергия связи атомных ядер.

5. Автомобиль движется по выпуклому мосту радиусом кривизны $R=40$ *м*. Какое максимальное горизонтальное ускорение может развить автомобиль в высшей точке моста, если скорость его в этой точке $v=50{,}4$ *км/ч*, а коэффициент трения колес автомобиля о мост $k=0{,}6$?

Вариант 2

1. Центростремительное ускорение.

2. Коэффициент полезного действия теплового двигателя.

3. Закон Джоуля — Ленца.

4. Способы наблюдения элементарных частиц.

5. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $\alpha=10°$. По ней пускают снизу вверх камень, который за время $t=3$ *с* проходит расстояние $s=12$ *м*, после чего соскальзывает вниз. Чему равно время движения камня вниз? Каков коэффициент трения между горой и камнем?

Вариант 3

1. Условие равновесия тела на наклонной плоскости.

2. Источники тока. Электродвижущая сила.

3. Открытый колебательный контур. Излучение и прием электромагнитных волн.

4. Собирающая линза. Построение изображений в линзе.

5. В комнате объемом 120 $м^3$ при температуре 15 °С относительная влажность составляет 60%. Определить массу водяных паров в воздухе комнаты. Упругость насыщенного водяного пара при 15 °С равна 12,79 *мм рт. ст.*

Вариант 4

1. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. Единицы ускорения.

2. Плавление. Удельная теплота плавления.

3. Электроемкость. Единицы электроемкости.

4. Линзы. Формула линзы.

5. При электролизе воды через ванну в течение времени $t=25$ *мин* шел ток $I=20$ *а*. Какова температура выделившегося кислорода, если он находится в объеме $V=1$ *л* под давлением $p=2$ *атм*? Электрохимический эквивалент кислорода $k=8{,}29\cdot10^{-8}$ *кг/к*. Универсальная газовая постоянная $R=8317$ *дж/кмоль·град*.

Н. Р. Гулькаров,
Ф. З. Закриллаев,
Е. В. Пак,
А. У. Умирбеков

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие во II-ом квартале 1974 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Погорелов А. В., *Элементарная геометрия* (объем 12 л., тираж 200 000 экз., цена 32 коп. Издание 2-е).

Книга представляет собой систематический курс элементарной геометрии. Теоретический материал, изложенный в книге, посвящен наиболее трудным вопросам школьной программы по геометрии. Большое количество задач облегчает восприятие материала. Книга предназначена учителям, а также школьникам 8—10 классов.

2. Перельман Я. И., *Занимательная алгебра* (объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 27 коп. Издание 13-е).

Книга принадлежит перу известного популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана. Основная цель книги — развить у читателя вкус к занятиям математикой. Книга написана интересно и увлекательно. Она рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

3. Гарднер М., *Математические новеллы* (объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 33 коп).

Математические новеллы — третья книга известного американского популяризатора науки Мартина Гарднера, переведенная на русский язык. В книге помещены новеллы на самые разнообразные математические темы, увлекательные задачи и игры. Книга представляет интерес для всех любителей математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. *Сборник задач и вопросов по физике* (под редакцией Л. С. Жданова; объем 21 л., тираж 300 000 экз., цена 67 коп. Издание 2-е).

Сборник состоит из задач и вопросов по всем темам школьной программы физики. Большинство задач приведены с решениями. Книга рассчитана на широкий круг читателей.

2. Шаскольская М. П., Эльцин И. А., *Сборник избранных задач по физике* (объем 12 л., тираж 200 000 экз., цена 44 коп. Издание 4-е).

Книга представляет собой сборник задач, большинство из которых предлагалось на физических олимпиадах МГУ. Ко всем задачам приведены подробные решения и указания. Книга предназначена для учащихся 8—10 классов, а также для людей, готовящихся для поступления в институты.

3. Яворский Б. М., Пинский А. А., *Основы физики* (объем 30 л., тираж 200 000 экз., цена 94 коп. Том 1-й).

В книге рассмотрены следующие вопросы: движение и силы; законы сохранения; молекулярно-кинетическая теория газа; молекулярные силы и агрегатные состояния; электродинамика.

4. Яворский Б. М., Пинский А. А., *Основы физики* (объем 30 л., тираж 200 000 экз., цена 94 коп. Том 2-й).

В книге рассмотрены следующие вопросы: колебания и волны; основы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел; физика ядра и элементарных частиц.

В данном двухтомнике рассмотрены важнейшие вопросы классической и современной физики. Применяемый математический аппарат доступен школьникам старших классов. Книга рассчитана на учащихся старших классов, интересующихся физикой. Она представляет также интерес и для учителей.

5. Ландау Л. Д., Китайгородский А. И., *Физика для всех* (объем 20 л., тираж 300 000 экз., цена 76 коп. Издание 3-е).

В книге излагаются вопросы механики, атомного строения вещества, а также молекулярные и тепловые явления. Популярно, но строго авторы рассказывают о сложных идеях современной физики. Легкий язык, популярность изложения, новый свежий подход к сложным явлениям делают книгу полезной для самого широкого круга читателей.

6. Бронштэн В. А., *Гипотезы о звездах и Вселенной* (объем 20 л. тираж 300 000 экз., цена 90 коп).

В популярной форме в книге рассказывается о том, как развивались наши представления о природе, эволюции и происхождении звезд, о необычных звездах: цефеидах, новых и сверхновых, о происхождении и эволюции галактик, об открытии и исследовании новых интересных небесных тел — квазаров. Отдельные главы посвящены проблемам строения и развития Большой Вселенной. Основное внимание уделяется роли гипотез в изучении звезд, галактик и Вселенной в целом. Цель книги — рассказать, как создаются, проверяются, опровергаются или подтверждаются научные гипотезы о природе и происхождении небесных тел. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Знание»

7. Лишевский В. П., *Физика вокруг нас* (объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 17 коп).

В книге рассматриваются вопросы, так называемой повседневной практической физики. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

8. *Физики о физике* (объем 3 л., тираж 100 000 экз., цена 10 коп).

В сборнике помещены наиболее интересные научно-популярные статьи крупных зарубежных ученых об актуальных проблемах теоретической и экспериментальной физики. Излагаемый материал доступен учащимся старших классов средней школы.

Научно-фантастическая литература

Издательство «Мир»

1. Браун Ф., Тенн У., *Звездная карусель* (объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 86 коп).

Сборник научно-фантастических произведений состоит из рассказов видных американских писателей-фантастов Ф. Брауна и У. Тенна, впервые издаваемых в нашей стране.

Богатство фантазии авторов, их пытливый интерес к научно-техническим проблемам несомненно понравится широкой читательской аудитории.

Издательство «Молодая гвардия»

2. *Поговорим о будущем* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 60 коп).

Сборник состоит из статей крупных ученых, рассказывающих о будущем науки.

Академик Н. Семенов покажет, как увеличится энерговооруженность к началу XXI века по сравнению с сегодняшним днем. О проблемах и задачах по охране окружающей среды расскажет академик И. Петрянов-Соколов. В статье «Предприятия будущего» доктора наук А. Кобринский и Н. Кобринский опишут фабрики и заводы будущего, степень их автоматизации, условия работы на них. О новых веществах двухтысячного года расскажет профессор А. Китайгородский. Какими будут в то время транспорт и связь, читатели узнают из статей докторов наук В. Молярчука и Н. Петровича.

3. Бардин В., *Гостеприимная Антарктика* (объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 70 коп).

Автор, участник шести советских антарктических экспедиций, рассказывает о работе советских антарктических исследователей на станции Молодежная, о встречах с японскими и бельгийскими полярниками, о работе геологов в горах Земли Королевы Мод, о жизни в антарктическом оазисе на советской станции Новолазаревская.

4. *Фантастика — 74* (объем 26 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 10 коп).

Традиционный сборник новых научно-фантастических рассказов советских авторов.

Издательство «Детская литература»

5. Анфилов Г., *Бегство от удивлений* (объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 61 коп).

Автор показывает, как раскрывались удивительные явления природы. Путь решения сложных проблем физики — вот тема этой книги.

6. Белоусов В., *Занимательная стандартизация* (объем 9 л., тираж 75 000 экз., цена 54 коп).

Книга состоит из отдельных очерков, посвященных молодой быстроразвивающейся науке — стандартизации. Ее с удовольствием прочитают школьники 8—10 классов.

7. Рич В., *Виток спирали* (объем 10 л., тираж 75 000 экз., цена 41 коп).

Эта книга посвящена истории развития химии. Ее с удовольствием прочитают школьники 8—10 классов.

8. Казанцев А., *Фаэты* (объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 93 коп).

Фантастический роман о гибели цивилизации на планетах Фобос и Деймос и о возникновении жизни на Земле.

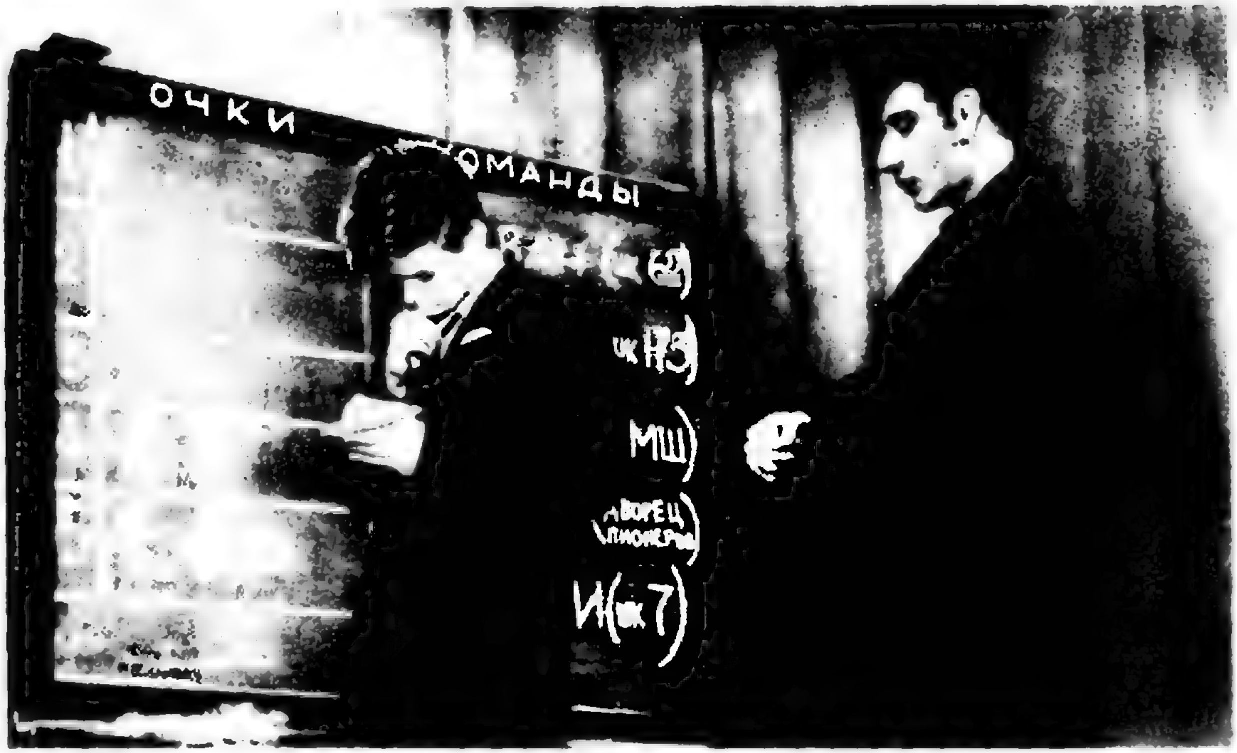
9. Мирер А., *Дом скитальцев* (объем 23 л., тираж 100 000 экз., цена 88 коп).

Остросюжетная фантастическая повесть о контакте землян с представителями инопланетной цивилизации.

10. *Мир приключений* (объем 46 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 67 коп).

Сборник приключенческих и научно-фантастических повестей и рассказов советских и зарубежных писателей.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский



ИНФОРМАЦИЯ

Пятый праздник юных математиков Закавказья

В дни осенних каникул, с 4 по 9 ноября 1973 года, в Батуми проходил традиционный праздник юных математиков Закавказья. На этот праздник в гости к учащимся Батумской средней школы № 7 приехали школьники из Тбилиси (ФМШ № 2 им. Комарова и математический кружок Дворца пионеров), Баку (шк. № 173), Еревана (шк. № 62), а также члены редколлегии и авторы журнала «Квант». Организаторами праздника были Совет профсоюзов Аджарии, Отдел просвещения Батумского горисполкома и Батумская школа № 7.

Оргкомитет во главе с преподавателем математики школы № 7 М. И. Жгенти проделал большую работу по подготовке праздника и составлению его программы; активное участие в этой работе принял доцент Тбилисского государственного университета А. Д. Бендукидзе.

4 ноября состоялось торжественное открытие праздника и встреча с представителями журнала «Квант». Они рассказали о работе редколлегии над номерами журнала, о планах на ближайшее время. Участники праздника слушали эту информацию с интересом и высказали много пожеланий редакции.

5 ноября проходила научная конференция; в основном она была посвящена разбору статей, опубликованных в «Кванте». Например, было прочитано несколько докладов по статьям В. Н. Вагутена «Числа C_n^k, многочлены, последовательности» («Квант», 1973, № 2) и А. И. Ширшова «Об одном свойстве биномиальных коэффициентов» («Квант», 1971, № 10).

Золотая медаль праздника за лучший доклад (по статье Вагутена) была вручена ученице 9 класса тбилисской ФМШ Медее Торонджадзе. Премии «Кванта» за активное участие в празднике получили Наила Аллахвердиева и Афтал Исмаилов из Баку, Лена Бекая, Миша Ковалев, Альберт Овакимян, Марина Петросян, Надя Попова, Ася Саакян и Владимир Хорушкин из Батуми, Ара Ордян, Юра Тимофеев и Таня Чернышева из Еревана, Вахтанг Масхулия и Джульета Гаглоева из тбилисского Дворца пионеров, Миша Габескирия, Миша Гидалин, Верико Катария, Дато Поцхишвили и Медико Торонджадзе из тбилисской ФМШ.

6 ноября была организована экскурсия в знаменитый ботанический сад на Зеленый мыс.

8 ноября ребята собрались на математический КВН. В качестве разминки командам предлагалось изобразить, как Архимед открыл свой знаменитый закон, какую-нибудь школьную теорему (см. фотографии), членов жюри и докладчиков, а также решить следующие три задачи (на обдумывание решений давалось время): дать новое (можно шуточное) доказательство теоремы Пифаго-

Последний день праздника

Вручение премий

ра, доказать равенство $2 \cdot 2 = 5$ и расшифровать следующий пример:

```
 АВТАНДИЛ |МЕДЕЯ
 МЕДЕЯ    |------
 --------
   ИЕНЕДИ
   ИВЯДИЯ
  --------
    ВИЯИИЛ
    ВВДЯВЯ
   -------
     ИМИДЛ
```

После разминки команды на месте решали задачи, решения которых жюри тут же оценивало. Разумеется, многие задачи носили шутливый характер, — вот некоторые из них.

1. Педсовет очень затянулся. Наконец, учителя стали расходиться. Сперва ушла половина собравшихся и еще пол-учителя. Через полчаса ушла еще половина собравшихся и еще пол-учителя. Еще через полчаса ушла половина собравшихся и еще пол-учителя, после чего в кабинете остались директор и завуч. Сколько учителей было на педсовете?

2. Если положить круглый торт на большую тарелку и начать его резать по радиусам, то все куски останутся на тарелке. Если положить его на маленькую тарелочку, то после разрезания он может развалиться. Какой минимальный радиус должна иметь тарелка, чтобы при любом числе разрезов куски не падали?

3. Назовите наименьшее положительное число.

4. Может ли треугольник, все высоты которого меньше одного миллиметра, быть по площади больше Советского Союза?

Всего было предложено около пятнадцати задач. Победила команда Батумской школы № 7.

9 ноября состоялся необычный вечер — вечер занимательной математики. Были забыты и трудные задачи, и доклады — докладчики превратились в актеров. Батумские школьники показали две пьесы — по рассказу Артура Порджеса «Саймон Флегг и дьявол», (см. «Квант», 1972, № 8) и по сказке «Бал у принцессы Арифметики» (см. с. 66 этого номера).

В этот же вечер состоялось торжественное закрытие праздника, на котором участники тепло попрощались с членами редколлегии и авторами «Кванта». Мы надеемся, что в нынешнем году праздник юных математиков будет таким же веселым и содержательным, как и в прошлом.

Л. Г. Лиманов

«Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны»...

Лучший докладчик праздника — Медея Торонджадзе

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Магическим квадратом называется квадратная таблица целых положительных чисел, в которой суммы чисел, стоящих в каждом столбце, в каждой строке и на диагонали, равны. Сама эта сумма называется суммой магического квадрата.

Доказать, что сумма магического квадрата размером 3 × 3 всегда делится на 3.

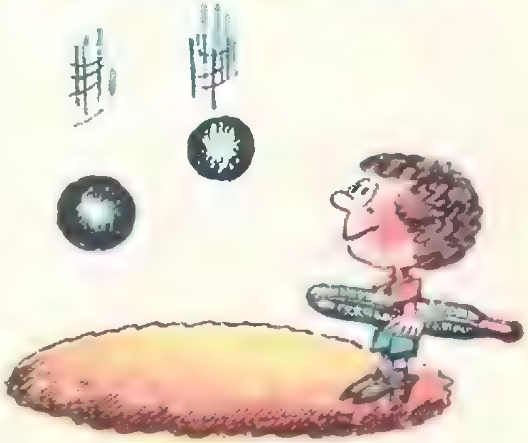
2. В вашем распоряжении «прямой» магнит и иголка. Как определить, намагничена ли иголка?

3. Саша и Оля по очереди ставят крестики и нолики на поля шахматной доски размером 9 × 9. Первый ход делается Олей в центр доски. Саша ходит в одну из 8 свободных клеток, которые окружают Олин ход, и так далее. Ходить можно только в свободные клетки. Выигрывает тот, кто поставит свой знак в одну из четырех угловых клеток (или же противнику некуда ходить). Доказать, что Оля всегда может выиграть.

4. Два шарика одинаковой массы — свинцовый и стальной — падают с одинаковой высоты на песок. Какой из них больше нагреется?

5. Имеется кусок бумаги. Его можно разорвать на 8 или на 12 частей, каждый новый кусок также можно разорвать на 8 или на 12 частей или оставить целыми, и так далее.

Можно ли получить таким образом 60 кусков? Докажите, что можно получить любое число кусков, большее 60.



Художник Э. Назаров

БАЛ У ПРИНЦЕССЫ АРИФМЕТИКИ

К принцессе *Арифметике* приехали гости — ее родная сестра — *Геометрия* и двоюродные сестры — *Философия* и *Музыка*. Принцесса была в восторге от этого визита — сестер с детства связывала крепкая дружба.

В честь гостей устроили бал, на который, по распоряжению принцессы пригласили все *Натуральные Числа*. Нескончаемым потоком шли они в величественный зал *Арифметики*.

Вот идет *Один*. Он горд выпавшей на его долю честью — первым войти в зал и приветствовать принцессу и ее гостей. За ним идут *Два*, *Три*, *Четыре* и т. д. Как они не похожи друг на друга!

Начались танцы. Почти все *Числа* принимали участие в празднике . . .

Веселилась и хозяйка. Вдруг она заметила, что *Музыка* чем-то озабочена — она с удивлением смотрит то на одно, то на другое *Число*, разглядывает группы, в которые они объединились . . .

— В чем дело, милая? Почему ты не веселишься, посмотри, какое разнообразие! — обратилась к ней *Арифметика*.

— О, дорогая! Вот это разнообразие и наводит меня на размышления. Твои придворные так причудливо ведут себя, я ничего не понимаю!

— А почему это тебя удивляет? Ведь они все разные, отличаются друг от друга не только внешним видом и положением в обществе, но и характером. Хочешь я расскажу тебе кое-что о них? — спросила принцесса, нежно целуя сестру.

— Буду тебе очень благодарна. Думаю, что твой рассказ заинтересует и *Геометрию* с *Философией*. Не так ли, мои дорогие? — обратилась *Музыка* к *Геометрии* и *Философии*, которые также внимательно следили за *Числами*.

— Конечно, конечно, — откликнулись те, — самим нам, видимо, не разобраться.

— Ну что ж, я, пожалуй, удовлетворю вашу любознательность, — сказала *Арифметика*. — Впрочем, постойте, вот что я придумала: давайте попросим Пифагора, чтобы он сделал это вместо меня: ведь ему известны все тайны *Числового Мира*.

Подруги отлично знали Пифагора — он не раз бывал у них. Все четверо подошли к нему.

— Мудрый Пифагор, — обратилась к нему принцесса, — наши дорогие гости интересуются моими придворными. Я собиралась было рассказать им кое-что об этом, как они говорят, причудливом Мире, но передумала, — ведь ты сделаешь это гораздо лучше меня. Будь добр, не откажи нам в просьбе; я с удовольствием послушаю тебя — ведь у тебя наверняка будут кое-какие новости.

— Рад служить Вам, дорогая принцесса. Я к Вашим услугам, — поклонившись, сказал Пифагор и начал свой рассказ.

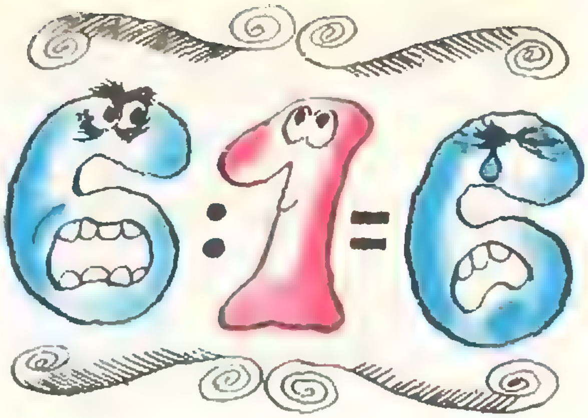
— В мире нет ничего интересней *Чисел*! *Каждое Число* неповторимо и таит в себе ряд замечательных свойств. Возьмем, к примеру, *Число Один*. Конечно, вы заметили, как гордо вошел он в зал. Наш *Один* имеет на это право — он первый в ряду *Натуральных Чисел* и обладает необычайными свойствами: на него делится каждое *Натуральное Число*, он же делится только на самого себя — и это единственное число, имеющее только один делитель. Примечательно, что при делении и умножении на *Один* другие числа не меняются. Все его уважают и ценят. Он олицетворяет равенство, в то время как *Два* есть начало неравенства. Замечательными свойствами обладает *Три*: помимо того, что *Три* является *треугольным**) числом, это первое нечетное простое число. Но и этого еще мало. *Три* — единственное число, равное сумме предыдущих *Чисел*: 1 + 2 = 3. Интересными свойствами обладают *Четыре* и *Пять*. Но свойства *Числа Шесть* еще замечательнее. Посмотрите, как он важно прогуливается по залу, чувствуя свое превосходство.

— А в чем же оно? — спросила *Философия*.

— В том, что это число равно сумме своих собственных делителей: его делители 1, 2, 3, сумма же их 1 + 2 + 3 = 6. Это же совершенство! Я его так и называю *Совершенным Числом***).

— Замечательно! Неужели других таких *Чисел* нет? — спросила *Геометрия*.

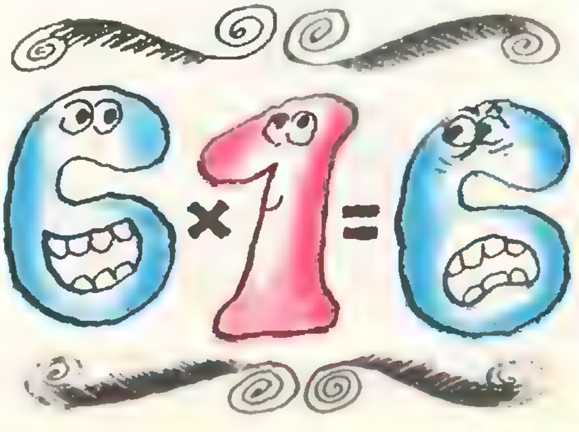
— Есть, — ответил Пифагор, улыбаясь, — но их очень мало. Это и естественно: ведь совершенство — это красота, а красота встречается, к сожалению, не так уж часто. Мне известны четыре *Совершенных Числа* — одно однозначное — 6, одно двузначное — 28, одно трехзначное — 496 и одно четырехзначное — 8128. Я полагаю, что среди пяти- и шестизначных чисел *Совершенного* нет. Заметили ли вы, что все названные мною *Числа* четные? Пока мне не удалось найти ни одного *нечетного Совершенного Числа*. Я уверен, что таких чисел не существует.



— *Это и в самом деле замечательно!* — воскликнула *Философия* и попросила, обращаясь к *Арифметике*: — дорогая, поручи твоим служителям продолжить поиски *Совершенных Чисел*!

— Конечно, конечно, исследования нашего уважаемого *Пифагора* будут продолжены, — сказала *Арифметика* и, лукаво прищурив глаза, спросила сестер: — а неужели вас не удивляет поведение пары *Чисел* 220 и 284?

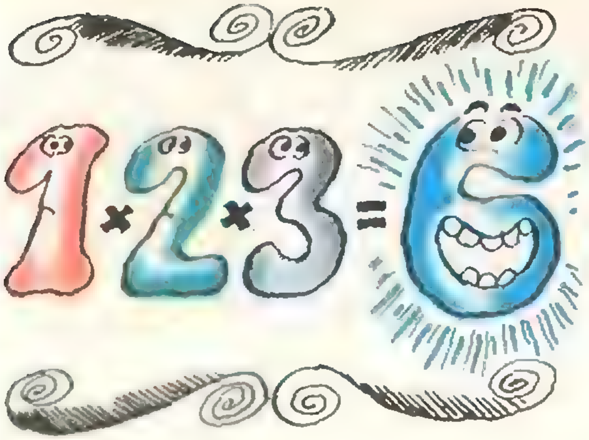
— Как же, — сказала *Музыка*, — я сразу заметила, что эти два *Числа*



---

*) См. статью А. Д. Бендукидзе «Фигурные числа», «Квант», 1974, № 6.

**) См. статью А. С. Варпаховского «Тайны совершенных чисел и дружественных пар», «Квант», 1973, № 10.



все время вместе. Но почему — не знаю.

— Это настоящие друзья, — сказал Пифагор, — разъединить их никто не в силах. Я их называю *дружественными*, и вот почему: сумма собственных делителей каждого из них равна другому. Вот, пожалуйста, собственные делители *Числа* 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; сумма их равна 284: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$; собственные же делители 284 — это *Числа* 1, 2, 4, 71, 142; их сумма равна 220: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Когда на днях один человек спросил меня, что такое друг, я ему ответил: «друг — это второе я», — и привел в пример числа 220 и 284. Вас, наверное, интересует, существуют ли другие пары дружественных чисел. Да, мне известны еще три такие пары, они в конце зала; но это очень большие *Числа*.

— А я еще заметила, что *Числа* как-то странно разделились на пары, когда начались танцы. Например, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. А вот 5 танцевало то с 3-я, то с 7-ю. В чем дело?—поинтересовалась *Геометрия*.

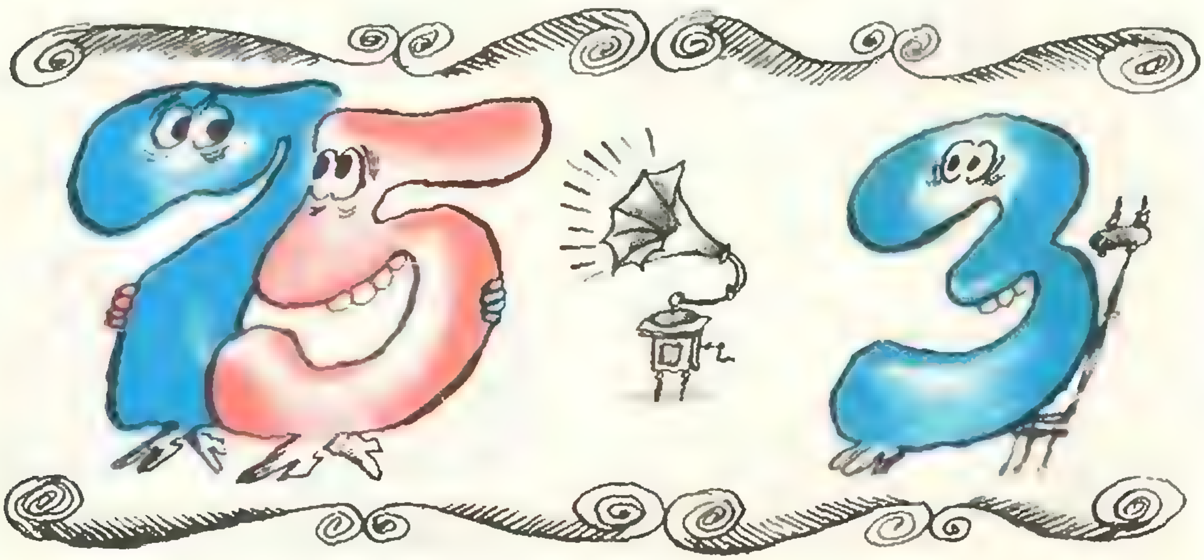
— О, это очень просто, — улыбнулся Пифагор, — танцевали только пары простых *Чисел-близнецов*. Вы ведь знаете, что если числа p и $p + 2$ простые, то они называются *близнецами*. Вот такие *Числа* и объединились. Что же касается *Числа* 5, то оно является близнецом как *Числа* 3, так и *Числа* 7, вот оно и танцевало то с одним, то с другим.

— Ох, как же я не смогла заметить этого? Ведь я очень хорошо знаю *Простые Числа*, — с сожалением сказала *Геометрия*.

— Ничего, сестра, — утешила ее *Арифметика*, — не горюй. Давай лучше поблагодарим нашего дорогого Пифагора и пойдем танцевать.

Принцессы поблагодарили Пифагора, а он, в свою очередь, заверил их, что и впредь будет верно служить дорогим его сердцу *Арифметике*, *Геометрии*, *Философии* и *Музыке*.

А. Д. Б.



МОЖНО ЛИ ВЗВЕСИТЬ МОЛЕКУЛУ?

Н. А. РОДИНА

В этой статье мы хотим вас познакомить с одним из способов определения массы молекул.

Известно, что атмосфера Земли состоит из разных газов — азота, кислорода, водорода, углекислого газа и других. Высота атмосферы велика; установлено, что она простирается до 2000 *км* от поверхности Земли, но основная масса газа сосредоточена внизу. В нижнем слое атмосферы, высота которого всего 16 *км*, содержится 0,9 ее массы.

Почему «оседают» молекулы? Причина в том, что на них действует сила тяжести, направленная к Земле. Но почему же тогда воздух не «падает» на Землю и не образует тонкий слой на ее поверхности? Этому препятствует непрерывное беспорядочное движение молекул воздуха. Благодаря этому движению молекулы разлетелись бы по всему мировому пространству, не будь силы тяжести, которая тянет их вниз.

Значит, высота атмосферы, ее средняя плотность, распределение молекул по высоте зависят от масс молекул газов, входящих в состав атмосферы — ведь чем больше масса молекулы, тем больше действующая на нее сила тяжести. Например, если бы атмосфера состояла только из кислорода, то на высоте 5 *км* ее плотность была бы в два раза меньше, чем у поверхности Земли, а если бы она состояла только из водорода, то это произошло бы на высоте 80 *км*.

Конечно, распределение молекул зависит и от температуры, так как с температурой связана скорость движения молекул. Как вы думаете, как изменились бы приведенные выше числа, если бы Земля стала двигаться по орбите, более близкой к Солнцу (например, «поменялась местами» с Венерой)? А если бы Земля удалилась от Солнца («поменялась местами» с Марсом)?

Но какое отношение имеет наш рассказ об атмосфере к определению масс молекул? Дело в том, что французский ученый Жан Перрен создал как бы маленькое подобие земной атмосферы, в котором роль молекул играли частицы, хотя и чрезвычайно малые, но все же такие, что их можно было увидеть в микроскоп и определить их размеры и массы.

Для этого перемешали с водой смолу так, что образовалась смесь, содержащая отдельные микроскопические капельки смолы. Такую смесь называют эмульсией (например, сливки в молоке, пока они не отстоятся, образуют эмульсию).

Еще до того, как был поставлен этот опыт, ученые предполагали, что капли смолы в воде будут вести себя так же, как молекулы в атмосфере. Опыты, которые Перрен начал в 1908 году, подтвердили это предположение.

Капельки смолы имели форму шариков, их диаметр был измерен и оказался (в одном из серии опытов) равным 0,00005 *см* (то есть $5 \cdot 10^{-5}$ *см*). Как видите, диаметр их очень мал, но все же намного больше диаметра молекул (напомним, что диаметр мо-

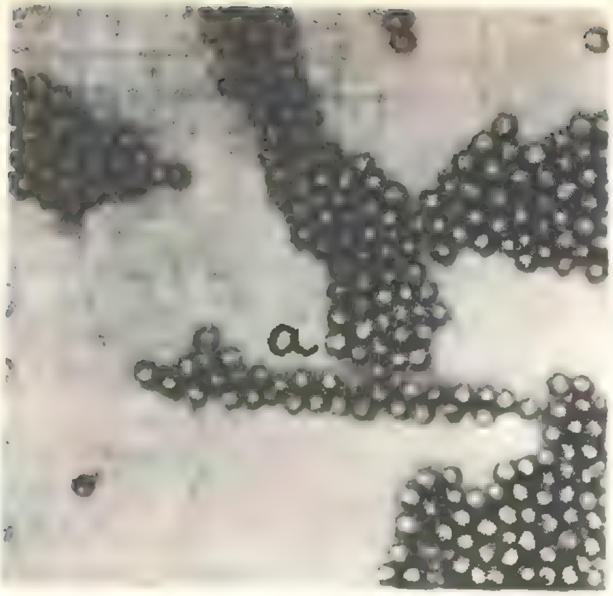


Рис. 1.

лекул имеет величину порядка 10^{-8} *см*).

Замечательна та точность и добросовестность, с которой проводились эти опыты. Капли разного размера множество раз отделяли друг от друга, чтобы получить однородные эмульсии. Проводили несколько серий измерений, используя и «крупные» капли — диаметром в 5 десятитысячных долей миллиметра, и мелкие — диаметром в 14 стотысячных его долей.

Размеры капель определяли разными способами. Один из них — его называют способом рядов — можно понять из приведенной фотографии (рис. 1). На ней видны осевшие на поверхность сосуда капли эмульсии. В некоторых местах капли расположились по прямой линии, образовали ряд (например, под точкой «а»). Измерив длину ряда, сосчитав число капель в нем и зная, с каким увеличением сделана фотография, определяли средний диаметр капли. Известно, что такие измерения дают более точные результаты, чем измерения одной частицы.

Отыщите на фотографии такие ряды и определите диаметр капли данной эмульсии (увеличение равно 5000).

Когда образовалась эмульсия, капельки стали оседать на дно сосуда и оседали долго — несколько месяцев, пока не наступило равновесие. Все ли они расположились около самого дна? Нет, получилась картина, напоминающая атмосферу Земли: у самого дна число капелек было наибольшим, а затем оно постепенно убывало с высотой. Причина такого распределения капелек в слоях эмульсии та же, что и для молекул воздуха в атмосфере! Разница лишь в том, что капельки смолы двигаются не сами, их со всех сторон беспорядочно толкают молекулы окружающей воды.

Весь слой эмульсии, вся эта маленькая «атмосфера», имела толщину 0,01 *см*.

Чтобы подсчитать число капелек в разных слоях, поступили следующим образом. Эмульсию поместили под микроскоп (рис. 2). Сначала микроскоп сфокусировали так, чтобы резко был виден самый нижний слой (толщиной примерно 0,0001 *см*), и пересчитали число капелек смолы в нем. Затем микроскоп сфокусировали на следующий слой и т. д. Считать капли было нелегко: они все время перемещались, число их было огромно (десятки тысяч штук). В одном из опытов Перрен пересчитал 13 000 капель на четырех уровнях.

В опытах Перрена было твердо установлено, что капельки смолы в эмульсии распределяются под действием силы тяжести точно по такому же закону, как и молекулы в атмосфере Земли. Опыты проделывали много

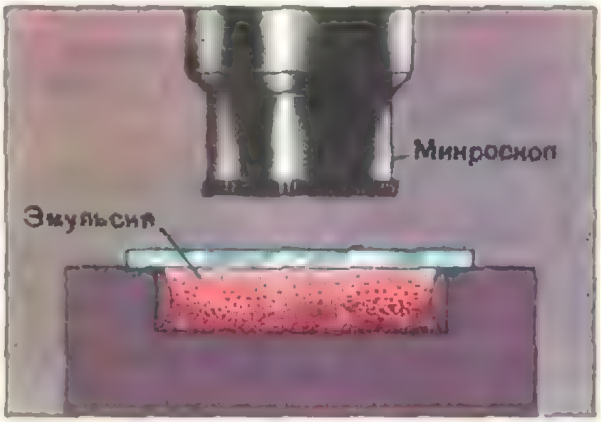


Рис. 2.

раз, в разных вариантах: меняли смолу, добавляли в воду глицерин, и результаты опыта оставались прежними. Следовательно, мы можем с полным правом сравнить распределение капель смолы в эмульсии с распределением молекул в атмосфере и таким образом определить массы молекул газов, содержащихся в воздухе.

Воспользуемся результатами одного из опытов Перрена. Масса одной капельки смолы оказалась равной $7{,}8 \cdot 10^{-15}$ *г*. Высота h, на которой число таких капелек было в 2 раза меньше, чем у дна, была равна $3 \cdot 10^{-3}$ *см*.

Теперь вспомним данные о нашей атмосфере: если бы она состояла только из кислорода, то на высоте $H = 5$ *км* плотность кислорода была бы в 2 раза меньше, чем у поверхности Земли.

Как по этим данным рассчитать массу молекулы кислорода? Обозначим массу молекулы через m, а массу капли через M и запишем такое отношение

$$\frac{m}{M} = \frac{h}{H},$$

откуда

$$m = \frac{Mh}{H} = \frac{7{,}8 \cdot 10^{-15} г \cdot 3 \cdot 10^{-3}\ см}{5 \cdot 10^{5}\ см} = 47 \cdot 10^{-24}\ г.$$

Сделайте самостоятельно аналогичный расчет для водорода.

В настоящее время массы молекул определяют многими разными способами, значения масс уточнены. Например, для массы молекулы кислорода сейчас установлено значение $54 \cdot 10^{-24}$ *г*, а для водорода — $3{,}34 \cdot 10^{-24}$ *г*.

А как определить массы молекул газов, не входящих в состав атмосферы? Здесь на помощь приходит еще один закон природы Было открыто (это сделал в 1811 году итальянский ученый А. Авогадро), что в одинаковых объемах всех газов при одинаковых условиях содержится одно и то же число молекул. Значит, в 1 $м^3$ кислорода, азота, неона, углекислого газа и т. д. при 0° С и нормальном атмосферном давлении содержится столько же молекул, что и в 1 $м^3$ водорода. В чем же тогда причина различия в плотностях этих газов? Почему, например, плотность неона, то есть масса 1 $м^3$ его, равна 0,9 $кг/м^3$, а плотность водорода в 10 раз меньше — 0,09 $кг/м^3$? Ответьте на этот вопрос и определите массу молекулы неона. Можно таким же образом вычислить массы молекул других газов (плотности газов указаны в таблицах, например, в учебнике «Физика 6»).

Познакомившись с одним из методов определения массы молекул, вы могли убедиться, что массы эти очень малы. Можно ли взвесить одну или несколько молекул? Конечно, нет, хотя в современной науке и технике используют очень чувствительные весы. Если на таких весах уравновесить два листочка бумаги, а затем на один из них нанести карандашом точку, то весы обнаружат ее массу. Казалось бы, не стоит и принимать во внимание массу молекулы. Но все тела состоят из молекул, значит, и массы тел складываются из масс молекул. Сколько же молекул содержится в телах? Найдем, например, сколько молекул водорода содержится в детском «воздушном» шарике, если масса всего водорода в нем равна 3 *г*. Тогда число молекул будет равно $3\ г : 3 \cdot 10^{-24}\ г = 10^{24}$, то есть 1 000 000 000 000 000 000 000 000. Теперь мы перешли от невообразимо малых к невообразимо большим числам!

Чтобы создать хотя бы какое-то представление о величине этого числа, проведем еще один (последний!) расчет. Если в этом резиновом шарике сделать такой тонкий прокол, что через него будет выходить каждую секунду по 1 000 000 молекул, то понадобится примерно 30 миллиардов лет, чтобы все молекулы вышли из шарика.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Транспортная задача»

1. $x_{11} = 10$, $x_{14} = 40$, $x_{22} = 60$, $x_{23} = 40$, $x_{31} = 40$, $x_{32} = 10$, $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{24} = x_{33} = x_{34} = 0$.

2. $x_{11} = 17$, $x_{14} = 3$, $x_{22} = 3$, $x_{23} = 17$, $x_{33} = 15$, $x_{42} = 9$, $x_{44} = 16$, $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = x_{34} = x_{41} = x_{43} = 0$.

3. $x_{11} = 100$, $x_{12} = 300$, $x_{21} = 500$, $x_{32} = 50$, $x_{33} = 150$, $x_{34} = 500$, $x_{13} = x_{14} = x_{22} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0$.

Указание. Тарифами здесь являются кратчайшие расстояния между пунктами, которые можно найти с помощью динамического программирования

4. $x_{41} = x_{12} = x_{53} = x_{24} = x_{35} = 1$.

5. Ребят лучше всего прикрепить к предметам так, чтобы общая сумма баллов была наибольшей. Решая соответствующую задачу о назначениях, получаем:

Геометрия — Коля (3)
Алгебра — Боря (3)
История — Саша (4)
Физика — Юра (4)
Химия — Витя (4)

Такое распределение даст наибольшую сумму — 18 баллов. Есть ли иные, но равноценные распределения обязанностей?

6. Транспортная задача и ее решение представлены в таблице (воды в реке, быть может, и больше 150 ведер, но мы указываем лишь то количество, которого нам недостает для полива).

Источники	Участки			Возможности
	Сливы	Яблони	Груши	
1	70		10	80
2	30			30
3			50	50
4 (река)		120	30	150

7. Допустим, что в оптимальном плане имеется цикл, в который входят клетки с тарифами $c_{i_1j_1}$, $c_{i_1j_2}$, $c_{i_2j_2}$, …, $c_{i_pj_1}$ — всего $2p$ разных клеток ($c_{i_1j_1}$ входит в цикл один раз). Пронумеруем клетки цикла начиная с i_1j_1. Отнимая от суммы тарифов нечетных клеток сумму тарифов четных клеток цикла, получаем индекс $k_{i_1j_1}$. Индекс $k_{i_1j_2}$, а также всех четных клеток цикла равен $-k_{i_1j_1}$. Если $k_{i_1j_1} > 0$, то можно улучшить план, перенеся какие-то перевозки в четные клетки; если $k_{i_1j_1} < 0$, то можно улучшить план, перенеся перевозки в нечетные клетки. Но это противоречило бы условию оптимальности плана. И наконец, если $k_{i_1j_1} = 0$, то можно, не ухудшив плана, освободить клетку с минимальной перевозкой. Значит, в любом случае план без циклов будет не хуже циклического.

К статье «Вычисление многочленов — от Ньютона до наших дней»

2. Для многочлена (в) — не более $\frac{3}{2}\log_2(n+1)+2$ ($\times$, :) — операции и два вычитания; для многочлена (г) — не более $\frac{3}{2}\log_2 n+1$ ($\times$, :) — операции и одно сложение.

3. (I) $p_1 = x\cdot x = x^2$, $p_2 = x^2\cdot x^2 = x^4$,

$$f(x) = (p_2 + p_1 + 1)(p_2 - x + 1).$$

(II) Заметим, что $x\cdot f(x) - f(x) = x^{n+1} + x^n + \ldots + x - (n+1)$; отсюда $f(x) = [x^{n+1} + x^n + \ldots + x + 1 - (n+2)] : (x-1) = [(x^{n+2}-1):(x-1) - (n+2)]:(x-1)$.

(III) $f(x) = \frac{1}{2}[(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n}]$.

(IV) $p_1 = x\cdot x = x^2$; $f(x) = \left(\left(\left(\frac{1}{8!}p_1 - \frac{1}{6!}\right)p_1 + \frac{1}{4!}\right)p_1 - \frac{1}{2!}\right)p_1 + 1$.

5. Пусть $f(x) = x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{2k}$.

Нам нужно по коэффициентам $a_1, \ldots, a_{2k}$ многочлена $f(x)$ найти параметры $b_1, \ldots, b_{2k}$, *превращающие последнюю строку схемы* (7. k) в тождество.

Параметр b_1 — единственный, для которого существует формула, причем простая.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$a_1 = kb_1 + 1. \qquad (1)$$

Доказательство проводится индукцией по $k \geqslant 2$.

При $k=2$ $a_1=2b_1+1$ согласно (6) (роль b_1 играет в (6) параметр A).

Пусть $k\geqslant 3$, и пусть в схеме (7. k)

$$p_{k-1}=x^{2k-2}+\alpha\, x^{2k-3}+\ldots;$$

тогда

$$p_k=p_{k-1}(p_1+b_{2k-1})+b_{2k}=$$
$$=(x^{2k-2}+\alpha x^{2k-3}+\ldots)(x^2+b_1x+$$
$$+b_{2k-1})+b_{2k}=x^{2k}+(\alpha+b_1)\,x^{2k-1}+\ldots,$$

так что, если по предположению индукции $\alpha=(k-1)b_1+1$, то $a_1=\alpha+b_1=kb_1+1$.

Возможность вычисления значений остальных параметров по значениям коэффициентов также доказывается индукцией по $k\geqslant 2$.

База индукции. $k=2$, $n=4$. Схема(5), формулы (6).

Посылка индукции. Пусть при некотором $j=k-1\geqslant 2$ схема (7. $k-1$) универсальна, то есть любому набору чисел $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ соответствуют значения $b_1, b_2, \ldots, b_{2k-2}$ параметров, подставив которые в схему (7. $k-1$), мы получим многочлен

$$p_{k-1}(x)=x^{2k-2}+A_1x^{2k-3}+\ldots+A_{2k-2}. \tag{II}$$

Шаг индукции. Тогда схема (7. k) также универсальна. Выпишем предпоследнюю строку этой схемы:

$$p_k(x)=p_{k-1}(x)\cdot(x^2+b_1x+b_{2k-1})+b_{2k}. \tag{III}$$

Согласно нашему предположению (посылка индукции), для нахождения значений параметров $b_1, \ldots, b_{2k}$, превращающих многочлен $p_k(x)$ из (7. k) в многочлен $f(x)$ с данными коэффициентами $a_1, \ldots, a_{2k}$ нам достаточно найти такой многочлен $p_{k-1}(x)$ (точнее, его коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ — см. (II)) и такие значения параметров b_{2k-1}, b_{2k}, чтобы после их подстановки в (III) выполнялось тождество $p_k(x)=f(x)$. Перемножив многочлены в правой части равенства (III) и приравняв коэффициенты полученного многочлена и многочлена $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{2k}$, мы сможем выписать систему $2k$ уравнений с неизвестными $A_1, \ldots, A_{2k-2}, b_{2k-1}, b_{2k}$ ($a_1, \ldots, a_{2k}$ заданы, b_1 находится из равенства (I)); чтобы сократить запись формул, заменим параметр b_{2k-1} символом b:

$$\begin{aligned}
a_1&=A_1+b_1,\\
a_2&=A_2+b_1\cdot A_1+b, \qquad\qquad (IV)\\
a_3&=A_3+b_1\cdot A_2+b\cdot A_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{2k-2}&=A_{2k-2}+b_1\cdot A_{2k-3}+b\cdot A_{2k-4},\\
a_{2k-1}&=b_1\cdot A_{2k-2}+b\cdot A_{2k-3},\\
a_{2k}&=b\cdot A_{2k-2}+b_{2k}.
\end{aligned}$$

Условимся обозначать уравнение системы (IV) с номером j ($1\leqslant j\leqslant 2k$) через (IV)-j. Тогда процесс решения системы (IV) можно описать в нескольких словах: A_1 выражается через a_1 из (IV)-1 и (I), A_2 выражается через a_1, a_2 и b из (IV)-2, A_3 выражается через a_1, a_2, a_3 и b из (IV)-3 и т. д. Последним из уравнения (IV)-($2k-2$) мы выразим неизвестное A_{2k-2}; затем, подставив в уравнение (IV)-($2k-1$) найденные выражения для A_{2k-2} и A_{2k-3}, мы получим уравнение относительно b.

Лемма 2. *Неизвестные A_{2j-1} и A_{2j} ($1\leqslant j\leqslant k-1$) выражаются из системы* (IV) *через параметр b и коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$ согласно формулам (b_1 выражается через a_1 согласно* (I))

$$A_{2j-1}=(-1)^{j-1}[(k-j)b_1+1]b^{j-1}+$$
$$+S_{1,j}(a_1, a_2, a_3)b^{j-2}+\ldots$$
$$\ldots+S_{j-1,j}(a_1, a_2, \ldots, a_{2j-1}), \tag{V}$$

$$A_{2j}=(-1)\,b^j+T_{1,j}(a_1, a_2)\,b^{j-1}+\ldots$$
$$\ldots+T_{j,j}(a_1, a_2, \ldots, a_{2j}). \tag{VI}$$

Доказательство. *База индукции:* $j=1$, $A_1=a_1-b_1=[(k-1)b_1+1]b$, $A_2=-b+T_{1,1}(a_1, a_2)$.

Посылка индукции — формулы (V), (VI) при $1\leqslant j<k-1$.

Шаг индукции: (a)$A_{2j+1}=-bA_{2j-1}-b_1A_{2j}+a_{2j+1}=(-1)^j[(k-j)b_1+1]b^j-S_{1,j}(a_1, a_2, a_3)b^{j-1}-\ldots-b_1(-1)^jb^j-b_1T_{1,j}(a_1, a_2)\,b^{j-1}-\ldots+a_{2j+1}=(-1)^j\times\times[(k-j-1)b_1+1]b^j+S_{1,j+1}(a_1, a_2, a_3)b^{j-1}+\ldots$;

(b)$A_{2j+2}=-bA_{2j}-b_1A_{2j+1}+a_{2j+2}==(-1)^{j+1}b^{j+1}+T_{1,j+1}(a_1, a_2)\,b^j+\ldots$

Лемма 3. *Полученное после всех подстановок уравнение относительно $b=b_{2k-1}$ имеет степень $k-1$ и единичный коэффициент при старшем члене (то есть при b^{k-1}).*

Доказательство. Предположим, что в правой части уравнения (IV)-($2k-1$) на левом крайнем месте (там, где сейчас пробел) стоит неизвестное A_{2k-1}, и выразим его через b, $a_1, \ldots, a_{2k-1}$ по формуле (V) (она по-прежнему применима здесь):

$$A_{2k-1}=(-1)^k[(k-k)+1]b^{k-1}+\ldots=$$
$$=(-1)^kb^{k-1}+\ldots \tag{VII}$$

Вспомним, что на самом деле $A_{2k-1}\equiv 0$; умножив правую и левую части (VII) на $(-1)^k$, получим требуемое уравнение относительно b.

Решив это уравнение*), мы найдем значение параметра $b=b_{2k-1}$, а затем по формулам (V), (VI) вычислим неизвестные A_2, $A_3, \ldots, A_{2k-2}$; параметр b_{2k} находится из уравнения [IV]-($2k$).

6. Так как в каждой операции участвует не более двух параметров, то общее число параметров в схеме с N операциями не больше $2N-1$ (хотя бы в одной операции должна участвовать переменная x). В первой операции участвуют два числа. Каждое из них есть либо x, либо один из не более чем $2N-1$ параметров; всего не более $(2N)^2$ возможностей. Во второй операции могут участвовать те же числа и результат первой операции; всего не более $(2N+1)^2$ возможностей, и так далее. Наконец, в последней операции могут участвовать не более $3N-1$ чисел (в том числе $N-1$ результат предыдущих операций);

---

*) Так называемая *«основная теорема алгебры»*, открытая великим К. Ф. Гауссом, утверждает, что многочлен степени $n>0$ всегда имеет хотя бы один корень; хотя при $n\geqslant 5$ формул для нахождения этого корня (как уже упоминалось в сноске на с. 32) и не существует, разработаны методы нахождения всех корней многочлена с любой точностью.

всего не более $(3N-1)^2$ возможностей. Общее число различных вариантов не больше произведения этих чисел, то есть

$$S_N \leqslant (2N)^2 (2N+1)^2 \dots (3N-1)^2 = [(3N-1)!/(2N-1)!]^2.$$

К статье «Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина»

Вариант 1

1. $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$.
2. $a_p = m+n-p$.
3. $1<x<2$.
4. $x=-\pi/4$.

Вариант 2

1. $\frac{4}{3}R$.
2. $\sqrt{\frac{a}{b}}$.
3. $x_1 = \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6}+k\pi \ (k=0, \pm1, \dots)$.

Вариант 3

1. $3 \arccos \frac{k+2}{2k}, \quad \pi - 3 \arccos \frac{k+2}{2k}$.
2. 90, 24.
3. $a=12, \quad x=3$ и $a<0, \quad x = \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$.
4. $4\cos 4\alpha \sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)$.

Вариант 4

1. $\arccos \frac{1\pm\sqrt{1-\sqrt[3]{k}}}{2}$.
2. 55 *км/ч*, 44 *км/ч*.
3. $x_1 = -\frac{\pi}{3}+2k\pi, \ x_2 = \frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\times k\pi \ (k=0, \pm1, \dots)$.
4. $x<\sqrt[3]{4}$.

Вариант 5

1. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$.
2. $-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2$.
3. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k=0, \pm1, \dots)$.
4. 8, 4, 2 и 2, 4, 8.

Вариант 6

1. $2l^3\cos^2\beta \sin\beta \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$.
2. $x=-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 3+k\pi), \quad (k=0, \pm1, \dots)$.
3. $x<-1, \quad -1<x<0$.
4. $x_1=1/81, y_1=-3, x_2=27, y_2=4$.

К статье «Уральский государственный университет им. А. М. Горького»

Математика

Вариант 1

1. 24 часа.
2. $\frac{\pi\sqrt{2}}{48}(53-7\sqrt{3})a^3$. Указание. Рассмотреть два осевых сечения конуса: проходящее через ребро куба, лежащее в основании конуса, и проходящее через вершину куба, лежащую на том же расстоянии от основания конуса, что и центр куба.
3. $x_1 = \frac{4k+1}{11}\pi$, где $k\neq 11l+8$; $x_2 = \frac{4n+1}{9}\pi$, где $n\neq 9p+2$, k, n, p, l — целые. Указание. Уравнение приводится к виду $1+4\cos 3x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$. Умножая обе части уравнения на $\sin x$, приводим уравнение к виду $\sin 5x = \cos\frac{x}{2}$. Решая его и замечая, что корни уравнения $\sin x = 0$ не удовлетворяют исходному уравнению, находим ответ.
4. 62 нуля. Указание. Легко найти с достаточной точностью, что

$$\lg \sin^{1000}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx -62,47.$$

Вариант 2

1. 24 рубля, 21 рубль.
2. $V = \frac{a^3 \sin\frac{\alpha}{2}}{12\cos^2\alpha}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$.
3. $x_1=\pi/6, \ x_2=3\pi/10, \ x_3=7\pi/6,$

$x_4 = 13\pi/10$. Указание. Привести уравнение к виду

$$\sqrt{2}\left(\left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|\right) = 2\sin 2x$$

и решить его в областях $0 < x \leqslant \pi/2$, $\pi \leqslant x \leqslant 3\pi/2$.

4. $x = 2$. Указание. Неравенство $4x - x^2 - 2 \geqslant 2$ выполняется лишь при $x = 2$.

Вариант 3

1. 77/20 часа.

2. $\dfrac{m}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

3. $x = k\pi$, k — целое. Указание. Поскольку $\cos 2x > 0$, уравнение удовлетворяется лишь если $\cos 2x = 1$.

4. $a\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant x \leqslant 2a$ при $a > 0$; $x = 0$ при $a = 0$; $a\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant x \leqslant 0$ при $a < 0$.

Вариант 4

1. $l/(v + 3u)$.

2. $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{h}{\sqrt{3(h^2 - a^2)}}$.

3. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Указание. Ввести вспомогательные переменные $a = \dfrac{1}{x+y}$, $b = \dfrac{1}{x+z}$, $c = \dfrac{1}{y+z}$.

4. Указание. Обозначив $\mathrm{ctg}^2 x = z$, привести неравенство к виду $-(z+1)^2 \leqslant -1$ и учесть, что $z \geqslant 0$.

Физика

Математико-механический факультет

Билет 1

3. Количество теплоты Q_1, выделяемое за 1 *с* в проволоке, равно

$$Q_1 = I_1^2 R = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}.$$

Количество теплоты Q_2, выделяемое за 1 *с* в той же проволоке после подключения второй, равно

$$Q_2 = \frac{E^2 R}{4(r + R/2)^2}.$$

Тогда

$$Q_1/Q_2 = \frac{4(r + R/2)^2}{(r+R)^2} \approx 1{,}44.$$

Билет 2

3. На тело, движущееся равномерно по наклонной плоскости с углом α, действует сила трения $F_{\text{тр}} = kmg\cos\alpha$, уравновешивающая скатывающую силу $F_{\text{ск}} = mg\sin\alpha$. Следовательно, $k = \mathrm{tg}\,\alpha$. На наклонной плоскости с углом β ускорение

$$a = \frac{F_{\text{ск}} - F_{\text{тр}}}{m} = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta).$$

Отсюда

$$t = \sqrt{2s/a} = \sqrt{\frac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}}.$$

Билет 3

3. Воспользовавшись законом Бойля—Мариотта, получим:

$$p_0 = \frac{h(L-h)}{L/2 - h} \approx 71 \text{ см рт. ст.}$$

Билет 4

3. Сила, действующая на пробный заряд, равна по закону Кулона $F_1 = qq_1/r^2 = 1{,}18\cdot 10^{-2}$ *дн*. Равнодействующая двух равных сил, направленных под углом 60° друг к другу, равна

$$F = 2F_1\cos\alpha/2 = F_1\sqrt{3} = 2{,}04\cdot 10^{-2} \text{ дн}.$$

Физический факультет

Билет 1

2. При расширении газ совершает работу над внешними телами (против внешних сил), на что расходуется часть его внутренней энергии. Если не сообщать ему дополнительно энергию в виде некоторого количества теплоты, он охладится.

3. Условие полного внутреннего отражения выполняется для всех углов, больших $\alpha_{\max}$ (рис. 1) таких, что $\sin\alpha_{\max} = \dfrac{1}{n}$.

Отсюда

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{a}{2\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2}} = \frac{1}{n},$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{n^2 - 1} = 1{,}76 \text{ м}.$$

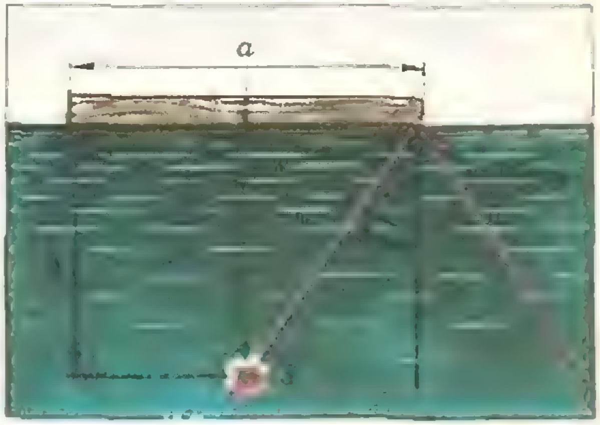


Рис. 1.

Билет 2

2. Да.

3. В момент удара тело имело скорость

$$v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

После абсолютно упругого удара тело движется под углом 30° к горизонту, вертикальная составляющая скорости

$$v_{\text{в}} = \sqrt{2g(H-h)}\sin\alpha.$$

Отсюда

$$h_1 = v_{\text{в}}^2/2g = (H-h)\sin^2\alpha = (H-h)/4.$$

Билет 3

2. Освещенность увеличится в 10,9 раз.

3. Напряженность поля

$$E_1 = \frac{rU}{(R+r)^2} = 3{,}3\ в/см.$$

При соприкосновении двух шаров потенциалы их поверхностей становятся равными, а заряды распределяются пропорционально емкости. Общий заряд $q_1 = q_1' + q_2'$; отношение зарядов $q_1'/q_2' = C_1/C_2$. Тогда новый заряд на первом шаре $q_1' = q_1/3$ и $E_2 = E_1/3 = 1{,}1$ *в/см*.

Билет 4

2. Поскольку точки C и D эквипотенциальны, ток по ребру CD не пойдет, и его можно не учитывать. Тогда $R = 0{,}5$ *ом*.

3. Закон движения для бруска (рис. 2)

$$F - F_{\text{тр}} = ma_1.$$

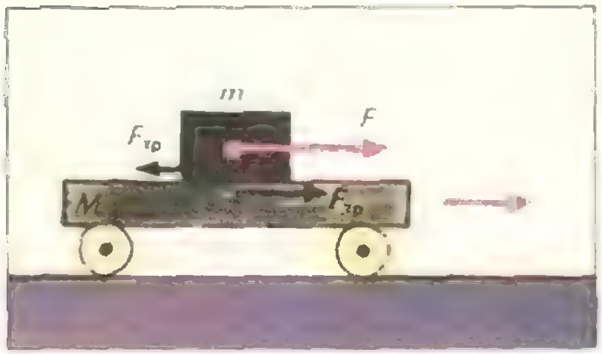


Рис. 2.

На тележку действует только сила трения, то есть $F_{\text{тр}} = Ma_2$. Тележка и брусок катятся с одинаковым ускорением, если $F_{\text{тр}} \leqslant kmg$. При этом сила

$$F \leqslant kmg\frac{M+m}{M} = 5{,}5\ н,$$

а ускорение

$$a = \frac{F}{m+M}.$$

Если $F > kmg\dfrac{M+m}{M}$, то $F_{\text{тр}} = kmg$,

и ускорения тележки и бруска различны. В этом случае ускорение бруска

$$a_{\text{бр}} = \frac{F - kmg}{m},$$

а ускорение тележки

$$a_{\text{т}} = \frac{kmg}{M}.$$

В первом случае $F_1 = 200\ дн = 2\cdot 10^{-3}\ н < 5{,}5\ н$, ускорение $a \approx 10^{-1}\ м/с^2$. Во втором случае $F_2 = 6\ н > 5{,}5\ н$. Тогда

$$a_{\text{бр}} = 0{,}5\ м/с^2,\quad a_{\text{т}} = 0{,}25\ м/с^2.$$

К статье «Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина»

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. $\sqrt{3.5} < |x| < 2$. Указание. Полезно сразу заметить, что $0 < x^2 - 3 < 1$.

2. $x_1 = \frac{3}{2}\pi$, $x_2 = 2\pi$. Указание. Заметив, что $(1 - \sin 2x) = (\sin x - \cos x)^2$ и что в указанном промежутке $\cos x \geqslant 0$ и $\sin x \leqslant 0$, то есть $\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = \cos x - \sin x$ (многие абитуриенты не учитывали этого), получаем уравнение

$$\cos x - \sin x = \sin 3x + \cos 3x,$$

решение которого: $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ (k, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) Из полученных решений выбираем те, которые удовлетворяют условию $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. $V = \sqrt{3}a^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

4. 14 *км/ч*, 2 *км/ч*. Указание. Обозначим через x скорость катера в стоячей воде, через y — скорость течения, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{96}{x+y} + \dfrac{96}{x-y} = 14, \\[2mm] \dfrac{96}{x+y} + \dfrac{72}{x-y} = \dfrac{24}{y}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. $0 < x < \frac{1}{2}$, $7 < x < 8$.

2. $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{3\pi}{4}$, $x_5 = -\frac{5\pi}{6}$, $x_6 = \frac{\pi}{6}$.

3. $\frac{1}{6} a^3 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\alpha$.

4. 840 *км*, 80 *км/ч*, 70 *км/ч*. Указание. Обозначим через S расстояние между пунктами A и B, через x — скорость первого поезда, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{S}{2}+28}{x} = \dfrac{\frac{S}{2}-28}{x-10}, \\[2ex] \dfrac{\frac{S}{2}}{x} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{\frac{S}{2}}{x-10}. \end{cases}$$

Физический факультет

Вариант 1

1. $S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin 2\alpha}{\cos\varphi}$.

2. 8, 12, 18, 27; 27, 18, 12, 8.

3. $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$ (k, $n = 0$, ± 1, ± 2, ...).

4. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Вариант 2

1. $V = \frac{1}{6} a^3 \operatorname{tg}\beta \sin\frac{\alpha}{2}$.

2. $\sqrt[3]{45}$.

3. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(2n+1)$ (k, $n = 0$, ± 1, ± 2, ...).

4. $x_1 = 61$, $x_2 = -1{,}4$.

Вариант 3

1. $V = \frac{1}{3} b^3 \sin 2\alpha \sin\beta \cos^2\beta$.

2. 1, -2, -5, ...

3. $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n$ (k, $n = 0$, ± 1, ± 2, ...).

4. $x_1 = \frac{5}{12}$, $x_2 = 1$.

Физика

1. $h \leqslant 1{,}5$ *м*.
2. $t = 0{,}64$ *с*.
3. $F = 2250$ *н*.
4. $Q \approx 1{,}2$ *кдж*.
5. $\frac{\Delta m}{m} = 0{,}45$.
6. $T \approx 682^\circ$ К.
7. $t \approx 23$ *мин*.
8. $V = 0{,}94$ *л*.
9. $I = 100$ *а*.
10. $t \approx 18$ *мин*.
11. $E = 13{,}4 \cdot 10^7$ *дж*.
12. $f = 15$ *см*; изображение действительное, неперевернутое и таких же размеров, что и предмет.
13. $\lambda_н = 4{,}35 \cdot 10^{-7}$ *м*.

К статье «Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской»

Математика

Вариант 1

1. $A = 2$ при $a > 0$; $A = -2$ при $a < 0$.

2. $-2 < x < -1$.

3. $S = \dfrac{4R^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

4. Указание. Положить $a = 2mn$ и $b = |2m^2 - n^2|$. Не забудьте доказать, что $a \neq b$ при $m \neq n$.

Вариант 2

1. $A = -\sqrt{b}$ при $0 < b < 2$, $A = \sqrt{b}$ при $b > 2$, $A = -0{,}05$ при $b = 0{,}0025$.

2. $x > 9$.

3. $1/2k$.

4. 3087. Указание. Надо записать данные числа в следующем виде:

$$\overline{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 1\,000n + 100(n+1) + 10(n+2) + (n+3)$$

и

$$\overline{(n+3)(n+2)(n+1)n} = 1\,000(n+3) + 100(n+2) + 10(n+3) + n.$$

Вариант 3

1. $x = -8$.

2. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ($k = 0$, ± 1, ± 2, ...).

3. $2h\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

4. 30 *км*, 20 *км/ч*.

Вариант 4

1. Уравнение не имеет решений.

2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$ ($k = 0$, ± 1, ± 2, ...).

3. $\frac{2ab}{a+b}$.

4. 25 дней.

Вариант 5

1. $x = -8$.

2. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

4. Уравнение не имеет решений.

Вариант 6

1. $x = 1\frac{2}{3}$.

2. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $a/2\sqrt{3}$.

4. Уравнение не имеет решений.

Вариант 7

1. $\frac{2p^2 \cos\alpha \sin\alpha}{(1 + \cos\alpha + \sin\alpha)^2}$.

2. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

3. $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

4. $x > 1$, $x < \frac{1}{3}$.

Вариант 8

1. $S = \frac{h(p\sin\alpha - 2h)}{2\sin\alpha}$.

2. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

3. $x_1 = \pi + 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

4. $0 < x < 1$.

Физика

1. $p_2 = \frac{p_1}{2}\frac{T_2}{T_1} \approx 43$ *атм.*

2. $v_{\min} = \sqrt{5gl} = 7$ *м/с.*

3. $\tau \approx 4$ *ч.*

4. Расстояние между объективом и окуляром увеличили на 0,026 *м.*

5. $k = 3\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}26$.

К статье «Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского»

Факультет радиоэлектронной аппаратуры

1. $x = 9$.

2. $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k$ $(k, n = 0, \pm 1, \ldots)$.

3. $\frac{l}{\cos\varphi}$.

4. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 0$; $x_3 = -\frac{1}{4}$, $y_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{1}{4}$, $y_4 = -\frac{1}{2}$.

5. $-\frac{1}{3} < x < -\frac{13}{40}$, $x > \frac{\sqrt{10} - 2}{3}$.

Авиационно-механический факультет

1. $x = \frac{11}{5}$.

2. $x = -\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{17}}{5} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$.

3. $x = \arcsin(\sin\alpha \sin\beta)$.

5. $1 < x < 2$.

К статье «Ярославский политехнический институт»

Математика

Вариант 1

1. $V = \frac{2}{3} l^3 \sin^2\beta \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{cosec}\alpha \times \sqrt{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}$.

2. $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 15$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

Указание. Ввести вспомогательные неизвестные $z = \log_2 x$, $t = \log_2(y + 1)$.

3. $x \geqslant 3$, $x \leqslant 1$.

4. $x_1 = 4\pi/3 + 4k\pi$, $x_2 = 8\pi/3 + 4k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$.

Вариант 2

1. $V = \frac{h^3\sqrt{3}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha}$.

2. $x = 0$, $y = 0$.

3. $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$.

Указание. Обозначить $\log_2 x$ через t.

4. $x = \pi n/6$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ \ldots)$.
Указание. Привести уравнение к виду

$$\cos 8x - \cos 4x = 0.$$

Вариант 3

1. $V = \frac{32}{3} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha$.

2. $x = y = a/\sqrt{3}$, решения существуют при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

3. $x > 4$, $x \neq 5$.

4. $x_1 = n\pi$, $x_2 = (-1)^n \pi/6 + n\pi$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$.

Физика

1. $v_1 = 36$ *км/ч*, $v_2 = 54$ *км/ч*.

2. $A = m(\mu g \cos\alpha + g \sin\alpha + a)\, l = 1{,}35 \cdot 10^3$ *дж*.

3. $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \approx 294$ *н*.

4. $F = mg\left(\cos\alpha - \dfrac{v^2}{gR}\right) = 114 \cdot 10^3$ *н* $\left(\alpha = \dfrac{360 \cdot s}{2\pi R} = 30^\circ\right)$.

5. $A = \dfrac{m_2 u_2^2}{2}\left(\dfrac{m_2}{m_1} + 1\right) = 390$ *дж*.

6. $s = \dfrac{g_0 R^2 t^2}{2(R+h)^2} \approx 4$ *м*.

7. $m = \dfrac{pV\mu}{RT} = 4 \cdot 10^{-2}$ *кг*, $n = \dfrac{pV}{kT} = 1{,}2 \cdot 10^{24}$ *молекул*.

8. $h_2 = \dfrac{2p_0 + 3\rho g h_1}{\rho g} = 23{,}6$ *м*.

9. а) $E = \dfrac{kq}{\varepsilon (R+r)^2} = 144$ *в/м*, $\varphi = \dfrac{kq}{\varepsilon (R+r)} = 36$ *в* $(k = 1/4\,\pi\varepsilon_0)$.

б) $E = \dfrac{kq}{\varepsilon R^2} = 400$ *в/м*, $\varphi = \dfrac{kq}{\varepsilon R} = 60$ *в*.

в) $E = 0$, $\varphi = 60$ *в*.

10. $E = \dfrac{kq\sqrt{2}}{a^2} = 2{,}8 \cdot 10^4$ *в/м*, $\varphi = \dfrac{2kq}{a} = 1{,}2 \cdot 10^4$ *в*.

11. $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{q^2 k}{\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = 0{,}27$ *дж*.

12. $q_1 = \dfrac{qR_1}{R_1 + R_2} = 9{,}6 \cdot 10^{-9}$ *к* ($q = 31$ *нк*), $q_2 = q - q_1 = 21{,}4 \cdot 10^{-9}$ *к*.

13. $R_x = \left(\dfrac{U - U_1}{U_1}\right) R = 2400$ *ом*.

14. $F = \dfrac{df}{f-d} = -12 \cdot 10^{-2}$ *м*, $D = \dfrac{1}{F} = -8{,}3$ *дптр*.

15. $F = \dfrac{R}{\dfrac{n_1}{n_2} - 1} = 1{,}54$ *м*.

К статье «Ташкентский автомобильно-дорожный институт»

Математика

Вариант 1

1. $\sqrt[6]{2}$ при $-\sqrt{2} \leqslant x < -1$ и $-1 < x < 1$; $-\sqrt[6]{2}$ при $1 < x \leqslant \sqrt{2}$.

2. $x = 1$.

4. $S = \dfrac{2H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{2} \sin\varphi \operatorname{tg}\alpha + \cos\varphi}$.

Вариант 2

1. mn.

2. $x_1 = 2$, $y_1 = -1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$.

3. $x = \dfrac{\pi}{6}(3n \pm 1)$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \ldots)$.

4. $\dfrac{1}{2} \pi l^2 (1 + 2 \sin\alpha)$.

Физика

Вариант 1

5. $a_{\max} = k\left(g - \dfrac{v^2}{R}\right) \approx 2{,}9$ *м/с²*.

Вариант 2

5. $k = \dfrac{2s - gt^2 \sin\alpha}{gt^2 \cos\alpha} \approx 0{,}1$,

$t_1 = \sqrt{\dfrac{2s}{g(\sin\alpha - k\cos\alpha)}} \approx 5{,}7$ *с*.

Вариант 3

5. $m = 0{,}6\, \dfrac{pV\mu}{RT} = 922$ *г*.

Вариант 4

5 $$T = \frac{pV\mu}{kRIt} = 312^\circ\mathrm{K}$$

К ребусам (*см с 35*)

1 9 8 = 1,125
2 65 64 = 1,015625
3 339 × 268 = 90852

К головоломке (*см с 48*)

$9+9 \quad 9 \times 15 = 30$
$7 \quad 7+9\times \quad 2 = 20$
$8+2 \quad 10+28 = 29$
$6 \quad 2-1\times 45 = 90$

$30+20+29+90 = 169$

К статье «Телевидение готовит в вуз»

(*см «Квант» 1974, № 6*)

Математика

Задачи

1 $\frac{v}{a}(\sqrt{5}-1)$

2 $$\frac{a^3\sqrt{2}\sin\varphi\sin\psi}{6\sin(\varphi+\psi)}$$

3 $\frac{2}{3}\pi H^3$

4 $\frac{\pi}{4}$

5 $\sqrt{2}R^3\sin\alpha\cos\alpha$

6 $18\sqrt{2}$ *м*^{3} Указание Докажите, что треугольники ASC и ASB правильные

7 $3\sqrt{3}$ *см*, $\sqrt{3}$ *см* $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *см*

Физика

1 $$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\left(L-l-\frac{mg}{k}\right)^2}{\left[L-l-\frac{m(g+a)}{k}\right]^2} \approx 1{,}4$$

2 $$H = \frac{1}{2}\left(h + \frac{h\sqrt{k}}{\sqrt{m}-1}\right) = 2 \text{ м}$$

3 $\Delta l_1 = 2{,}5$ *м*, $\Delta l_2 = 3{,}5$ *м*

Указание В первом случае увеличенное изображение является действительным, а во втором случае — мнимым

4 $\delta \approx 1\ 20$

5 $$l_{\min} = \frac{2h}{\sqrt{n^2-1}} = 5{,}7 \text{ м}$$

6 $x = \sqrt{l^2-4Fl} = 0{,}45$ *м*

7 $$n_{\text{л}} = \frac{n(F_1-F_2)}{nF_1-F_2} = 1{,}45$$

8 $$L = \frac{\Delta l}{N(\lambda_{\text{к}}-\lambda_{\text{с}})} = 1{,}0 \text{ м}$$

9 $$R_{\max} = \sqrt{\frac{nPS}{4\pi kh\nu}} = 2{,}2\ 10^4 \text{ м}$$

10 $$v = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda m} - \frac{2A}{m}} = 6{,}0\ 10^5 \text{ м с}$$

11 $$U = \frac{m_0c^2}{q}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) =$$
$= 1{,}7\ 10^9$ *в*.

12 $$x = \frac{C(\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2)}{qnV} = 1{,}2 \ \rho$$

13 $$t = \frac{\eta mWN}{100\mu P} = 1{,}64\ 10^7 c \approx 190 \text{ суток},$$

где μ — молекулярная масса урана, N — число Авогадро

14 $$W = \Delta W(m_1+m_2-m_3-m_4)\frac{mN}{A} =$$
$= 4{,}2\ 10^{11}$ *дж*,

где A — атомная масса гелия, N — число Авогадро

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см «Квант», 1974, № 6*)

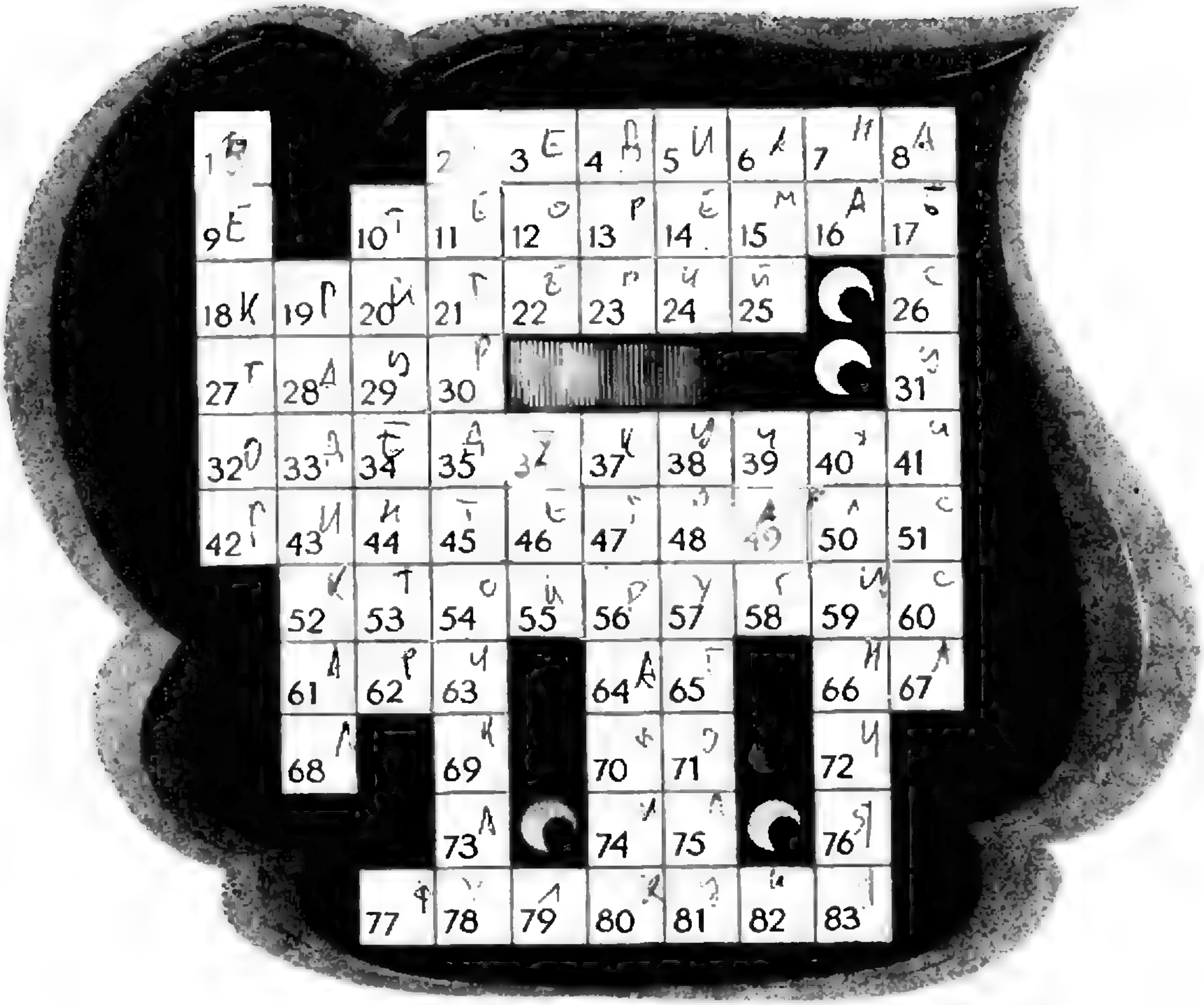
1 Сила давления воздуха в бутылке «выдерживает» вес воды в воронке
2 Стул упадет вперед
3 Днем — через каждые 4 часа, ночью (с 19 до 7 часов) — через 12 часов
4 Продано 98 метров
5 89

Корректор *Н Б Румянцева*

117071 Москва В 71 Ленинский проспект 15
«Квант» тел 234 08 11 Сдано в набор 17/IV 74 г
Подписано в печать 11/VI 74 г
Бумага 70×108$^1/_{16}$ Физ печ л 5
Усл печ л 6 5 Уч изд л 7 77
Тир 354 155 экз Т 11238
Цена 30 коп Заказ 738

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств полиграфии и книжной торговли г Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Кроссворд

По горизонтали

2—8 отрезок в треугольнике
10—16 математическое предложение
18—25 признак
33—40 одна из форм умозаключения
43—50 одно из основных понятий математического анализа
55—58 плоская фигура
77—83 отображение

По вертикали

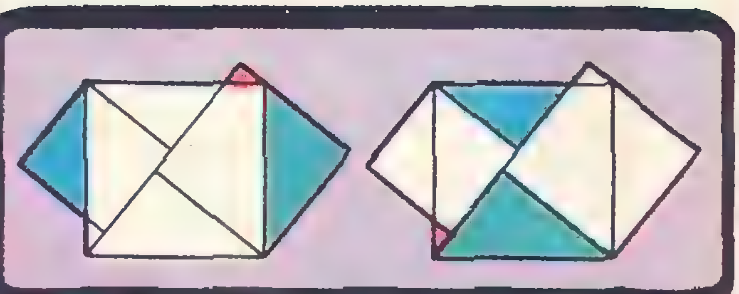
1—42 направленный отрезок
19—68 знак корня
29—62 точка круга, равноудаленная от точек его границы
2—30 мера длины
45—73 одно из основных геометрических понятий
47—80 множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=f(x)$
57—75 часть плоскости
8—67 одна из осей координат
50—76 след движущейся точки

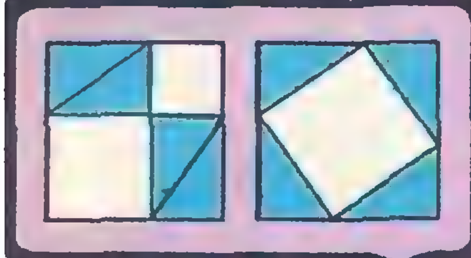
Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

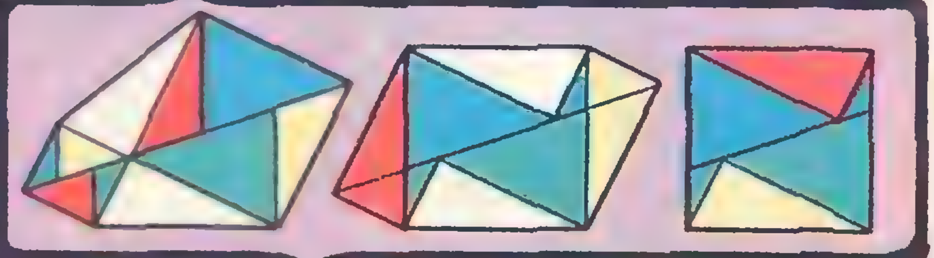
7

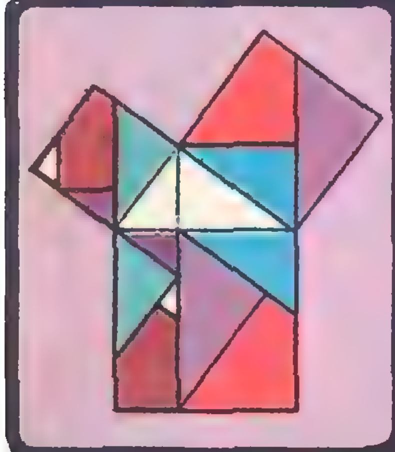
Теорема Пифагора

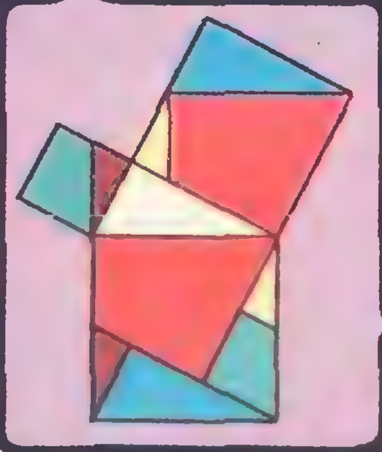
С помощью каждого из рисунков, помещенных на этой странице, можно доказать теорему Пифагора. Попробуйте по этим рисункам восстановить идеи доказательств и подробно их провести.

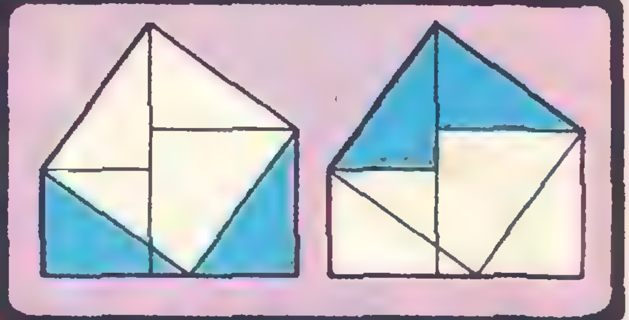


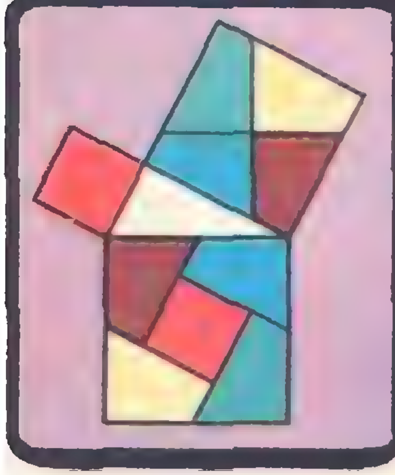


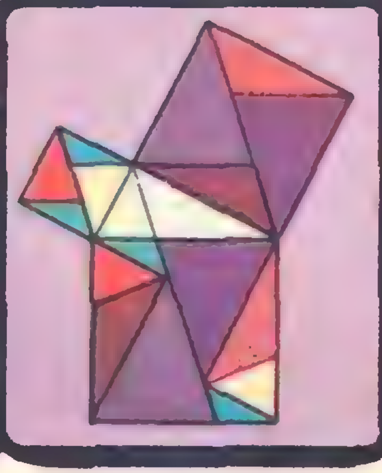


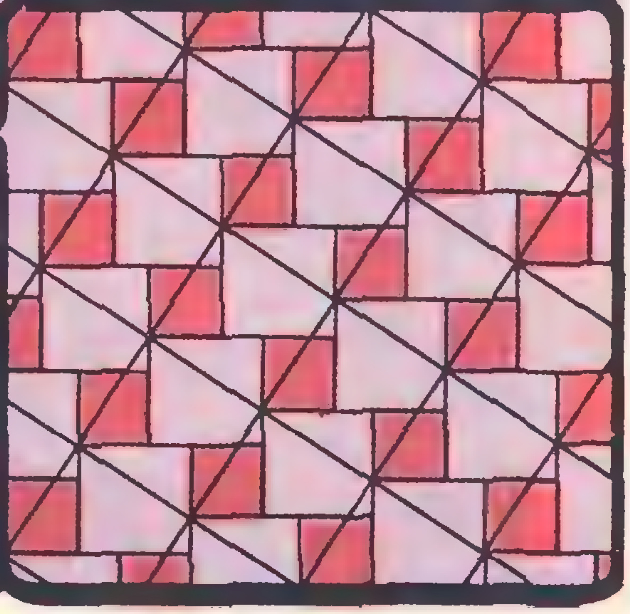












НОМЕР
8

Основан в 1970 году
1974
КВАНТ
8
Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:
В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

3 *П. С. Александров.* Павел Самуилович Урысон (к пятидесятилетию со дня смерти)
13 *М. С. Торонджадзе, А. Д. Бендукидзе.* Кривые Пеано
17 *Б. Понтекорво.* Юность Энрико Ферми
22 *Н. Б. Демидович.* Как начертить n-мерный куб?
28 *Я. А. Смородинский.* О силах инерции
36 *А. К. Кикоин.* Физики, математики, спорт...

Математический кружок

40 *А. Л. Тоом.* Вступительная контрольная работа в ВЗМШ в 1974 году. Решения задач

Задачник «Кванта»

44 Задачи М276—М280; Ф288—Ф292
46 Решения задач М236—М240; Ф243—Ф247

Рецензии, библиография

54 *Н. Зорич.* Энрико Ферми — физик

Информация

56 *В. Н. Каплун.* Физико-математической школе при МИИТе — 5 лет
59 *В. А. Волков, А. Л. Лихтарников, И. С. Рубанов.* Конференция по работе со школьниками

«Квант» для младших школьников

61 Задачи
62 *В. К. Смышляев, А. П. Савин.* Нет ли другого доказательства?
64 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 27, 35)*

На 1-й с. обложки помещен рисунок, показывающий, как строится «ковер Серпинского» (рис. С. Ф. Лухина). Если в центре квадрата вырезать в 3 раза меньший квадрат, в оставшихся (по краям) 8 квадратах опять вырезать в 3 раза меньшие квадраты и так до бесконечности, то останется множество точек, которое является линией — множеством (на плоскости) размерности 1. Подробно об определении понятия размерности точечных множеств, предложенном П. С. Урысоном, рассказано в статье академика П. С. Александрова (см. с. 3).

4-я с. обложки — рис. Э. В. Назарова.

© «Квант», 1974 год

Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ПАВЕЛ САМУИЛОВИЧ УРЫСОН

К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ СМЕРТИ

В статье академика Павла Сергеевича Александрова рассказывается о жизни и работах выдающегося советского математика — Павла Самуиловича Урысона. К сожалению, чтобы почувствовать, какого масштаба был этот математик, суметь оценить значение и важность полученных им результатов, нужно знать гораздо больше, чем изучается в школе, в частности, нужно знать, что такое топология, и быть знакомым с основными понятиями теории множеств. По-видимому, с большинством из этих понятий вы встретитесь в этой статье впервые, поэтому, в своей математической части статья, безусловно, трудная; при первом чтении, вероятно, эту часть целесообразно пропустить. В то же время подготовленный и вдумчивый читатель сможет найти в этой статье очень много интересных и полезных сведений, получив представление о том, чем занимается современная топология. Такому читателю мы советуем, прежде чем приступить к подробному разбору этой статьи, познакомиться с основными определениями и результатами теории множеств. Найти все это можно, например, в прекрасных и достаточно элементарных книгах П. С. Александрова «Введение в теорию функций действительного переменного», П. С. Александрова и П. С. Урысона «Мемуар о компактных топологических пространствах» и А. С. Пархоменко «Что такое линия». Кроме того, в этом же номере журнала мы публикуем статью М. С. Торонджадзе, А. Д. Беидукидзе «Кривые Пеано», рассказывающую об истории определения понятия линии.

17 августа 1974 года исполняется пятьдесят лет со дня смерти одного из самых талантливых советских математиков П. С. Урысона.

Павел Самуилович Урысон родился 3 февраля 1898 года в Одессе. Его большие способности проявились еще в детские годы: ученье ему давалось легко и широкая его любознательность сказалась и в отношении естественных наук (главным образом физики и химии), и в отношении математики, а также языков и литературы. Блестяще окончив в 1915 году московскую частную гимназию П. Н. Поповой, он в том же году поступил в Московский университет на физико-математический факультет, причем предполагал стать физиком. На его выдающиеся способности очень рано обратил внимание П. П. Лазарев, который содействовал преодолению препятствий полицейски-бюрократического характера, возникших при поступлении П. С. Урысона в университет. Под руководством П. П. Лазарева была сделана первая научная работа Павла Самуиловича, она называлась «О радиации трубки Кулиджа», имела экспериментальный характер и была напечатана в 1915 году.

Однако скоро научные интересы П. С. Урысона стали все более склоняться в сторону математики. Решающее влияние в этом отношении имели лекции, прочитанные в Московском университете Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным, учеником которых П. С. Урысон всегда себя и считал. Особенно велико было, конечно, влияние Н. Н. Лузина, который находился тогда в расцвете своей педагогической деятельности в Московском университете и сосредоточил вокруг себя наиболее живых и способных к математике студентов. В конце университетского курса Н. Н. Лузин предложил Павлу Самуиловичу «остаться при университете» (то есть поступить в аспирантуру) под его руководством. Это предложение, принятое П. С. Урысоном, определило окончательно выбор им математической специальности.

Аспирантский период в жизни П. С. Урысона, продолжавшийся с 1919 по 1921 год, целиком попал в незабываемые первые годы формирования послереволюционной, советской математической школы. То были годы необычайного подъема и увлечения внезапно раскрывшимися новыми творческими возможностями, годы подлинного цветения для многих молодых людей, впервые вкусивших радость творческого соприкосновения с наукой в тех новых, небывалых условиях, которые открыла Революция. Мало найдется в истории математической науки периодов столь горячего энтузиазма, как начало двадцатых годов в Московском университете, когда в столь короткий срок, буквально за несколько лет, возникла целая большая научная школа, в значительной степени определившая дальнейшее развитие математики в нашей стране и сразу выдвинувшая целый ряд новых выдающихся ученых.

П. С. Урысон сразу же попал в самый центр этого сообщества молодых математиков — в первую очередь, конечно, вследствие необычайно яркого своего математического таланта, но также и вследствие своей увлеченности наукой, своей жизнерадостности, своего кипучего темперамента и обаятельных свойств своего характера, открытого, дружелюбного, совершенно чуждого какой бы то ни было мелочности. Его любили в товарищеской среде, как любят людей в которых чувствуется подлинное движение большой человеческой личности, одаренной не только в смысл способностей к одной какой-нибуд специальности, но и по всему диапазону эмоциональных, этических и социальных свойств человека.

Математическое творчество П. С. Урысона развивалось бурно и разнообразно. Уже в студенческие годы он овладел математикой своего времени, а его аспирантские отчеты надолго запомнились в среде московских математиков: почти каждый отчет, даже по специальностям, далеким от основных математических интересов Павла Самуиловича, содержал тот или иной новый результат или, в крайнем случае, какое-нибудь существенное упрощение или усовершенствование доказательств. А сколько различных ошибок и неточностей находил по этому поводу Павел Самуилович в математической литературе!

Но и это не все. Из аспирантских отчетов П. С. Урысона возникли некоторые его исследования по математическому анализу (в частности, работа по нелинейным интегральным уравнениям), ставшие впоследствии знаменитыми и в полном смысле этого слова «классическими». Тем не менее, в наибольшей степени обессмертили его имя топологические исследования и в первую очередь созданная им теория размерности, явившаяся одним из значительнейших достижений математической мысли первых десятилетий текущего века.

Теорию размерности П. С. Урысон построил в течение 1921/22 учебного года. К этому времени он уже закончил аспирантуру и в июне 1921 года был утвержден в должности доцента Московского университета. Тем же летом Д. Ф. Егоров поставил перед П. С. Урысоном задачу: *дать внутреннее топологическое определение линии, которое для плоских фигур* (то есть для множеств, лежащих в плоскости) *было бы эквивалентно известному определению канторовой кривой* *как замкнутого, связного множества точек плоскости, не содержащего внутренних точек* (относительно плоскости)*). В той же беседе Д. Ф. Егоров поставил и задачу определения возможно широкого класса множеств, которые естественно было бы называть *поверхностями*.

Обе задачи оказались поставленными удачно (хотя с формальной точки зрения и не вполне определенным образом). Павел Самуилович сразу же стал упорно думать над этими задачами. Очень скоро предметом его размышлений стало общее определение *размерности*, то есть числа измерений геометрической фигуры. Все лето 1921 года прошло в напряженных попытках найти «настоящее» определение, причем Павел Самуилович переходил от одного варианта к другому, постоянно строя примеры, показывающие, почему тот или иной вариант надо отбросить. Это были два месяца действительно всепоглощающих размышлений. Наконец, в одно утро в конце августа Павел Самуилович проснулся с готовым, окончательным и всем теперь хорошо известным «индуктивным определением размерности» (см. ниже).

Это было в деревне Бурково вблизи Болшева, на берегу реки Клязьмы, там группа молодых московских математиков (в том числе В. В. Степанов, Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари) жила на даче. В то же утро, во время купанья в Клязьме П. С. Урысон рассказал мне свое определение размерности и тут же, во время этого разговора, затянувшегося на несколько часов, набросал план всего построения теории размерности, с целым рядом теорем, бывших тогда гипотезами, за которые неизвестно было, как и взяться, и которые затем доказывались одна за другой в течение последующих месяцев. Никогда потом я не был участником или свидетелем математического разговора, который состоял из такого сплошного потока новых мыслей, как в то августовское утро.

Вся набросанная тогда программа полностью осуществилась в течение зимы 1921/22 года, к весне 1922 года вся теория размерности была готова. Оказалось, что можно естественным образом поставить в соответствие каждому множеству E (каждому метрическому пространству) некоторое неотрицательное целое число $\dim E$ — размерность этого множества. Новое определение оказалось плодотворным, оно явилось источником установления целого ряда новых свойств точечных множеств, что в свою очередь привело к постановке новых математических задач.

Попытаемся изложить предложенное П. С. Урысоном «индуктивное» определение размерности, отступив от первоначальной формы, данной этому определению его автором.

Под *множеством* будем понимать любое замкнутое множество, лежащее в каком-либо метрическом пространстве (или хотя бы только в каком-либо евклидовом пространстве произвольного числа измерений). Скажем, что два множества P и Q, лежащие в любом метрическом (или даже топологическом) пространстве R, *отделены друг от друга*, если эти множества не имеют общих точек и если, кроме того, ни одно из них не содержит предельной точки другого. Так например, интервалы (0,1) и (1, 2) числовой прямой отделены друг от друга (хотя имеют общую предельную точку 1). Точно так же отделены друг от друга внутренность круга и вся внешняя к данному кругу область (состоящая из всех точек плоскости, расстояние каждой из которых от центра круга превосходит его радиус).

Скажем далее, что какое-либо множество B является *перегородкой* между множествами C и D, если дополнение $R \setminus B$ множества B (до всего рассматриваемого нами пространства R) может быть представлено в виде суммы $R \setminus B = P \cup Q$ двух отделенных друг от друга множеств P и Q, из которых одно (пусть это будет P) содержит множество C, а другое содержит множество D:

---

*) То есть не содержащего никакой точки, которая входила бы в данное множество вместе с какой-нибудь своей окрестностью (за окрестность можно взять, например, круг или квадрат).

$$P \supset C, \quad Q \supset D, \quad B \cup P \cup Q = R.$$

После этого определение *размерности* метрических пространств (или хотя бы множеств, лежащих в евклидовых пространствах любого числа измерений) осуществляется по индукции следующим образом.

Пустому множеству приписывается размерность —1.

Предположим, что мы уже определили множества размерности, не превосходящей $n-1$. *Скажем, что множество* X (метрическое пространство) *имеет размерность не более* n, *если между любыми двумя лежащими в* X *замкнутыми множествами без общих точек имеется перегородка размерности не более чем* $n-1$. *После этого мы естественно говорим, что размерность множества* X *равна* n, *если* X *входит в класс множеств, имеющих размерность не более* n, *и не входит в класс множеств, имеющих размерность не более* $n-1$.

Если интересоваться лишь так называемыми «сепарабельными» метрическими пространствами (то есть имеющими счетное всюду плотное подмножество точек)— а только ими и интересовались в начале построения теории размерности,— то определение размерности, эквивалентное данному выше, можно сформулировать и так.

Размерность пустого множества полагаем равной —1.

Предполагая, что множества размерности не более $n-1$ *уже определены, говорим, что размерность множества* X *не превосходит* n, *если, какова бы ни была точка* $x \in X$ *и не содержащее ее замкнутое множество* Φ *между* x *и* Φ *существует перегородка размерности не более* $n-1$.

Последнее утверждение в свою очередь эквивалентно такому.

Какова бы ни была точка $x \in X$ *и ее окрестность* $O(x)$, *существует меньшая окрестность* $O_1(x)$ *той же точки, такая, что граница окрестности* $O_1(x)$ *имеет размерность не более* $n-1$.

Теперь читатель уже легко докажет что всякое конечное множество (на прямой, на плоскости) и вообще всякое метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, имеет размерность 0; что прямая и окружность, а также все известные читателю «элементарные кривые» (парабола, эллипс, синусоида и другие) имеют размерность 1. По индуктивному определению отсюда следует, что плоскость и сфера имеют размерность не более чем 2. После этого, снова пользуясь индукцией, доказываем, что трехмерное пространство имеет размерность не более чем 3. Но что плоскость имеет размерность ровно 2, читателю едва ли удастся доказать — для этого надо знать больше, чем можно знать, никогда не изучая топологии.

Что же касается прямого (то есть основывающегося непосредственно на данных выше определениях) доказательства того, что размерность трехмерного пространства не меньше чем 3 (и следовательно, равна трем), то для такого доказательства Урысону понадобилось свыше двадцати страниц!

Идти дальше таким же непосредственным путем было невозможно; понадобились какие-то «обходные маневры».

Их Урысон нашел в замечательной работе знаменитого французского математика Лебега, впервые заметившего в 1911 году (хотя и не доказавшего строго) следующий глубокий геометрический факт (впервые строго доказанный Брауэром*) в 1913 году).

Пусть n-мерный куб Q^n *покрыт конечным числом замкнутых множеств* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$. *Если эти множества достаточно малы по диаметру* (а именно, если их диаметры меньше ребра куба), *то имеется хотя бы одна точка, принадлежащая не менее чем* $n+1$ *множеству из числа данных множеств* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$.

С другой стороны, уже рисунок 1 показывает, как построить покрытие квадрата сколь угодно мелкими замкнутыми множествами (даже квадратами), имеющее «кратность» 3**). Читатель легко обобщит это построение на кубы трех и более измерений. Таким образом, мы приходим к следующему новому определению размерности, которое сформулируем для ограниченных замкнутых множеств, лежащих в евклидовых пространствах любого числа измерений (хотя это определение легко допускает обобщение на любые метрические и даже на еще более общие пространства).

Скажем, что размерность $\dim X$ *пространства* X *не превосходит* n, *если это пространство допускает сколь угодно мелкое покрытие замкнутыми множествами, имеющее кратность не более чем* $n+1$.

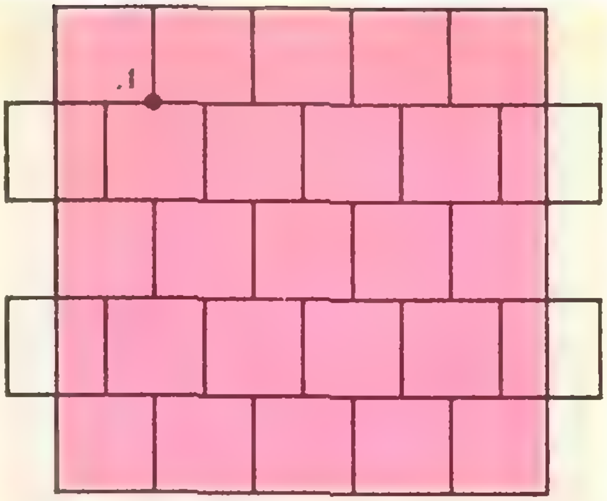


Рис. 1.

Урысон доказал замечательную «теорему эквивалентности», утверждающую, что *для всех ограниченных замкнутых множеств* X, *лежащих в каких-либо евклидовых пространствах, только что определенная размерность* $\dim X$ *совпадает с ранее определенной индуктивной размерностью.* В действительности этот факт имеет место для всех метрических (и еще более общих) пространств. Глубина доказанной Урысоном теоремы эквивалентности состоит в том, что она устанавливает эквивалентность двух совсем не схожих между собою геометрических свойств, двух совершенно различных по их формулировкам определений, являющихся, как оказалось, определениями одного и того же понятия, а именно *понятия размерности геометрической фигуры*, что это понятие может быть таким образом охарактеризовано с совершенно различных сторон. Именно такие сопоставления, казалось бы, совершенно различных подходов к каким-нибудь явлениям и оказываются в науке наиболее плодотворными.

Как следствие своей «теоремы эквивалентности» Урысон доказал, что *n-мерное в элементарном геометрическом смысле евклидово пространство имеет размерность n и в смысле приведенного выше общего индуктивного определения размерности.* Но этим далеко не ограничилось значение этой теоремы, *она послужила поворотной* точкой в развитии теории размерности и значительной части всей топологии вообще. В частности, эта теорема явилась отправной точкой для построения гомологической теории

---

*) Л. Э. Я. Брауэр (1881—1966) — выдающийся голландский математик, один из создателей топологии и целого направления («интуиционизм») в обосновании математики.

**) Мы говорим, что данная система множеств *имеет кратность k*, если *k* есть наибольшее число множеств с непустым пересечением среди множеств данной системы (на рисунке 1 точка *A* принадлежит трем множествам).

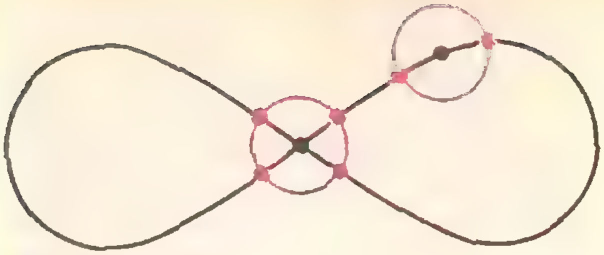


Рис. 2

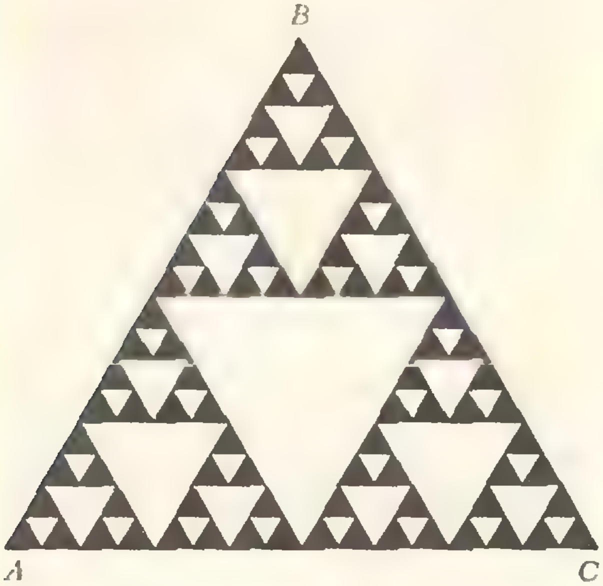


Рис. 3.

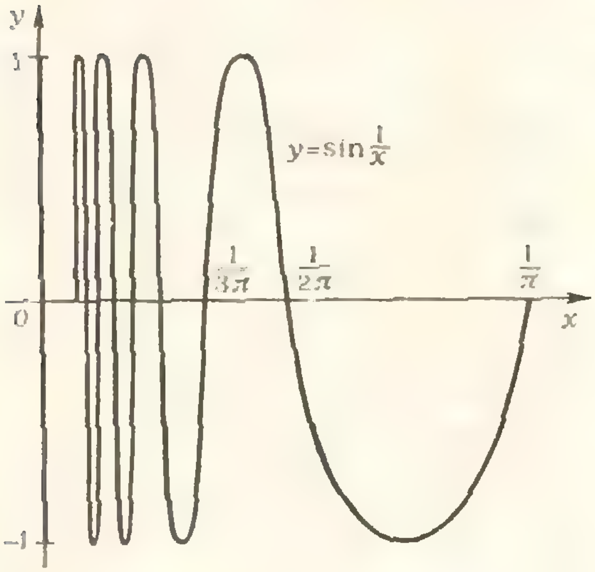


Рис. 4.

компактных метрических и более общих пространств. Помимо теоремы эквивалентности отмечу еще несколько теорем теории размерности: *всякое множество, являющееся суммой счетного числа замкнутых множеств размерности n, само имеет размерность n; для любых двух множеств A и B выполняется неравенство Урысона:*

$$\dim(A\cup B)\leqslant\dim A+\dim B+1.$$

Из последнего неравенства и из теоремы о сумме замкнутых множеств П. С. Урысон вывел следующий факт: *размерность любого множества есть наименьшее такое число n, что данное множество может быть представлено в виде суммы $n+1$ нульмерных множеств* (при этом нульмерные множества могут быть определены, например, как множества, гомеоморфные подмножествам множества иррациональных чисел числовой прямой или канторова совершенного множества).

Большое значение Павел Самуилович придавал предложению, что *ограниченное множество, являющееся совместной границей двух связных областей в n-мерном евклидовом пространстве R^n, есть так называемое $(n+1)$-мерное канторово многообразие* (под k-мерным канторовым многообразием П. С. Урысон понимал k-мерный континуум, который остается связным после удаления из него любого множества размерности не более $k-2$). Для случая $n=3$ это предложение доказал П. С. Урысон, а впоследствии оно было доказано во всей общности. Все обычные многообразия являются и канторовыми многообразиями (в частности, канторовыми многообразиями соответствующего числа измерений являются все кубы). Именно понятие канторова многообразия П. С. Урысон считал центральным в созданной им теории: одномерные канторовы многообразия суть просто одномерные континуумы, это и есть линии в наиболее общем смысле слова; плоские линии в этом смысле совпадают с канторовыми кривыми. Таким образом решается первая исходная задача, поставленная Д. Ф. Егоровым. Двумерные канторовы многообразия П. С. Урысон считал поверхностями в самом широком смысле слова, и с этой точки зрения теорема о том, что *совместная граница двух* *областей в трехмерном пространстве есть двумерное канторово многообразие* («канторова поверхность», как любил говорить Павел Самуилович), имела, конечно, решающее значение. Любопытно отметить, что свою работу по теории размерности Павел Самуилович назвал «Мемуаром о канторовых многообразиях».

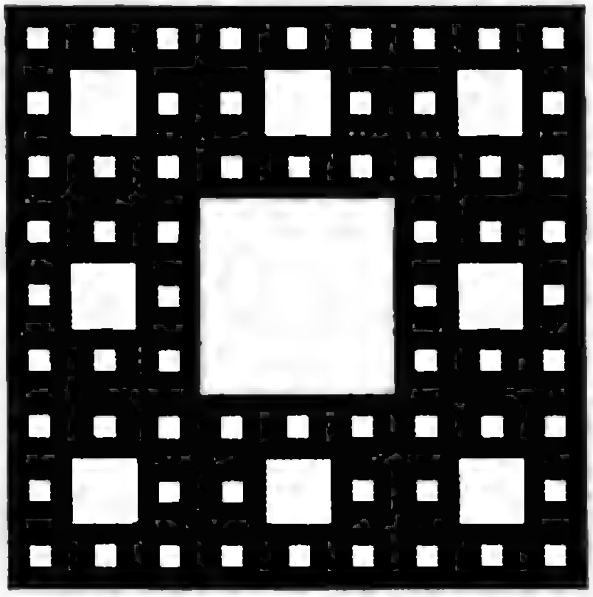


Рис. 5.

Вторая часть этого мемуара, изданная уже посмертно в точном соответствии с планом и предварительными набросками автора, всецело посвящена теории одномерных континуумов, в частности, их «индексам ветвления» (в различных точках). При этом *индекс ветвления* кривой в данной ее точке x есть наименьшее такое натуральное число k, что точка x имеет столь угодно малую окрестность, граница которой состоит из k точек. Прямолинейный отрезок (и всякая гомеоморфная ему кривая) имеет в двух концевых точках индекс ветвления 1, во всех остальных точках — индекс 2; лемниската (восьмерка) имеет во всех точках индекс ветвления 2, кроме одной точки с индексом 4 (см. рис. 2). Выбрасывая из замкнутого треугольника ABC внутренности всех белых треугольников, построенных на рисунке 3, и продолжая намеченный процесс до бесконечности, получим кривую S, впервые построенную польским математиком В. Серпинским, имеющую в трех точках A, B, C индекс 2, во всех вершинах всех остальных треугольников (их счетное множество)— индекс 4 и в множестве (мощности континуума) всех остальных точек — индекс 3 (докажите это!). Если взять график функции $x = \sin\frac{1}{x}$ на полуинтервале $0<x\leqslant\frac{1}{\pi}$ и пополнить его всеми точками $-1\leqslant y\leqslant 1$ предельного сегмента оси ординат, то получится кривая (см. рис. 4, масштаб на осях разный!), которая во всех точках $(0, y)$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, предельного сегмента имеет бесконечный («счетный») индекс ветвления, в точке $\left(\frac{1}{\pi},\ 0\right)$ — индекс 1, а во всех остальных точках — индекс 2. Существуют кривые, имеющие во всех точках бесконечный (и даже несчетный, равный мощности континуума) индекс ветвления. Такова кривая «ковер Серпинского», получаемая продолженным бесконечно процессом выкидывания из изображенного на рисунке 5 замкнутого квадрата изображенных на нем открытых квадратов. Урысон доказал следующую любопытную теорему: *если кривая имеет во всех своих точках индекс не менее k, то непременно на ней имеются и точки индекса не менее $2k-2$, при этом для каждого конечного k имеется кривая, имеющая лишь точки индексов k и $2k-2$.* Из доказанной Урысоном теоремы следует, что *если кривая во всех своих точках имеет один и тот же конечный индекс ветвления, то он равен 2, и все кривые, удовлетворяющие этому условию, гомеоморфны окружности.*

Перечисленные выше теоремы П. С. Урысона составляют лишь небольшую часть множества установленных им конкретных геометрических факторов, составивших содержание его мемуара по теории размерности. Как я уже сказал, все эти теоремы были доказаны в течение зимы 1921/22 года. Параллельно Павел Самуилович читал в Московском университете курс под заглавием «Топология континуумов», в котором излагались все эти результаты, часто тотчас же после их доказательства. Этот курс — первый топологический курс, прочитанный не только в Московском университете, но и вообще в нашей стране,— был, несомненно, одним из самых замечательных математических курсов, когда-либо прочитанных в стенах Московского университета, именно в силу его сплошь творческого характера.

Лето 1922 года, проведенное П. С. Урысоном вместе со мной снова в окрестностях Болшева (в так называемых Старых Горках), было периодом наших совместных исследований по теории топологических пространств.

В течение этого лета были получены результаты, вошедшие в наш общий «Мемуар о компактных пространствах», третье издание которого недавно (в 1972 году) было опубликовано в виде отдельной монографии.

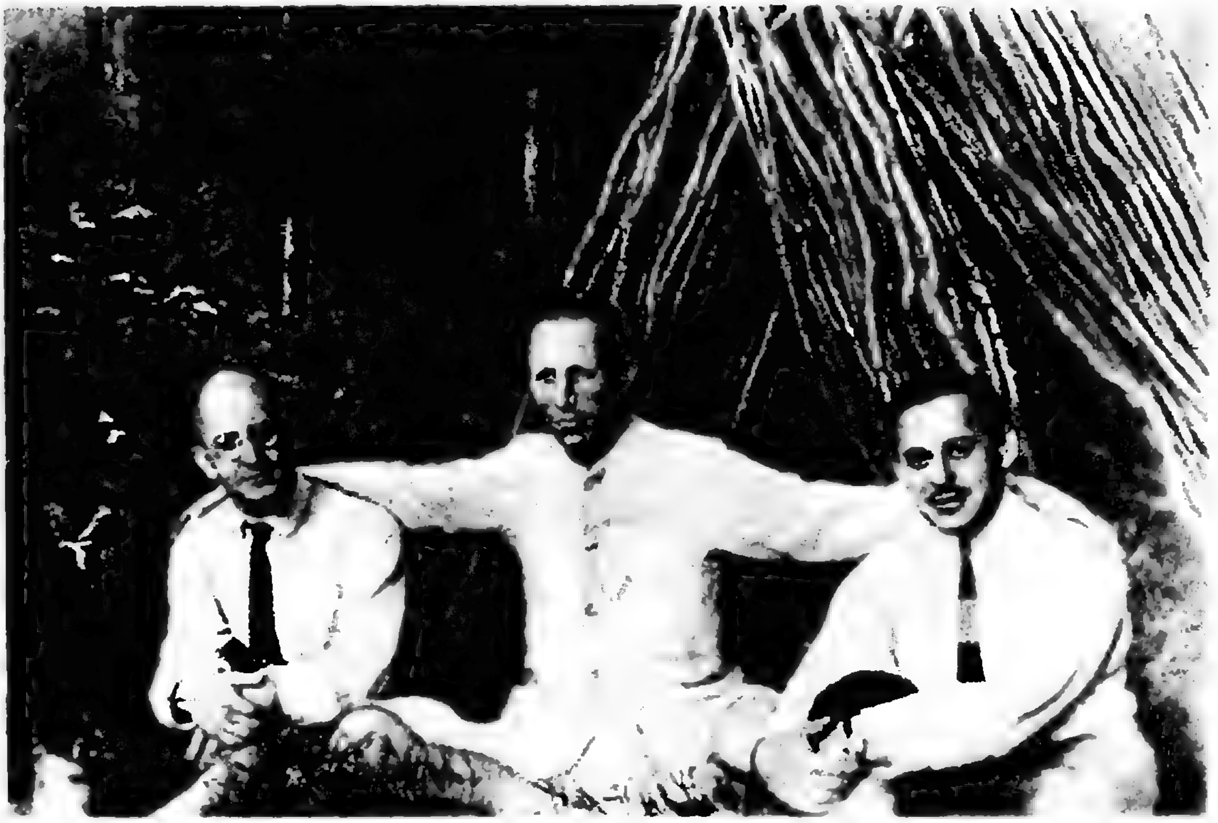
В это же лето и часть следующей зимы Павел Самуилович сделал свою работу по теории меры. Зимой 1922/23 года Павел Самуилович продолжал заниматься главным образом теорией топологических пространств. В это время была доказана наша совместная теорема о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы топологическое пространство было гомеоморфно метрическому (так называемая «общая метризационная теорема»), была доказана П. С. Урысоном и замечательная теорема о том, что *все метрические пространства со счетным всюду плотным множеством и только они гомеоморфны множествам, лежащим в гильбертовом пространстве*. Доказательство возможности топологически включить в гильбертово пространство всякое нормальное пространство со счетной базой*) то есть доказательство того, что *нормальность представляет собой необходимое и достаточное условие для метризуемости пространств со счетной базой*, было получено Павлом Самуиловичем лишь несколько позже в 1924 году. За зиму 1922/23 года П. С. Урысоном был окончательно отредактирован мемуар по теории размерности, а мною — наш общий мемуар по теории компактных пространств. В эту же зиму Павел Самуилович с большим увлечением изучал теорию относительности, с тем, чтобы на следующий год (то есть зимой 1923/24 года) читать по этому предмету курс лекций в университете. Лето 1923 года ушло на поездку в Германию, где Павел Самуилович с большим успехом делал доклады в Геттингенском математическом обществе и сразу же привлек к своим топологическим работам внимание Гильберта**). В качестве отдыха было предпринято пешеходное путешествие по Норвегии. Вернувшись в Москву осенью 1923 года, Павел Самуилович стал со свойственным ему увлечением заниматься новыми отделами топологии: он изучал мемуары Пуанкаре и Брауэра.

В эту последнюю зиму своей жизни П. С. Урысон все больше и больше интересовался так называемой «комбинаторной топологией», не бросая, однако, своих занятий и различными вопросами теоретико-множественной топологии. В последние месяцы жизни он написал свой известный мемуар «О мощности связных

---

*) Топологическое пространство называется *нормальным*, если любые два его непересекающиеся замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности (то есть содержащие их непересекающиеся открытые множества).

**) Д. Гильберт (1862—1943) — один из величайших математиков девятнадцатого и двадцатого веков. Ему принадлежат фундаментальные работы почти во всех областях математики.



П. С. Александров, Л. Э. Я. Брауэр и П. С. Урысон летом 1924 года. (Фотография публикуется впервые)

множеств», где среди других результатов был построен знаменитый пример счетного связного хаусдорфова пространства, одновременно он построил универсальное метрическое пространство со счетной базой, содержащее изометрический образ всякого метрического пространства со счетной базой. П. С. Урысон доказал, что *построенное им пространство является (с точностью до изометрии) единственным полным универсальным метрическим пространством со счетной базой, обладающим свойством метрической однородности в том смысле, что любые два его изометричных конечных множества могут быть переведены друг в друга изометрическим отображением всего пространства на себя.* Кроме того, построенное П. С. Урысоном метрическое пространство обладает рядом еще и других интересных свойств, в том числе связностью и локальной связностью (всякие две его точки могут быть соединены прямолинейным отрезком).

Лето 1924 года П. С. Урысон снова провел в заграничной командировке. В этом нашем совместном путешествии были посещены Германия, Голландия и Франция. В частности, работы Павла Самуиловича произвели очень большое впечатление на Брауэра и Хаусдорфа, которые видели в этих работах самое большое топологическое достижение того времени. Для отдыха была предпринята поездка в маленькое рыбацкое поселение Ба (Batz) в южной части Бретании. Туда мы приехали во второй половине июля, и там Павел Самуилович написал свою работу о связных множествах. Это пребывание было прервано лишь недельной поездкой на крайний запад Бретании—Финистерр, суровые и дикие места, произведшие на Павла Самуиловича огромное впечатление. Из этой поездки мы вернулись 11 августа, а 14 августа Павел Самуилович закончил свой мемуар и собирался последовательно писать сначала работу о метризации нормальных пространств со счетной базой, а потом работу об универсальном метрическом пространстве. Лишь первая страница первой из этих двух работ была им написана — в день его смерти. В эти дни в океане нарастало волнение, привлекавшее Павла Самуиловича и заставлявшее его плавать с особенным увлечением. К 17 августа это волнение перешло в настоящий шторм, и купанье, предпринятое в этот день в начале шестого часа пополудни, оказалось для него роковым: схваченный набежавшей огромной волной, Павел Самуилович был брошен ею о скалу. Его удалось вытащить из воды лишь спустя сорок минут, и попытки вернуть его к жизни остались безуспешными.

П. С. Урысон похоронен там же, на кладбище в Ба.

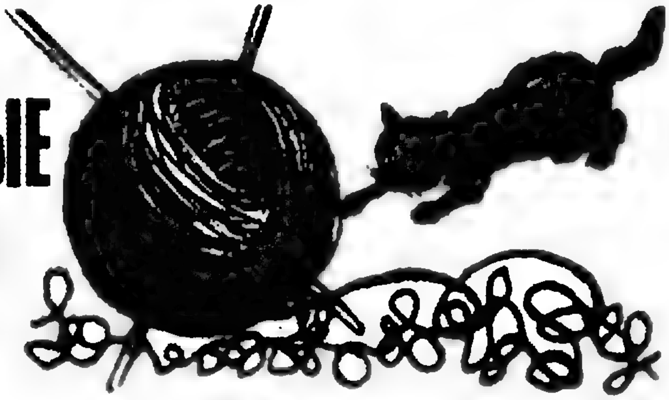
Вся научная деятельность П. С. Урысона продолжалась каких-нибудь четыре года, и за эти немногие годы он оставил неизгладимый след в науке. Теория размерности, метризационные теоремы, знаменитая «лемма Урысона» о существовании достаточно многих непрерывных функций в нормальных пространствах, теорема о включении в гильбертово пространство — эти и другие результаты П. С. Урысона представляют собой огромный вклад в науку, не только не забытый за истекшую со дня его смерти половину века, но доказавший свою жизнеспособность в многочисленных дальнейших исследованиях.

Оставшиеся незавершенными научные работы П. С. Урысона, иногда имевшиеся лишь в набросках и даже только в устных высказываниях, были мною подготовлены к печати и опубликованы полностью при деятельном участии Брауэра, который, в частности, прочитал корректуры всех работ П. С. Урысона. Их первые публикации были отчасти на немецком, отчасти на французском языке, полный русский перевод составил два тома, вышедших под названием «Труды по топологии и другим областям математики» в 1951 году. Сейчас основные топологические теоремы, доказанные П. С. Урысоном, входят во все учебники топологии.

Трудно, да и бесполезно гадать о том, в каких направлениях развивалось бы математическое творчество П. С. Урысона, если бы его жизнь не оборвалась так преждевременно и так трагически. Но несомненно, что в его лице математическая наука потеряла ученого самого большого масштаба, с универсальной математической одаренностью, с интересами, охватывающими всю математику, с любознательностью, распространявшейся на самые разнообразные области человеческого познания. Общая одаренность его личности, объективно запечатлевшаяся в его научном наследии, воспринималась соприкасавшимися с ним людьми в самых различных ее проявлениях: в его лекциях, удивительных по проникновенности и образности мысли, в его умении и любви работать, в его сильных и глубоких реакциях на все значительное, что происходило вокруг него в жизни человеческого общества, в той остроте, с которой он воспринимал природу и искусство (главным образом музыку), и во многом другом, что делает образ Павла Самуиловича не только живым и незабываемым, но и неповторимым по своей творческой силе и по своему человеческому обаянию для всех людей, которым пришлось с ним встретиться на жизненном пути.

М. С. ТОРОНДЖАДЗЕ
А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

КРИВЫЕ ПЕАНО



С 26 по 30 марта 1974 года в Тбилиси состоялась вторая научная конференция учащихся Тбилисской физико-математической средней школы-интерната имени В. М. Комарова. На этой конференции грузинская школьница Медея Торонджадзе прочитала доклад «Кривые Пеано», подготовленный под руководством А. Д. Бендукидзе. Доклад был оформлен в виде статьи, которую мы предлагаем вниманию читателей. В ней рассказано о том, как рождалось определение линии, и о кривой, из-за которой это определение пришлось менять. Окончательное определение линии (точнее, размерности точечного множества) вы найдете в статье академика П. С. Александрова (см. с. 3).

Что такое линия?

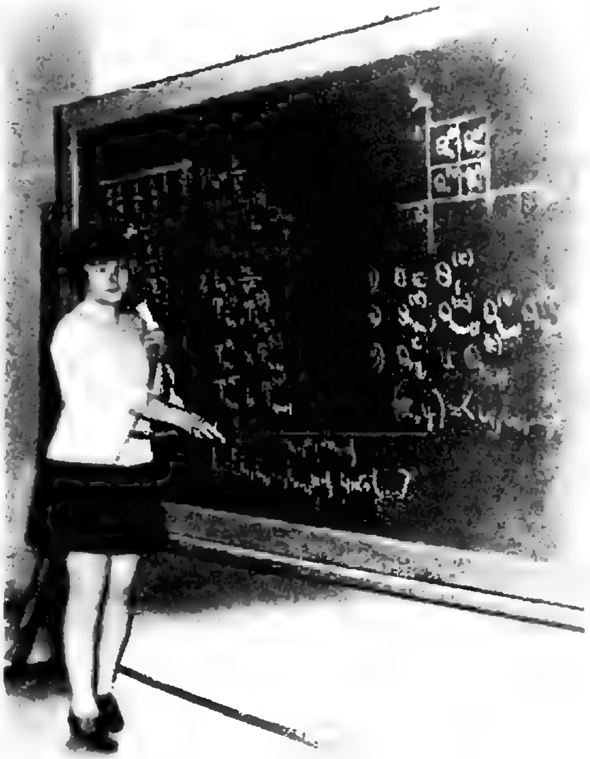
Наверное, многие из тех, кому будет задан этот вопрос, с недоумением пожмут плечами и ответят: «Линия? Да это же очень просто! Проведите острием хорошо отточенного карандаша по бумаге, и вы получите линию».

Кажется, что они правы,— ведь говоря о линии, мы и в самом деле представляем себе нечто, похожее на вьющийся тонкий штрих, нарисованный на листе бумаги.

И тем не менее они не будут правы! Причина очень проста: они дали не определение, а указание на то, что следует понимать под линией. Впрочем, винить их вряд ли стоит, так как дать точное математическое определение линии не столь просто, как это может показаться с первого взгляда. Математикам для этого понадобилось около 2200 лет!

Первым, кто попытался определить линию, был Евклид (III век до н. э.). Но его определение *«линия — это длина без ширины»* ни в коем случае нельзя считать удовлетворительным.

Спустя много лет после Евклида французский математик Рене Декарт (1596—1650) сделал существенный шаг по пути уточнения понятия линии. Согласно Декарту, *линия есть множество точек плоскости, коорди-*



Медея Торонджадзе читает доклад «Кривые Пеано» на конференции учащихся физико-математических школ-интернатов в Тбилиси *наты которых удовлетворяют некоторому уравнению вида* $F(x, y)=0$.

Это было довольно общее и хорошее определение линии. Оно было хорошо тем, что позволяло свести изучение линии к изучению задающего ее уравнения $F(x, y)=0$. Но позже выяснилось, что нередко функция $F(x, y)$ имеет довольно сложный вид.

Например, если окружность радиуса R задается уравнением

$$x^2+y^2-R^2=0$$

(здесь $F(x, y)=x^2+y^2-R^2$), то спираль Архимеда таким простым уравнением задать нельзя. Спираль Архимеда — это кривая, описываемая точкой, равномерно движущейся по лучу, который при этом равномерно вращается вокруг неподвижной точки (рис. 1). Эту кривую проще изучать геометрически, не прибегая к уравнениям.

Определение Декарта имело еще один недостаток: если не накладывать никаких ограничений на вид функции $F(x, y)$, то любое множество на плоскости по Декарту является линией (достаточно определить функцию $F(x, y)$ так: на заданном множестве пар (x, y) эта функция равна нулю, во всех остальных точках плоскости $F(x, y)=1$). Например, единичный квадрат по Декарту является «линией», он задается уравнением

$$|x|+|x-1|+|y|+|y-1|-2=0,$$

здесь функция

$$F(x, y)=$$
$$=|x|+|x-1|+|y|+|y-1|-2$$

даже непрерывна!

Во второй половине XIX века другой французский математик Камилл Жордан (1838—1922) развил понятие линии, предложенное Декартом. Жордан определил плоскую линию как *множество точек плоскости, координаты x и y которых даны уравнениями*

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, непрерывные на отрезке $[0, 1]$.

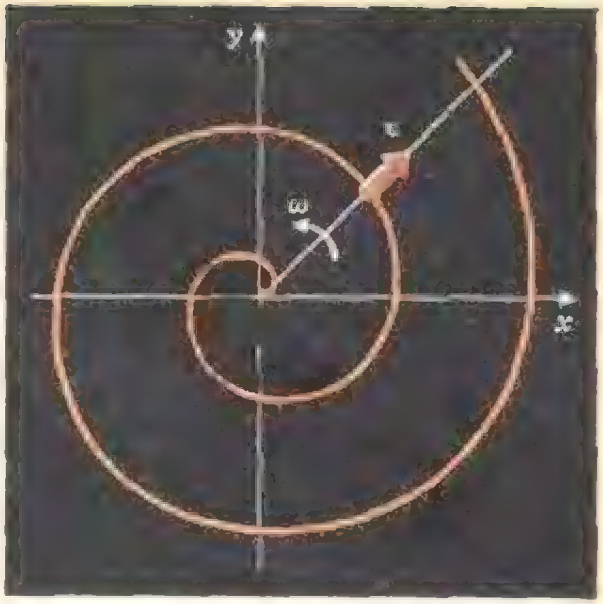


Рис. 1.

Сейчас такой способ задания линии называется параметрическим (с параметром t).

Например, параметрические уравнения окружности радиуса R имеют вид

$$x=R\cos 2\pi t, \quad y=R\sin 2\pi t.$$

Спираль Архимеда (точнее, ее кусок) задается несложными уравнениями

$$x=vt\cos\omega t, \quad y=vt\sin\omega t.$$

Некоторое время казалось, что, наконец, найдено удачное определение линии, при котором квадрат уж никак в «линии» не попадет. Как бы не так!

В 1890 году итальянский математик Джузеппе Пеано (1858—1932) построил пример кривой, обегающей все точки квадрата, и притом удовлетворяющей определению линии, данному Жорданом! В дальнейшем были найдены и другие примеры подобных «линий». Теперь такие «линии» называются «кривыми Пеано». Построение одной из кривых Пеано мы приведем в конце статьи.

Кривые Пеано показывают, что определение Жордана слишком широко. Трудно считать линией кривую, заполняющую целый квадрат. В то же время оно и слишком узко — существуют линии, не подходящие под это определение.

Итак, что же такое линия? В случае плоских линий окончательный ответ на этот вопрос был дан одним из крупнейших математиков конца XIX — начала XX века Георгом Кантором (1845—1918). Не останавливаясь на точной формулировке этого определения, приведем один интересный пример канторовой линии, построенный известным польским математиком Вацлавом Серпинским.

Возьмем квадрат. Разделим его на девять конгруэнтных квадратов и удалим из него внутренние точки центрального квадрата. Каждый из оставшихся восьми квадратов разделим на девять конгруэнтных квадратов и в каждом из них снова удалим внутренние точки центрального квадрата. Продолжая этот процесс неограниченно, мы и получим искомую линию. Ее называют *ковром Серпинского* (на первой странице обложки показана фигура, которая получается при построении ковра Серпинского после третьего шага). Обратите внимание на то, что сколь угодно близко от любой из оставшихся точек (ковра Серпинского) найдется точка, выкинутая из исходного квадрата.

В 20-х годах нашего века советский математик П. С. Урысон обобщил определение Кантора и дал общее определение линии *).

Построение кривой Пеано

1. Пусть σ — единичный отрезок $[0,1]$. Разделим его на четыре конгруэнтных отрезка:

$$\sigma_1^{(1)}=\left[0,\ \frac{1}{4}\right],\qquad \sigma_2^{(1)}=\left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right],$$

$$\sigma_3^{(1)}=\left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right],\qquad \sigma_4^{(1)}=\left[\frac{3}{4},\ 1\right].$$

Назовем эти отрезки *отрезками первого ранга*. Разделив каждый из них на четыре конгруэнтных отрезка, получим 16 *отрезков второго ранга* $\sigma_i^{(2)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 16)$. Продолжая процесс деления, получим отрезки третьего, четвертого и больших рангов. При этом отрезки r-го ранга будут иметь вид:

$$\sigma_i^{(r)}=\left[\frac{i-1}{4^r},\ \frac{i}{4^r}\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,4^r).$$

Возьмем теперь некоторую точку $t_0\in\sigma$.

Если она не совпадает ни с одной точкой деления, то существует ровно один отрезок каждого ранга, ее содержащий. Пусть такими являются $\sigma_{i_1}^{(1)}$, $\sigma_{i_2}^{(2)}$, $\sigma_{i_3}^{(3)}$, $\ldots$. Поставим в соответствие точке t_0 бесконечную последовательность натуральных чисел i_1, i_2, i_3, ... и будем это записывать так:

$$t_0=(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots).$$

Пример. $1/3=(2,\ 6,\ 22,\ 85,\ \ldots)$.

Если же точка t_0 совпадает с какой-либо точкой деления, то есть имеет вид $m/4^n$, то начиная с отрезков n-го ранга ее будут содержать два соседних отрезка каждого ранга. Сопоставим ей две последовательности:

$$t_0=(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-1},\ m,\ 4m,\ 16m,\ \ldots).$$

$$t_0=$$
$$=(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-1},\ m+1,\ 4m+1,\ 16m+1,\ \ldots).$$

Пример. $1/16=(1,\ 1,\ 4,\ 16,\ \ldots)=$ $=(1,\ 2,\ 5,\ 17,\ \ldots)$.

Итак, каждой точке отрезка σ мы поставили в соответствие одну или две последовательности натуральных чисел $(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots)$, в которых $1\leqslant i_1\leqslant 4$, $4i_k-3\leqslant i_{k+1}\leqslant 4i_k$. Обратно, каждая такая последовательность определяет единственную точку отрезка σ (докажите!).

2. Проведем аналогичное построение для единичного квадрата Q. Разделив его на четыре конгруэнтных квадрата, получим квадраты первого ранга: $Q_1^{(1)}$, $Q_2^{(1)}$, $Q_3^{(1)}$, $Q_4^{(1)}$. Деление каждого из этих квадратов на четыре конгруэнтных квадрата дает квадраты второго ранга и так далее. Вообще, деление каждого квадрата r-го ранга $Q_i^{(r)}$ на четыре конгруэнтных квадрата дает четыре квадрата $(r+1)$-го ранга: $Q_{4i-3}^{(r+1)}$, $Q_{4i-2}^{(r+1)}$, $Q_{4i-1}^{(r+1)}$, $Q_{4i}^{(r+1)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 4^r)$. Нумерацию квадратов проведем так, чтобы:

1) первый квадрат любого ранга содержал точку $(0,\ 0)$;

2) можно было из квадрата $Q_{i-1}^{(r)}$ войти в квадрат $Q_i^{(r)}$, обойти в нем последовательно квадраты $Q_{4i-3}^{(r+1)}$, $Q_{4i-2}^{(r+1)}$, $Q_{4i-1}^{(r+1)}$, $Q_{4i}^{(r+1)}$ и выйти в квадрат $Q_{i+1}^{(r)}$, пересекая лишь стороны (но не вершины!) квадратов ранга $(r+1)$.

---

*) Об этом подробно рассказано в статье академика П. С. Александрова «Павел Самуилович Урысон» (см. с. 3). См. также А. С. Пархоменко «Что такое линия», М., Гостехиздат, 1954.

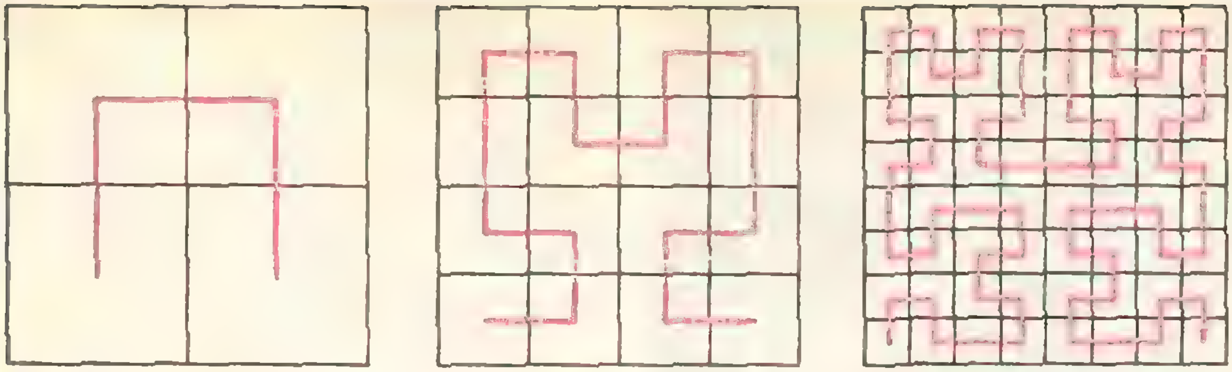


Рис. 2.

Предлагаем читателю доказать, что такая нумерация всегда возможна. На рисунке 2 приведены квадраты первых трех рангов, причем красной ломаной указан путь, по которому идет нумерация квадратов (начиная с левого нижнего квадрата).

Продолжая рассуждения, убеждаемся, что каждой точке (x_0, y_0) квадрата Q можно привести в соответствие одну или несколько (сколько?) последовательностей натуральных чисел, запишем это так:

$$(x_0, y_0) = [i_1, i_2, i_3, \ldots],$$
$$(1 \leqslant i_1 \leqslant 4, \ 4i_k - 3 \leqslant i_{k+1} \leqslant 4i_k).$$

Примеры: $(1/3, 1/3) = [1, 3, 9, \ldots]$; $(1/2, 1/3) = [1, 3, 10, \ldots] = [1, 14, 56, \ldots]$; $(1/2, 1/2) = [1, 3, 11, \ldots] = [2, 8, 32, \ldots] = [3, 9, 33, \ldots] = [4, 14, 54, \ldots]$.

И здесь можно доказать, что каждая такая последовательность определяет единственную точку (x_0, y_0) из Q.

3. Запись точек отрезка σ и квадрата Q в виде бесконечных последовательностей натуральных чисел дает возможность осуществить отображение σ на Q.

В самом деле, пусть t_0 — произвольная точка σ и

$$t_0 = (i_1, i_2, i_3, \ldots).$$

Последняя последовательность однозначно определяет точку (x_0, y_0), которой соответствует последовательность $[i_1, i_2, i_3, \ldots]$. Если даже t_0 представимо в виде двух последовательностей, то обе они приводят к одной и той же точке (x_0, y_0). Это легко доказать, если учесть, что длины сторон квадратов с возрастанием ранга стремятся к нулю. Итак, каждому t_0 соответствует единственное (x_0, y_0).

Пусть теперь точка $(x_0, y_0) \in Q$ произвольна и $[i_1, i_2, i_3, \ldots]$ — одно из представлений этой точки. Взяв $t_0 = (i_1, i_2, i_3, \ldots)$, убеждаемся, что при нашем отображении каждая точка квадрата Q соответствует хотя бы одной точке отрезка σ. А это значит, что σ отображено на Q. Заметим, что это отображение не является взаимно однозначным, некоторые точки Q соответствуют двум, трем или даже четырем точкам σ.

4. Так как каждое t_0 определяет единственную точку (x_0, y_0), то, положив $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, мы тем самым однозначно задаем две функции φ и ψ, определенные на отрезке $[0, 1]$:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

При этом множество точек $(\varphi(t), \psi(t))$ целиком заполняет квадрат Q.

Покажем, что эти функции определяют некоторую кривую Пеано. Для этого достаточно проверить, что функции φ и ψ непрерывны. Но это почти очевидно. В самом деле, пусть n — некоторое натуральное число и t_0 — фиксированная точка отрезка σ. Возьмем t так, чтобы было

$$|t - t_0| < 4^{-n}.$$

Это неравенство означает, что t_0 и t принадлежат одному и тому же или соседним отрезкам ранга n. Но тогда и соответствующие им точки $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $(\varphi(t), \psi(t))$ также будут принадлежать одному и тому же или соседним квадратам ранга n и поэтому

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < 2^{1-n},$$
$$|\psi(t) - \psi(t_0)| < 2^{1-n}.$$

Отсюда в силу произвольности n следует непрерывность данных функций.

Итак, построенные нами функции задают некоторую кривую Пеано. Отметим, что на этой кривой имеются кратные точки, то есть точки, в которых кривая пересекает саму себя. При этом имеются двукратные, трехкратные и четырехкратные точки. Доказано, что и в общем случае не существует кривой Пеано, не имеющей кратных точек.

Б. ПОНТЕКОРВО

ЮНОСТЬ ЭНРИКО ФЕРМИ

Великий итальянский физик Энрико Ферми (1901—1954) оставил своими трудами глубокий след в теоретической и экспериментальной физике, астрофизике и технической физике. Когда он умер, от нас ушел последний универсальный физик нашего столетия и, вероятно, последний универсальный физик вообще. В помещенной ниже статье, написанной одним из ближайших учеников и сотрудников Ферми — советским академиком Бруно Понтекорво, рассказывается о юношеских годах великого ученого. Текст статьи заимствован из брошюры Б. Понтекорво «Энрико Ферми», выпущенной издательством «Знание» в 1971 году.

В этом же номере журнала, в разделе «Рецензии, библиография», опубликована рецензия И. Зорича на две книги о Ферми.

Ферми родился в Риме 29 сентября 1901 года в семье служащего. Если можно говорить о врожденном призвании, то, несомненно, Ферми был рожден физиком. Хотя в семье никто не побуждал его к занятиям наукой, он с детства проявил исключительный интерес к математике и физике. Интеллектуальное развитие мальчика, впоследствии гениального ученого, представляет большой интерес, и я хотел бы подробнее остановиться на этом.

Неизвестно точно, когда впервые у Ферми появился интерес к науке, но мы располагаем некоторыми фактами благодаря свидетельствам Энрико Персико, профессора физики Римского университета и близкого друга Ферми с того времени, когда им было по 14 лет; его жены, Лауры Ферми, и ряда его сотрудников и друзей, особенно Франко Разетти и Эмилио Сегре, с которыми Ферми делился воспоминаниями. Сегре, например, рассказывает о следующем эпизоде: когда Ферми было только десять лет, он сумел понять, почему окружность описывается уравнением $x^2+y^2=R^2$, хотя это и потребовало от него напряженного интеллектуального усилия.

Позже тринадцатилетнему Ферми очень помог найти правильную дорогу в научном лабиринте инженер Амидей, добрый пожилой человек, друг семьи Ферми, который по праву может гордиться тем, что, обнаружив исключительные способности Ферми, оказал на него большое, а может быть, и решающее влияние. Инженер Амидей был очень аккуратным человеком. Когда после смерти Ферми Сегре попросил Амидея рассказать о первых шагах Энрико в науке, он сумел привести (41 год спустя!) крайне точные и ценные для истории науки сведения, позволяющие понять некоторые важные элементы в формировании титанической личности Ферми. Ниже почти полностью приводится письмо инженера Амидея профессору Сегре, рассказывающее о периоде жизни Ферми от осени 1914 до осени 1918 года.

«...В 1914 году я занимал должность директора инспекторов в министерстве железных дорог. Вместе со мной работал главный инспектор Альберто Ферми. После работы мы обычно возвращались домой вместе. Почти всегда нас сопровождал Энрико Ферми — сын моего коллеги. Мальчик постоянно встречал отца после работы. Узнав, что я серьезно занимаюсь математикой и физикой, Энрико стал задавать мне вопросы. В то время ему было 13 лет, а мне 37.

Хорошо помню его первый вопрос:

— Правда ли, что существует раздел геометрии, в котором важные геометрические свойства выявляются без использования представлений о мере?

Я ответил, что это совершенно справедливо и что раздел этот называется проективной геометрией.

— Но каким образом эти свойства используются на практике инженерами?— спросил он.

Этот вопрос показался мне совершенно резонным. Рассказав мальчику о некоторых свойствах, находящих успешное применение, я пообещал ему принести на следующий день — что и сделал — книгу по проективной геометрии.

Через несколько дней Энрико сказал мне, что он уже проштудировал первые три урока, и обещал возвратить книгу, как только прочтет ее. Примерно через два месяца книга была возвращена. На мой вопрос, встретились ли ему какие-либо трудности, мальчик ответил: «Никаких», и добавил, что он доказал все теоремы и легко решил все задачи (в книге их было более 200).

Я был изумлен: ведь я знал, что среди этих задач были такие, от решения которых я вынужден был отказаться, потому что на это ушло бы слишком много времени. Но я убедился, что Энрико справился с этими задачами. Было совершенно очевидно, что в свободные часы, остававшиеся от приготовления школьных заданий, мальчик в совершенстве изучил проективную геометрию и с легкостью решал сложнейшие задачи. Я убедился в том, что Энрико исключительно одарен, во всяком случае в области геометрии. Когда я сказал об этом его отцу, тот ответил, что в школе Энрико считается хорошим учеником, но не больше.

Впоследствии я узнал, что Энрико изучал математику и физику по разным случайным книгам, которые он покупал в букинистических магазинах на рынке Кампо деи Фьори. Он надеялся, в частности, найти в этих книгах теорию, объясняющую движение волчков и гироскопов. Объяснения он так и не нашел. Но, возвращаясь к этой проблеме снова и снова, мальчик самостоятельно приблизился к разъяснению природы загадочного движения волчка. Все же я сказал ему, что к точному научному объяснению можно подойти, лишь овладев теоретической механикой. Но для ее изучения потребуется знание тригонометрии, алгебры, геометрии и дифференциального исчисления... Энрико согласился со мной, и я стал доставать для него книги, которые могли бы дать ему новые идеи и прочную математическую основу...

Энрико нашел векторный анализ очень интересным, полезным и несложным. С сентября 1917 до июля 1918 года он изучил также некоторые стороны инженерного дела по книгам, которые я доставал для него.

В июле 1918 года, пройдя трехгодичный курс лицея за два года, Энрико получил диплом. Возник вопрос, имеет ли ему смысл поступать в Римский университет. Мы с Энрико вели на эту тему длинные разговоры.

Я спросил у него, чему он хочет посвятить себя: математике или физике? Привожу дословно его ответ:

— Я изучал математику с таким рвением потому, что считал это необходимой подготовкой для последующего изучения физики, которой я намерен посвятить себя целиком и полностью.

Тогда я спросил у него, считает ли он свое знание физики столь же обширным и глубоким, как и математики.

— Я знаю физику шире и глубже, потому что прочел все наиболее известные книги по этому предмету,— ответил он*).

Я уже убедился в том, что Энрико достаточно было прочесть книгу один раз, чтобы знать ее в совершенстве. Помню, например, как однажды он возвратил мне прочитанную им книгу по дифференциальному исчислению. Я предложил ему оставить ее у себя еще на один год, с тем, чтобы он смог пользоваться ею. Ответ Ферми был поразительным.

— Благодарю вас,— сказал он.— В этом нет необходимости, поскольку я уверен, что запомнил все необходимое. Несколько лет спустя идеи предстают передо мной с еще большей отчетливостью, и если мне понадобится формула, я смогу легко вывести ее.

Кроме поразительной способности к наукам, Ферми обладал еще исключительной памятью.

Пришло время, когда я решил, что наступил подходящий момент, чтобы предложить ему свой план... План этот заключался в следующем: Энрико должен поступить не в Римский университет, а в университет в Пизе. До этого ему надо будет выдержать конкурс в Нормальную школу в Пизе и впоследствии совмещать занятия в школе с посещением лекций в университете. Энрико признал разумность моего плана и решил следовать ему, хотя и понимал, что родители будут возражать.

Я немедленно отправился в Пизу, чтобы получить там необходимую информацию и программу для конкурса

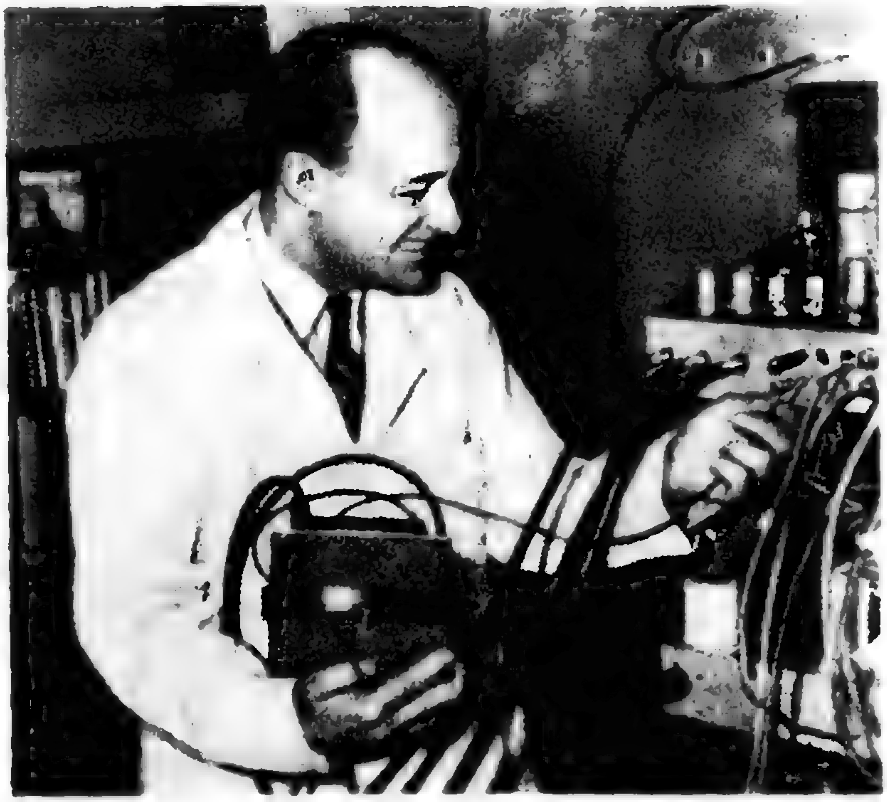
Энрико Ферми в 16 лет.

в Нормальную школу. Потом я вернулся в Рим, чтобы проштудировать программу с Энрико. Я не сомневался в том, что он в совершенстве знает предметы, связанные с математикой и физикой. Так оно и оказалось. Энрико не только выдержал конкурс, но оказался первым среди соискателей...»

Осенью 1918 года Ферми, согласно плану инженера Амидея, поступил одновременно в Высшую Нормальную школу Пизы и на физико-математический факультет старинного Пизанского университета. Во всех итальянских университетах нет вступительных экзаменов; нужно лишь иметь аттестат зрелости и, конечно, располагать средствами для оплаты обучения. Для поступления же в Нормальную школу требовалось выдержать довольно трудный конкурс, но для ученика школы обучение в университете было бесплатным. Ученик Нормальной школы автоматически является и студентом университета, но

---

*) По словам Энрико Персико, одной из этих книг был перевод многотомного курса физики русского ученого О. Д. Хвольсона. Мне помнится, что сам Ферми как-то сказал, что основные сведения в области общей и экспериментальной физики он почерпнул именно из этого курса.



Энрико Ферми во время эксперимента.

дополнительно посещает лекции и семинары в школе.

Высшая Нормальная школа в Пизе была создана в 1813 году Наполеоном по типу Высшей Нормальной школы в Париже; она была единственным бесплатным высшим учебным заведением Италии. Хотя официально школа предназначалась для выпуска учителей средних школ, многие выпускники как гуманитарного, так и естественного отделений избирали карьеру исследователей и становились знаменитыми, что поднимало престиж школы. В частности, почти все известные итальянские математики от Бианки и Кастельнуово до Вольтерра и Леви-Чивиты были ее выпускниками.

На вступительном конкурсном экзамене в школу от Ферми требовалось изложить свои знания по теме «Характер и причины звуков». Его «сочинение» дает представление об уровне знаний по классической физике, достигнутом Ферми в 17-летнем возрасте. Достаточно сказать, что далеко не все выпускники физических факультетов университетов (а не только средней школы) смогли бы написать такое сочинение, в котором используется метод Фурье при решении дифференциального уравнения колеблющегося стержня. Ферми сам рассказывал, что экзаменатор был удивлен его сочинением и сказал, что никогда ничего подобного в своей практике не встречал.

Хотелось бы немного прокомментировать письмо инженера Амидея. Мне кажется, что оно должно заинтересовать не только физиков и историков науки, но и более широкие круги читателей, особенно школьников, которые начинают увлекаться наукой, а также педагогов. Быть может, благодаря инженеру Амидею одаренный мальчик и стал гением. Конечно, Ферми был прирожденным физиком, но кто может сказать, какова была бы его судьба, если бы инженер Амидей отнесся к нему иначе, если бы на вопросы мальчика он отвечал, например, так: «Это пока слишком трудно для тебя. Подрастешь — поймешь!». Возможно, Ферми и не увлекся бы так серьезно математикой и физикой в тринадцатилетнем возрасте и в результате стал бы, скажем, лишь хорошим инженером или физиком. Он мог бы, например, влюбиться, мог заинтересоваться шахматами или теннисом, иностранными языками или геологией. Дело в том, что перед тринадцатилетним Ферми был только один прямой путь, который мог бы привести его туда, куда он впоследствии пришел (и этот путь был указан Амидеем), но при этом было огромное число «боковых» дорог.

Во всяком случае, я совершенно уверен в том, что Ферми стал великим Ферми именно потому, что его интересы определились и его интеллектуальные запросы уже удовлетворялись, когда он был еще мальчиком. В этом меня убеждал стиль Ферми во всем, что относилось к физике; читал ли он лекции, объяснял что-либо сотруднику, выражал ли сомнение в чем-либо, всегда создавалось впечатление, что все ему просто и знакомо, что физика для него то же, что дом родной.

Если мое суждение правильно, то число потенциальных Ферми в мире куда больше, чем это обычно представляется.

Вот что писал Энрико Персико: «...Исключительные способности Ферми в точных науках проявились очень рано; когда я познакомился с ним (ему было 14 лет), я с удивлением обнаружил, что приятель у меня не только «дока» в науке, как говорят на школьном жаргоне, но и товарищ, форма ума которого совершенно отличается от типичной для всех «умных» мальчиков и блестящих учеников, с которыми я был знаком... В области математики и физики он проявил знания по гораздо большему числу разделов, чем учили в школе, причем знания были не школярскими, и он оперировал ими совершенно непринужденно. Для него уже тогда знание теоремы или закона означало, прежде всего, умение их использовать».

Вероятно, читателя заинтересует вопрос, как учился Ферми в школе по гуманитарным предметам? Конечно, он был хорошим учеником, что не удивительно, если учесть наличие у него прекрасной памяти, но, опираясь на некоторые, впрочем, субъективные впечатления, я сказал бы, что по гуманитарным предметам Ферми был не более чем «нормальным отличником». Правда, он знал довольно много стихов наизусть, но это, я бы сказал, характеризует скорее его феноменальную память, чем страсть к поэзии. Мне помнится, где-то в 30-х годах Ферми сказал, что главным источником его общей культуры является многотомная итальянская Детская энциклопедия — довольно удачная и красочно оформленная книга для юношества. Это подтверждает, что интересы Ферми вне области физики и математики были все-таки довольно ограниченными.

Н. Б. ДЕМИДОВИЧ

КАК НАЧЕРТИТЬ *n*-МЕРНЫЙ КУБ?

Отрезок, квадрат, куб...

Какая разница между отрезком, квадратом и кубом? Отрезок — часть прямой линии, квадрат — часть плоскости, а куб — часть пространства. А что между ними общего, кроме слова *часть* в их определении? Оказывается, существует глубокая аналогия в процессе их построения. В самом деле, процесс построения квадрата при заданном отрезке можно, например, описать так:

из концов данного отрезка восставляем перпендикуляры к нему так, чтобы эти перпендикуляры лежали в одной плоскости; на каждом перпендикуляре по одну сторону от данного отрезка откладываем отрезки той же длины и затем соединяем концы получившихся отрезков.

Запишем теперь процесс построения куба при заданном квадрате:

из каждой вершины данного квадрата восставляем перпендикуляры к плоскости квадрата (*то есть к двум сходящимся в этой вершине сторонам квадрата*) *так, чтобы эти перпендикуляры находились в одном пространстве; на перпендикулярах по одну сторону от квадрата откладываем отрезки, равные по длине ребрам квадрата; через концы этих отрезков проводим прямые, параллельные ребрам квадрата* (то есть строим квадрат, параллельный данному).

В этой записи бросается в глаза искусственность и ненужность оборота «*чтобы эти перпендикуляры находились в одном пространстве*»: ведь наше пространство вообще одно! Но давайте пофантазируем и опишем процесс еще одного построения:

из каждой вершины данного куба восставляем перпендикуляры ко всем трем сходящимся в ней ребрам (?!) *так, чтобы эти перпендикуляры находились в одном пространстве; на этих перпендикулярах по одну сторону от куба* (?!) *откладываем отрезки, равные по длине ребрам куба; через концы этих отрезков проводим отрезки, параллельные ребрам куба и равные им по длине* (*то есть строим куб, параллельный данному* (?!!)).

Геометрически такое «построение», конечно, невозможно — хотя бы потому, что в нашем пространстве нельзя провести более трех попарно перпендикулярных линий. Но логически это рассуждение вполне стройное и приводит к понятию «*четырехмерного*» куба (то есть куба, в каждой вершине которого сходятся 4 попарно перпендикулярных ребра). Более того, продолжая описанные построения «по индукции», мы придем к понятию «*пятимерного*», «*шестимерного*» и в общем случае — «*n-мерного*» куба. Согласно этому рассуждению, обыкновенный куб — «трехмерный», квадрат — «двумерный», а отрезок — «одномерный» куб (рис. 1, 2, 3).

Спрашивается, а существуют ли *реальные* объекты, соответствующие по своим свойствам *n*-мерному кубу ($n = 1, 2, \ldots$)? Оказывается, существуют; один из таких объектов будет рассмотрен в следующей главе.

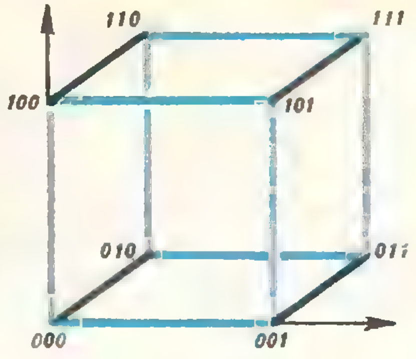


Рис. 1. Куб трехмерный

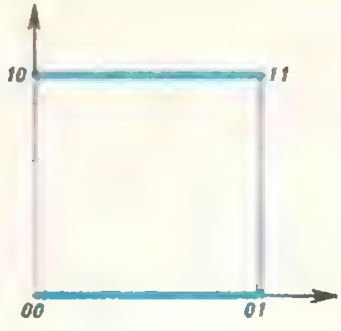


Рис. 2. Куб двумерный

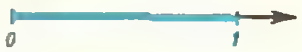


Рис. 3. Куб одномерный

Таблица вершин n-мерного куба

Отрезок (одномерный куб) имеет два конца (две *вершины*). Обозначим один из концов цифрой 0, а другой — цифрой 1. Получим таблицу вершин отрезка:

0
1

Множество вершин квадрата (двумерного куба) распадается на два подмножества вершин параллельных друг другу сторон. Обозначим соответствующие вершины сторон одинаковыми цифрами (0 или 1): чтобы их отличать друг от друга, добавим *слева к обозначениям вершин одной* стороны цифру 0, а другой — 1. Таблица вершин квадрата приобретает следующий вид:

00 10
01 11

Аналогично из таблицы вершин квадрата строится таблица вершин куба:

000 010 100 110
001 011 101 111

Далее — таблица вершин «четырехмерного» куба:

0000 0010 0100 0110 1000 1010 1100 1110
0001 0011 0101 0111 1001 1011 1101 1111

Процесс построения таких таблиц можно продолжать неограниченно. Эти таблицы и представляют собой *алгебраические образы* n-мерных кубов; при этом вершине n-мерного куба соответствует некоторый упорядоченный набор из n нулей и единиц, называемых *координатами* вершины.

Опишем теперь основные свойства вершин и *ребер* n-мерного куба.

1) На каждом ребре n-мерного куба лежит ровно две его вершины; все соответственные координаты этих вершин одинаковы, за исключением одной: у одного конца ребра она равна 0, а у другого — 1. Именно эта координата и характеризует *направление* ребра.

2) Все ребра одного направления *параллельны* между собой и *перпендикулярны* к ребрам любого другого *направления*.

3) Число различных направлений равно n. Все они описываются *базисными ребрами*, соединяющими вершину 00... 0 с вершинами

00 . . . 01
00 . . . 10
. . .
. . .
01 . . . 00
10 . . . 00

4) Из любой вершины n-мерного куба выходит ровно n ребер. Все они попарно перпендикулярны между собой.

Для $n=1, 2, 3$ указанные свойства проверяются непосредственно (проверьте!). Для $n>3$ описанные свойства вершин и ребер куба мы будем постулировать (убедиться в их внутренней непротиворечивости предоставляем вам самим).

Параллельное проектирование

Наряду с реальным чисто алгебраическим образом — *таблицей вершин* — n-мерному кубу можно поставить в соответствие и реальный чисто геометрический образ — *чертеж*.

На рисунке 1 изображен чертеж куба. Отметим следующие его *свойства*:

1) Параллельные ребра куба остаются параллельными и на чертеже.

2) Перпендикулярные ребра куба на чертеже непараллельны.

3) Разные вершины куба на чертеже не сливаются в одну.

Иными словами, чертеж куба представляет собой как бы тень, падающую на горизонтальную площадку от освещения проволочной модели куба косыми параллельными лучами света, не лежащими в плоскости ни одной из граней.

Оказывается, если подобное параллельное проектирование применить к кубу любой размерности n, то получится плоский чертеж n-мерного куба, обладающий тремя указанными выше свойствами. Но прежде чем доказать это, посчитаем

Сколько же вершин у n-мерного куба?

Пусть A — произвольная вершина куба с координатами a_n, $a_{n-1}, \ldots$, a_2, a_1. Так как a_i равно либо нулю, либо единице, то мы можем координаты этой вершины рассматривать как двоичное представление некоторого числа ε:

$$\varepsilon = a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_2 \cdot 2 + a_1$$

(тогда двоичная запись ε имеет вид:

$$\hat{\varepsilon}_2 = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1).$$

Вершинам n-мерного куба соответствуют всевозможные наборы нулей и единиц (a_n, $a_{n-1}, \ldots a_2$, a_1); каждому же такому набору соответствует вполне определенное число ε; число $\varepsilon + 1$ получается из числа ε по следующему правилу: все правые разряды a_1, $a_2, \ldots$, a_j, подряд являющиеся единичными, заменяются на нули, первый справа нулевой (или отсутствующий) разряд a_{j+1} — на единицу, а остальные (если они есть) остаются без изменения. Представим, например, в двоичной системе числа 0, 1, 2,..., 15:

$$\hat{0}_2 = 0, \quad \hat{4}_2 = 100, \quad \hat{8}_2 = 1000,$$
$$\hat{1}_2 = 1, \quad \hat{5}_2 = 101, \quad \hat{9}_2 = 1001,$$
$$\hat{2}_2 = 10, \quad \hat{6}_2 = 110, \quad \hat{10}_2 = 1010,$$
$$\hat{3}_2 = 11, \quad \hat{7}_2 = 111, \quad \hat{11}_2 = 1011,$$
$$\hat{12}_2 = 1100,$$
$$\hat{13}_2 = 1101,$$
$$\hat{14}_2 = 1110,$$
$$\hat{15}_2 = 1111.$$

Легко видеть, что число 2^n в двоичной системе счисления представляется в виде единицы с n нулями, а число 2^{n-1} — набором из n единиц. Значит, существует 2^n различных двоичных чисел (от нуля до $2^n - 1$) разрядности не выше n; следовательно, число вершин n-мерного куба также равно 2^n.

Попробуем теперь построить

Чертеж n-мерного куба

Проведем на плоскости две прямые линии под углом друг к другу — назовем их основными. Отложим на одной из них (назовем ее первой) по одну сторону от точки пересечения $2^n - 1$ раз масштаб a, а на второй — n раз масштаб b (рис. 4, *а*). Пронумеруем концы масштабных отрезков на первой линии числами

$$1, 2, \ldots, 2^n - 1,$$

а на второй — числами

$$1, 2, \ldots, n.$$

Через конец каждого масштабного отрезка проведем прямую линию, параллельную другой основной линии. Получим косоугольную координатную сетку. Каждому узлу этой сетки поставим в соответствие пару целых чисел (X, Y) — косоугольные координаты узла вдоль первого и второго направлений (точка пересечения ос-

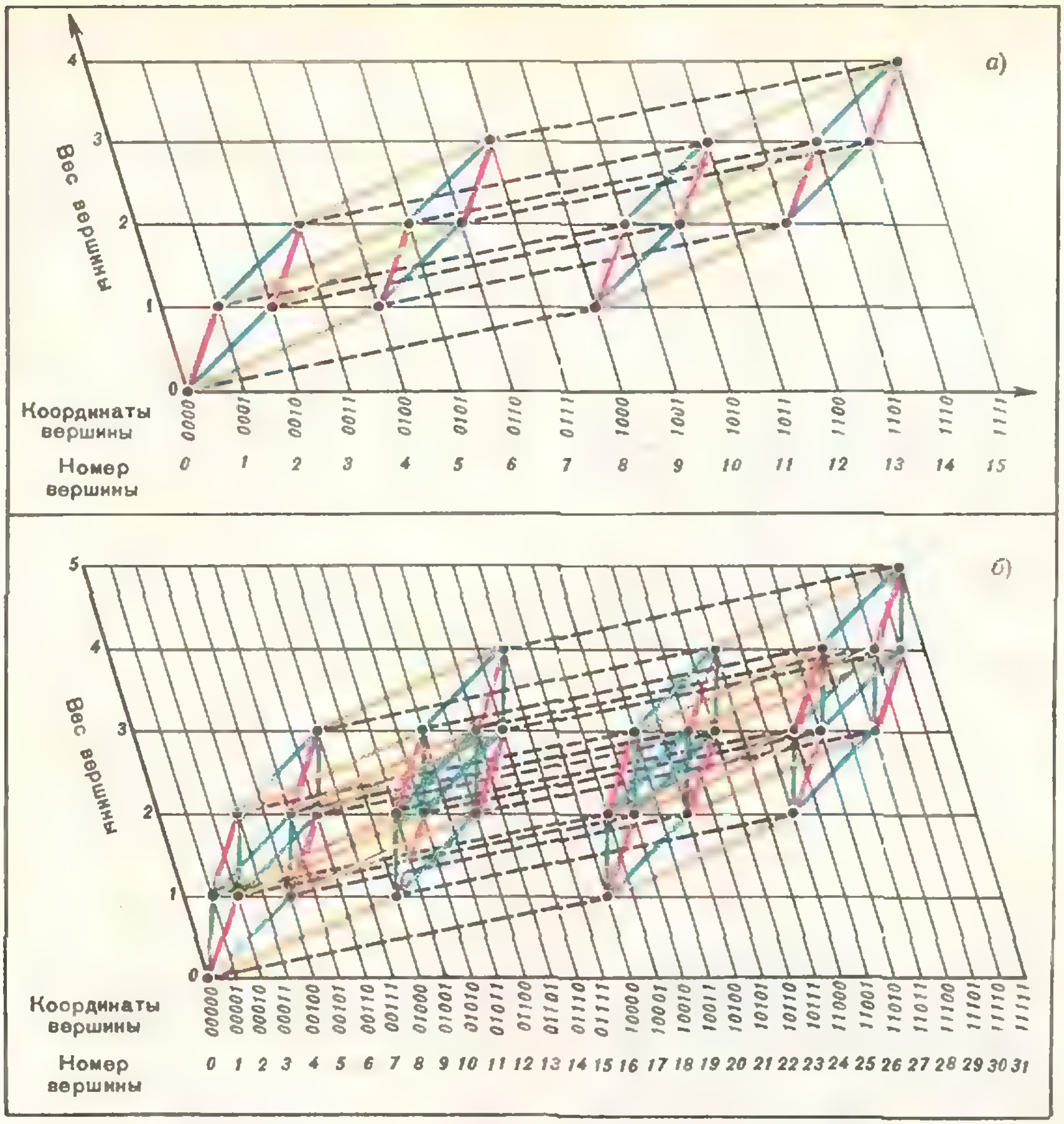

а)
Вес вершины
4
3
2
1
0
Координаты вершины
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111
Номер вершины
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
б)
Вес вершины
5
4
3
2
1
0
Координаты вершины
00000
00001
00010
00011
00100
00101
00110
00111
01000
01001
01010
01011
01100
01101
01110
01111
10000
10001
10010
10011
10100
10101
10110
10111
11000
11001
11010
11011
11100
11101
11110
11111
Номер вершины
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

Рис. 4: а — куб четырехмерный; б — куб пятимерный

новых линий имеет координаты (0,0)). Вершину куба с координатами $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1)$ поместим в узел образовавшейся сетки с косоугольными координатами

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{i-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{*)}.$$

Таким образом, первая косоугольная координата узла, которым мы изображаем вершину куба, равна номеру этой вершины, а вторая — ее весу $a_1 + \dots + a_n$ (то есть суммарному количеству единичных координат вершины).

Если две вершины n-мерного куба отличаются лишь одной координатой, то соответствующие им изображения вершин на косоугольной координатной сетке соединим отрезком прямой — этот отрезок будет служить изображением ребра нашего куба.

На этом построение чертежа n-мерного куба заканчивается (на рисун-

---

*) Знак Σ («сигма») — это знак суммирования, $\sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + \dots + b_n$.

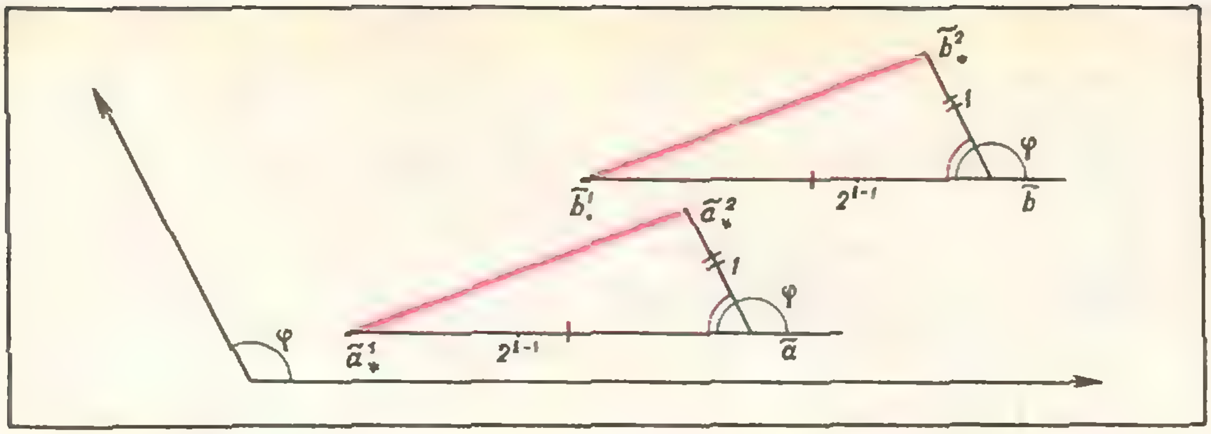


Рис. 5.

ке 4, *а* изображен чертеж четырехмерного куба, а на рисунке 4, *б*—пятимерного куба). Чтобы убедиться в том, что и в общем (*n-мерном*) случае *чертеж n*-мерного куба представляет собой результат параллельного проектирования куба на плоскость, проверим

Три свойства чертежа

Свойство 3), очевидно, выполняется: разным вершинам соответствуют разные номера, а потому их изображения имеют разные первые косоугольные координаты, и, следовательно, не совпадают.

Проверим теперь свойство 1) — сохранение параллельности ребер. Возьмем любые два параллельные ребра куба. Обозначим координаты вершин первого ребра через $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$:

$$\tilde{a}^1 = (a^1_n,\ a^1_{n-1}, \ldots,\ a^1_i, \ldots,\ a^1_1),$$
$$\tilde{a}^2 = (a^2_n,\ a^2_{n-1}, \ldots,\ a^2_i, \ldots,\ a^2_1);$$

а координаты вершин второго ребра — через $\tilde{b}^1$ и $\tilde{b}^2$:

$$\tilde{b}^1 = (b^1_n,\ b^1_{n-1}, \ldots,\ b^1_i, \ldots,\ b^1_1),$$
$$\tilde{b}^2 = (b^2_n,\ b^2_{n-1}, \ldots,\ b^2_i, \ldots,\ b^2_1).$$

Направление ребра здесь характеризуется *i*-й координатой.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} a^1_j &= a^2_j, \\ b^1_j &= b^2_j \end{aligned}\right\} j \neq i.$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$a^1_i = b^1_i = 0,$$
$$a^2_i = b^2_i = 1.$$

Рассмотрим теперь изображения $\tilde{a}^1_*$, $\tilde{a}^2_*$, $\tilde{b}^1_*$, $\tilde{b}^2_*$ этих четырех вершин на косоугольной координатной сетке. Проведем через образы вершин $\tilde{a}^1_*$ и $\tilde{b}^1_*$ прямые, параллельные первому косоугольному направлению, а через образы вершин $\tilde{a}^2_*$ и $\tilde{b}^2_*$ — прямые, параллельные второму направлению (рис. 5). Точки пересечения этих прямых обозначим через $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ соответственно. Получаем два треугольника: $\tilde{a}^1_*\tilde{a}\tilde{a}^2_*$ и $\tilde{b}^1_*\tilde{b}\tilde{b}^2_*$. Вычислим длину стороны $\tilde{a}^1_*\tilde{a}$ — по построению она равна модулю разности первых косоугольных координат вершин $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a^1_j \cdot 2^{j-1} - \sum_{j=1}^{n} a^2_j \cdot 2^{j-1}\right| =$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n} (a^1_j - a^2_j) \cdot 2^{j-1}\right| =$$
$$= (a^2_i - a^1_i) \cdot 2^{i-1} = 2^{i-1}.$$

Длина стороны $\tilde{b}^1_*\tilde{b}$ также равна 2^{i-1}. Длина второй стороны треугольника $\widetilde{a}\widetilde{a}^2_{\bullet}$ ($\widetilde{b}\widetilde{b}^2_{\bullet}$) равна модулю разности вторых косоугольных координат вершин $\widetilde{a}^1$ и $\widetilde{a}^2$ (соответственно вершин $\widetilde{b}^1$, $\widetilde{b}^2$) и равна единице; действительно:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j^1 - \sum_{j=1}^{n} a_j^2\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} (a_j^1 - a_j^2)\right| = \\ = a_i^2 - a_i^1 = 1 - 0 = 1.$$

Итак, треугольники $\widetilde{a}^1_{\bullet}\widetilde{a}\widetilde{a}^2_{\bullet}$ и $\widetilde{b}^1_{\bullet}\widetilde{b}\widetilde{b}^2_{\bullet}$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, стороны $\widetilde{a}^1_{\bullet}\widetilde{a}^2_{\bullet}$ и $\widetilde{b}^1_{\bullet}\widetilde{b}^2_{\bullet}$, являющиеся изображениями ребер куба одного направления, также равны и параллельны — что и требовалось доказать.

Для доказательства свойства 2) — непараллельности изображений перпендикулярных ребер куба — достаточно убедиться в непараллельности изображений *базисных* ребер. А последнее очевидно, так как изображения базисных ребер — это отрезки, соединяющие узел (0, 0) с изображением n вершин веса 1 (их номера равны 1, 2, 4, 8,..., 2^{n-1}).

Заключение

Мы доказали возможность косого параллельного проектирования n-мерного куба на плоскость. Заметим, что чертежи кубов, изображенные на рисунках 4, *а*, *б*, обладают еще одним свойством: вершины *одинакового веса* лежат на одной прямой, параллельной первому координатному направлению. Это свойство чертежа не является необходимым для параллельного проектирования — оно, например, не имеет места на рисунке 1. Но часто именно это свойство способствует лучшему пониманию внутренней структуры такого чисто алгебраического объекта, каким является n-мерный куб.

Встреча с нашими читателями

Редакция журнала побывала в гостях у школьников подмосковного города Загорска, в библиотеке профкома Загорского оптико-механического завода. Эта библиотека — одна из крупнейших в городе, среди ее читателей много школьников, выписывающих наш журнал.

Встречу вел заместитель главного редактора журнала В. А. Лешковцев. Он рассказал о задачах, которые ставит перед собой «Квант», и статьях, которые появятся в журнале в ближайшее время. Школьники в свою очередь высказали ряд пожеланий редакции, указали разделы математики и физики, которые их особенно интересуют, подсказали ряд тем для статей. Затем сотрудники редакции ответили на вопросы читателей.

В заключение был проведен небольшой конкурс по решению задач, победители которого были награждены памятными книгами.

В. Н. Березин

О СИЛАХ ИНЕРЦИИ

Я.А.СМОРОДИНСКИЙ

Случай в автобусе

Начнем с обыде́нного происшествия. Автобус резко затормозил у светофора, пассажиров потянуло вперед. Кто-то наступил впереди стоящему на ногу и, конечно, извинился. С точки зрения правил поведения все в порядке. Но физику конец истории должен показаться нелогичным. Пассажир, конечно, не виноват: виноват, наверно, зазевавшийся водитель — он-то и должен извиниться... Мы, однако, не будем увлекаться наукой о поведении, а только спросим себя, чем, собственно говоря, виноват водитель? Каким образом водитель смог толкнуть пассажиров? Ведь он сидит далеко и не может до них даже дотянуться. Можно сказать, что сила (конечно, не от водителя, а от мотора или, быть может, от тормозов) передалась через пол. Такой ответ также нельзя признать удовлетворительным: ведь ноги остаются стоять на месте — пассажиру кажется, что его потянули, скорее, за голову...

Если специально не пытаться запутать дело, то объясняется все очень просто. Шофер затормозил автобус; ноги пассажиров (из-за большого трения поко́я подошв о пол) тоже затормозились, а туловище вместе с головой продолжало двигаться с прежней скоростью, повинуясь первому закону Ньютона — закону инерции. Если бы трения не было, например, все пассажиры стояли на идеальных роликах (чего не сделаешь ради науки!), то никакого толчка они сразу бы не почувствовали, а один за другим ударились бы во внезапно остановившуюся перед ними стенку кабины водителя.

Такое описание приведет всякий разумный наблюдатель, который находится в инерциальной системе координат, например, наблюдает эту сцену, стоя на тротуаре.

Но может случиться, что ту же историю захочет проанализировать другой наблюдатель, скажем, шофер автобуса, который плотно сидел в своем кресле. Он, конечно, знал, что автобус затормозил, то есть стал двигаться с ускорением относительно земли, и поэтому его система отсчета перестала быть инерциальной. Шофер так и объяснит происшествие. А что скажет пассажир, который не знал о факте торможения, но невольно ощутил его? Таким образом, мы подошли к основному вопросу — как описываются механические движения в неинерциальных системах отсчета?

Известно, что основные законы движения — законы Ньютона — справедливы только в инерциальных системах отсчета. Поэтому естественно ожидать, что при переходе к неинерциальным системам уравнения движения должны измениться. Однако, если ограничиться только классической механикой, то есть не рассматривать движений со скоростями, сравнимыми со скоростью света, то оказывается, что основное уравнение движения можно записывать точно в таком же виде, как второй закон Ньютона, если ввести новое понятие — понятие сил инерции.

Когда шофер тормозит автобус, он видит, что пассажир на роликах (то есть в отсутствие сил трения) получает относительно автобуса ускорение, направленное в ту сторону, в которую двигался автобус до торможения. Или, что то же самое, ускорение пассажира противоположно по направлению ускорению, которое получает автобус.

Это ускорение не связано непосредственно с действием какого-то тела на пассажира, но наблюдатель, находящийся в ускоренной системе координат, пытаясь описать движение с точки зрения обычных законов механики, должен будет сказать: если есть ускорение, то его надо приписать действию какой-то силы. Такие силы, вводимые в неинерциальных системах отсчета для того, чтобы описать ускоренное движение свободных тел, называют силами инерции.

Силы инерции отличаются от обычных сил, например, от электрических или гравитационных сил, прежде всего тем, что они вызваны не взаимодействием тел, а ускоренным движением самой системы отсчета. Силы инерции исчезают при переходе в инерциальную систему отсчета (наблюдатель на тротуаре), тогда как силы обычные не изменяются при переходе в любую другую систему отсчета. Обычные силы, как говорят, инвариантны относительно перехода в другую систему координат, если только скорость новой системы отсчета относительно исходной остается много меньшей скорости света*). Отмечая такое фундаментальное свойство обычных сил, иногда силы инерции называют псевдосилами («как бы» силами) или фиктивными силами.

Еще одно важное отличие сил инерции состоит в том, что с точки зрения неинерциального наблюдателя эти силы действуют во всех точках системы, где бы ни находилось исследуемое тело, причем в непосредственной близости от тела невозможно указать источник этих сил. Если бы один пассажир, стоя на роликах, толкнул другого, то они отъехали бы друг от друга в разные стороны, повинуясь третьему закону Ньютона. В тормозящем же автобусе все пассажиры подались вперед, и никто не поехал назад. В этом смысле действие сил инерции напоминает действие электрических или магнитных сил, которые передаются через электромагнитное поле и для которых тоже не так просто понять, что такое противодействие. Поэтому и в задаче о силах инерции можно ввести аналогичное понятие — поле сил инерции.

Поле и силы

Известно, что взаимодействие электрических зарядов и токов осуществляется электромагнитным полем, силы всемирного тяготения передаются гравитационным полем, силы взаимодействия между нуклонами — полем ядерных сил.

---

*) Если система отсчета движется со скоростью, сравнимой со скоростью света, то, как показывается в теории относительности, и обычные силы не остаются инвариантными. Поэтому мы ограничиваем себя классическими нерелятивистскими системами отсчета.

Во всех этих случаях взаимодействие тел происходит без непосредственного контакта. Понятие физического поля сил и было введено для описания такого сорта взаимодействий. Это понятие прочно вошло в физику и в XX веке совершенно вытеснило понятие контактных сил. Лишь на малых расстояниях иногда практически удобнее говорить о соприкосновении тел, о толчке или ударе.

Для того чтобы сохранить третий закон Ньютона, говорят об обратном воздействии тела на поле. Таким образом, например, сводят взаимодействие двух удаленных друг от друга электрических зарядов к взаимодействию заряда и поля в месте нахождения заряда.

Происшествие в автобусе тоже можно описать, используя понятие поля сил. В тормозящем автобусе, с точки зрения водителя, возникает поле сил инерции, которое действует на пассажиров. Но следует подчеркнуть, что это поле возникло из-за того, что система отсчета движется с ускорением, и оно может быть «уничтожено» переходом в инерциальную систему координат.

Таким образом, в ускоренно движущемся автобусе (мы дальше будем говорить — в системе координат) возникает поле сил инерции, замечательное, прежде всего, тем, что оно сообщает всем телам в системе, независимо от их массы, одинаковые ускорения. Эти ускорения равны по абсолютной величине ускорению системы координат и направлены в противоположную сторону.

Только одна сила в природе — сила тяготения — обладает таким же свойством. Например, в поле тяжести Земли все тела свободно падают с одним и тем же ускорением относительно инерциальной системы отсчета. Эта аналогия на самом деле имеет глубокий смысл — она отражает великий принцип эквивалентности *), фундаментальный смысл которого раскрывается в теории относительности.

А пока мы можем сформулировать важный вывод: подобно силам тяготения, силы инерции пропорциональны массе тела. Это есть следствие равенства ускорений всех свободных тел в неинерциальной системе координат.

Какие бывают силы инерции?

Принцип относительности Галилея утверждает, что в любой движущейся инерциальной системе отсчета действуют те же законы механики, что и в покоящейся системе**). Иначе говорят, что никакими опытами внутри системы наблюдатель не может узнать, движется он равномерно и прямолинейно или покоится. В частности, материальная точка, на которую в такой системе не действуют никакие тела, будет либо покоиться, либо двигаться без ускорения. К этому мы должны добавить, что точка не должна находиться ни в электрическом, ни в магнитном полях и на нее не должно действовать извне никакое массивное тело. Разумно применять принцип относительности Галилея, так сказать, в обратную сторону для установления того, является ли система отсчета инерциальной или нет. Мерой этого, очевидно, должна служить степень точности выполнения законов Ньютона в этой системе.

---

*) См., например, статью Д. Бородина «Гравитационная масса», «Квант», 1973, № 2.

Заметим, кстати, что поле тяготения Земли тоже можно «уничтожить», перейдя в другую систему координат, например, в космический корабль. Явление невесомости (когда сила тяготения «уравновешивается» силой инерции) отражает тесную связь гравитационных сил с силами инерции.

**) Принцип относительности Эйнштейна идет еще дальше, утверждая, что все законы физики (а не только механические) остаются такими же. В этой статье мы будем говорить только о классических механических явлениях.

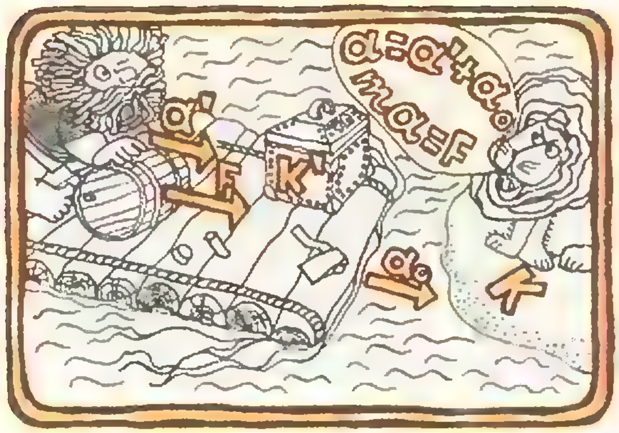


Рис. 1.

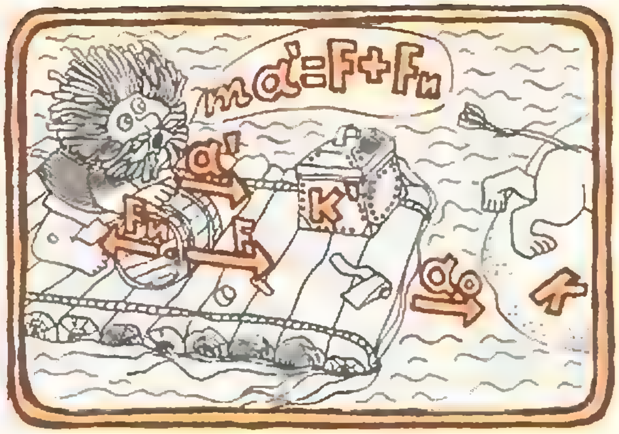


Рис. 2.

Если же мы рассматриваем движение тел в неинерциальных системах отсчета, то нельзя забывать, что кроме обычных сил взаимодействия на тела действуют еще силы инерции. Чтобы записать уравнения движения тел, надо уметь определять все силы. Обычные силы зависят от взаимного расположения тел и от их относительных скоростей. Силы инерции, вызванные ускоренным движением системы отсчета, очевидно, должны зависеть и от характера движения самой системы отсчета.

Рассмотрим два случая:

1) система отсчета относительно неподвижной инерциальной системы движется поступательно с некоторым постоянным ускорением;

2) система отсчета вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью.

В первом случае возникает только одна сила, которую так и называют силой инерции. Во втором случае надо говорить о двух силах. Первая зависит только от координат, то есть от расстояний до оси вращения; эту силу называют центробежной силой инерции. Вторая сила зависит от скорости движения тела относительно вращающейся системы отсчета, но не зависит от координат; ее называют кориолисовой силой в честь французского механика Кориолиса (1792—1843). О кориолисовой силе в этой статье мы говорить не будем.

Для того чтобы получить конкретные выражения для силы инерции при поступательном движении и для центробежной силы инерции, достаточно сопоставить движения тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета.

Поступательное движение системы отсчета

Пусть система отсчета K' движется равноускоренно с ускорением $\mathbf{a}_0$ относительно инерциальной системы K. Рассмотрим некоторое тело, на которое со стороны другого тела действует сила $\mathbf{F}$, сообщая ему ускорение $\mathbf{a}$ относительно системы K. Ускорение этого тела в системе K' обозначим $\mathbf{a}'$. Опишем движение выбранного тела с точки зрения двух наблюдателей: один связан с системой K' (будем называть его подвижным наблюдателем), другой находится в системе K (его будем называть неподвижным).

Для неподвижного наблюдателя (в инерциальной системе отсчета) тело участвует в двух движениях (рис. 1): с ускорением $\mathbf{a}'$ относительно системы K' и с ускорением $\mathbf{a}_0$ относительно системы K, поэтому его полное ускорение

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0.$$

Запишем уравнение движения тела:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

или

$$m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0) = \mathbf{F}.$$

Последнее равенство можно переписать по-другому:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0. \qquad (1)$$

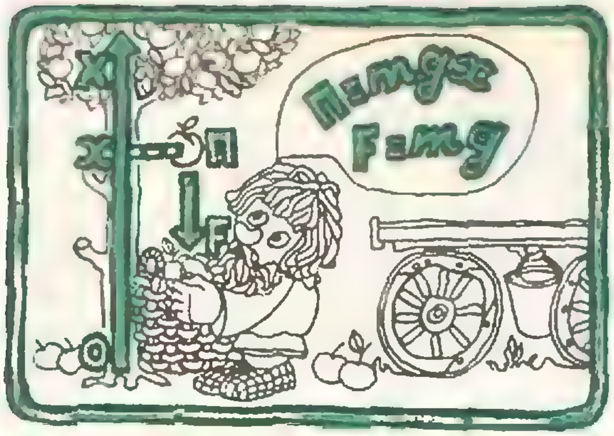


Рис. 3.

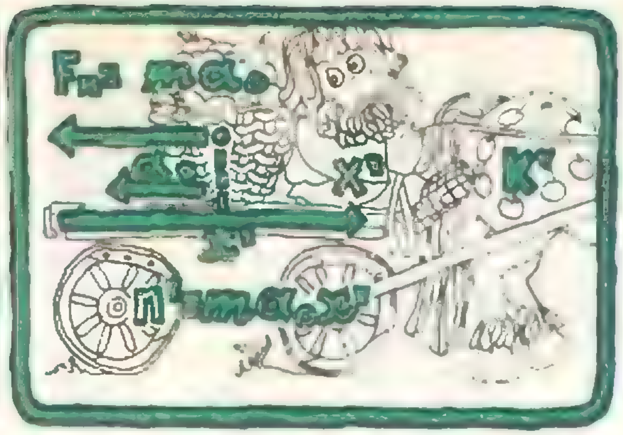


Рис. 4.

В частном случае, когда $F = 0$, в системе K ускорения нет, то есть $a = 0$, поэтому

$$\mathbf{a}' = -\mathbf{a}_0.$$

Таким образом, подвижный наблюдатель обнаружит, что все свободные тела в его системе имеют ускорение, равное по абсолютной величине ускорению самой системы отсчета, но направленное в противоположную сторону. Можно сказать, что в этой системе есть поле сил, которое действует на тела с силами $\mathbf{F}_и$, называемыми силами инерции.

Итак, с точки зрения подвижного наблюдателя уравнение движения тела в общем случае надо записать так (рис. 2):

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_и. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), нетрудно заметить, что

$$\mathbf{F}_и = -m\mathbf{a}_0.$$

То есть в случае поступательного движения неинерциальной системы отсчета сила инерции зависит от ускорения этой системы, которое легко измерить на опыте. Заметим также еще раз, что сила инерции (подобно силе тяжести) пропорциональна массе тела.

Потенциал поля сил инерции

Многие физические поля сил можно охарактеризовать энергетически с помощью понятия потенциала или потенциальной энергии тела в этом поле. Можно это сделать и для поля сил инерции, воспользовавшись аналогией с полем тяжести Земли. Сходство этих полей состоит, прежде всего, в том, что все свободные тела в ускоренной системе отсчета движутся с одинаковыми ускорениями, не зависящими от их масс.

Известно, что вблизи поверхности Земли (где ускорение свободного падения постоянно) тело массой m обладает потенциальной энергией

$$П = mgx,$$

где x — высота тела над поверхностью Земли (рис. 3). Заметим, кстати, что величину $\varphi = gx$ называют потенциалом поля тяжести. При перемещении тела с высоты x_1 на высоту $x_2 < x_1$ поле совершает работу

$$A = mg\,(x_1 - x_2) = -(П_2 - П_1),$$

то есть работу, равную убыли потенциальной энергии тела. Эта работа идет на увеличение кинетической энергии тела: на сколько уменьшилась потенциальная энергия, настолько же увеличилась кинетическая энергия, так что сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной. Поэтому полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgx$$

остается неизменной, сохраняется во время движения.

Если система отсчета K' ускоряется в направлении оси x' (рис. 4) и

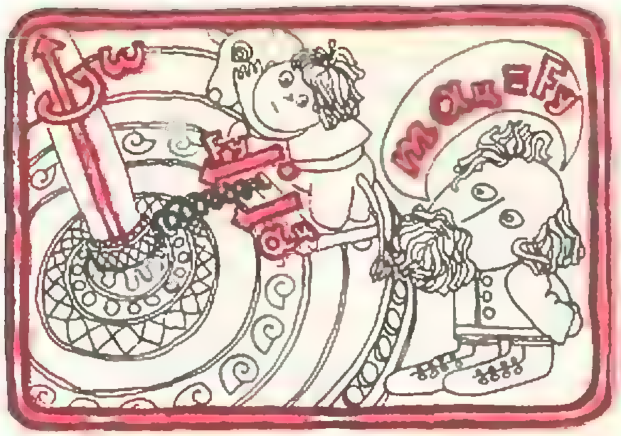


Рис. 5.

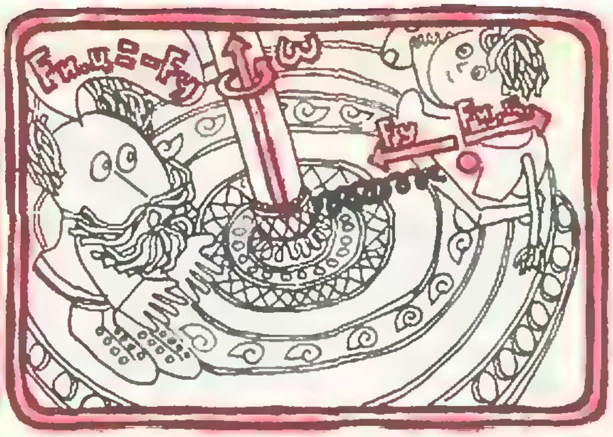


Рис. 6.

все свободные тела «падают» с ускорением a_0, равным ускорению движения самой системы, то по аналогии выражение для потенциальной энергии тела массой m в поле сил инерции можно записать так:

$$\Pi' = ma_0x',$$

где x' — координата тела в системе K'. Величину $\varphi' = a_0x'$ разумно назвать потенциалом поля сил инерции.

Тогда полная энергия тела в ускоренной системе отсчета равна

$$E' = \frac{mv'^2}{2} + ma_0x',$$

где v' — скорость тела. Причем, величина полной энергии все время остается постоянной.

Центробежная сила инерции

Рассмотрим теперь систему отсчета, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Такой системой может быть, например, вращающийся диск. Мы уже говорили о том, что в случае вращающейся системы отсчета надо говорить о двух силах инерции — центробежной и кориолисовой. Ограничимся рассмотрением только центробежной силы инерции. Эта сила зависит от координаты тела и не зависит от того, покоится оно или движется относительно вращающейся системы отсчета, поэтому для простоты рассуждений будем считать, что тело неподвижно.

Пусть на гладком вращающемся диске лежит тело, которое с помощью пружины удерживается на диске на расстоянии r от оси вращения. Опишем его поведение с точки зрения неподвижного и подвижного наблюдателей.

Неподвижный наблюдатель (связанный с инерциальной системой отсчета) скажет, что поскольку тело движется по окружности, то оно имеет ускорение, называемое центростремительным и равное по величине

$$a_ц = \omega^2 r.$$

Это ускорение телу сообщает сила упругости растянутой пружины $\mathbf{F}_у$, поскольку никакие другие тела в горизонтальной плоскости на тело не действуют (рис. 5). Согласно второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a}_ц = \mathbf{F}_у.$$

С точки зрения подвижного наблюдателя (связанного с вращающейся неинерциальной системой отсчета) тело покоится, следовательно, сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю. Поэтому этот наблюдатель должен сказать, что есть сила, уравновешивающая силу упругости (рис. 6). Это — центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{и.ц}$, равная

$$\mathbf{F}_{и.ц} = -\mathbf{F}_у = -m\mathbf{a}_ц.$$

Знак «минус» говорит о том, что эта сила направлена противоположно центростремительному ускорению, то есть по радиусу от оси вращения, и равна по величине $F_{и.ц} = m\omega^2 r$.

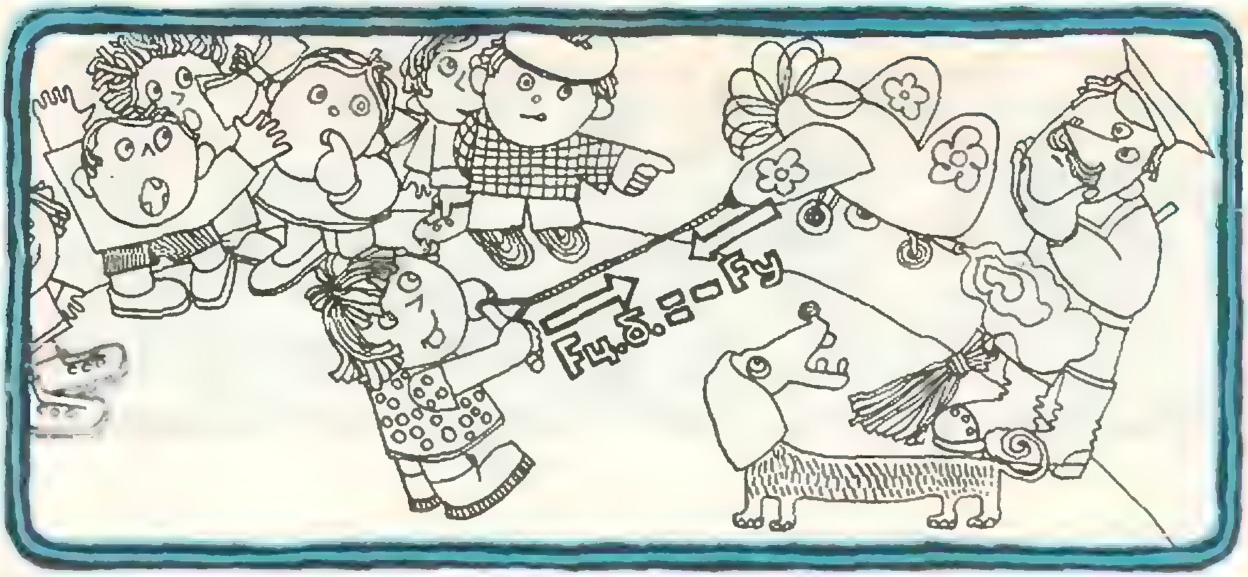


Рис. 7.

Здесь уместно заметить, что существует досадная двусмысленность в сложившейся терминологии. Дело в том, что в неподвижной системе отсчета силу, с которой движущаяся по окружности материальная точка действует (по третьему закону Ньютона) на тело, удерживающее ее на окружности (на пружину в нашем примере), называют также центробежной силой. С этой силой никогда не надо путать центробежную силу инерции (это последнее, самое главное слово часто опускают), которая действует на любое тело во вращающейся (неинерциальной) системе отсчета. Эти две силы проявляются в разных системах отсчета и приложены к разным телам (рис. 7).

Потенциал поля центробежных сил инерции

Подсчитаем работу, которую совершает поле центробежных сил инерции по перемещению материальной точки массой m. Пусть начальная координата точки (расстояние от оси вращения) равна r_1, а конечная — r_2. Центробежная сила инерции равна $m\omega^2 r$ и направлена от оси вращения.

Если $r_2 - r_1$ мало, то можно записать

$$A = F_{\text{ц.ц}}\Delta r = m\omega^2 \frac{r_1 + r_2}{2}\Delta r,$$

заменив среднюю силу $F_{\text{ц.ц}}$ силой в средней точке. Подставив вместо Δr значение $r_2 - r_1$, получим

$$A = \frac{m\omega^2 r_2^2}{2} - \frac{m\omega^2 r_1^2}{2}.$$

С другой стороны, работа всегда равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком, то есть

$$A = -(\Pi'_2 - \Pi'_1).$$

Сравнивая два выражения для работы, заметим, что величину

$$\Pi' = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

можно назвать потенциальной энергией материальной точки в поле центробежных сил инерции, а величину $\varphi' = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$ — соответственно потенциалом этого поля.

Тогда для вращающейся системы отсчета полная энергия точки при движении равна

$$E' = \frac{mv'^2}{2} - \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

и величина ее остается постоянной.

Напомним, однако, что во вращающейся системе отсчета действует еще одна сила инерции (сила Кориолиса), зависящая от скорости материальной точки. Поэтому, для того чтобы записать уравнение второго закона Ньютона в этой системе, недостаточно знать выражение для полной энергии. Но об этом будет рассказано в другой статье.

В заключение приводим несколько задач, причем читателям самим предлагается ввести все исходные данные, необходимые для решения этих задач.

Упражнения

1. В вагоне на полке лежал грузик, скрепленный со стенкой с помощью пружинки. Когда поезд стал двигаться с ускорением, грузик на пружинке начал колебаться. Найти период его колебаний.

2. На этот раз грузик висел на веревочке. При ускоренном движении поезда он начал колебаться. Найти период колебаний и положение равновесия этого математического маятника.

3. В трубке, прикрепленной к тележке и изогнутой под прямым углом, налита вода, заполнившая горизонтальное колено. На какую высоту поднимается вода в вертикальном колене, когда тележка начинает двигаться ускоренно?

4. Чемодан, лежащий на полке, был привязан веревкой. При каком ускорении поезда веревка оборвется? Как влияет трение чемодана о полку?

5. Пружину с грузиком вращают с угловой скоростью ω. Как будет колебаться грузик?

6. В цилиндрическом сосуде находится кислород. Сосуд вращается вокруг оси. Как изменяется давление газа по радиусу сосуда?

Задачи

1. Направо и налево от нуля выписывают числа натурального ряда:

...6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7...

Затем, отсчитывая от правой единицы, зачеркивают каждое третье число (и налево, и направо), отсчитывая от левой единицы — каждое пятое число, отсчитывая от правой двойки — каждое седьмое число, отсчитывая от левой двойки — каждое девятое число и так далее. Доказать, что в результате слева незачеркнутыми останутся все такие числа k, что $4k+1$ — простое число, а справа — все такие числа m, что $4m-1$ — простое число.

2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки L_1, M_1, N_1 и L_2, M_2, N_2, причем так, что

$$\frac{AL_1}{L_1B}=\frac{BL_2}{L_2A},\quad \frac{BM_1}{M_1C}=\frac{CM_2}{M_2B},\quad \frac{CN_1}{N_1A}=\frac{AN_2}{N_2C}.$$

Доказать, что площади треугольников $L_1M_1N_1$ и $L_2M_2N_2$ равны.

3. На стороны треугольника ABC опущены высоты AD, BE и CF. Доказать, что

а) площадь треугольника, вершинами которого являются середины H, K и L проведенных высот, равна $^1/_4$ площади треугольника DEF;

б) обозначим через θ, φ и ψ соответственно углы (отсчитываемые против хода часовой стрелки), которые образуют прямые HK и AB, KL и BC, LM и CA; тогда справедливо равенство

$$(\cos^2 A+\cos^2 B)\operatorname{tg}\theta + (\cos^2 B+\cos^2 C)\operatorname{tg}\varphi + (\cos^2 C+\cos^2 A)\times \operatorname{tg}\psi = 0.$$

А. К. КИКОИН

ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ, СПОРТ...

«Горы в моей жизни играли очень большую эмоциональную роль; нетронутая природа приносила ни с чем не сравнимое духовное умиротворение. К этому присоединяется глубокое удовлетворение от преодоления препятствий. В горах зарождается скрепленная опасностями дружба с товарищами, остающаяся на всю жизнь.»

И. Е. Тамм

«Идет к вершинам
Игорь Тамм,
А мы за Таммом
по пятам...»

Эти незамысловатые стихи содержались в одном из приветствий, обращенных в день семидесятилетнего юбилея к академику Игорю Евгеньевичу Тамму. Вершины, о которых говорится в этом двустишии,— это не аллегорические вершины науки, а вершины в буквальном смысле этого слова — вершины высоких гор.

Физикам всего мира лауреат Нобелевской премии по физике академик И. Е. Тамм известен как автор многих выдающихся научных работ по теории ядерных сил, теории особых состояний электронов на поверхности кристалла («уровни Тамма»), теории излучения быстрых электронов в веществе, теории плазмы в магнитном поле и многих других. Но альпинистам в нашей стране И. Е. Тамм был известен также как энтузиаст высокогорного спорта. И. Е. Тамм был одним из первых восходителей на вершины Алтая, а одна из вершин этого района носит его имя (пик Тамма).

Альпинисты знают и многих других ученых — физиков и математиков — любителей гор и восхождений. Известный советский математик член-корреспондент

Нильс Бор на лыжах.

Фредерик и Ирэн Жолио-Кюри перед лыжным походом.

Фредерик Жолио-Кюри с сыном на рыбалке.

◄ И. Е. Тамм и заслуженный мастер спорта инженер-электрик Е. А. Козакова. Кавказ. 1960 г. (Фотография публикуется впервые.)

Альберт Эйнштейн на яхте.
◀

Энрико Ферми «подкармливает» себя и... свои лыжи.
▶

Немало времени провели вместе Игорь Евгеньевич и Поль Дирак не только за обсуждением актуальных проблем физики, но и путешествуя в горах, совершая совместные восхождения на Кавказе, в Шотландии. (Фотография публикуется впервые.)
▶

И. Е. Тамм в горах

Академии наук СССР Борис Николаевич Делоне не только сам совершил немало восхождений на вершины, но и был организатором первого альпинистского лагеря в нашей стране. Этим он положил начало той системе обучения и спортивного совершенствования альпинистов, которая сделала советских альпинистов сильнейшими в мире.

Другой математик, академик Александр Данилович Александров, также известен не только как автор выдающихся работ по геометрии, но и как мастер спорта СССР по альпинизму, совершивший ряд труднейших восхождений на Кавказе и в других районах страны. Отличный горнолыжник, он, будучи ректором Ленинградского государственного университета, не раз выигрывал соревнования по слалому у молодых своих питомцев — студентов университета.

Многие другие физики и математики и в нашей стране, и за рубежом, в том числе и самые прославленные из них, увлекались высокогорным спортом. Не раз совершали восхождения на вершины гор такие корифеи физики, как Нильс Бор, Вернер Гейзенберг. Горные походы, пешие и даже велосипедные, любил совершать Энрико Ферми. Известный физик Джон Тиндаль (явление рассеяния света в мутных средах носит название эффекта Тиндаля) первым совершил восхождение на одну из труднейших альпийских вершин — Маттерхорн.

Но альпинизм — не единственный вид спорта, которым увлекаются физики и математики. О Нильсе Боре рассказывают, что однажды, когда он прогуливался по улицам Копенгагена с приехавшим к нему физиком из Германии, последний обратил внимание на то, что множество прохожих приветствует Бора. Заграничный гость выразил Бору свой восторг по пово-

ду высокого культурного уровня датчан, так хорошо знающих своего знаменитого физика. Но Бор ответил ему, что приветствующим его прохожим он известен вовсе не как физик, а как... боксер... Бор был также отличным яхтсменом, а во время пребывания его в США в период работы над атомной бомбой Н. Бор удивлял молодых американских физиков своим искусством горнолыжника. Ему было в то время около 60 лет...

На первый взгляд увлечение ученых спортом кажется странным. Многие ведь считают, что успешная научная работа требует, чтобы ей отдавалось все время ученого. Где уж тут выкроить время для путешествий по горам? Но недаром восточная пословица говорит, что отдых принадлежит труду, как ночь дню. Отдых необходим каждому, кто трудится. Но отдыхать — значит отключиться от того, чем занят во время труда. А ученому отключиться от науки очень трудно. И лучший способ отключения — это занятия спортом. Да еще таким, который требует большой и продолжительной физической нагрузки и связан с сильными впечатлениями. Именно таков альпинизм: движение вверх, с тяжелым рюкзаком, в условиях постоянной опасности, наилучшим образом заставляет забыть о том, чем весь год был занят мозг... Возможно, что именно поэтому многие физики и математики отдают предпочтение альпинизму. Но, как мы видели, и другие виды спорта не чужды им.

Спорт, любой вид спорта — лучший отдых для тех, кто занимается наукой. Да и для тех, кто еще только изучает ее!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Вступительная контрольная работа в ВЗМШ в 1974 году

Решения задач

А. Л. Тоом

В этом номере мы публикуем решения наиболее интересных задач из вступительной работы в ВЗМШ 1974 года (см. «Квант», 1974, № 1, с. 73).

Задача 1. *Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли друг с другом одинаковое количество партий. Потом стали решать, кто победитель. Первый сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всех очков набрал третий (выигрыш — 1 очко; ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0). Могло ли так быть? Если нет — докажите, если да — приведите пример.*

Да, так могло быть. Вот пример, доказывающий это. Пусть каждые двое сыграли по 7 партий, причем из них:

первый выиграл у второго две партии;

второй выиграл у первого две партии;

первый выиграл у третьего три партии;

третий выиграл у первого четыре партии.

Остальные партии закончились вничью.

Задача 2. *Существуют ли три положительных целых числа a, b, c таких, что a меньше 1974, b на 1575 меньше c и $a^2+b^2=c^2$?*

Да, такие числа существуют. Можно было бы просто их выписать, но мы объясним, как их найти, и попутно покажем, что эта тройка чисел единственна.

По условию,

$$\begin{cases} c^2-b^2=a^2,\\ c-b=1575,\\ \qquad a<1974.\end{cases}$$

Из этой системы видно, что a^2 делится на $1575=3^2\cdot5^2\cdot7$. Поэтому a делится на $3\cdot5\cdot7=105$.

Положим $a=105\,k$. Из неравенства $a<1974$ следует, что $1\leqslant k\leqslant 18$. Тогда

$$c=\frac{1}{2}(7k^2+1575),$$

$$b=\frac{1}{2}(7k^2-1575),$$

откуда $k>15$. При $k=16$ и $k=18$ число b получается нецелым. Остается только $k=17$. Тогда

$$a=1785,\ b=224,\ c=1799.$$

Легко убедиться, что эти числа удовлетворяют условию.

Задача 6. *Точка D лежит на биссектрисе угла ACB. На луче AC выбрали точки A_1 и A_2, а на луче CB — точки B_1 и B_2 так, что четыре точки A_1, C, B_1, D лежат на одной окружности и четыре точки A_2, C, B_2, D тоже лежат на одной окружности. Докажите, что $A_1A_2=B_1B_2$.*

Введем обозначения: $CD=a$, $\angle ACD=\angle BCD=\alpha$. Нам надо проделать два аналогичных построения. Чтобы не писать два раза почти одно и то же, введем переменную n, принимающую два значения: 1 и 2, и опишем построение один раз, употребляя переменную n (см. рис. 1). Продолжим

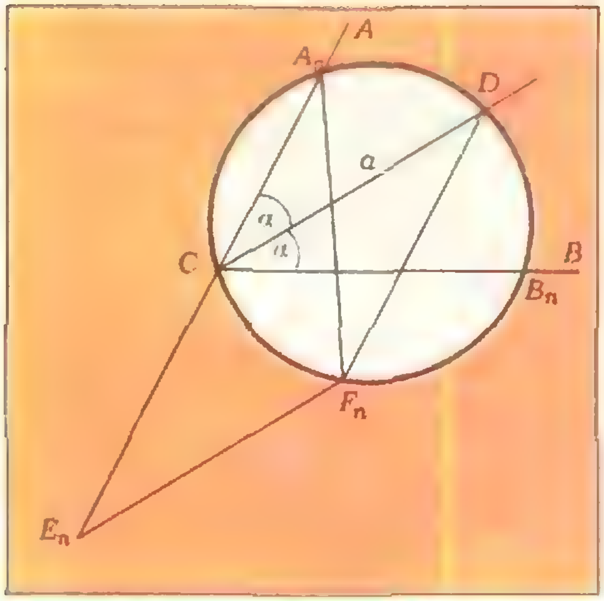


Рис. 1.

AC за точку C на отрезок $CE_n = CB_n$. Отложим на дуге CB_nD дугу DF_n, равную дуге CB_n. Очевидно, $\angle CDF_n = \alpha$ и $DF_n = CB_n = CE_n$. Поэтому, учитывая соотношение $\angle A_nCD = \angle CDF_n$, получаем, что CDF_nE_n — параллелограмм, и $E_nF_n = CD = a$. Далее, $\angle CA_nF_n = \angle CDF_n$, поскольку они опираются на одну дугу CF_n; поэтому $\angle E_nA_nF_n = \alpha$.

Таким образом, в треугольнике $E_nF_nA_n$

$$E_nF_n = F_nA_n = a,$$
$$\angle E_nF_nA_n = 180^\circ - 2\alpha.$$

Поэтому треугольники $E_1F_1A_1$ и $E_2F_2A_2$ равны по первому признаку.

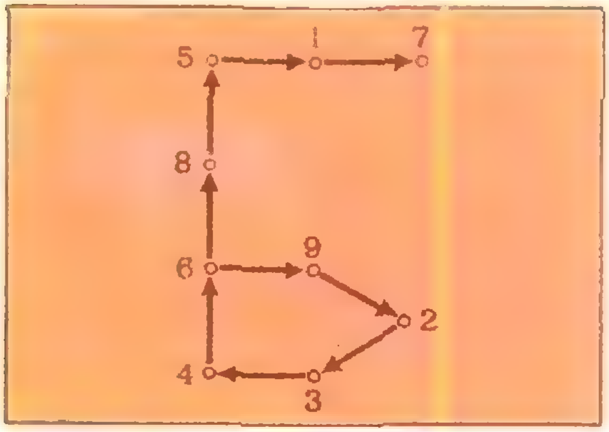


Рис. 2..

Тогда

$$E_1A_1 = E_2A_2,$$
$$B_1C + A_1C = B_2C + A_2C,$$
$$B_1C - B_2C = A_2C - A_1C,$$

откуда $B_1B_2 = A_1A_2$, что и требовалось доказать.

Задача 7. *Подряд в строчку выписаны 1974 цифры. Каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они написаны), делится на 17 или на 23.*

а) Последняя цифра 1. Какова первая?

б) Первая цифра 9. Какова последняя?

Удобно начертить «граф» (схему из стрелок), как показано на рисунке 2. В нем стрелка из цифры x в цифру y означает, что y может следовать за x, то есть двузначное число $\overline{xy}$ делится на 17 или на 23.

Мы видим, что перед 1 может стоять только 5, перед 5 — только 8 и так далее, каждая цифра однозначно определяет предыдущую. При этом, если мы идем по стрелкам назад от цифры 1, то цифры, начиная с 6, повторяются с периодом 5. Поэтому, если 1974-я цифра 1, то 1971-я цифра 6, а так как дальше — повторение с периодом 5, то первая цифра тоже 6.

Пусть теперь первая цифра 9. Пойдем по стрелкам вперед. После 9 может стоять только 2, после 2 только 3, после 3 только 4, после 4 только 6, а вот после 6 может стоять и 9, и 8. Но после 8 должно стоять 5, 1, 7, а после 7 ничего стоять не может.

Таким образом, 8 может появиться не раньше чем на 1971-м месте, а до тех пор после 6 может стоять только 9. Цифра 6 в первый раз появилась на 5-м месте и будет повторяться с периодом 5. Значит, на 1970-м месте будет 6. На 1971-м, как мы выяснили, может быть 9 или 8, а на 1974-м месте может быть 4 или 7.

Задача 8. *Периметр выпуклого четырехугольника $ABCD$ равен 10, его стороны AB и CD параллельны.*

Найдите длины всех сторон, если известно, что биссектрисы углов A и B четырехугольника делят сторону CD на три равные части, а биссектрисы углов C и D делят сторону AB на три равные части.

В этой задаче возможны четыре случая, схематически изображенные на рисунках 3, 4, 5, 6. Рисунки не воспроизводят действительных длин сторон или величин углов, показан только порядок следования точек пересечения биссектрис AE, BH, CK, DM со сторонами.

I случай (рис. 3). Пусть $AM = MK = KB = a$. Заметим, что

$$\measuredangle AMD = \measuredangle CDM = \measuredangle ADM. \quad (*)$$

Поэтому $AD = a$. Аналогично $BC = DE = EH = HC = a$. Поэтому периметр четырехугольника равен $8a$, откуда $a = 5/4$. Ответ для этого и других случаев дан в таблице.

II случай (рис. 4). Пусть $AK = KM = MB = a$. Равенства (*) снова верны, поэтому $AD = 2a$, и аналогично $BC = DE = EH = HC = 2a$. Периметр равен $13a$, откуда $a = \frac{10}{13}$.

III случай (рис. 5) аналогичен случаю II.

IV случай (рис. 6). Пусть $AK = KM = MB = a$. Используя те же равенства углов (*), получаем: $AD = BC = 2a$, $DE = HC = 2a$, откуда $DH = HE = EC = a$. Периметр равен $10a$, откуда $a = 1$.

Ответы:

случаи / стороны	I	II	III	IV
AB	15/4	30/13	60/13	3
BC	5/4	20/13	20/13	2
CD	15/4	60/13	30/13	3
DA	5/4	20/13	20/13	2

Задача 9. а) *Перечислите все возможные прямоугольники, у которых длины сторон больше 10 и которые можно разрезать на 28 прямоугольников размером 3×5.*

б) *Можно ли 28 брусками размером $3\times5\times10$ заполнить какую-нибудь прямоугольную коробку $a\times b\times c$, где $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 10$?*

а) Очевидно, площадь такого прямоугольника равна $28\cdot3\cdot5=420$. Длины его сторон — целые числа. Значит, надо разбить число $420=2^2\cdot3\cdot5\cdot7$ на два целых множителя, каждый из которых больше 10. Рассмотрим тот множитель, который делится на 7.

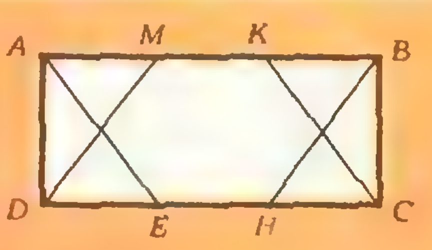


Рис. 3.

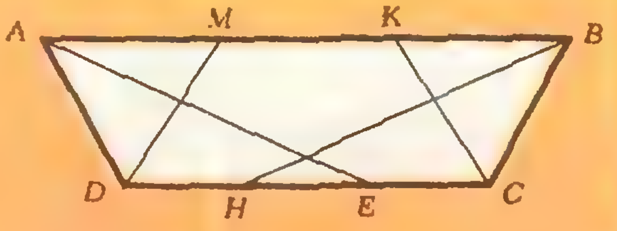


Рис. 5.

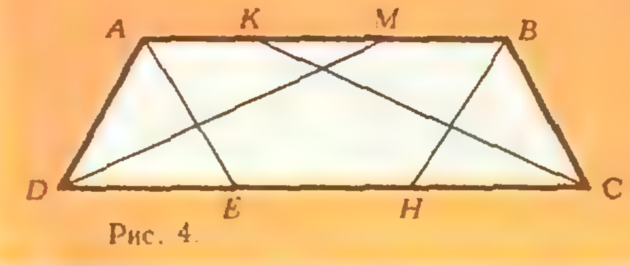


Рис. 4.

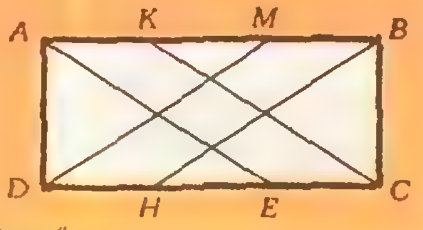


Рис. 6.

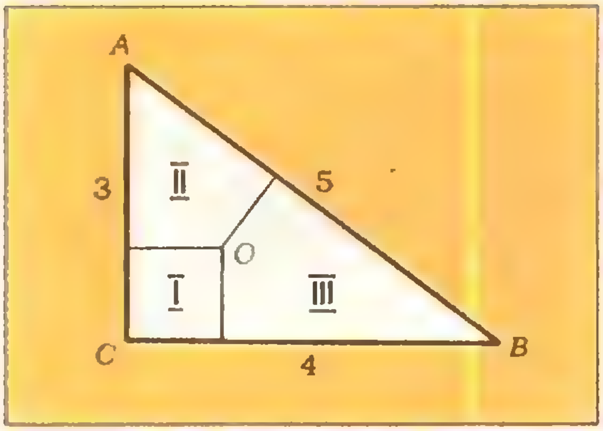


Рис. 7.

Он больше 10 и меньше 42 (иначе второй множитель не больше 10).

Получаем четыре случая: 1) 14×30; 2) 21×20; 3) 28×15; 4) 35×12.

Мы выяснили, что никакой прямоугольник, отличный от четырех перечисленных, не годится. Подходят ли эти четыре?

Заметим, что если длина одной стороны прямоугольника делится на 3, а второй — на 5, то такой прямоугольник можно разрезать на прямоугольники размером 3×5. Отсюда сразу следует, что прямоугольники размером 21×20 и 35×12 подходят.

Прямоугольник размером 14×30 разрежем сначала на два прямоугольника: 9×30 и 5×30. Оба они могут быть разрезаны на прямоугольники размером 3×5, значит, прямоугольник размером 14×30 тоже подходит.

Прямоугольник размером 28×15 можно разрезать на прямоугольники 25×15 и 3×15.

Значит, все четыре прямоугольника подходят.

б) Да, можно. Приведем пример, доказывающий это. Пусть

$$a = 20, \quad b = 15, \quad c = 14.$$

Разрежем эту коробку размером 20×15×14 на две: размером 20×15×9 и 20×15×5.

В каждой из двух полученных коробок одно измерение делится на 3, другое — на 5, третье — на 10. Поэтому каждую из них, конечно, можно заполнить брусками 3×5×10. Всего брусков получится 28.

Задача 10. *Существует ли девятизначное число, записываемое цифрами* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *у которого нельзя вычеркнуть пять цифр так, чтобы оставшиеся четыре шли в порядке возрастания или в порядке убывания?*

Да, существует. Докажем, например, что годится такое число:

321 654 987.

Легко проверить, что если какие-то две цифры этого числа стоят в убывающем порядке (меньшая стоит правее большей), то они обязательно из одной тройки. Значит, в этом числе нельзя выбрать больше трех цифр, стоящих в убывающем порядке, поскольку все эти цифры должны находиться в одной тройке.

Если же какие-то цифры этого числа стоят в возрастающем порядке, то они обязательно из разных троек. Поскольку троек всего три, то нельзя выбрать более трех цифр, стоящих в возрастающем порядке.

Существуют и другие примеры. Например, годится число

638 159 274,

докажите это самостоятельно.

Задача 11. *Можно ли указать внутри треугольника со сторонами* 3, 4, 5 *точку, расстояния от которой до каждой из сторон треугольника:* а) *меньше* 2; б) *меньше* 1?

а) Можно, подходит центр вписанной окружности (ее радиус равен 1).

Ответ на вопрос б): нет, нельзя. Докажем это. Проведем из центра O вписанной окружности радиусы ко всем точкам касания со сторонами и обозначим римскими цифрами части, на которые разделился наш треугольник (см. рис. 7). Легко доказать, что если искомая точка M находится в части I (включая границу), то расстояние от M до AB не меньше 1. Аналогично, если M — в части II, то расстояние от M до BC не меньше 1, а если M — в части III, то расстояние от M до AC не меньше 1.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 октября 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М276, М277» или «... Ф288».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные отмечены звездочкой.

В этом номере, как и в предыдущем, «Задачник «Кванта» составлен из задач последней Всесоюзной олимпиады и их обобщений. Полный набор задач олимпиады и подробный рассказ о заключительном туре мы поместим в № 10 за этот год.

Задачи

М276—М280; Ф288—Ф292

М276. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ — прямой. (10 кл.)

Н. Б. Васильев

М277. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки. (10 кл.)

А. М. Штейнберг

М278. а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длины больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1? (8 кл.)

Н. Х. Агаханов

М279. На n карточках, выложенных по окружности, записаны числа, каждое из которых равно $+1$ или -1. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех n чисел, если за один вопрос разрешается узнать

а) произведение чисел на любых трех карточках?

б) произведение чисел на любых трех карточках, лежащих подряд?

(n — натуральное число, большее 3). (9 кл.)

Ю. И. Ионин

М280*. Дан треугольник ABC площади 1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM, если точки K, L и M лежат соответственно на отрезках AB_1, CA_1 и BC_1? (10 кл.)

Б. М. Ивлев

Ф288. Сосуд C (рис. 1) сообщается с окружающим пространством через малое отверстие. Температура газа в окружающем пространстве T, давление p. Газ настолько разрежен, что молекулы при пролете в сосуд и из сосуда на протяжении размеров отверстия не сталкиваются друг с другом. В сосуде поддерживается температура 4 T. Каким будет давление в сосуде? (9 кл.)

Ф289. По сторонам прямого угла скользит жесткая палочка длины 2 l, в центре которой закреплена бусинка массы m. Скорость точки B постоянна и равна v (рис. 2). Определить, с какой силой действует бусинка на палочку в тот момент, когда $\alpha = 45°$. (8 кл.)

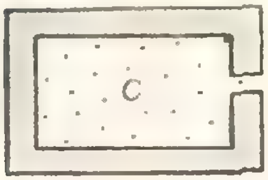


Рис. 1.

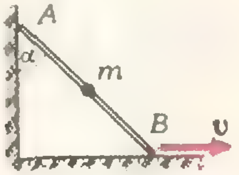


Рис. 2.

Ф290. Трубка, в которой находится пружинка с прикрепленным к ней шариком, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки. Свободный конец пружинки прикреплен к трубке (рис. 3). График зависимости силы упругости пружины F от деформации представлен на рисунке 4.

Нарисуйте примерный график зависимости смещения шарика вдоль трубки от угловой скорости при увеличении ее от нуля до такой величины, когда $F = 5$ *н*. Как изменится эта зависимость при уменьшении угловой скорости? $l_0 = 2$ *см*. (8—9 кл.)

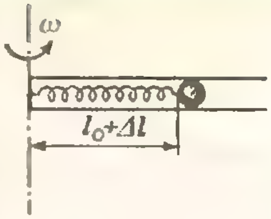


Рис. 3.

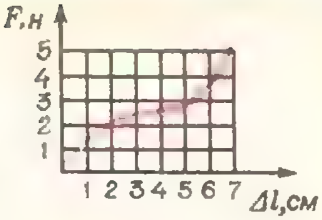


Рис. 4.

Ф291. Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка с индуктивностью L соединены как показано на рисунке 5. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U. Заряд конденсатора B и ток в катушке равны нулю. Определите максимальное значение тока в катушке после замыкания ключа. (10 кл.)

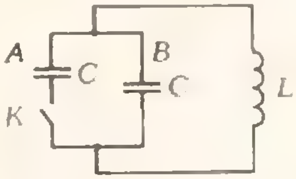


Рис. 5.

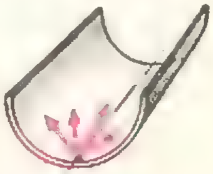


Рис. 6.

Ф292. Из одной точки на дне горизонтального кругового желоба разлетаются шарики под небольшими углами к образующей желоба с одинаковыми проекциями скорости вдоль этой образующей (рис. 6). Встретятся ли эти шарики? (10 кл.)

Решения задач

М236—М240; Ф243—Ф247

М236. *а) Имеется 51 двузначное число. Докажите, что из этих чисел можно выбрать по крайней мере 6 чисел так, чтобы никакие два из выбранных чисел ни в одном разряде не имели одинаковой цифры.*

б) Даны натуральные числа k и n, $1 < k < n$. Для какого наименьшего m верно следующее утверждение: при любой расстановке m ладей на доске размером $n \times n$ можно выбрать k ладей из этих m так, чтобы никакие две из выбранных ладей не били друг друга?

Решим сначала задачу б). Докажем, что если $m = n(k-1)+1$, то всегда можно выбрать k ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга. (То, что $n(k-1)$ ладей недостаточно,— очевидно: их можно расставить в первых $k-1$ столбцах и тогда больше чем $k-1$ выбрать невозможно.) Итак, $m = n(k-1)+1$. Покажем, что из этих m ладей всегда можно выбрать такую, что в ее *«кресте»* — проходящих через ладью столбце и строке — стоит не более $n+k-2$ ладьи. Пусть этого сделать нельзя. Выберем среди всех *рядов* (строк и столбцов) тот, в котором ладей больше всего; обозначим их число через l. По предположению в кресте каждой из этих ладей стоит больше $n+k-2$ ладьи; значит, всего ладей не меньше $l(n-k-l)$, причем $l \geqslant n+k-l$ и $n \geqslant l$, то есть $l \geqslant k$. Теперь уже легко заметить, что $l(n+k-l)$ не меньше $n \cdot k$, что больше $m = n(k-1)+1$, если n больше единицы. Получили противоречие; поэтому найдется ладья, крест которой содержит не более $n+k-2$ ладьи. Отметим эту ладью и вырежем ее крест из доски. Из оставшихся частей составим доску размерами $(n-1) \times (n-1)$. На новой доске будет не меньше $m-(n+k-2) = n(k-1)+1-(n+k-2) = (n-1)(k-2)+1$ ладей.

Предположим теперь, что для досок $r \times r$, где $r < n$, утверждение уже доказано (проверьте его, например, для $n=3$, $k=2$). Тогда на доске $(n-1) \times (n-1)$ из $(n-1)\cdot(k-2)+1$ ладей всегда можно выделить $(k-1)$ ладью так, что никакие две не бьют друг друга. Добавляя к ним выбранную ранее ладью, получим нужные k ладей.

Задача а) следует из задачи б), если взять $n=10$, а $k=6$. В самом деле, обозначим произвольное двузначное число через $\overline{xy}$ ($x = 1, \ldots, 9$; $y = 0, 1, 2, \ldots, 9$). Будем считать, что ладья соответствует числу $\overline{ab}$, если она стоит в a-й строке доски и b-м столбце (нумерацию строк и столбцов доски начинаем с нуля; ладьи все будут размещаться даже в прямоугольнике 9×10). Две ладьи бьют друг друга тогда и только тогда, когда у соответствующих им чисел совпадают цифры в одном из разрядов. Мы уже знаем, что из $10 \cdot 5 + 1 = 51$ ладей всегда можно выбрать шесть таких, что никакие две не бьют друг друга. Тем самым задача полностью решена.

Л. Г. Лимонов

М237. *Углы остроугольного треугольника равны α, β и γ. Какие массы нужно поместить в его вершинах, чтобы центр тяжести этих трех масс попал*

а) в точку пересечения высот?

б) в центр описанной окружности?

Стороны треугольника равны a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центр тяжести попал

в) в точку пересечения отрезков, соединяющих вершины и точки касания противоположных им сторон со вписанной окружностью?

г) в центр вписанной окружности?

Пусть в вершинах треугольника ABC расположены массы m_a, m_b и m_c соответственно. Проведем прямые BD и CE, пересе-

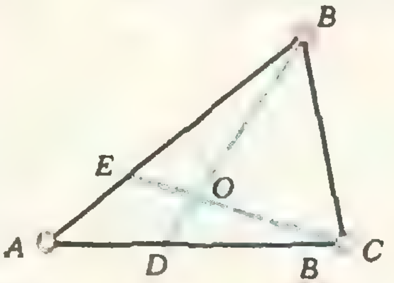


Рис. 1.

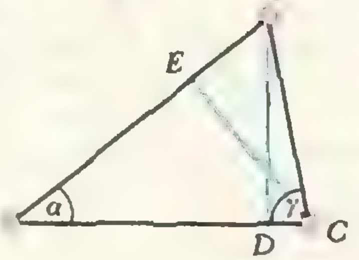


Рис. 2.

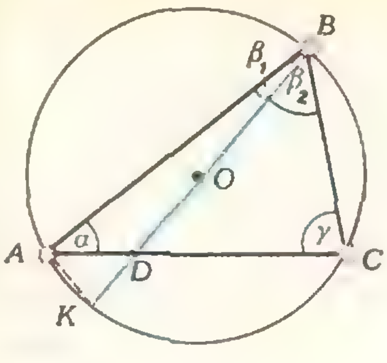


Рис. 3.

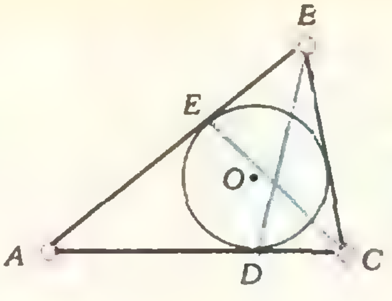


Рис. 4.

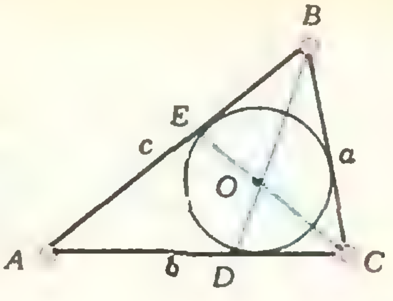


Рис. 5.

кающиеся внутри *треугольника в точке* O (рис. 1). Заметим, что для того, чтобы центр тяжести*) этих масс попал в точку O, необходимо выполнение соотношений $\frac{m_c}{m_a} = \frac{AD}{DC}$ и $\frac{m_b}{m_a} = \frac{AE}{BE}$ (докажите это). Перейдем теперь к решению задачи.

а) Пусть BD и CE — высоты в треугольнике ABC (рис. 2). Тогда

$$\frac{BD}{AD} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{BD}{DC} = \operatorname{tg}\gamma,$$

то есть

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Согласно сделанному замечанию, $\frac{m_c}{m_a} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}$ и аналогично $\frac{m_b}{m_a} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$. Значит, в вершины A, B, C треугольника ABC можно поместить, например, массы $m_a = \operatorname{tg}\alpha$, $m_b = \operatorname{tg}\beta$, $m_c = \operatorname{tg}\gamma$.

б) Пусть O — центр описанной окружности (рис. 3). Имеем:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha},$$

$$\frac{DC}{BD} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma}$$

(теорема синусов для треугольников ABD и BCD).

Поэтому

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin\gamma\cdot\sin\beta_1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta_2}.$$

Треугольник BAK — прямоугольный ($\measuredangle BAK = 90°$) и $\measuredangle BKA = \measuredangle BCA = \gamma$; поэтому $\sin\beta_1 = \cos\gamma$. Аналогично $\sin\beta_2 = \cos\alpha$.

Итак,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}.$$

Учитывая замечание, получаем:

$$\frac{m_c}{m_a} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}.$$

Таким же образом

$$\frac{m_b}{m_a} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}.$$

Значит, можно взять $m_a = \sin 2\alpha$, $m_b = \sin 2\beta$, $m_c = \sin 2\gamma$.

в) Легко видеть (см. рис. 4), что $AD = p - a$, $DC = p - c$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, поэтому

$$\frac{m_c}{m_a} = \frac{p-a}{p-c}.$$

Аналогично $AE = p - a$, $EB = p - b$, то есть

$$\frac{m_b}{m_a} = \frac{p-a}{p-b}.$$

Поэтому достаточно положить

$$m_a = \frac{1}{p-a}, \quad m_b = \frac{1}{p-b}, \quad m_c = \frac{1}{p-c}.$$

г) Так как BD — биссектриса угла B (см. рис. 5), то $\frac{AD}{DC} = \frac{c}{a}$ или $\frac{m_c}{m_a} = \frac{c}{a}$; соответственно CE — биссектриса угла C и $\frac{AE}{BE} = \frac{b}{a}$, то есть $\frac{m_b}{m_a} = \frac{b}{a}$. Поэтому можно взять $m_a = a$, $m_b = b$, $m_c = c$.

Б. Д. Гинзбург

---

*) О центрах тяжести см. статью М. Б. Балка, Н. А. Григорьева, Механика помогает геометрии. «Квант», 1973, № 11, с. 34—35.

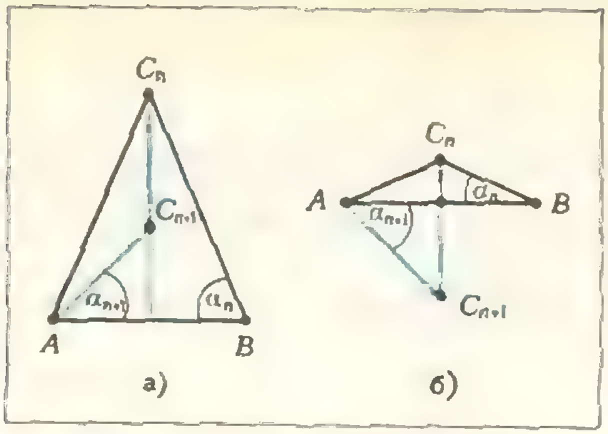


Рис. 6.

М238. *Докажите, что сумма* $C_n^1 + C_n^3\cdot 1973 + C_n^5\cdot(1973)^2 + C_n^7\cdot(1973)^3 + \ldots$ *делится на* 2^{n-1}. *(Здесь* C_n^k *— коэффициенты многочлена*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.\ )$$

Будем решать нашу задачу по индукции. Положим

$$\gamma_n = C_n^1 + C_n^3\cdot 1973 + C_n^5\cdot(1973)^2 + \ldots$$

Имеем:

$$\gamma_1 = 1 \text{ делится на } 2^{1-1} = 1;$$

$$\gamma_2 = 2 \text{ делится на } 2^{2-1} = 2.$$

Предположим, что при всех $k<n$

$$\gamma_k = C_k^1 + C_k^3\cdot 1973 + \ldots$$

делится на 2^{k-1}, и докажем, что тогда γ_n делится на 2^{n-1}. Из определения чисел C_n^k сразу следует, что

$$\gamma_n = C_n^1 + C_n^3\cdot 1973 + \ldots = \frac{(1+\sqrt{1973})^n - (1-\sqrt{1973})^n}{2\sqrt{1973}}.$$

Обозначим $1+\sqrt{1973}$ через α, а $1-\sqrt{1973}$ через β.

Учитывая эти обозначения, перепишем γ_n так:

$$\gamma_n = \frac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha+\beta)}{2\sqrt{1973}} - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})}{2\sqrt{1973}} =$$

$$= 2\gamma_{n-1} + 1972\,\gamma_{n-2} = 2\gamma_{n-1} + 4\cdot 493\gamma_{n-2}.$$

По предположению индукции γ_{n-1} делится на 2^{n-2}, γ_{n-2} делится на 2^{n-3}; значит, вся сумма делится на 2^{n-1} — что и требовалось доказать.

Л. Г. Лиманов

М239. *На плоскости заданы две точки A и B. Пусть C — некоторая точка, одинаково удаленная от A и B. Построим последовательность точек* $C_1 = C$, C_2, C_3, …, C_n, C_{n+1}, …, *где* C_{n+1} *— центр окружности, описанной около треугольника* AC_nB. *При каком положении точки C*

а) точка C_n *попадет в середину отрезка AB (при этом* C_{n+1} *и дальнейшие члены последовательности не определены)?*

б) точка C_n *совпадает с C?*

Пусть $\angle C_nBA = \angle C_nAB = \alpha_n$. Легко проверить (рис. 6 а, б), что для остроугольного треугольника

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - \frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{4}<\alpha_n<\frac{\pi}{2}, \qquad (1)$$

для тупоугольного

$$\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_n,\ 0<\alpha_n<\frac{\pi}{4}. \qquad (2)$$

Это можно записать одной формулой:

$$\alpha_{n+1} = \left|2\alpha_n - \frac{\pi}{2}\right|,\quad 0<\alpha_n<\frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

которая годится и для прямоугольного треугольника: при $\alpha_n = \frac{\pi}{4}$ получим $\alpha_{n+1} = 0$ — центр C_{n+1} попадает в середину отрезка *AB*.

Положим $\alpha_n = x_n\cdot\frac{\pi}{2}$ (x_n — отношение величины угла α_n к величине прямого угла). Из (3) ясно, что x_n получается из x_0 n-кратным применением отображения

$$x \to f(x) = |2x-1|,\quad x\in[0,\ 1]. \qquad (4)$$

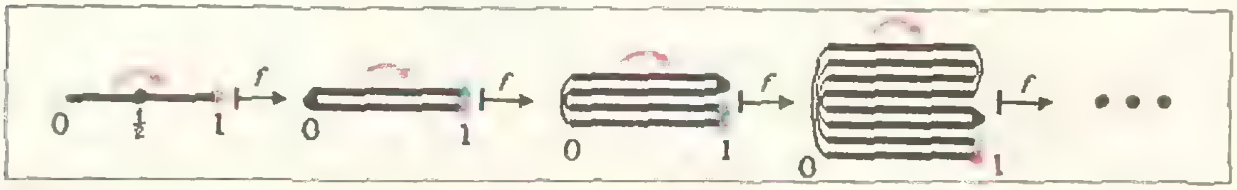


Рис. 7.

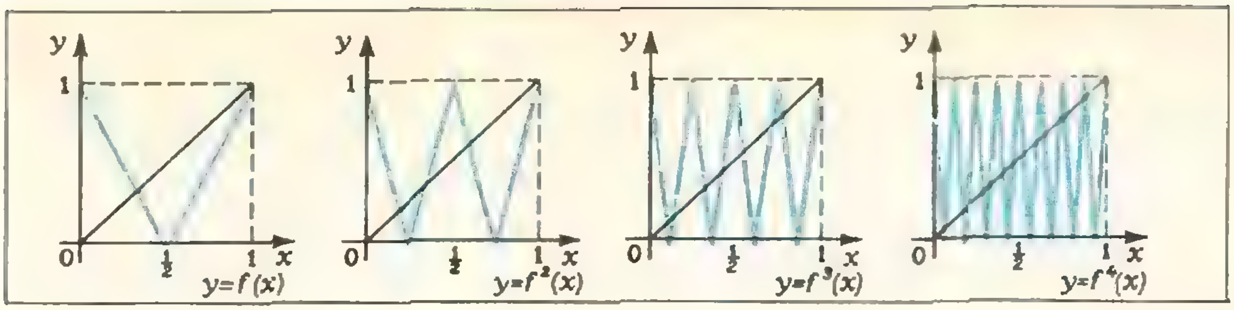


Рис. 8.

то есть

$$x_n = \underbrace{f(f(f\ \ldots\ (f}_{n\ \text{раз}}(x_0))\ \ldots\ )).$$

Заметим, что $f(0)=f(1)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Каждый из отрезков $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ отображение f растягивает вдвое и отображает на весь отрезок $[0, 1]$ (рис. 7). Ясно, что f^n (n-кратное применение f) «складывает» отрезок $[0, 1]$ уже не в 2 раза, а в 2^n раз; точки, делящие $[0, 1]$ на 2^n равных частей, f^n отображает в концы отрезка:

$$f^n\left(\frac{k}{2^n}\right)=1,\ \text{если}\ k=2m,\ \text{и}$$

$$f^n\left(\frac{k}{2^n}\right)=0,\ \text{если}\ k=2m+1 \qquad (5)$$

(где k, m, n — целые), а каждый отрезок $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ подобно растягивает на весь $[0, 1]$. Нетрудно сообразить (рис. 8), что тогда

$$f^n(x)=2^n\left(x-\frac{2m-1}{2^n}\right)$$

$$\text{для}\ x\in\left[\frac{2m-1}{2^n}, \frac{2m}{2^n}\right], \qquad (6)$$

$$f^n(x)=2^n\left(\frac{2m+1}{2^n}-x\right)$$

$$\text{для}\ x\in\left[\frac{2m}{2^n}, \frac{2m+1}{2^n}\right].$$

Нам нужно будет выяснить, в каких случаях $C_{q+n}=C_q$. Для этого решим уравнение $f^n(x)=x$. У него 2^n корней:

$$x=\frac{2m-1}{2^n-1}\ (m=1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}), \qquad (7)$$

$$x=\frac{2m+1}{2^n+1}\ (m=0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}-1). \ (8)$$

Теперь уже нетрудно разобраться в том, как ведет себя последовательность

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \qquad (9)$$

в зависимости от $x_0=2\alpha_0/\pi$.

1) Если x_0 иррационально, то все другие числа последовательности (9) иррациональны и отличны друг от друга. Первое легко следует из того, что все корни (7) и (8) уравнений $f^n(x)=x$ рациональны и, следовательно, равенство $f^n(x_q)=x_q$ не может выполняться при иррациональном x_0.

2) Если $x_0=\frac{p}{2^q}$ (p и q — натуральные, p и 2^q взаимно просты), то последовательность «обрывается»: $x_{q-1}=0$ и последующие точки C_q, C_{q+1}, ... не определены (по формуле (4) мы в этом случае получаем $x_q=x_{q+1}=\ldots=-1$). То, что «обрыв» происходит именно при таких значениях x_0, следует из формул (5).

3) Если $x_0=p/(2^q r)$ (p, r и 2^q взаимно просты, $q\geqslant 0$, $p\geqslant 1$, $r>1$), то последовательность (9), начиная с некоторого места, периодическая. В самом деле, как видно из (6), $x_{q+1}=\frac{t}{r}$, где t — некоторое нечетное число. Существует такое n, что 2^n-1 делится на r. (Этот известный факт мы докажем ниже.) Пусть $2^n-1=rs$ (s, конечно, нечетно). Тогда $x_{q+1}=\frac{ts}{2^n-1}$ принадлежит множеству (7), стало быть, $x_{q+n+1}=x_{q+1}$, и тем самым $x_{l+n}=x_l$ для любого $l\geqslant q+1$.

Итак, последовательность

$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots$$

периодическая тогда и только тогда, когда отношение угла α_0 к $\frac{\pi}{2}$ рационально и не имеет вид $\frac{p}{2^q}$ (в последнем случае C_{q-1} — середина отрезка AB, и последовательность обрывается).

Осталось доказать такую лемму: *для любого нечетного r найдется целое n такое,* *что* $2^n - 1$ *делится на* r. Напомним два доказательства:

1. Согласно «теореме Эйлера», $a^{\varphi(r)} - 1$ делится на r, если a и r взаимно просты, где $\varphi(r)$ — количество натуральных чисел, меньших r и взаимно простых с ним (см. статью С. Г. Гиндикина «Малая теорема Ферма» в «Кванте» № 10, 1972 год).

2. Рассмотрим остатки, которые дают r чисел $2^1 - 1,\ 2^2 - 1,\ 2^3 - 1,\ \ldots,\ 2^r - 1$ при делении на r. Если ни одно из них не делится на r, то поскольку различных остатков возможно $r - 1$, какие-то два из этих чисел $2^i - 1$ и $2^{i+j} - 1$ дают одинаковые остатки («принцип Дирихле»). Тогда их разность

$$(2^{i+j} - 1) - (2^i - 1) = 2^{i+j} - 2^i = (2^j - 1)\,2^i$$

делится на r, и, следовательно, $2^j - 1$ делится на r.

Н. Б. Васильев

M240. *По заданному* x *значение* x^8 *можно найти за три арифметических действия:* $x^2 = x\cdot x$, $x^4 = x^2\cdot x^2$, $x^8 = x^4\cdot x^4$, *и* x^{15} *— за пять действий: первые три — те же самые, затем* $x^8\cdot x^8 = x^{16}$ *и* $x^{16}:x = x^{15}$. *Докажите, что*

а) x^{1000} *можно найти за 12 действий (умножений и делений);*

б) для любого натурального n *значение* x^n *можно найти не более чем за* $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$ *действий.*

Заметим сначала, что степени x с показателями $2, 4, 8, \ldots, 2^k$ можно вычислить за k умножений, именно: $x^2 = x\cdot x$, $x^4 = x^2\cdot x^2, \ldots, x^{2^k} = x^{2^{k-1}}\cdot x^{2^{k-1}}$. Отсюда следует, что $x^n = x^{2^{\log_2 n}}$ нельзя найти быстрее чем за $l = [\log_2 n]$ операций (через $[z]$ обозначена целая часть действительного числа z, то есть такое целое число m, что $m \leqslant z < m + 1$).

а) Так как $2^9 = 512 < 1000 < 1024 = 2^{10}$, то есть $[\log_2 1000] = 9$, то x^{1000} нельзя вычислить быстрее чем за 9 действий. С другой стороны, $x^{1000} = x^{1024}:(x^{16}\cdot x^8)$, на что потребуется 11 умножений и 1 деление. Можно доказать, что этот способ вычисления самый экономный.

Замечание. В «Кванте» № 11 за 1973 год была опубликована задача из книжки Е. А. Морозовой и И. С. Петракова, Международные математические олимпиады:

Дан ящик сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Как возможно быстрее отвесить покупателю 1 кг сахару? (Указать схему уравновешиваний.)

Несмотря на различие в формулировках, в действительности задачи M240а) и только что приведенная в точности совпадают, и теперь вы уже можете указать ответ и на этот вопрос.

б) Опишем теперь способ вычисления x^n. Он основывается на двоичном представлении $\langle n \rangle_2$ числа n.

Представим n в виде суммы

$$n = \varepsilon_l\cdot 2^l + \varepsilon_{l-1}\cdot 2^{l-1} + \ldots + \varepsilon_1\cdot 2 + \varepsilon_0,$$

где ε_j — либо 0, либо 1, $0 \leqslant j \leqslant l - 1$, а $\varepsilon_l = 1$. Тогда двоичное представление n имеет вид:

$$\langle n \rangle_2 = \varepsilon_l \varepsilon_{l-1} \ldots \varepsilon_1 \varepsilon_0 \qquad (*)$$

Обозначим через $E(n)$ число единиц среди цифр ε_j:

$$1 \leqslant \varepsilon_l + \varepsilon_{l-1} + \ldots + \varepsilon_1 + \varepsilon_0 = E(n) \leqslant l + 1,$$

а через $H(n)$ — число нулей, так что $H(n) = l + 1 - E(n)$. Для нахождения x^n вычисляем сначала многочлены $x^2, x^4, \ldots, x^{2^l}$ (за l умножений). Дальнейшие вычисления зависят от величины $E(n)$.

(1) Если $1 \leqslant E(n) \leqslant \frac{l+3}{2}$, то перемножим те многочлены x^{2^j}, для которых $\varepsilon_j = 1$ (для этого нам потребуется $E(n) - 1$ умножений); ввиду равенства (*), результат равен x^n, общее же число умножений равно $l + E(n) - 1$.

Но

$$l + E(n) - 1 \leqslant \frac{3}{2}\,l + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}\log_2 n + 1.$$

(2) Если $\frac{l+3}{2} < E(n) \leqslant l + 1$,

то $$H(n) \leqslant \frac{l-2}{2}.$$

Рассмотрим число $\bar{n} = 2^{l+1} - n$. Очевидно, что $\langle n \rangle_2 + \langle \bar{n} \rangle_2 = 10\ldots0$ ($l + 1$ нуль) и что поэтому $E(\bar{n}) \leqslant H(n) + 1$. Как и в случае (1), вычислим многочлен $x^{\bar{n}}$ за $l + E(\bar{n}) - 1$ умножений. Затем вычислим многочлен $x^{2^{l+1}}$ (так как многочлен x^{2^l} уже найден, то на это потребуется еще одно умножение) и, наконец, многочлен $x^n = x^{2^{l+1}}:x^{\bar{n}}$ (одно деление). Итак, в этом случае потребовалось $l + E(\bar{n})$ умножений и одно деление, то есть всего $l + E(\bar{n}) + 1$ действий, где

$$l + E(\bar{n}) + 1 \leqslant l + H(n) + 2 \leqslant \frac{3}{2}\,l + 1 \leqslant \frac{3}{2}\log_2 n + 1.$$

Замечание. Многочлен x^{1000} был вычислен нами способом (2). Однако существуют многочлены, для которых ни способ (1), ни способ (2) не являются наилучшими. Например, многочлен x^{170} может быть вычислен за 9 умножений (найдите такой способ сами!), хотя $\langle 170\rangle_2 = 10\,101\,010$, так что $E(170) = H(170) = 4$, $[\log_2 170] = 7$; при способе (1) нужно 10 умножений, а при способе (2) — 11 умножений и одно деление.

Э. Г. Белага

Ф243. *Почему при ярком освещении те, кто пользуется не очень сильными очками, могут читать и без очков?*

Почему для того, чтобы сфотографировать одновременно два объекта, один из которых находится дальше другого, и получить на фотопленке резкое изображение обоих объектов, обычно уменьшают диаметр отверстия объектива (объектив диафрагмируют)?

Резкое изображение предмета, которое дает хрусталик несовершенного глаза, получается не на сетчатке глаза, а перед ней, если человек близорук, или за ней, если человек дальнозорок. В обоих случаях изображение каждой точки на сетчатке глаза получается в виде расплывчатого круглого пятна, диаметр которого зависит от диаметра зрачка и от степени близорукости (или дальнозоркости) человека (рис. 9). Чем меньше диаметр зрачка, тем уже пучок лучей, создающих изображение точки, тем меньшее пятно получается на сетчатке. При ярком освещении диаметр зрачка уменьшается, и изображение букв для людей, носящих не очень сильные очки, оказывается слабо размытым. Поэтому они могут читать и без очков. Для тех же, кто пользуется сильными очками, изображение букв получается далеко от сетчатки глаза, и несмотря на небольшой диаметр зрачка, изображение букв оказывается сильно размытым, так что читать текст без очков все равно невозможно.

Аналогично объясняется увеличение глубины резкости (то есть области, которая получается резкой на фотопленке) при уменьшении диаметра отверстия объектива. Действительно, пусть мы хотим одновременно сфотографировать две точки, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 10). Если аппарат сфокусирован на какой-то предмет между этими двумя точками (объектив дает на фотопленке резкое изображение этого предмета), то изображение точек на фотопленке получается расплывчатым, но диаметр каждого из пятен — изображений точек — зависит от диаметра отверстия объектива, уменьшаясь при уменьшении этого диаметра.

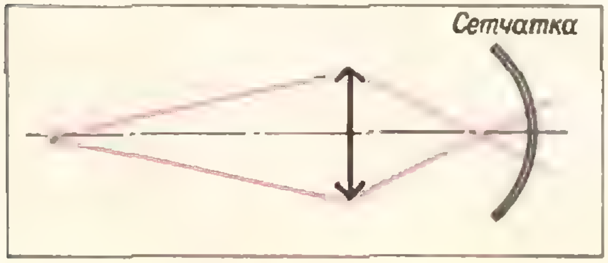


Рис. 9.

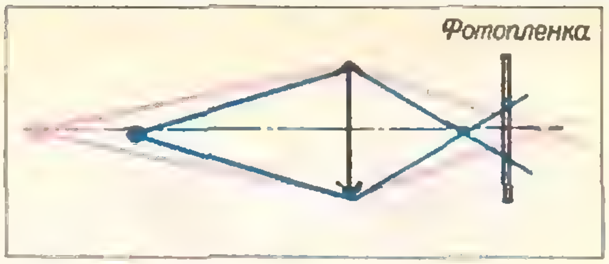


Рис. 10.

Ф244. *К двум точкам прикреплены цепочка длины l и концы двух стержней, сумма длин которых тоже равна l, а свободные концы шарнирно связаны. Чей центр тяжести находится ниже — цепочки или стержней?*

Потянув за одно из звеньев цепочки (рис. 11), ей можно придать форму стержней. При этом будет произведена работа, которая, очевидно, идет на увеличение потенциальной энергии цепочки, то есть на подъем ее центра тяжести. Так как в новом положении центр тяжести цепочки совпадает с положением центра тяжести стержней, ясно, что центр тяжести свободно висящей цепочки расположен ниже центра тяжести стержней.

Ф245. *Имеется равномерно заряженная полусфера. а) Показать, что плоскость, «закрывающая» эту полусферу, эквипотенциальна. б) Определить напряженность поля в точках этой плоскости.*

Плотность зарядов полусферы равна σ.

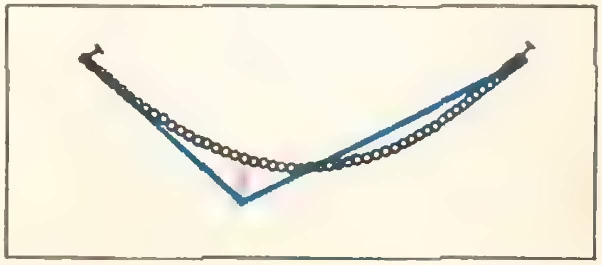


Рис. 11.

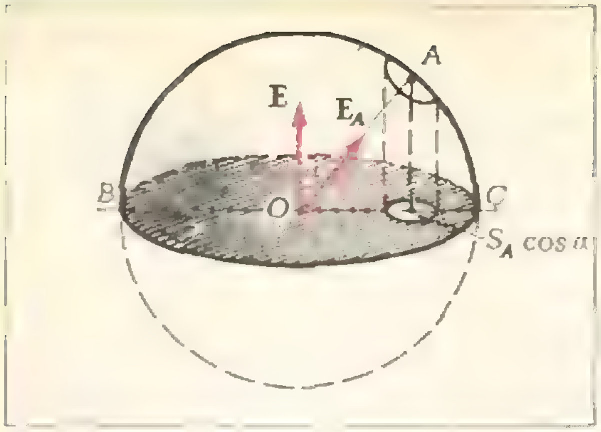


Рис. 12.

Сложим две одинаковые равномерно заряженные полусферы с равными плотностями зарядов. В этом случае мы получим равномерно заряженную сферу, внутри которой напряженность поля, как известно, равна нулю. Согласно принципу суперпозиции, однако, напряженность поля заряда сферы равна сумме напряженностей полей зарядов полусфер. Следовательно, равна нулю сумма $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ напряженностей полей зарядов полусфер. Это возможно только в том случае, когда $|\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2|$ и, кроме того, оба вектора $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ перпендикулярны к плоскости $П$, «закрывающей» полусферу. Действительно, из симметрии ясно, что составляющие векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, параллельные этой плоскости, должны быть равными. Складываясь, они дадут нуль только в том случае, если сами равны нулю.

Итак, мы доказали, что векторы напряженности поля в точках плоскости $П$ перпендикулярны к этой плоскости. Это означает, что при перемещении заряда в плоскости $П$ не совершается работа. Следовательно, плоскость $П$ эквипотенциальна.

Теперь найдем напряженность поля в точках плоскости $П$. Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в точке O равна сумме напряженностей полей зарядов отдельных участков полусферы. Напряженность поля заряда участка A равна, очевидно, по абсолютной величине

$$E_A = \frac{Q_A}{R^2} = \frac{\sigma S_A}{R^2},$$

где S_A — площадь участка A (участок A — участок поверхности полусферы столь малый, что его можно считать плоским, то есть линейный размер его много меньше радиуса полусферы).

Напряженность поля в точке O равна, очевидно, сумме перпендикулярных к плоскости $П$ составляющих векторов полей зарядов отдельных участков полусферы. Составляющая E_A, перпендикулярная к плоскости полусферы, равна $E_A \cos\alpha$ (см. рис. 12). Следовательно, нам нужно найти сумму

$$E = \sum \frac{\sigma}{R^2} S_A \cos\alpha = \frac{\sigma}{R^2} \Sigma S_A \cos\alpha.$$

Так как $S_A \cos\alpha$ — это проекция площади участка A на плоскость $П$, а сумма таких проекций площадей всех участков полусферы, очевидно, равна площади плоскости $П$, то есть πR^2, то

$$E = \frac{\sigma}{R^2} \pi R^2 = \pi\sigma.$$

Мы нашли напряженность в центре плоскости $П$. Нетрудно найти напряженность поля в точках окружности, которая является пересечением плоскости $П$ и полусферы. Так как поверхность полусферы эквипотенциальна, то силовые линии в любой точке полусферы должны быть перпендикулярны к полусфере. С другой стороны, в точках C и B они должны быть перпендикулярны плоскости $П$. Одновременно и то, и другое возможно только, если напряженность поля в этих точках равна нулю.

Нахождение напряженности поля, создаваемого зарядом полусферы в других точках плоскости, требует сложных вычислений. Поле это неоднородно. Очевидно, что оно обладает симметрией относительно точки O и в каждой точке плоскости зависит от расстояния до этой точки от центра O.

Ф246. *Теплоизолированный сосуд объемом $2V$ разделен пополам тонкой перегородкой. В одной половине сосуда находится одноатомный газ с температурой T_1 и давлением p_1, в другой половине — другой одноатомный газ с давлением p_2 и температурой T_2. Найти установившуюся температуру смеси газов после того, как убрали перегородку.*

Воспользуемся законом сохранения энергии. Так как сосуд теплоизолирован, то полная энергия газов при их перемешивании не может измениться. Внутренняя энергия n молей идеального одноатомного газа равна кинетической энергии хаотического движения молекул газа:

$$U = \frac{3}{2} nRT,$$

где T — абсолютная температура газа, R — универсальная газовая постоянная. Это означает, что пока не убрали перегородку, внутренняя энергия системы была равна

$$U = \frac{3}{2} n_1RT_1 + \frac{2}{3} n_2RT_2$$

(n_1 — число молей первого газа, n_2 — число молей второго газа). После того как убрали перегородку, температура газов стала равна T, а внутренние энергии газов стали $\frac{3}{2} n_1RT$ и $\frac{3}{2} n_2RT$. По закону сохранения энергии

$$\frac{3}{2} n_1RT_1 + \frac{3}{2} n_2RT_2 = \frac{3}{2} n_1RT + \frac{3}{2} n_2RT.$$

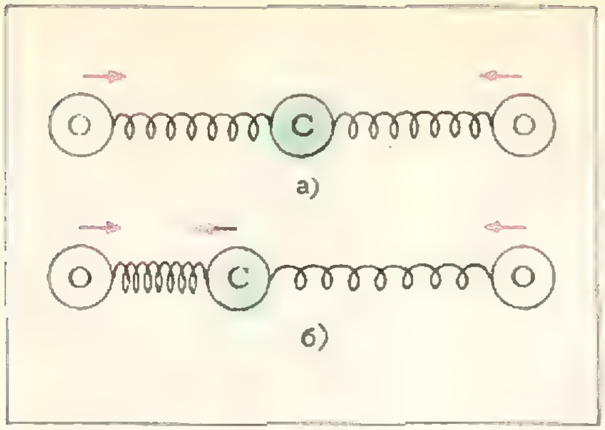


Рис. 13.

Отсюда

$$T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = \frac{\frac{n_1}{n_2} T_1 + T_2}{\frac{n_1}{n_2} + 1}.$$

В это выражение входит отношение n_1/n_2. Чтобы найти его, запишем уравнение газового состояния для обоих газов до перемешивания:

$$p_1 V = n_1 R T_1; \quad p_2 V = n_2 R T_2.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}.$$

Следовательно,

$$T = \frac{T_1 T_2 (p_1 + p_2)}{p_1 T_2 + p_2 T_1}.$$

Ф247. *Модель молекулы углекислого газа CO_2 — три шарика, соединенные пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать линейные колебания двух типов: а) или б) на рис. 13. Найти отношение частот этих колебаний.*

Обозначим жесткость пружинок модели молекулы k, массу шариков — атомов кислорода M и массу шарика — атома углерода m ($m/M = 12/16$).

Совершая колебания типа *а*), оба атома кислорода колеблются синхронно относительно неподвижного атома углерода. Это связано с тем, что в силу симметрии колебаний атомов кислорода на атом углерода в любой момент действуют с обеих сторон равные по абсолютной величине и противоположно направленные силы, которые «уравновешивают» друг друга. Поэтому в случае а) атомы кислорода совершают свободные колебания, период которых равен

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

При колебаниях типа *б*) на атом углерода действуют равные по абсолютной величине силы, но направлены они в одну и ту же сторону. Если шарик — атом углерода разбить на две равные части, то ясно, что они будут колебаться как одно целое: на них всегда действуют равные силы и, следовательно, шарики-половинки в любой момент будут иметь одинаковые ускорения, скорости и координаты. Частота колебаний молекулы CO_2 равна частоте колебаний системы, состоящей из атома кислорода и половины атома углерода. Таким образом, задача сводится к определению периода колебаний соединенных пружинкой шариков массы M и $m/2$. Такие шарики колеблются около неподвижного центра масс системы. Если длина пружинки в нерастянутом состоянии равна l, то центр масс системы находится на расстоянии $l \frac{m}{m + 2M}$ от шарика массы M. Поэтому можно считать, что шарик массы M (атом кислорода) колеблется относительно центра масс на пружинке длины

$$l_1 = l \frac{m}{m + 2M}.$$

Жесткость части пружинки больше жесткости целой пружинки. Так как жесткость обратно пропорциональна отношению длины этой части к длине целой пружины, то жесткость части пружинки

$$k_1 = k \frac{l}{l_1} = k \frac{m + 2M}{m}.$$

Период колебаний шарика массы M на пружинке жесткости k_1 равен

$$T_б = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{mM}{k(m + 2M)}},$$

и

$$\frac{T_б}{T_a} = \sqrt{\frac{m}{m + 2M}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2M}{m}}}.$$

Так как $\frac{M}{m} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$, то

$$\frac{T_б}{T_a} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

Следовательно, отношение частот

$$\frac{\nu_б}{\nu_a} = \sqrt{\frac{11}{3}}.$$

И. Ш. Слободецкий

**РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ**

Энрико Ферми — физик

Возьмите любую монографию по физике, изданную в последние 20—30 лет, и вы почти наверняка встретите в ней Энрико Ферми — разработанную им теорию, предложенный им метод исследования или хотя бы физический термин. Ферми внес огромный вклад в теоретическую физику, атомную физику, физику ядра и элементарных частиц.

Более 15 лет назад был издан русский перевод книги Лауры Ферми «Атомы у нас дома» — биографии этого ученого, написанной его женой. В ней рассказывается о жизненном пути Ферми, раскрывается образ Ферми — человека, но, естественно, почти не освещается его научная деятельность. И вот наконец-то почти одновременно появились две книги о Ферми — ученом. Одна из них*) принадлежит перу Эмилио Сегре, ученика, соратника и друга Ферми, вторая**) составлена другим учеником Ферми, советским академиком Б. М. Понтекорво и его сотрудником В. Н. Покровским. В обеих книгах материал преподносится, что называется, «из первых рук», и они дают достаточно полное и объективное представление о творческом пути одного из замечательных физиков атомной эры.

Перелистаем страницы этих книг.

...1915 год. Базарный день в Риме. Невысокий, коренастый четырнадцатилетний мальчик пробирается среди прилавков букинистов, разыскивая книги по физике. Итальянская физика, давшая миру Галилея и Вольта, давно уже утратила свою былую славу, преподавание этой науки в школах и университетах велось на довольно низком уровне, и влюбленному в физику Энрико Ферми оставалось одно — черпать знания из книг.

...Защитив диплом в Пизе, Ферми возвращается в Рим и сразу попадает под опеку Корбино, который был директором физической лаборатории Римского университета. Заметив выдающийся талант Ферми, Корбино помог ему получить (в 26 лет!) профессорскую кафедру в Римском университете — первую в Италии кафедру теоретической физики, специально учрежденную по этому случаю, а главное, помог собрать вокруг молодого профессора группу столь же молодых энтузиастов: Персико, Разетти, Сегре, Амальди, Понтекорво, Росси. Так возникла школа Ферми. Впоследствии эти имена, как и имена тех, кто группировался вокруг Ферми в период его жизни в США (Андерсон, Гелл-Манн, Гольдбергер, Фелд, Орир, Розенфельд, Чу, Янг), стали известны каждому физику.

...Подобно магниту Ферми всегда притягивал к себе талантливых людей. Чем же он достигал этого? Прежде всего, конечно, беспредельной влюбленностью в физику и глубоким пониманием ее. За сложными математическими построениями, за нагромождением формул Ферми умел разглядеть суть физических процессов и явлений. Вот что рассказывает Ганс Бете, один из выдающихся физиков нашего времени:

«Метод работы Ферми над теоретическими проблемами больше всего поражал меня своей простотой. Он мог проникнуть в существо любой задачи, какой бы сложной она ни казалась. Он срывал с нее покров математических усложнений и ненужного формализма. При таком подходе он мог часто не более чем за полчаса решить весьма сложную физическую задачу. Конечно, при этом не получалось математически полного решения, но когда вы расставались с Ферми после одного из таких обсуждений, уже было ясно, каким путем можно получить математическое решение».

При этом сам Ферми был хорошим математиком, способным, если нужно, произвести любые выкладки. Именно — если очень нужно. Но в своей повседневной научной деятельности он предпочитал приближенные, прикидочные расчеты и не расставался с логарифмической линейкой. Когда же появились электронно-вычислительные машины, он сразу оценил их мощь и первым среди физиков стал активно пользоваться ими.

Диапазон научных интересов Ферми был поистине колоссален. Бруно Максимович Понтекорво вспоминает, что в Римском университете Ферми читал лекции по квантовой механике, атомной физике, математической физике, термодинамике, но самым любимым у него был курс ...геофизики. Как же ему удавалось разбираться — и не по-дилетантски, а глубоко — в столь различных областях физики? Помимо выдающегося таланта, Ферми обладал еще двумя немало важными качествами: необычайным трудолюбием и систематичностью. И то, и другое проявилось уже в юности. Во время летних студенческих каникул 1919 года он исписал карандашом тетрадку в кожаной обложке: на ее 102 страницах уместился конспект всей физики от аналитической динамики Гамильтона и Якоби до электронной теории материи Лоренца, теории квантов Планка и основ радиоактивности Резерфорда. Последние заметки, оглавление и библиографические списки он написал 29 сентября, в день своего 18-летия. Любопытно, что эту тетрадку он взял с собой в Америку, где хранил наряду с другими научными записями до конца жизни.

---

*) Сегре Э. Энрико Ферми — физик. «Мир», 1973, 324 с., ц. 1 р. 19 к.

**) Понтекорво Б., Покровский В. Энрико Ферми в воспоминаниях учеников и друзей. «Наука», 1972, 160 с., ц. 57 к.

Не полагаясь на свою феноменальную память, он составил обширную, хорошо систематизированную картотеку («моя искусственная память», — шутил Ферми), из которой, заглянув предварительно в ключ-блокнот, мог без труда извлечь любые нужные сведения: уравнения, параметры и константы, библиографические ссылки, краткие изложения чужих научных работ и докладов.

Несколько слов о работоспособности Ферми, ставшей впоследствии недосягаемым эталоном для всякого физика. В марте 1934 года он возглавил исследования по облучению атомов различных элементов незадолго до этого открытыми нейтронами. За два месяца до летних каникул испытанию подверглись практически все элементы. Затем Ферми уехал читать цикл лекций в Южную Америку, а вернувшись, возобновил работу, проверяя влияние различных материалов на поведение нейтронов. К концу 1934 года работы были практически завершены (не будь они столь интенсивными, на них понадобился бы не один год). За цикл нейтронных исследований Ферми был удостоен Нобелевской премии по физике в 1938 году.

В декабре 1938 года Ферми с женой и двумя детьми поехал в Стокгольм получать Нобелевскую премию, а оттуда отправился в Америку, решив не возвращаться больше в фашистскую Италию.

...Еще в 1934 году, изучая взаимодействие нейтронов с ураном, Ферми обнаружил неизвестные ранее радиоактивные вещества и сделал, правда, в осторожной форме, вывод, что это трансурановые элементы. Вывод оказался ошибочным, и эту ошибку Ферми не мог простить себе до конца жизни. На самом же деле обнаруженные им радиоактивные вещества, как показали спустя четыре года немецкие ученые Ган, Штрассман и Мейтнер, являлись продуктами деления ядер урана. Как только это было доказано, в умах многих ученых, в том числе и Ферми, родилась идея цепной ядерной реакции, в результате которой должно выделяться огромное количество энергии.

...Когда разразилась война в Европе, а особенно после того, как в декабре 1941 года Соединенные Штаты вступили в войну, сотни ученых, работавших в США, главным образом эмигрантов из различных стран Европы, оккупированных гитлеровской Германией, сосредоточили свои усилия над созданием атомной бомбы. И здесь оказался незаменимым Ферми. Даже среди таких выдающихся ученых как Бор, Оппенгеймер, Комптон, Вайскопф, Фейнман, Бете, он считался «оракулом», к нему обращались в самых трудных случаях.

...После окончания войны Ферми совсем отошел от атомных исследований и увлекся физикой элементарных частиц. По-прежнему много времени уделял он педагогической деятельности: читал лекции в Чикагском университете, руководил теоретическим семинаром, занимался с группой аспирантов, из которой вышли многие активно работающие ныне ученые, писал учебники. Летом 1954 года он тяжело заболел, врачи поставили страшный диагноз — рак желудка с метастазами, и Ферми понял, что жить ему осталось немного. Но и в этой тяжелейшей ситуации он сохранял спокойствие и бодрость духа и даже на больничной койке продолжал писать учебный курс квантовой механики.

Ферми умер 29 ноября 1954 года, спустя ровно два месяца после своего 53-го дня рождения...

Таким предстает перед нами Энрико Ферми со страниц этих двух книг. Разумеется, в кратком рассказе невозможно дать полное представление о Ферми — человеке и ученом. Для этого надо прочесть обе книги.

С огромным интересом читаются приложения к книге Сегре: письма Ферми к своему другу и тезке Энрико Персико, охватывающие период с 1917 по 1926 год; речь, произнесенная Ферми при вручении ему Нобелевской премии и содержащая популярное изложение работ по искусственной радиоактивности, возникающей при бомбардировке нейтронами; запись последней речи Ферми, в которой живо и непосредственно, с большим юмором рассказано об истории ядерных исследований вплоть до создания первого ядерного реактора, и, наконец, более строгий доклад на ту же тему. Все эти материалы, как и бо́льшая часть основного текста обеих книг, вполне доступны школьникам старших классов, увлекающимся физикой. Прочтя эти книги, они познакомятся с выдающимся ученым, который по праву входит в плеяду создателей физики XX века, а также с одной из замечательных и драматических страниц в истории физики.

И. Зорич

ИНФОРМАЦИЯ

Физико-математической школе при МИИТе — 5 лет

27 февраля 1974 года в Московском ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени институте инженеров железнодорожного транспорта (МИИТе) состоялась методическая конференция, посвященная 5-летию работы физико-математической школы МИИТа *). В конференции приняли участие сотрудники ФМШ МИИТа — студенты и преподаватели института — и гости — представители физико-математических школ МВТУ, МЭИ, института атомной энергии им. И. В. Курчатова, Вечерней математической школы при Московском математическом обществе, редакции журнала «Квант», факультета «Юный железнодорожник» Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта.

«Вечерние физико-математические школы, созданные на общественных началах при ведущих вузах нашей страны,— явление исключительное в мировой педагогике,— сказал научный руководитель школы, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МИИТа, профессор Л. Е. Садовский.— За рубежом меня спрашивали, что особенно характерно для пейзажа Москвы и других советских городов. И я отвечал — школы, масса школ, учебных заведений. Социализм порождает огромную тягу к знаниям, всеобщий интерес к достижениям современной науки, и вечерние ФМШ играют большую роль в деле воспитания молодого поколения». Секретарь комитета ВЛКСМ МИИТа В. И. Чеков вручил грамоты лучшим студентам-преподавателям школы В. Цветкову, В. Залкинду, А. Маринбах и другим, и пожелал коллективу школы дальнейших успехов. Представители старейшей московской физико-математической школы — ФМШ МВТУ — вручили ФМШ МИИТа приветственный адрес.

За пять лет ФМШ МИИТа удалось добиться значительных успехов. Сложился свой собственный стиль, накоплен большой педагогический и методический опыт.

Поэтому доклады наших преподавателей вызвали огромное количество вопросов. Наибольший интерес вызвали сообщения об обзорном курсе физики и специальном курсе элементарной математики, которые читаются в нашей школе для 10-классников. Обсуждение методики преподавания продолжалось более 5 часов. Затем гости посетили лекции и занятия в группах ФМШ, беседовали со школьниками.

Основная цель, которую ставит перед собой коллектив нашей ФМШ,— это раскрыть школьникам красоту математики и физики, помочь им полюбить эти науки, определить свое призвание. Разрыв между требованиями в средней школе и на приемных экзаменах в вузе, о котором так много дискутируют, состоит не в том, что от школьника в вузе требуют каких-то дополнительных знаний. Просто помимо знаний, предусмотренных обычной школьной программой, абитуриент должен обладать достаточно высокой культурой мышления.

Именно развитию мышления, тому, что принято называть «общей математической культурой», и посвящена в основном работа

Научный руководитель ФМШ МИИТа профессор Л. Е. Садовский на конференции.

Участники конференции

Директор Вечерней математической школы при Московском математическом обществе А. И. Орлов передает привет ФМШ МИИТа от ВМШ при ММО

Выступает директор ФМШ МЭИ Б. Ф. Реутов

Старейший преподаватель ФМШ МИИТа А. И. Сеславин рассказывает об обзорном курсе по математике для десятиклассников

Дискуссия на докладе зам. председателя Совета ФМШ МИИТа по учебной работе В. И. Каплуна

---

*) Официально днем рождения ФМШ МИИТа считается 17 января 1969 года, когда ректор института профессор Ф. П. Кочнев утвердил «Временное положение о ФМШ» (фактически школа начала работу в 1968 году — см. статью А. Л. Садовского «Физико-математическая школа при МИИТе», «Квант», 1972, № 1).

нашей школы. Даже на занятиях, посвященных «конкурсным» темам, для нас главное — это довести до учащихся общие соображения, лежащие в основе раздела, нарисовать общую картину. Лишь после того, как это удалось сделать, мы переходим к деталям. При этом основная работа по освоению техники ложится на самого учащегося. В школе разработана система специальных заданий, которые учащиеся выполняют дома, а потом сдают на проверку. Задание обычно состоит из 15—20 задач разного плана и разного уровня сложности. Однако даже в самых простых примерах всегда содержатся некоторые подчас неожиданные для школьника трудности. Например, в задание по графикам и элементарным функциям включены и такие простые примеры, как *построить график функции* $y = x^{[x]}$ ([ ] — целая часть), и такие, как *построить область*

$$\min\{\sin 2\pi x, \cos 2\pi y\} \leqslant 1/2,$$

в которых для полного решения необходимо провести маленькое исследование.

Каждый год в начале сентября наша школа проводит очередной набор. У нас часто спрашивают: «А какой, примерно, конкурс в Вашей школе?» И ответ: «Никакого» — обычно вызывает удивление. В школе работает достаточно преподавателей и студентов, чтобы обеспечить занятия практически в любом числе групп, поэтому для *каждого* поступающего независимо от остальных собеседование дает ответ: принять или не принять. По результатам вступительного собеседования мы принимаем учащихся 8-х, 9-х и 10-х классов школ Москвы и Московской области.

Программа трехгодичного потока (8—10 класс) рассчитана на планомерное развитие математической культуры, глубокое усвоение различных разделов математики и физики. Программа двухгодичного потока (9—10 класс) практически совпадает с программой трехгодичного, но проходится за 2 года, поэтому требования к девятиклассникам на собеседовании немного выше. Ученикам десятого класса приходится осваивать нашу программу всего за один год, поэтому отбор десятиклассников самый строгий. Программа нашей школы включает в основном неэлементарные разделы элементарной и элементарные разделы высшей математики. Курс математики, как, впрочем, и курс физики, состоит из отдельных тем-этюдов. Каждая тема разбирается обычно на протяжении 3—5 занятий. Тема начинается с поставки отдельных задач и разбора интуитивных и практических соображений, лежащих в ее основе, а завершается доказательством каких-либо важных положений, разбором дальнейших перспектив применения рассмотренных методов. При этом на лекциях разбираются лишь принципиальные моменты, а основная работа проводится на семинарах, где по каждой теме предлагаются циклы задач. Большинство тем изложены в книгах серий «Библиотека математического кружка», «Популярные лекции по математике», но некоторые родились у нас. Например, в этом году девятиклассникам была предложена тема, связанная с традиционным кружковским разделом «выпуклые фигуры», которая была посвящена, однако, придуманной одним из преподавателей нашей школы Г. Кацманом теореме о том, что с некоторой точки зрения четыре ножки для стула с круглым сиденьем — оптимальный вариант. Курс физики читается в основном с теоретическим уклоном. При этом с использованием математического аппарата минимальной сложности часто удается довести рассмотрение до самых современных результатов. Это относится, например, к термодинамике, теории фазовых переходов, теории относительности.

В основном изучение элементарной, «школьной» математики построено так, чтобы в ней не оставалось мест, метко названных французским математиком Ламперти «появлением кролика из шляпы». Огромное внимание уделяется тонкостям в основных определениях, построению контрпримеров. Большой популярностью у преподавателей и учащихся ФМШ пользуются серии вопросов и задач по элементарной математике, составленные старейшим работником нашей школы А. Сеславиным.

В заключение для тех, кто заинтересовался нашим рассказом, приведем типовые вопросы прошлогоднего собеседования.

8 класс

1. Доказать, что если $a, b, c > 0$ и $a^2 + b^2 = c^2$, то $a^3 + b^3 < c^3$.

2. В записи числа $11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots$ $\ldots \cdot 2 = 399 * 6800$ потеряна одна цифра, обозначенная «звездочкой». Не вычисляя $11!$, определить эту цифру.

9 класс

1. Решить уравнение:

$$x^2 + y^2 + |x - y| = x + y - \frac{1}{2}.$$

2. Две окружности с радиусами R_1 и R_2 касаются друг друга внешним образом в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB. Найти угол ACB.

3. Доказать, что $n^3 - n$ делится на 6 при натуральных n.

4. Оценить вес земной атмосферы. (Для справок. Радиус Земли $R_З \approx$ ≈ 6400 *км*, площадь поверхности шара радиуса R равна $4\pi R^2$.)

10 класс

1. Решить уравнение sin[illegible]$x + \sin 2x = 1$.

2. Найти площадь сечения, проведенного в кубе $ABCDA'B'C'D'$ через точки M, K, T, лежащие соответственно на ребрах AD ($AM = MD$), CD ($CK = KD$) и BB' ($3BT = TB'$).

В. И. Каплун

Конференция по работе со школьниками

В. А. Волков
А. Л. Лихтарников
И. С. Рубанов

В феврале этого года студенты и маститые математики, занимающиеся внеклассной работой со школьниками, собрались на свою первую конференцию. 172 делегата из 29 университетов и 26 педагогических вузов страны приехали в Ленинград, чтобы обсудить работу юношеских, летних, заочных и вечерних математических школ, кружков, проведение олимпиад. Конференция проводилась комитетом ВЛКСМ и Советом по вопросам среднего образования математико-механического факультета Ленинградского университета.

Половину делегатов конференции составляли студенты. Это одна их характерных черт работы вузов со школьниками: студенты, сами недавние школьники, становятся первыми помощниками ребят в важном и трудном деле выбора профессии. Наиболее широко такого рода общественная деятельность распространена на математических факультетах ряда вузов нашей страны. И это понятно, так как занятия математикой в школьные годы полезны не только для будущих математиков. Они повышают и общую культуру, прививают школьнику навыки логического мышления. Кроме того, знание основ математики в наши дни помогает творчески работать во многих других областях.

Программа конференции была насыщенной. Несмотря на то, что конференция работала целых 6 дней (с 31 января по 5 февраля 1974 года), заседания в отдельные дни продолжались (с перерывами) с 9 часов утра до 8 часов вечера.

В 95 докладах и кратких сообщениях преподаватели, студенты и научные работники рассказали о работе школ.

С большим интересом делегаты выслушали доклады члена-корреспондента АН СССР Д. К. Фаддеева, члена-корреспондента АПН СССР В. Г. Болтянского, профессора С. В. Смирнова, профессора И. М. Яглома, доцента М. Б. Балка (фото внизу).

Участники конференции присутствовали на математическом бое между командами спецшколы-интерната № 45 при ЛГУ и физико-математической школы № 30 г. Ленинграда. В один из вечеров была организована встреча с членами редколлегии журнала «Квант». Они рассказали делегатам о работе редакции. Далее прошел оживленный обмен мнениями о работе журнала.

На конференции работали 5 секций (ЮМШ, ЗМШ, ЛМШ и лекторских групп, организации работы со школьниками в вузе и олимпиад). На заседании каждой секции после подробного обсуждения принималось решение, в котором содержалась оценка конкретной формы работы и предложения заинтересованным организациям по ее совершенствованию. Конференция приняла также общее решение, содержащее предложения по совершенствованию форм и методов работы со школьниками.

В решении, в частности, отмечается, что внешкольная работа по математике со школьниками страны ведется с начала тридцатых годов. Она получила особенно большое распространение в последнее десятилетие и в настоящее время охватывает сотни тысяч учащихся. Эта работа позволяет осуществлять постоянное руководство занятиями школьников математикой, оказывать эффективную помощь учителям (особенно учителям из сельской местности, рабочих поселков и небольших городов) в организации внеклассных занятий, кружков и факультативов.

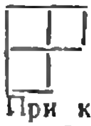
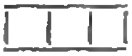
Конференция отметила, что участие в работе со школьниками комсомольцев вузов и научно-исследовательских учреждений — реальный вклад в выполнение постановлений партии и правительства о повышении уровня подготовки учащихся общеобразовательных школ, и проводимый ЦК ВЛКСМ поход под девизом «Комсомол — сельской школе». Только многотысячная армия студентов и аспирантов может помочь органам народного образования вовлечь массы школьников во внеклассную работу, развить индивидуальные способности каждого школьника.

Конференция обратилась с просьбой в Комитет по печати при Совете Министров СССР увеличить выпуск специальных изданий, связанных с внеклассной работой со школьниками.

На заключительном пленарном заседании было принято обращение к студентам, аспирантам и преподавателям вузов и к сотрудникам научно-исследовательских учреждений шире развернуть работу со школьниками по всем предметам и дисциплинам. Работа конференции показала, что имеются все предпосылки для дальнейшего совершенствования и расширения этой работы как у математиков, так и у работников других областей науки и техники.

Задачи математического боя между школой № 30 и школой-интернатом № 45

1. Построить треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых, а центр описанной окружности находится в данной точке.

2. Квадрат 6×6 нужно заполнить 12 плитками, k из которых имеют форму , а $(12 - k)$ — форму  При каких k это возможно?

3. На ребрах $A'D'$ и $C'D'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбирают две точки K и M так, что плоскость KDM касается шара, вписанного в куб. Доказать, что величина двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M.

4. На плоскости лежит правильный восьмиугольник и круг. Восьмиугольник можно поворачивать и симметрично отражать относительно любой его стороны. Доказать, что с помощью таких операций можно добиться, чтобы центр восьмиугольника попал в данный круг.

5. Построить треугольник по центрам вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей.

6. В каждой вершине правильного k-угольника поставлена буква A или $Б$. Известно, что для каждой вершины можно указать такое число p, меньшее $k/2$, что слово из p последовательных букв, начинающееся с этой вершины, совпадает со словом из p последовательных букв, оканчивающимся перед этой вершиной (слова читаются по часовой стрелке). Доказать, что k-угольник можно повернуть так, чтобы каждая буква совместилась с такой же буквой.

7. Окружность радиуса R, касающаяся внешним образом окружности радиуса $r < R$, катится без скольжения по этой окружности, а окружность радиуса $R + r$ касается внутренним образом окружности радиуса r и также катится по ней без скольжения. На каждой из катящихся окружностей выбрано по точке. Доказать, что описываемые этими точками траектории конгруэнтны.

8. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждый из них был под ударом не более чем одного из остальных?

9. В прямоугольном параллелепипеде из одной вершины проведены три диагонали граней. Доказать, что сумма углов между этими диагоналями равна $180°$.

10. Дан выпуклый многоугольник. Доказать, что если через каждую тройку последовательных вершин провести окружность, то наибольшая из этих окружностей содержит многоугольник.

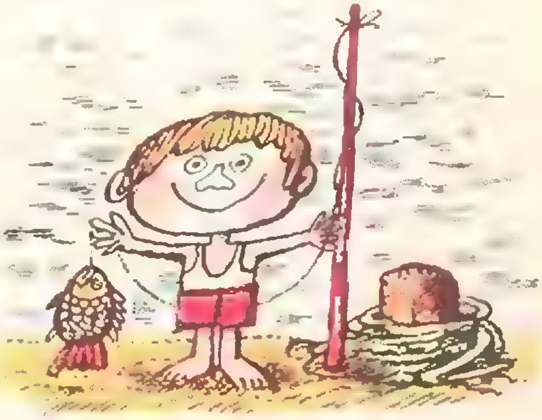
11. Функция f определена на множестве $R \setminus \{0, 1\}$. Для каждого x выполнено равенство $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$. Найти все такие функции f.

12. Вытекает ли из неравенств $abc > c^2 + ad$ и $a_1b_1c_1 > c^2 + a_1d_1$ неравенство $(a + a_1)(b + b_1)(c + c_1) > (c + c_1)^2 + (a + a_1)(d + d_1)$, если $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 > 0$?

13. Назовем *квартетом* четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. Какое наибольшее число квартетов, не имеющих общих клеток, можно разместить в квадрате 25×25?

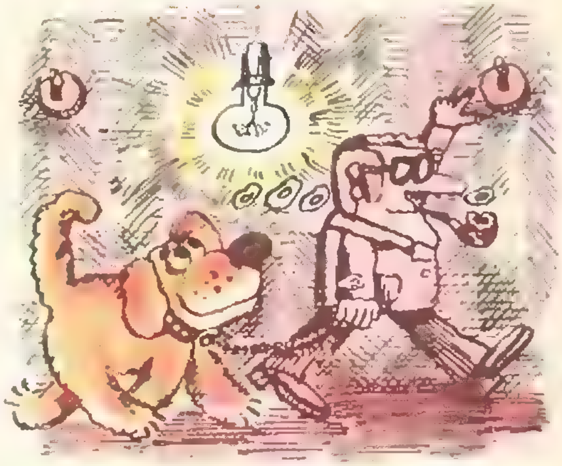
Задачи

1. Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его ростом. Доказать, что если шеренги семиклассников и восьмиклассников построить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник будет выше стоящего перед ним семиклассника.



2. Мальчик поймал в реке рыбу. Ему захотелось тут же хотя бы приблизительно определить массу этой рыбы. Как он может это сделать, если у него есть ровная прочная удочка и в своих запасах он нашел буханку хлеба массой в 1 *кг*?

3. Доказать, что $n^2 + n + 1$ не делится на 1974 ни при каком целом n.



4. Длинный коридор имеет электропроводку. Человек, войдя с одного конца коридора, включил лампу, а пройдя коридор — выключил ее. Какова схема проводки, если лампочку можно включать и выключать из обоих концов коридора?

5. Дана шахматная доска размером 100×100 клеток. Две клетки назовем *соседними*, если они имеют общую сторону. В клетках этой доски стоят целые числа, причем числа, стоящие в соседних клетках, отличаются не более чем на 20. Доказать, что на доске найдется три одинаковых числа.

6. Имеется алюминиевый шарик объемом 20 $см^3$ и массой 18 *г*. Как определить, сплошной он или внутри него есть воздушная полость? Можно ли каким-нибудь способом выяснить, находится эта полость в центре шара или около его поверхности?

Рисунки Э. Назарова

Нет ли другого доказательства?

В. К. Смышляев, А. П. Савин

Если спросить у человека, давно окончившего среднюю школу, помнит ли он теорему Пифагора, то в подавляющем большинстве случаев ответ будет: «А как же! В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы». Другие теоремы забываются, а эта нет. Она поражает нас своей красотой и изяществом и надолго остается в памяти.

Но вспомнить доказательство этой теоремы сможет далеко не всякий, а если и вспомнит, то не доказательство из учебника Киселева, принадлежащее Евклиду, а какое-нибудь более изящное, например, индийское, состоящее из рисунка (рис. 1) и подписи «смотри».

Очень изящно и доказательство, основанное на теореме о секущей и касательной, проведенных к окружности из одной точки (рис. 2). По упомянутой теореме $AB^2 = AC\cdot AD$ или $a^2 = (c+b)(c-b)$, то есть $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательств теоремы Пифагора очень много. Еще в 1876 году в Москве была издана книга Ю. Ф. Виппера «Сорок пять доказательств теоремы Пифагора». Конечно, она уже является библиографической редкостью, но книгу В. Литцмана «Теорема Пифагора» (М., Физматгиз, 1960) найти еще не слишком трудно. В ней дано довольно полное собрание различных доказательств этой теоремы. И, конечно, мы рекомендуем посмотреть статью В. Н. Березина «Теорема Пифагора», «Квант», 1972, № 3, и одноименную заметку в «Кванте» № 7 за 1974 год.

Является ли теорема Пифагора уникальной в смысле обилия ее доказательств? Оказывается, нет. Очень многие фундаментальные теоремы доказаны десятками способов.

Чем это вызвано? Почему математики передоказывают уже известные факты? На наш взгляд, можно выделить три основные причины.

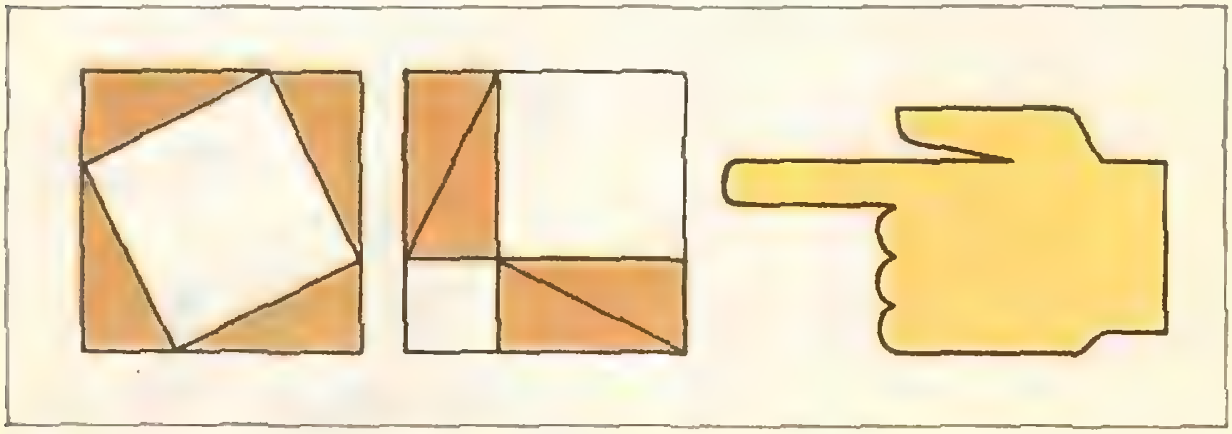


Рис. 1.

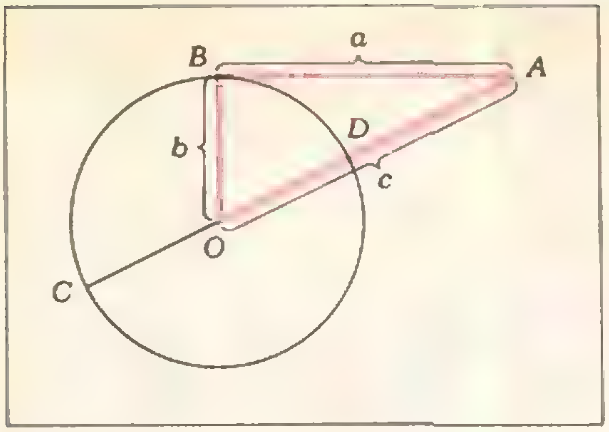


Рис. 2.

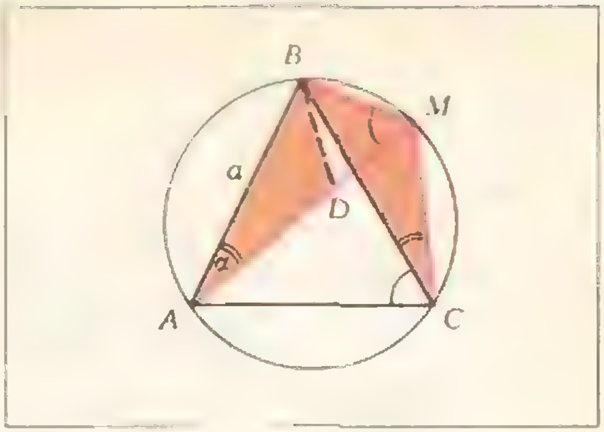


Рис. 3.

Первая — педагогическая. Обычно первые доказательства теорем весьма громоздки и неуклюжи, но затем, когда стало известно, что данный факт верен, появляются новые, более короткие и изящные доказательства, которые легче усваиваются, более наглядны.

Вторая причина — стремление установить связь данной теоремы с другими известными фактами, определить ее положение в сложном сооружении, именуемом математикой. Примером этому может служить обнаруженная нами связь теоремы о касательной и секущей с теоремой Пифагора.

И третья причина — открытие новых фактов, для которых данная теорема является очевидным следствием.

Один из таких примеров мы разберем в конце статьи. А сейчас разберем несколько доказательств другой, уже не столь знаменитой теоремы.

Пусть M — точка, лежащая на окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC. Тогда длина наибольшего из отрезков MA, MB, MC равна сумме длин остальных двух.

Приведем довольно изящное геометрическое решение. А именно, пусть MA — наибольший из указанных отрезков (рис. 3). Отложим от точки M отрезок $MD = MB$. Далее заметим, что угол AMB равен 60°, как опирающийся на ту же дугу, что и угол ACB. Отсюда следует, что треугольник BMD — равносторонний, после чего уже совсем нетрудно установить, что треугольники ABD и BMC равны, и, следовательно, $MA = AD + DM = MC + MB$.

А вот тригонометрическое доказательство. Обозначим длину стороны треугольника ABC через a, а угол BAM через α. Выразим указанные отрезки через a и α с помощью теоремы синусов:

$$MB = \frac{a \sin\alpha}{\sin 60^\circ}, \qquad MC = \frac{a \sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ},$$

$$MA = \frac{a \sin(60^\circ + \alpha)}{\sin 60^\circ}.$$

Найдем сумму MB и MC:

$$MB + MC = \frac{a}{\sin 60^\circ} \times$$

$$\times (\sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha)) =$$

$$= \frac{a \cos(30^\circ - \alpha)}{\sin 60^\circ} = \frac{a \sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin 60^\circ}.$$

Сравнив полученный результат с величиной MA, получим утверждение теоремы.

Заметим, что тригонометрия является очень сильным аппаратом для решения геометрических задач, причем ее *применение переводит задачу* из геометрического русла в алгебраическое.

И еще одно замечание. Аппарат тригонометрии основан на ряде геометрических теорем, поэтому неправомерно доказательство таких теорем применением тригонометрии. Например, «доказательство» теоремы Пифагора: $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, откуда $a^2 + b^2 = c^2 \; (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2$, не может быть признано доказательством, поскольку тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ само доказывается с помощью теоремы Пифагора.

Приведем еще одно доказательство нашей теоремы, основанное на теореме Птолемея: *произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон этого четырехугольника.*

Применим эту теорему к четырехугольнику $ABMC$. Тогда имеем: $MA \times BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$, и, так как $AB = BC = AC$, то $MA = MB + MC$. Таким образом, рассматриваемый факт является следствием теоремы Птолемея.

В заключение повторим: доказал теорему — подумай, нет ли другого доказательства. Такой подход поможет привести в систему Ваши математические знания, приучит отыскивать разные подходы к решению задач, находить среди них наиболее естественные и продуктивные. И, поверьте, Вы испытаете громадное удовлетворение, получив красивое и своеобразное доказательство. Именно здесь математика вплотную соприкасается с искусством.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 7)

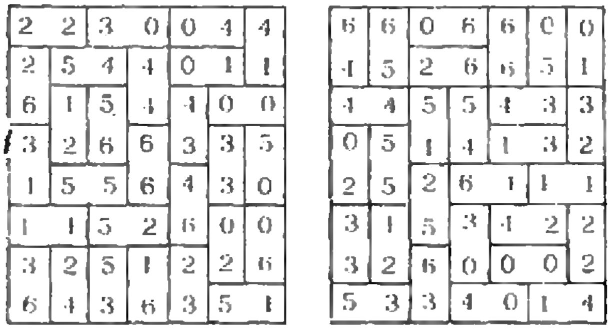
1. Обозначить первые два числа, стоящие в первой строке квадрата, через a и b, а первое число во второй строке через c и сумму магического квадрата через s. После этого можно найти все остальные числа в квадрате и доказать, что s делится на 3.

2. Намагниченная иголка может отталкиваться от магнита, ненамагниченная всегда притягивается.

3. Оля должна ставить нолики симметрично крестикам Саши, если, конечно, она не может выиграть одним ходом.

4. Свинцовый.

5. Число кусков бумаги имеет вид $1 + 11k + 7l$ (k — число разрываний бумаги на 12 кусков, l — на 8 кусков). Получить 60 кусков нельзя. Легко указать наборы k и l, при которых получаются числа кусков от 61 до 67, а далее надо увеличивать l на единицу.



2	2	3	0	0	4	4
2	5	4	4	0	1	1
6	1	5	4	4	0	0
3	2	6	6	3	3	5
1	5	5	6	4	3	0
1	1	5	2	6	0	0
3	2	5	1	2	2	6
6	4	3	6	3	5	1

6	6	0	6	6	0	0
4	5	2	6	6	5	1
4	4	5	5	4	3	3
0	5	1	4	1	3	2
2	5	2	6	1	1	1
3	1	5	3	4	2	2
3	2	6	0	0	0	2
5	3	3	4	0	1	4

К кроссворду

(см. «Квант», 1974, № 7)

По горизонтали:
2—8 медиана; 10—16 теорема; 18—25 критерий; 33—40 дедукция; 43—50 интеграл; 55—58 круг, 77—83 функция.

По вертикали:
1—42 вектор; 19—68 радикал; 29—62 центр; 2—30 метр; 45—73 точка; 47—80 график; 57—75 угол; 8—67 абсцисса; 50—76 линия.

К задачам «Домино—пасьянс»

(см. «Квант», 1974, № 6)

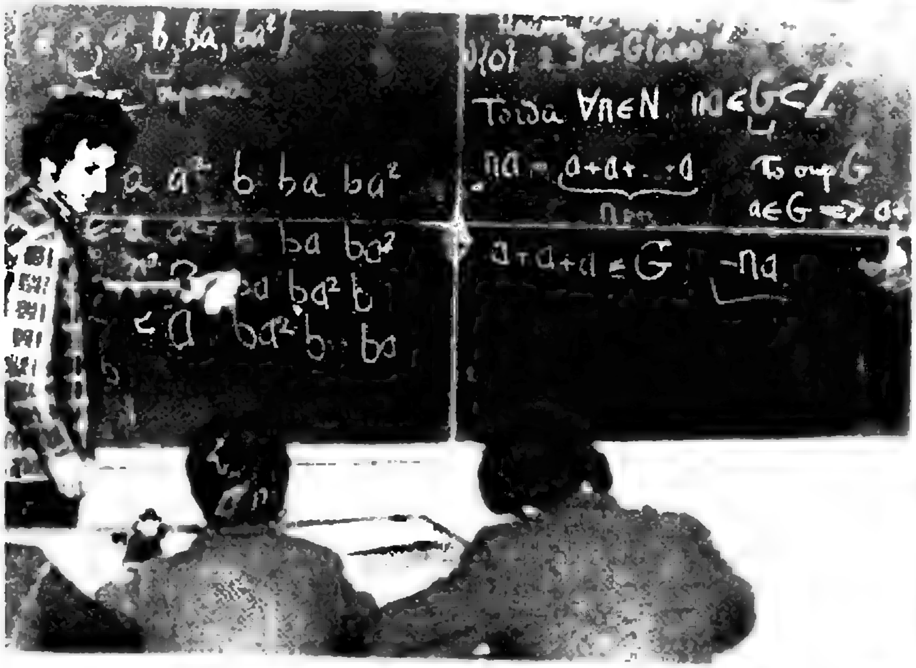
См. рисунок. Указание. В первой задаче есть лишь одно место, где может стоять кость 4 : 2, аналогичными рассуждениями находятся места остальных костей.

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/V-74 г.
Подписано в печать 20/VI-74 г. Заказ 962
Бумага 70×100$^1/_{16}$. Физ. печ. л. Усл. печ. л. 5,2
Уч.-изд. л. 5,63 Тираж 360 365 экз. Т-11282
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются


a, a², b, ba, ba²
Тогда ∀n∈N na∈G<Z
na = a+a+…+a
a a² b ba ba²
a+a+a∈G
−na

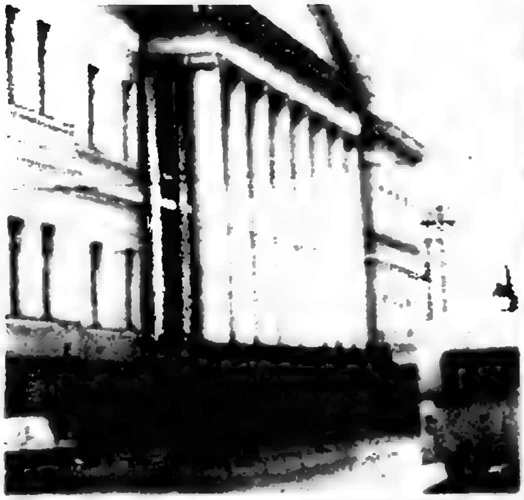
Физико-математической школе при МИИТе — 5 лет

Да, уже 5 лет работает ФМШ МИИТа. О конференции, посвященной этому событию, рассказано в статье В. И. Каплуна (см. с. 56—58). Помещенные здесь фотографии знакомят вас с атмосферой на занятиях ФМШ.

● Лекцию по физике учащимся 9 классов читает В. Д. Козлов.

● Андрей Кутьин на занятиях по математике с учащимися 8 класса.

● Гриша Кацман читает лекцию по математике учащимся 10 класса.



Конференция по работе со школьниками

Эта конференция проходила в феврале 1974 года в Ленинграде. Подробно о ней рассказано на с. 59—60.

● Здание матмеха ЛГУ, в котором проходила конференция.

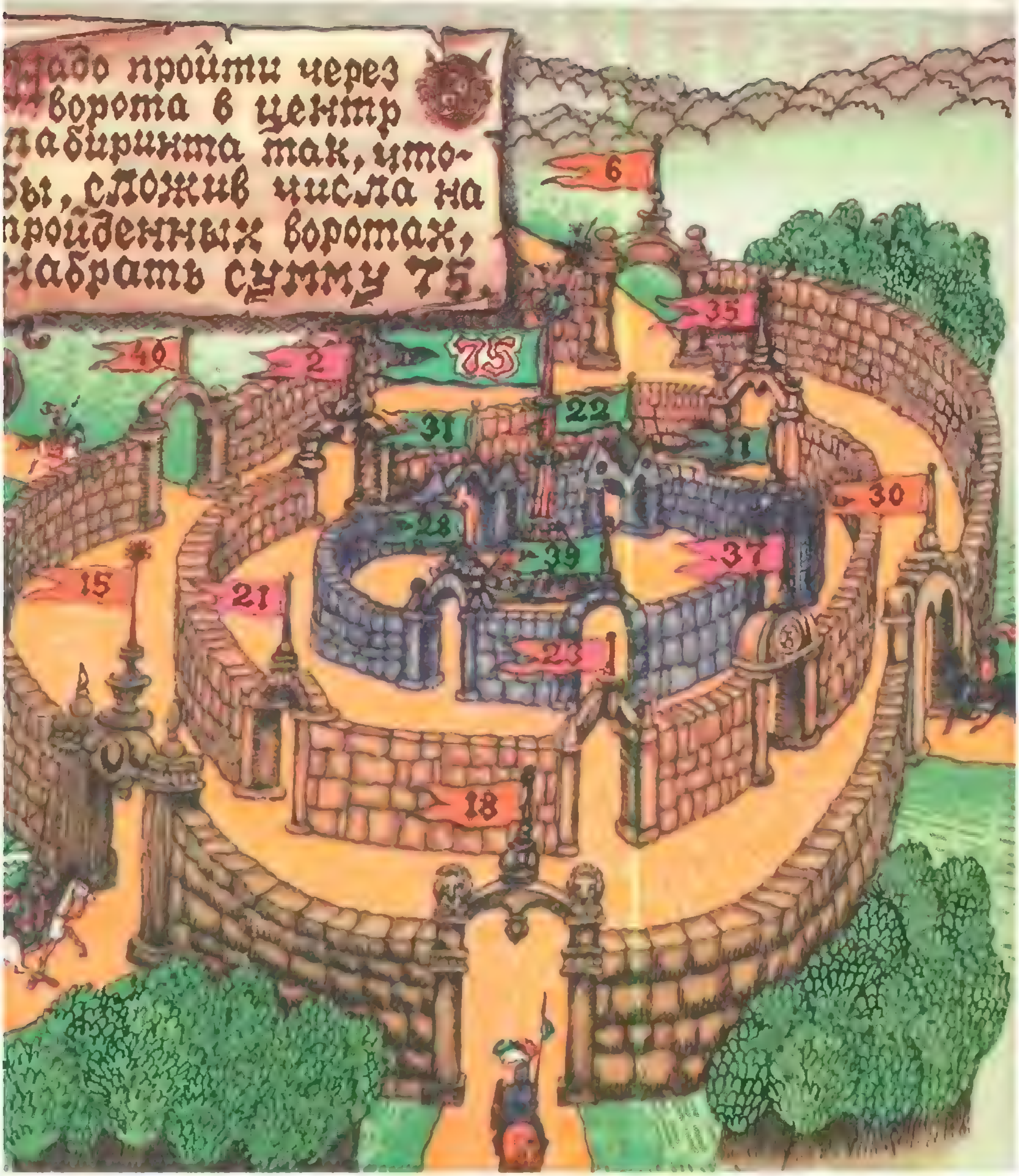
● Решение задачи математического боя рассказывает ученик 10 класса ФМШ при ЛГУ С. Фомин. Придирчивый оппонент — М. Гусаров (школа № 30 Ленинграда).

● Команда ФМШ при ЛГУ получает высший балл!

● Обсуждение журнала «Квант». «Это — прекрасный журнал,— говорят участники конференции. — Мы хотим, чтобы он стал еще лучше, чтобы «Квант» читали в каждой школе.»

● Аудитории матмеха ЛГУ с трудом вместили участников конференции, желающих присутствовать на обсуждении журнала «Квант».

8



Надо пройти через
ворота в центр
лабиринта так, что-
бы, сложив числа на
пройденных воротах,
набрать сумму 75.

6
35
46
2
75
22
31
11
30
28
39
37
15
21
23
18

НОМЕР
9

Основан в 1970 году.
1974
9
Квант
Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,

главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,

зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,

зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,

художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,

зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *С. Г. Гиндикин.* Из истории маятниковых часов
14 *М. Л. Гервер.* От перемены мест слагаемых...
20 *Я. Е. Гегузин.* Капля

Математический кружок

26 *И. Н. Клумова.* Игра «Жизнь»
31 *А. Л. Тоом.* Из жизни единиц

Задачник «Кванта»

40 Победители конкурса «Кванта»
42 Задачи М281—М285; Ф293—Ф297
44 Решения задач М241—М245; Ф248—Ф252

Практикум абитуриента

53 *В. Г. Болтянский.* Четырехугольники

Рецензии, библиография

57 *В. П. Лишевский.* Рассказ о капле
58 *И. М. Яглом.* Слишком маленькая серия
60 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги

Информация

62 *А. Н. Виленкин, В. А. Тихомирова.* Научная конференция учащихся специализированных школ-интернатов
66 *Л. В. Кованцова.* XIV математическая олимпиада школьников Украины
67 *И. А. Дьяконов, А. В. Качанов, И. И. Наслузов* Телевидение готовит в вуз

«Квант» для младших школьников

68 Задачи
69 *Ира Попова.* Об одной задаче
70 *И. Г. Булавко.* Делимость чисел
74 *М. П. Головей, Л. С. Куликова.* Ветка — барометр
76 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 13, 19, 52, 57)*

На первой странице обложки помещена фотография часов, маятник которых описывает коническую поверхность. Эти часы были изготовлены во Франции в конце прошлого столетия. Сейчас они находятся в Москве в Политехническом музее. Впервые часы с коническим маятником были изобретены и построены Христианом Гюйгенсом. Об этом рассказано в статье С. Г. Гиндикина «Из истории маятниковых часов» (с. 2).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант» №9 1974 год.

С. Г. ГИНДИКИН

ИЗ ИСТОРИИ МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ

К 300-ЛЕТИЮ ВЫХОДА В СВЕТ КНИГИ ГЮЙГЕНСА «МАЯТНИКОВЫЕ ЧАСЫ»

Знаменитая история о сутках, «потерянных» во время кругосветного путешествия Магеллана, свидетельствует, в частности, о том, что моряки, отправляясь в дальнее плавание, довольно скоро лишались информации о местном времени в пункте отплытия. «Хранить» же это время им было важно не только по причинам сентиментальным — для удобства размышлений о родном доме и семье. Вопрос «хранения» времени тесно связан с проблемой измерения географических координат на борту корабля. Трудно себе представить, что можно совершать дальние плавания, не обладая надежными способами измерений координат в открытом море. Однако исторические факты свидетельствуют о том, что надежные способы для измерения широты (по высоте подъема Солнца в полдень) имелись по крайней мере в XVI веке, а сколько-нибудь точно измерить долготу в открытом море мореплаватели были не в состоянии еще к началу XVII века. Проблема эта интересовала морские державы из соображений сугубо экономических, и не удивительно, что с самого начала XVII века французские короли Генрих IV и Людовик XIV, король Испании Филипп II, английский парламент и Генеральные Штаты Голландии, как бы соревнуясь, предлагали огромные премии за создание удовлетворительного способа измерения долготы.

Хотя такого способа не существовало, исходную идею предлагал еще Гиппарх: надо воспользоваться тем, что разность долгот в двух пунктах земного шара пропорциональна разности местных времен в этих пунктах в любой фиксированный момент времени. В пунктах, долготы которых отличаются на 15°, разница в местном времени — 1 час (360°/24 = = 15°). Поэтому задача измерения долготы сводилась к тому, чтобы сравнить местное время на корабле с местным временем какого-либо пункта, долгота которого известна. Местное время в пункте нахождения корабля измерить несложно, и единственное,

Маятниковые часы, которые вы видите на этом рисунке, были изготовлены в 1657 году искусным часовым мастером С. Костером из Гааги по личному заказу Христиана Гюйгенса. Это одни из первых часов, изготовленных по заказу Гюйгенса.
На фотографии виден механизм часов, отчетливо видны щеки, обеспечивающие циклоидальное движение маятника. В настоящее время эти часы находятся в Государственном музее истории естествознания в Лейдене.

чего не хватает для использования этого принципа — умения, находясь на борту корабля, измерять время в какой-то фиксированной точке отсчета, например, в порту отплытия. Для этого пытались воспользоваться какими-нибудь астрономическими явлениями, такими, чтобы, с одной стороны, их можно было наблюдать на борту корабля, а, с другой стороны, было бы известно точное время их наступления в исходном пункте. Но ничего подходящего найти не удавалось: лунные и солнечные затмения происходили до «обидного» редко. Очень красиво писал об этом Галилей: «По прежним временам небо было на этот счет щедро, но по нынешним нуждам оно изрядно скупо, помогая нам только лунными затмениями: и не потому, что то же самое небо не изобилует явлениями частыми, заметными и куда более подходящими для наших нужд, чем лунные и солнечные затмения, но правителю мира угодно было скрывать их вплоть до наших дней...». Оптимизм, который чувствуется в словах Галилея, связан с большими надеждами, которые он возлагал на открытые им спутники Юпитера (он назвал их Медичейскими звездами в честь братьев Медичи): затмения этих спутников происходили довольно часто. Мы цитировали отрывок из письма Галилея Генеральным Штатам Голландии, в котором он предлагал воспользоваться затмениями спутников Юпитера для измерения долготы. Его предложение было принято, но оказалось практически не слишком пригодным: наблюдать спутники Юпитера непросто, и делать это можно не каждую ночь; их движение было недостаточно точно описано. Вполне благожелательный адмирал Лауренс Реаль чистосердечно писал Галилею, что его метод слишком тонок «для такого грубого народа, как голландские моряки». Этому «грубому» народу хорошо бы попросту иметь на корабле часы, показывающие местное время исходного пункта, а с измерением местного времени на корабле по Солнцу (хотя бы в истинный полдень) они бы справились. Но именно такие точные часы, выдерживающие морскую качку, создать не удавалось.

В 1655 году Генеральные Штаты Голландии получили очередной проект измерения долготы — на этот раз при помощи наблюдений над высотой Луны. Рассмотрение проекта было поручено Христиану Гюйгенсу, 27-летнему сыну влиятельного члена Государственного Совета. Х. Гюйгенс, уже известный к тому времени своими научными достижениями, в частности, открытием кольца Сатурна, убедился в несостоятельности проекта, однако заинтересовался самой задачей. После этого Гюйгенс настойчиво пытался найти конструкцию часов, пригодных для измерения долготы. 12 января 1657 года он писал: «На этих днях я нашел новую конструкцию часов, при помощи которой время измеряется так точно, что появляется немалая надежда на возможность измерения при ее помощи долготы, даже если придется везти их по морю». Гюйгенс сам хорошо умел работать руками (вместе с братом Константином он шлифовал линзы для своего телескопа), но все же он предпочел доверить изготовление первого экземпляра часов гаагскому часовщику Соломону Костеру. 16 июня 1657 года патент Генеральных Штатов закрепил за Гюйгенсом авторство на маятниковые часы, а в 1658 году вышла брошюра «Horologium» с описанием изобретения.

Гюйгенс предложил несколько технических новинок в конструкции часов, но главная из них — использование периода колебания маятника в качестве меры времени. Впервые Галилей обратил внимание на поразительную устойчивость периода свободных колебаний маятника при изменении амплитуды размаха: «Колебания маятника совершаются в определенные сроки с такой неизбежностью, что совершенно невозможно заставить совершаться в иные сроки иначе, как удлиняя или укорачивая нить. Другая особенность, поистине удивительная, заключается в том, что один и тот же маятник совершает свои колебания с той же или весьма мало и почти неощутимо различной частотой, будут ли колебания совершаться по самым большим или самым малым дугам той же окружности». Гюйгенс был, разумеется, знаком с этим наблюдением Галилея, опубликованным в знаменитой книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению».

История этого замечательного открытия описана в письме Вивиани, знаменитого ученика Галилея, принцу Леопольду Медичи, также бывшему учеником Галилея:

«В 1583 г., имея около двадцати лет от роду, Галилей находился в Пизе, где, следуя совету отца, изучал философию и медицину. Однажды, находясь в соборе этого города, он, со свойственной ему любознательностью и смекалкой, решил наблюдать за движением люстры, подвешенной к самому верху, — не окажется ли продолжительность ее размахов, как вдоль больших дуг, так и вдоль средних и малых, одинаковой; ибо ему казалось, что продолжительность прохождения большой дуги может сократиться за счет большей скорости, с которой, как он видел, движется люстра на более высоких и наклонных участках. И пока люстра размеренно двигалась, он сделал грубую прикидку — его обычное выражение — того, как происходит движение взад и вперед, с помощью биений собственного пульса, а также темпа музыки, в которой он тогда уже был искушен с немалою от того для себя пользой. И ему на основании таких подсчетов показалось, что он не заблуждался, подсчитав, что времена колебаний одинаковы, но не удовлетворенный этим, вернувшись домой, он, чтобы надежнее в этом удостовериться, решил сделать следующее.

Он привязал два свинцовых шара на нитях совершенно одинаковой длины так, чтобы они могли свободно раскачиваться..., и, отклоняя их от вертикали на разное число градусов, например, один шар на 30, другой на 10, он отпускал их в одно и то же мгновение. С помощью товарища он наблюдал, что пока один маятник делал такое-то число колебаний по большим дугам, другой делал в точности столько же по малым дугам».

Гюйгенс решил воспользоваться тем, что период колебаний маятника не меняется ни при естественном затухании колебаний от сопротивления воздуха, ни при раскачке во время волнения на море. Оказывается, и Галилей предполагал воспользоваться маятником для создания часов. Но к рассмотрениям колебаний маятника после опытов 1583 года Галилей вернулся лишь через 50 лет, когда в 1634 году, после суда инквизиции и отречения от «лжеучения» Коперника, он решил записать в «Беседах» свои открытия по механике, полученные в юности (книга вышла из печати в 1638 году). 5 июня 1636 года в письме адмиралу Реалю Галилей писал о соединении маятника со счетчиком колебаний. Лишь в 1641 году, всего за год до смерти, Галилей приступил к практическому осуществлению проекта. Но слепому старику эта инженерная задача была уже не по плечу. Он завещал ее окончание своему сыну Винченцо, который несколько лет не приступал к работе, а вскоре после ее возобновления умер.

Широкой огласки эта деятельность не получила, но ученики Галилея знали о ней и, ознакомившись с брошюрой Гюйгенса, они попытались восстановить приоритет учителя. Леопольд Медичи пересылает влиятельному французскому астроному Буйо, покровительствовавшему Гюйгенсу, письмо о приоритете Галилея, подробный рассказ Вивиани об истории открытия (мы его цитировали выше) и рисунок часов Галилея для передачи Гюйгенсу. Возможно, Гюйгенса даже подозревали в плагиате. Ученики Галилея знали о переговорах с Генеральными Штатами Голландии относительно способа измерения географической долготы, которые Галилей вел в строжайшей тайне, опасаясь инквизиции. Все же на последней стадии флорентийский инквизитор узнал о его контактах с Голландией и добился их запрещения. В заключение он успокоил Рим, что Галилей «уже скорее лежит в гробу, чем занимается математическими построениями». Переговоры были столь секретны, что ученики Галилея не узнали, какой метод предложил их учитель, и предположили, что речь могла идти об измерении долготы при помощи маятниковых часов, и что присланными материалами мог воспользоваться Христиан Гюйгенс, отец которого был членом комиссии, разбиравшей предложение Галилея. Мы знаем теперь, что это не так, а речь шла об использовании затмений спутников Юпитера.

Ознакомившись с полученными от Буйо материалами, Гюйгенс констатировал, что Галилей выдвигал идею маятниковых часов, но был далек от технической реализации проекта. Характерно, что Макс Лауэ в своей «Истории физики», отмечая, что «решающий шаг для создания часов в современном смысле сделал Христиан Гюйгенс в 1657 году», выдвигает на первый план не использование периода колебаний маятника как меры времени, а идею «обратной связи»: в часах Гюйгенса впервые энергия источнику колебания доставляется, не нарушая периода колебания, причем «сам источник колебаний определяет моменты времени, когда требуется доставка энергии». У Гюйгенса эту роль выполняет простое и остроумное устройство в виде якоря с косо срезанными зубцами, ритмически подталкивающего маятник.

В 1673 году Гюйгенс писал: «Некоторые утверждают, что Галилей пытался сделать это изобретение, но не довел дело до конца; эти лица скорее уменьшают славу Галилея, чем мою, так как выходит, что я с бо́льшим успехом, чем он, выполнил ту же задачу». Нельзя только забывать, что когда Галилей занимался этой задачей, он был слеп и на 50 лет старше Гюйгенса.

Вообще Гюйгенс в большей степени, чем кто бы то ни было, следовал по пути Галилея. По словам Лагранжа, Гюйгенсу было суждено усовершенствовать и развить важнейшие открытия Галилея. Эта связь между двумя великими учеными имела знаменательное начало: 17-летний Гюйгенс собирался доказать, что брошенные тела движутся по параболам, но обнаружил доказательство в книге Галилея и не захотел «писать Илиаду после Гомера».

Гюйгенс, еще при построении первых часов, заметил, что утверждение Галилея об изохронности колебаний математического маятника (независимости периода T от максимального угла отклонения от вертикали α) не точно. Это утверждение с хорошей точностью выполняется для малых α, но заметно нарушается, например, при $\alpha = 60^\circ$. Непонятно, как Галилей просмотрел это обстоятельство: оно должно было выявиться в опытах, описанных Вивиани. Гюйгенс отметил в книге, изданной в 1673 году, что отношение периода для $\alpha = 90^\circ$ к периоду для малых дуг равно 34 : 29. Точность, с которой найдено это отношение, поразительна. Галилей утверждал, что квадрат периода пропорционален длине маятника l, но никаких указаний на способ получения этого соотношения не оставил. Гюйгенс доказал справедливость этой формулы для малых α. Получение формулы для периода колебаний маятника при любых α требует применения математического аппарата, не известного во времена Гюйгенса. Несмотря на это, Гюйгенс получил очень точные оценки для периода, причем не всегда понятно, какими средствами он этого добивался *).

Построив первые часы, Гюйгенс «заболел» проблемой построения точных часов, надежных в условиях мореплавания. Для этого надо было придумать устройство, компенсирующее изменение периода колебаний простого (математического) маятника при увеличении угла отклонения. Гюйгенс заметил, что для этого можно специальным образом уменьшать длину маятника при увеличении угла отклонения. В первой конструкции он подбирал зависимость длины от угла экспериментально, затем ему удалось найти нужную зависимость теоретически. В результате Гюйгенс изобрел

---

*) Для оценки периода колебаний удобно пользоваться приближенной формулой

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \times \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}\right),$$

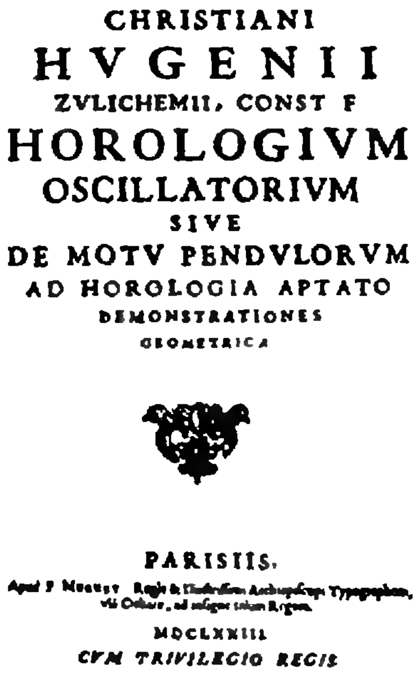
тогда еще не известной.

циклоидальный маятник, который впервые был использован в часах в 1659 году. Гюйгенс возлагал на часы с циклоидальным маятником большие надежды, брал патенты в разных странах, организовывал морские испытания, которые, увы, проходили с переменным успехом. Часы хорошо зарекомендовали себя в 1663 году при путешествии капитана Холмса из Лондона в Лиссабон, в 1664 году при плавании из Гвинеи, в 1668 году на французской эскадре, плававшей около острова Крит. С другой стороны, испытания при плавании адмирала Ришера в Канаду и Англию в 1670 году, капитана де Граафа на мыс Доброй Надежды в 1687 году и испытания самого Гюйгенса на Зюйдерзее в 1685 году дали отрицательные результаты. Не оправдал себя циклоидальный маятник и в «сухопутных часах». Та же судьба постигла другой предложенный Гюйгенсом источник изохронных колебаний — конический маятник, основанный на одной из самых замечательных работ Гюйгенса «О центробежной силе». Однако математические и механические результаты, полученные в связи с этими изобретениями, стали одной из ярчайших страниц в истории науки.

Все же Гюйгенсу удалось найти путь, на котором, правда, уже не им самим, был создан морской хронометр (считается, что первый удовлетворительный хронометр сконструировал Гаррисон уже в XVIII веке). В 1675 году Гюйгенс предложил идею пружинных часов с балансиром. Его последняя работа о часах была опубликована в 1693 году, за два года до смерти.

Что касается маятниковых часов, то в дальнейшем оказалось, что удобнее всего добиваться изохронизма, прикрепляя к верхнему концу специально подобранную пружину.

К 1673 году Гюйгенс придумал большое число усовершенствований к маятниковым часам, а парижский часовщик Исаак Тюре изготовил экземпляр часов с учетом всех новшеств.



CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST F
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICA

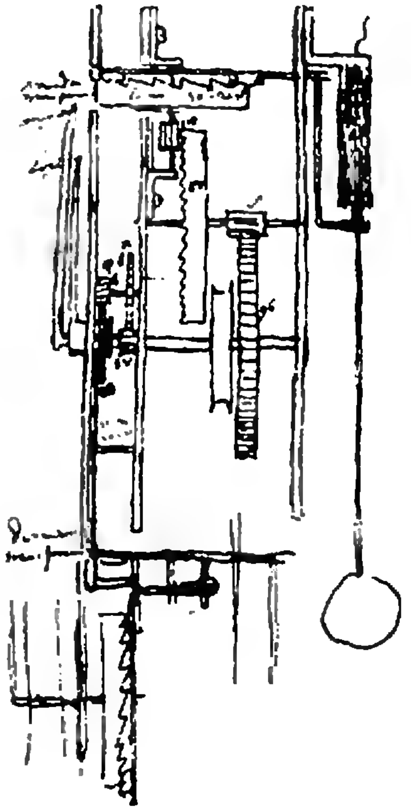
PARISIIS.

MDCLXXIII
CVM TRIVILEGIO REGIS

Титульный лист первого издания книги «Маятниковые часы»

Кроме того, Гюйгенс привел в порядок исследования по математике и механике, предпринятые в процессе работы над часами. Все это было подытожено в книге «Маятниковые часы», вышедшей в 1673 году в Париже. На титульном листе было написано: «Христиан Гюйгенс, сын Константина, из Зейлихема. Маятниковые часы, или Геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам. Париж. В типографии Ф. Мюге, печатника короля и светлейшего архиепископа, на улице Гитары, под вывеской трех волхвов. 1673. С привилегией короля». Книга Гюйгенса наряду с «Беседами» Галилея и «Математическими началами натуральной философии» Ньютона является одним из трех китов, на которых покоится механика XVII века.

В дальнейшем книга стала кратко называться «Маятниковые часы», но



Эскиз часов с циклоидальным маятником, сделанный Гюйгенсом.

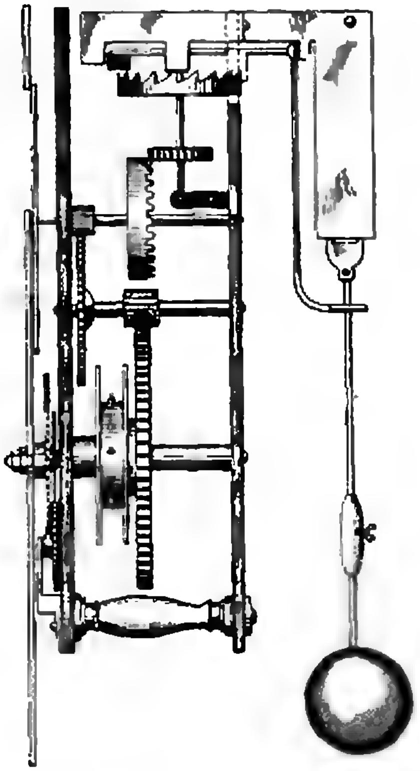


Схема часов.

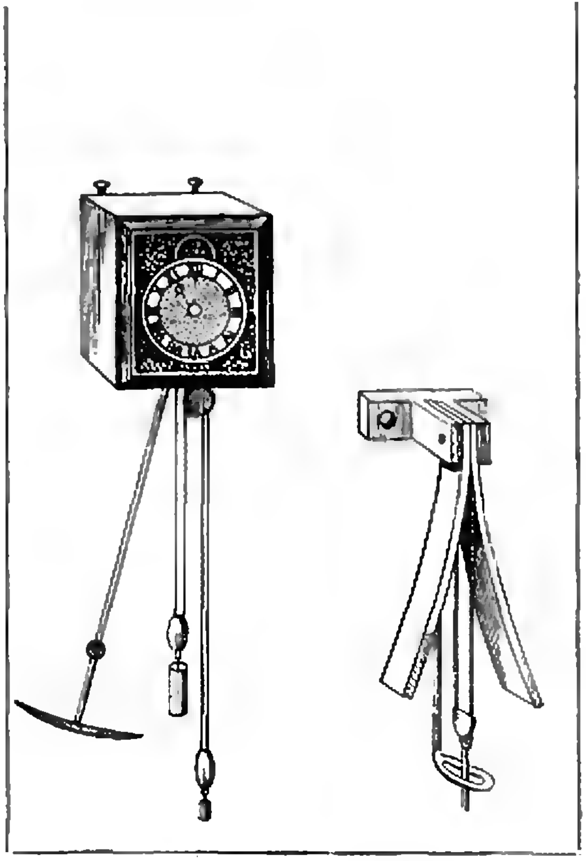
это название недостаточно полно отражает ее содержание. Собственно конструкция маятниковых часов описывается лишь в первой из пяти частей.

Своим главным достижением Гюйгенс считал изобретение циклоидального маятника. Во-первых, Гюйгенс доказал, что если конец маятника движется по циклоиде *) (а не по окружности, как в случае математического маятника), то его колебания изохронны. Во-вторых, он придумал очень остроумный способ подвески маятника, обеспечивающий движение его конца по циклоиде: поместил подвес между двумя пластинками (щеками), изогнутыми по циклоиде, на которые при отклонении маятника наматывается часть нити. Циклоидальному маятнику посвящена большая часть книги (вторая и третья части), где доказываются механические и математические утверждения, необходимые для обоснования изохронности циклоидального маятника и правила его подвески. Гюйгенс пишет: «Для проведения этих доказательств потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды».

Четвертая часть книги «О центре качания» начинается так: «Когда я был еще почти мальчиком [ему не было 17 лет. — *С. Г.*], ученейший муж Мерсенн задал мне и многим другим задачу — определить центр качания. Из писем, которые писал мне Мерсенн, а также из недавно опубликованных мемуаров Декарта, заключающих ответ на письма Мерсенна по этому поводу, я заключаю, что эта задача пользовалась в то время

---

*) Циклоиду описывает фиксированная точка границы круга, который катится без скольжения по прямой. Математики в XVII веке обнаружили много замечательных свойств, которыми обладает эта кривая.



Внешний вид часов с циклоидальным маятником и щеки, определяющие движение подвеса маятника.

известной славой среди математиков... Мерсенн назначил большую, вызывающую зависть премию на тот случай, если я решу задачу. Однако он тогда ни от кого не получил того, что требовал».

Речь шла о следующей задаче. Имеется физический маятник — фигура, подвешенная в одной точке и совершающая колебания. Его приведенной длиной называется длина математического маятника, имеющего тот же период колебаний. Проведем через центр тяжести маятника отрезок этой длины, начинающийся в точке подвеса. Тогда другой конец отрезка называется центром качания. (Мерсенн начинал с попытки ответить на вопрос, как надо бить мечом, чтобы удар был наиболее эффективен. Если считать меч отрезком, который «воин» держит за конец A, то оказывается, что центр качания отстоит от A на $\frac{2}{3}$ длины. Мерсенн считал, что оптимальная точка совпадает с центром качания и далека от центра тяжести.

Оппонент Мерсенна Бальди считал, что надо бить местом, наиболее близким к центру тяжести.) В задачах, предложенных Мерсенном Гюйгенсу, речь шла о центрах качания круговых секторов, сегментов, равнобедренных треугольников, по-разному подвешенных. Гюйгенс писал: «...я в то время не нашел, что позволило бы мне приступить к расчетам, и как бы повернул назад у самого порога, и воздержался от всякого исследования. Но и те, кто надеялись, что решили задачу, знаменитые люди, как Декарт, Оноре Фабри и другие, вовсе не достигли цели или достигли ее только в немногих, особенно простых случаях...

Повод к новой постановке опытов дали регулируемые маятники наших часов, снабженные, кроме нижнего постоянного груза, еще вторым подвижным грузиком, как сказано при описании часов.

Исходя из этого, я начал исследования сначала, на этот раз с лучшими видами на успех, и, наконец, одолел все трудности и решил не только все задачи Мерсенна, но нашел еще и новые задачи, более трудные, и, наконец, нашел общий метод для вычисления центров качания линий, площадей и тел. От этого я имел не только удовольствие, что я нашел нечто, что напрасно искали столь многие, и понял законы природы, относящиеся к этому случаю, но получил и определенную пользу, которая вообще заставила меня заняться этим вопросом, а именно, я нашел легкий и удобный способ регулировки часов». «Я нашел это правило в 1664 году», — отметил Гюйгенс на письме Мерсенна с постановкой задачи. Правило регулирования маятника с подвижным грузом он нашел еще раньше, в 1661 году.

Наконец, в пятой части без доказательства приводятся теоремы о

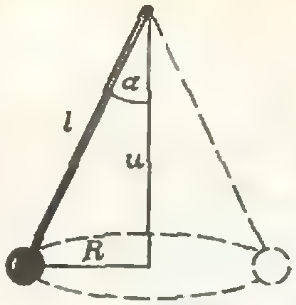


Рис. 1.

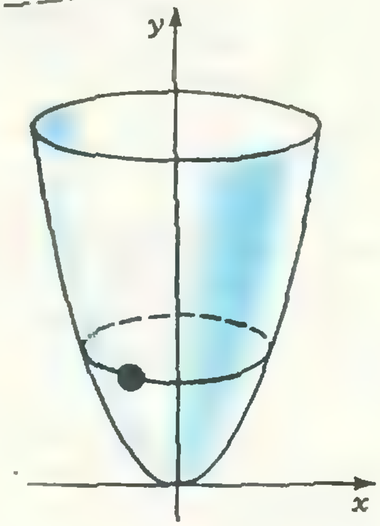


Рис. 2.

центробежной силе *) и описывается конструкция часов с коническим маятником (известно, что Гюйгенс изобрел их 5 октября 1659 года). Доказательства теорем содержатся в работе «О центробежной силе», написанной в 1659 году, но вышедшей в свет лишь через восемь лет после смерти Гюйгенса. О центробежной силе знал еще Аристотель, а Птолемей считал, что если бы Земля вращалась вокруг своей оси, то из-за центробежной силы предметы не могли бы удерживаться на ее поверхности. Кеплер и Галилей опровергали эту точку зрения, объясняя, что в этом случае вес уравновешивает центробежную силу, фактически предполагая, что при удалении от центра вращения центробежная сила уменьшается. Однако лишь Гюйгенс получил знаменитую формулу для центробежной силы $F_{\text{ц.б}} = \frac{mv^2}{R}$. Ниже приводится подлинный текст Гюйгенса и читатель сможет увидеть, в каком (быть может, не самом экономном с сегодняшней точки зрения) виде были впервые сообщены результаты, полученные Гюйгенсом. Для облегчения понимания сделаем два предварительных замечания.

1. Какой бы задачей Гюйгенс ни занимался, он всегда думал о возможных приложениях полученных результатов к часам. И в этом случае он хотел воспользоваться коническим маятником. Так называется нить с грузом, вращающаяся вокруг оси, проходящей через точку подвеса (рис. 1). Пусть l — длина нити, α — угол нити с вертикалью, R — расстояние от груза до оси. Если маятник движется по окружности, и угол α остается постоянным, то $\frac{mv^2}{R} = mg \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда $v = \sqrt{gR \operatorname{tg} \alpha}$. Для периода — времени одного оборота — получаем (поскольку $T = 2\pi R/v$):

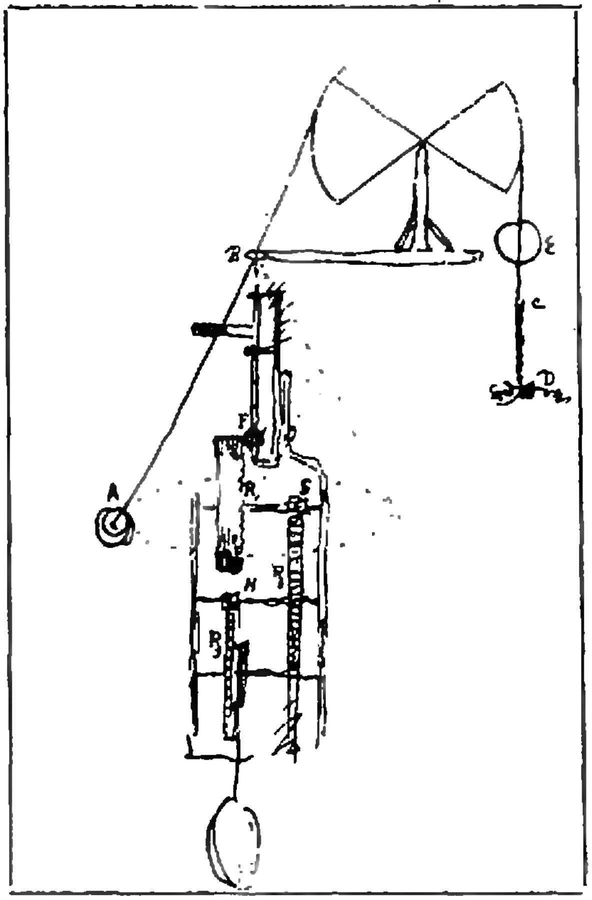
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \operatorname{ctg} \alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{u}{g}}. \qquad (1)$$

Здесь $u = l \cos \alpha$ — длина проекции нити на ось маятника.

В тексте Гюйгенса проводятся многочисленные обсуждения формулы для периода конического маятника. Движение конического маятника сравнивается с двумя движениями, которые к тому времени были основательно изучены: со свободным падением и колебаниями простого, или математического, маятника (Гюйгенс называет его колебания боковыми, в отличие от круговых колебаний конического маятника).

---

*) Гюйгенс всюду пользуется понятием центробежной силы инерции, которую он называет просто центробежной силой. Эта сила возникает во вращающейся системе отсчета. Она численно равна центростремительному ускорению тела, умноженному на его массу, и направлена по радиусу от оси вращения. Подробнее о силах инерции рассказывается в статье Я. А. Смородинского «Силы инерции» («Квант», 1974, № 8).



Эскиз часов с коническим маятником, сделанный Гюйгенсом.

2. Пусть имеется некоторая поверхность вращения (у Гюйгенса параболоид — поверхность вращения параболы $py = x^2$ вокруг оси y, рис. 2). Тяжелая материальная точка устойчиво вращается по горизонтальному сечению (кругу), если равнодействующая веса и центробежной силы направлена по нормали к поверхности (перпендикуляру к касательной плоскости), а потому здесь применима формула для конического маятника. В этом случае α — угол нормали с осью, l — длина отрезка нормали между осью и поверхностью, u — проекция этого отрезка на ось. Здесь переход от конического маятника к вращению тяжелой точки в какой-то мере аналогичен переходу Галилея от математического маятника к движению тяжелой точки по круговому желобу. Далее Гюйгенс замечает, что у параболы $py = x^2$ величина u (проекция отрезка нормали на ось) не зависит от положения точки и равна $\frac{p}{2}$. Отсюда он делает вывод, что период вращения тяжелой точки по любым горизонтальным сечениям параболоида один и тот же:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{2g}}. \qquad (2)$$

Это следует из (1) и дает новый способ получения изохронных колебаний, что так важно было при построении часов. Если подвесить конический маятник так, чтобы независимо от угла α наклона нити к оси его конец двигался по поверхности параболоида, полученного от вращения параболы $py = x^2$, то период вращения не будет зависеть от α. Другими словами, надо сделать так, чтобы при изменении α длина l изменялась, обеспечивая постоянство проекции u на ось. Гюйгенс придумал чрезвычайно остроумный способ подвески. Он предложил изготовить пластинку по форме полукубической параболы $y^2 = ax^3 + b$, закрепить в некоторой ее точке конец нити и тогда, оказывается, можно так подобрать a, b и длину нити, что как бы мы ни натянули нить, намотав часть ее на пластинку, другой ее конец будет находиться на параболе. Секрет этого остроумного способа подвески опирается на те же математические соображения, что и способ подвески циклоидального маятника.

Пятая часть «Маятниковых часов»,

содержащая другую конструкцию часов с использованием кругового движения маятников, и теоремы о центробежной силе

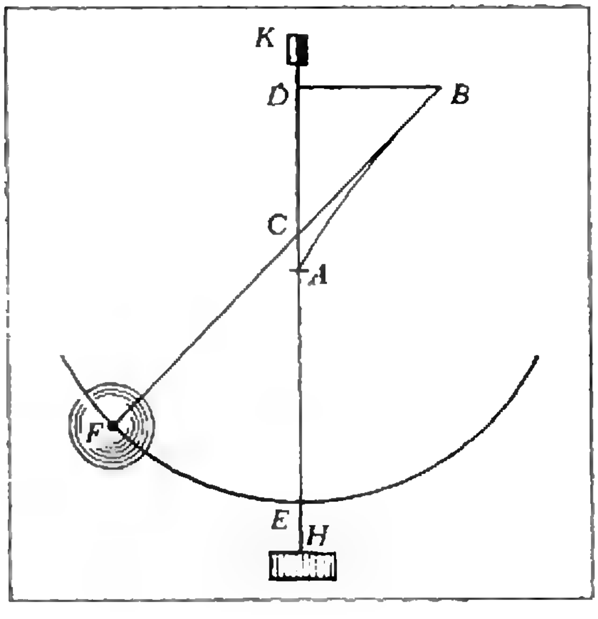
Х. Гюйгенс

...У меня было намерение издать описание этих часов вместе с теоремами, относящимися к круговому движению и к центробежной силе, как я хочу ее назвать. Но относительно этого предмета у меня больше материала, чем времени для его изложения в настоящий момент. Но для того чтобы лица, интересующиеся этим вопросом, быстрее познакомились с новым, отнюдь не бесполезным открытием, чтобы какая-либо случайность не помешала опубликованию, я, противно моему первоначальному предположению, присоединил еще и эту часть к предыдущим. В ней кратко описывается конструкция новых часов и далее следуют теоремы о центробежной силе; их доказательство откладывается на более позднее время.

КОНСТРУКЦИЯ ВТОРЫХ ЧАСОВ

Я не счел нужным изложить здесь распределение колес внутри часового механизма; это устройство легко могут осуществить часовщики в различных вариантах. Будет достаточным описать ту часть часов, которая регулирует их ход определенным образом.

Следующий рисунок изображает эту часть часов.



Ось **DH** следует представлять себе вертикальной, способной вращаться в двух подшипниках. В **A** к оси приделана пластинка, имеющая определенную ширину и искривленная по кривой **AB**, которая есть полукубическая парабола, при сматывании нити с которой и прибавлении некоторой длины описывается парабола **EF**, как доказано в теореме VIII третьей части. **AE** — длина, на которую надо удлинить нить; путем сматывания всей линии **BAE** и образуется парабола **EF**. **BCF** — нить, закрепленная на кривой **AB**, конец которой описывает параболу. К нити прикреплен груз **F**. Если ось **DH** вращается, тогда нить **BCF**, вытянутая в прямую, повлечет за собой груз **F**, который будет описывать горизонтальные круги. Эти круги будут больше или меньше, в зависимости от большей или меньшей силы, с которой действуют на ось колеса, вращающие барабан **K**. Но все эти круги будут лежать на параболическом коноиде и именно потому продолжительность одного оборота будет всегда одна и та же, как вытекает из того, что я объясню об этом движении впоследствии. Если оборот должен совершаться в полсекунды, то параметр параболы **EF** должен составлять $4\frac{1}{2}$ дюйма моего часового фута, то есть он должен быть равен половине длины маятника, у которого каждое колебание длится $\frac{1}{2}$ секунды. Из параметра параболы определяется параметр полукубической параболы; он равен $\frac{27}{16}$ первого параметра; определяется также отрезок **AE**, который равен половине длины параметра параболы **EF**. Если же оборот должен совершаться в секунду, то надо все длины брать в четыре раза больше, как параметры, так и длину **AE**.

ТЕОРЕМЫ О ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЕ, ВЫЗВАННОЙ КРУГОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ *)

I

Если два одинаковых тела в одинаковое время описывают неодинаковые окружности, то их центробежные силы относятся, как длины окружностей или как диаметры.

II

Если два одинаковых тела движутся с одинаковой скоростью по окружности разных кругов, то их центробежные силы обратно пропорциональны диаметрам.

III

Если два одинаковых тела движутся по одинаковым кругам с разной скоростью, но оба равномерно, как мы это

---

*) Примечания к тексту даны в квадратных скобках. В примечаниях используются следующие обозначения: m — масса тела, F — центробежная сила, T — период, R — расстояние до центра, v — скорость.

Маятниковые часы, экспонирующиеся в Москве в Политехническом музее.

здесь всегда подразумеваем, то их центробежные силы относятся, как квадраты скоростей.

IV

Если два одинаковых тела движутся по разным окружностям и обнаруживают одинаковую центробежную силу, то их *времена обращения относятся*, как корни квадратные из диаметров.

V

Если тело движется по окружности круга с той скоростью, которую бы оно приобрело, свободно падая с высоты $^1/_4$ диаметра круга, то испытываемая им *центробежная сила равна весу*, то есть оно тянет за нить, при помощи которой оно прикреплено к центру, с той же силой, как если бы было подвешено к нити.

[Если высота $H = R/2$, то для конечной скорости при свободном падении имеем: $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{Rg}$, а для указанной центробежной силы имеем:

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{mRg}{R} = mg.]$$

VI

Если тело пробегает различные горизонтальные окружности, которые все лежат на кривой поверхности параболического коноида (параболоида) с вертикальной осью, то время оборотов всегда одно и то же, будут ли круги больше или меньше, и это время обращения вдвое больше продолжительности колебания маятника, длина которого равна половине параметра образующей параболы.

Счастливые билеты

1. Назовем автобусный билет «счастливым», если сумма цифр его шестизначного номера записана двумя последними цифрами, взятыми в том же порядке. Например, счастливыми будут билеты с номерами 728124, 032419. Сколько счастливых билетов имеется в первом миллионе, то есть от номера 000 000 до 999 999?

Б. И. Алейников

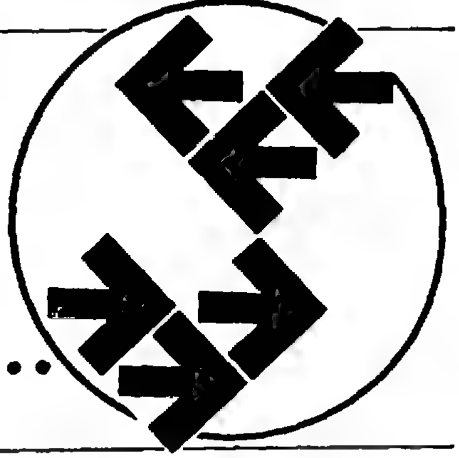
2. Шестизначный номер автобусного билета N запишем в виде $N = 1000A + B$, где A и B — трехзначные числа.

Назовем билет с номером N «дважды счастливым», если сумма цифр числа A равна сумме цифр числа B и произведение цифр числа A равно произведению цифр числа B. Существуют ли не тривиальные дважды счастливые билеты? *Тривиальными* мы назовем такие дважды счастливые билеты, у которых в номере N число B получается из A перестановкой цифр, а также билеты, в записи номера которых встречаются нули.

Г. К. Коротаев

М. Л. ГЕРВЕР

ОТ ПЕРЕМЕНЫ МЕСТ СЛАГАЕМЫХ...



О некоторых вещах в «Кванте» трудно рассказать не потому, что они трудны сами по себе, а потому, что для их понимания хорошо бы заранее знать кое-что помимо школьной программы. Иногда даже не помимо, а чуть глубже. Старшеклассники знают, например, что такое предел последовательности, но знают обычно довольно поверхностно. А именно этим материалом нужно свободно владеть, чтобы разобраться в предлагаемой статье, где доказывается замечательная теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

В «Кванте» № 3 за 1974 год мы предложили читателям 20 задач на пределы. Тот, кто справился с задачами, может смело приниматься за эту статью.

Впрочем, решив задачи, не откладывайте в сторону ручку и бумагу: основной текст статьи содержит многочисленные упражнения; лишь самостоятельно решив их, вы сможете по-настоящему во всем разобраться.

Сумма ряда

Начнем с очень простых упражнений.

1. а) Найти сумму S_n первых n членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad \dots \qquad (1)$$

б) То же для прогрессии

$$\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad -\frac{1}{16},\quad \dots \qquad (2)$$

Ответ: а) $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$; б) $S_n = \frac{1}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

2. Найти суммы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ бесконечно убывающих геометрических прогрессий (1) и (2).

Ответ: $S^{(1)} = 1$, $S^{(2)} = \frac{1}{3}$.

Суммы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ можно найти, используя готовую формулу $S = \frac{b_1}{1-q}$ (где b_1 — 1-й член, а q — знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии):

$$S^{(1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Можно поступить иначе, воспользовавшись упражнением 1. Найдем, например, этим способом $S^{(1)}$. При $n = 1, 2, 3 \dots$ получаем частичные суммы:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2},\quad S_2 = 1 - \frac{1}{2^2},$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2^3},\quad \dots,\quad S_n = 1 - \frac{1}{2^n},\ \dots \qquad (3)$$

Последовательность (3) *стремится к пределу* $S^{(1)} = 1$. Этот предел по определению называется *суммой прогрессии* (1).

Приведенные два решения, по сути дела, не различаются: формула $S = \frac{b_1}{1-q}$ получается из формулы

$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, именно предельным переходом. Мы привели второе решение просто чтобы напомнить определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. А это нам понадобилось для того, чтобы дать следующее общее определение.

Определение. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ имеет специальное название: *ряд*. Образуем последовательность *частичных сумм*:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = S_{n-1} + a_n, \ldots$$

Если эта последовательность имеет предел S, то говорят, что *ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится, а его сумма равна числу S, и пишут:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S.$$

Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ не сходится, то он называется *расходящимся*.

Упражнения

3. Приведите примеры расходящихся рядов:

а) придумайте ряд, частичные суммы которого стремятся к бесконечности;

б) придумайте ряд, для которого последовательность частичных сумм не стремится ни к какому числу и не стремится к бесконечности.

4. Докажите, что ряд

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

сходится. Сумма его — знаменитое число e *) (основание натуральных логарифмов). Докажите, что $2 < e < 3$. Докажите, что e — иррациональное число.

5. Докажите, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

сходится, и его сумма $S < 2$. При каких натуральных k сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots ?$$

Указание. Если все члены ряда положительны (как в упражнениях 4 и 5), то, чтобы доказать сходимость ряда, достаточно проверить, что все частичные суммы меньше некоторого (одного и того же) числа C; тогда сходимость последовательности частичных сумм следует из того, что *любая возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

6. Сходится ли ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots ?$$

Можно ли порознь суммировать положительные и отрицательные слагаемые?

Вы уже нашли сумму ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots$$

(она равна $\frac{1}{3}$). А можно ли было вычислять ее так: просуммировать сначала все положительные члены ряда, потом все отрицательные, а затем сложить результаты?

Почему бы и нет? Попробуем:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \ldots = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{3},$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ, во всяком случае, получается правильный. Спрашивается: всегда ли так можно действовать?

Упражнения

7. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится. Его сумма равна S. Можно ли вычислить ее так: сначала просуммировать все положительные слагаемые a_n, потом — все отрицательные, а затем сложить результаты?

8. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится. Его сумма равна S. Дано, что если просуммировать все положительные слагаемые a_n, то получится число p, а если просуммировать все отрицательные слагаемые a_n — число q. Можно ли утверждать, что $p + q = S$?

---

*) См. статью Л. Г. Лиманова «О числе e и $n!$», «Квант», 1972, № 5.

Замечание. Упражнения 7 и 8 внешне очень похожи. А вот ответы к ним — разные!

Можно ли переставлять члены ряда?

Выпишем все натуральные числа, но не в обычном, а в каком-нибудь другом порядке. Например, так:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4,\ 7,\ 9,\ 11,\ 6,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 8, \ldots \qquad (4)$$

(нечетное — четное, два нечетных — четное, три нечетных — четное и так далее). Каждое натуральное число выписывается ровно один раз — всякое n рано или поздно встретится, и никакое n не повторяется дважды.

Переставим члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ в соответствии с новым порядком номеров: например, для последовательности (4) получится ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_4 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_6 + a_{13} + a_{15} + a_{17} + a_{19} + a_8 + \ldots$$

Можно ли утверждать, что новый ряд сходится, если исходный сходился? Обязаны ли оба ряда иметь одинаковые суммы?

С детства мы усвоили премудрость: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется». Распространяется ли этот закон с конечных сумм на бесконечные ряды?

Поэкспериментируем. Возьмем ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}_{2n \text{ слагаемых}} + \cdots \qquad (5)$$

Он, очевидно, сходится; его сумма равна нулю. Переставим его члены так, чтобы их номера образовали последовательность (4); получим ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} + a_{2n} + \ldots \qquad (6)$$

Ряд (6) расходится! В самом деле, в (6) в каждой группе идущих подряд положительных слагаемых сумма членов равна 1; все отрицательные члены, начиная с a_4, по абсолютной величине не превосходят $\frac{1}{2}$, и лишь $a_2 = -1$, поэтому частичная сумма, содержащая слагаемое a_{2n}, заведомо не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$. Таким образом, частичные суммы ряда (6) стремятся к бесконечности.

Итак, переставив члены сходящегося ряда (5), мы получили расходящийся ряд (6).

Упражнения

9. Можно ли так переставить члены ряда (2), чтобы получился расходящийся ряд?

10. Можно ли так переставить члены какого-нибудь сходящегося ряда, чтобы получился:

а) расходящийся ряд, частичные суммы которого не стремятся ни к какому числу и не стремятся к бесконечности?

б) сходящийся ряд с другой суммой?

Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Делая упражнения 5 и 6, вы должны были установить, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

(он называется *гармоническим*) расходится, а ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$$

сходится. Таким образом, бывает, что ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (7)$$

сходится, а ряд

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \qquad (8)$$

расходится; в этом случае ряд (7) называется *условно сходящимся*. Бывает, что и ряд (7), и ряд (8) сходятся (с этим мы встречались на примере прогрессий (1) и (2)); в этом случае ряд (7) называется *абсолютно сходящимся*.

Упражнения

11. Может ли быть так, что ряд (8) сходится, а ряд (7) расходится?

12. Как сходится ряд (5) — условно или абсолютно?

13. Докажите, что ряд из упражнения 8 сходится абсолютно.

14. Что получится, если сумму ряда (5) вычислять по рецепту, предложенному в упражнении 7?

15. Докажите, что сумму абсолютно сходящегося ряда можно вычислять по рецепту, указанному в упражнении 7.

16. Докажите следующую теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. *Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ абсолютно сходится. Произвольно переставим его члены. Тогда новый ряд тоже абсолютно сходится, и суммы обоих рядов одинаковы.*

Теорема Римана

Переставляя члены любого условно сходящегося ряда, можно получить расходящийся ряд и можно получить сходящийся ряд, сумма которого равна произвольному заранее заданному числу.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится условно, то ряд, составленный из его положительных членов, расходится, и ряд, составленный из отрицательных членов, тоже расходится.*

Упражнения

17. Докажите эту лемму (вспомните упражнения 8, 13 и 15).

18. Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ — сходящийся ряд. Докажите, что тогда последовательность $\{a_n\}$ стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Доказательство теоремы Римана

А. Укажем, как нужно переставлять члены ряда $a_1 + a_2 + \ldots$, чтобы получить расходящийся ряд, частичные суммы которого стремятся к бесконечности.

Сначала будем выписывать только положительные члены ряда — до тех пор, пока их сумма не станет больше 1 (по лемме это возможно). Затем выпишем первый отрицательный член. Далее снова будем выписывать положительные члены, пока сумма всех выписанных чисел не превзойдет 2. Потом выпишем второй отрицательный член. И так далее.

На n-м этапе выписывается столько положительных членов, сколько нужно, чтобы сумма всех выписанных чисел стала больше n (по лемме это можно сделать), затем к ним добавляется n-й отрицательный член.

Пример. Если проделать это с рядом (5), то получится ряд, начало которого выглядит так:

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \ldots$$

Согласно упражнению 18 общий член ряда a_n стремится к нулю. Значит, найдется такое N, что $|a_n| < 1$ при всех $n \geqslant N$. Следовательно, на N-м этапе (после добавления N-го отрицательного члена ряда) сумма всех выписанных членов окажется больше $N - 1$, на $(N+1)$-м этапе сначала (пока выписываются положительные члены) сумма растет, потом (при добавлении $N+1$-го отрицательного члена ряда) она уменьшается, но остается больше N, и так далее. Частичные суммы нового ряда стремятся к бесконечности.

Замечание. Чтобы последовательность частичных сумм не стремилась ни к какому числу и не стремилась к бесконечности, можно, например, поочередно выписывать группы из положительных и отрицательных членов a_n так, чтобы сумма выписанных чисел становилась попеременно то больше 1, то меньше -1.

Б. Укажем теперь, как нужно переставлять члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, чтобы новый ряд оказался *сходящимся* к заранее заданной сумме S.

Сначала будем выписывать только отрицательные члены ряда, пока сумма всех выписанных чисел не станет меньше S; потом добавим один или несколько положительных членов, чтобы вся сумма стала больше S.

Продолжим выписывать отрицательные члены, пока сумма всех выписанных членов не станет опять меньше S; как только это произойдет, добавим вторую группу положительных членов, так чтобы вся сумма превзошла S, и так далее.

На n-м этапе выписывается очередная группа отрицательных членов (пока сумма всех выписанных чисел не станет меньше S), а затем очередная группа положительных членов (пока вся сумма не станет больше S). По лемме членов каждого знака «хватит».

По построению частичные суммы нового ряда ведут себя так: убывают, пока не станут меньше S, и тут же начинают расти, пока не станут больше S; снова убывают и так далее. Всякий раз «перескок» через S обеспечивается добавлением одного единственного члена. Тем самым, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, отклонения частичных сумм от S тоже стремятся к нулю, то есть новый ряд сходится к S, что и требовалось доказать.

Пример. Ряд

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\ldots-\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}-\ldots-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}_{2^n\ \text{слагаемых}}-\ldots$$

сходится к нулю. Переставим его члены так, чтобы их номера образовали последовательность 1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, 6,... (два нечетных — одно четное). Получим ряд $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\ldots$, который сходится к $-\frac{1}{2}$; это сразу становится ясно, если расставить скобки следующим образом:

$$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Аналоги и обобщения

Осторожнее со скобками! В последнем примере мы расставили скобки, чтобы убедиться, что ряд сходится к $-1/2$. В данном случае мы действовали правильно (это легко обосновать), но вообще расставлять скобки нужно с осторожностью. Простейший пример: расходящийся ряд $1-1+1-1+\ldots$ после следующей расстановки скобок

$$(1-1)+(1-1)+\ldots \qquad (9)$$

превращается в ряд, сходящийся к нулю.

Этот пример не слишком интересен. Большего внимания заслуживает такой факт: *существуют расходящиеся ряды, которые при подходящей расстановке скобок становятся сходящимися к любому заранее заданному числу.*

Упражнение 19. а) Приведите пример ряда, обладающего только что указанным свойством.

б) Докажите, что любой ряд, полученный из *сходящегося* расстановкой скобок, сходится, и имеет такую же сумму, как исходный ряд.

в) Пусть S_n — частичные суммы расходящегося ряда $a_1+a_2+a_3+\ldots$, который получен перестановкой членов из некоторого условно сходящегося ряда. Пусть $a<b$ — предельные точки последовательности $\{S_n\}$ *), и пусть S — произвольная точка отрезка $[a, b]$: $a\leqslant S\leqslant b$. Докажите, что тогда существует расстановка скобок, при которой ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$ становится сходящимся к S.

Чего можно добиться, меняя знаки. Пусть $a_1+a_2+a_3+\ldots$ — произвольный условно сходящийся ряд. Разрешим поменять знаки у части членов a_n (оставив остальные a_n без изменения). Другими словами, разрешим заменить ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$ рядом $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots$, где $|b_n|=1$.

Упражнение 20. Докажите, что для любого числа S и для любого условно сходящегося ряда $a_1+a_2+a_3+\ldots$ можно так подобрать числа $b_1, b_2, b_3, \ldots$

---

*) Определение предельной точки см. «Квант», 1974, № 3, с. 30

(где $|b_n| = 1$), чтобы ряд $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots$ сходился к S.

Переставляем только отрицательные члены. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ условно сходится. *Разрешим* переставлять между собой только отрицательные члены a_n (оставляя все положительные члены a_n на их первоначальных *местах*).

Упражнение 21

а) Может ли при указанных перестановках ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ стать расходящимся?

б) Всегда ли можно с *помощью таких* перестановок сделать его сходящимся к *произвольно заданной* сумме S?

в) К каким суммам можно заведомо заставить его сходиться такими перестановками?

Комплексный вариант теоремы Римана. До сих пор мы считали члены ряда a_n произвольными действительными числами. Разрешим им теперь принимать любые комплексные значения.

Упражнения

22. Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ (a_n — комплексные) сходится к сумме Z_1, и пусть его члены можно переставить так, чтобы новый ряд сходился к сумме Z_2. Возьмем на прямой, проходящей *через* Z_1 *и* Z_2, произвольное Z. Докажите, что можно так переставить члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, чтобы сумма *полученного* ряда оказалась *равной* Z.

23. Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ — произвольный сходящийся ряд из комплексных чисел. Рассмотрим всевозможные сходящиеся ряды, получающиеся из него перестановкой членов a_n, и отметим на комплексной плоскости все числа Z, которые служат *суммами* рассматриваемых рядов. Докажите, что возможны только три случая:

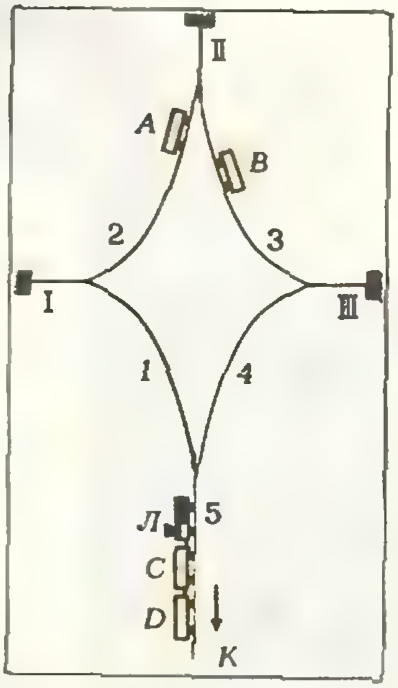
а) отмеченной *окажется одна* единственная точка Z,

б) отмеченными окажутся все точки некоторой *прямой*,

в) отмечены будут все числа Z (то есть все точки комплексной плоскости).

Маневры

Со станции K на путь 5 (см. рисунок) *прибыл* маневровый локомотив $Л$ с вагонами C и D. На путях 2 и *3 стоят порожние* вагоны A и B. Требуется с помощью локомотива $Л$ поставить вагон C на путь 2, вагон D — на путь 3, а вагоны A и B во главе с локомотивом поставить на путь *5* для отправления на станцию K.



При маневрах вагоны *можно прицеплять* к локомотиву с любой стороны. Вместимость путей *1—5* не ограничена, а в тупики *I—III* помещается только один вагон или локомотив. За какое наименьшее число операций можно произвести требуемые маневры? *Операцией* мы будем считать перестановку одного *или нескольких вагонов* с одного пути (тупика) на другой путь (тупик). Холостые *рейсы* локомотива операцией не считаются.

И. В. Грессерман

Я. Е. ГЕГУЗИН

КАПЛЯ

Три коротеньких очерка о капле — это малая малость того, что можно о ней рассказать. Ее пристально изучают и физики, и математики, и биологи, и метеорологи, и даже медики, интересуясь состоянием крови больного, придумали метод «капельной пробы». Кое-что о капле я рассказал в недавно вышедшей книге*). Если читатели «Кванта» попристальнее присмотрятся к каплям, они увидят много неожиданного и интересного. Капля достойна внимания жаждущих знать и любящих природу.

Раздавленная капля

Аналогия рождается на перекрестках памяти и раздумий и иногда связывает воедино образы и события, состоящие в очень дальнем родстве. Неожиданная аналогия, даже отдаленная или поверхностная, родившаяся вовремя, может помочь исследователю выйти из тупика и осветить путь к решению.

Когда-то, в конце 40-х годов, я участвовал в экспериментальной работе. Ее цель заключалась в определении физических характеристик вещества, которое ранее не исследовалось. Ранее этого вещества в чистом виде просто не было — ценой больших усилий его получили химики.

На первый взгляд, задача совсем не новая, и решать ее следует, двигаясь путями, проторенными многими исследователями, изучавшими физические характеристики других веществ. Наша задача, однако, была усложнена тем, что экспериментировать мы могли лишь с микроскопическими крупинками. Каждая крупинка весила около одной миллионной грамма, а размер ее — несколько десятков микрон. Количеством крупинок мы были очень ограничены — химики их добывали с трудом.

Группа, в которой я работал, должна была определить температуру плавления и поверхностное натяжение вещества в жидкой фазе.

В обычном «макроскопическом» эксперименте температура плавления измеряется легко и просто: в образец погружают термометр и следят за тем, как меняются его показания по мере нагрева образца. Температура постепенно возрастает. Когда она достигнет некоторого значения, ее рост приостановится в связи с тем, что тепло, притекающее к образцу, начнет расходоваться не на нагрев, а на процесс расплавления. Эта температура и является температурой плавления. Когда же масса крупинки — одна миллионная грамма, термометр внедрить в нее невозможно, и для определения температуры плавления следует искать обходные пути.

---

*) Я. Е. Гегузин. Капля. М., «Наука», 1973. Рассказ об этой книге вы найдете в конце журнала в разделе «Рецензии, библиография».

Один из участников нашей группы, у которого за плечами были годы работы в литейном цехе, предложил совсем неожиданное решение задачи. Его память хранила воспоминание, родившее аналогию. В годы войны, — сказал он, — я вел плавку *одновременно в нескольких* одинаковых тигельных электропечах. Загружал их алюминиевыми чушками и, чтобы определить начало расплавления шихты в печи, не забираясь на ее загрузочную площадку, в каждую печь между чушками вертикально устанавливал длинный металлический стержень, который был виден над печью. В момент начала плавления стержень наклонялся — это служило сигналом.

*Это воспоминание под*сказало идею, с помощью которой можно было измерить температуру плавления крупинки. Опыт заключался в следующем. На тщательно отполированной пластинке кварца располагалась крупинка. Сверху ее накрывали другой пластинкой кварца, которая, касаясь крупинки, образовывала некоторый угол с первой пластинкой. Это устройство нагревали, и в тот момент, когда крупинка *расплавлялась, верхняя пластинка* раздавливала образовавшуюся каплю и угол между пластинками скачкообразно уменьшался. Чтобы надежнее этот момент зарегистрировать, на внешнюю поверхность верхней пластинки нанесли зеркальное покрытие и следили за тем, как отражаемый от нее луч скачком смещается. Пластинка, меняющая свое положение, была подобна металлическому стержню, который *наклонялся, свидетельствуя* о начале процесса плавления. Так как масса крупинки пренебрежимо мала по сравнению с массой кварцевых пластинок, между которыми она зажата, температура крупинки равна температуре пластинок и, следовательно, измерить ее весьма просто.

В описанном опыте, вопреки известной пословице, нам удалось поймать двух зайцев: определить, *во-первых*, температуру плавления, и, во-вторых — величину поверхностного натяжения расплавленного вещества. Дело в том, что верхняя пластинка, раздавливая своей тяжестью каплю, превращала ее в лепешку определенной толщины. Сколько бы раз ни повторялся опыт по расплавлению одной и той же крупинки, образовавшаяся жидкая капля весом пластинки расплющивалась до одной и той же толщины h. Эту величину можно было уменьшить, увеличивая вес верхней пластинки. Легко понять, что дальнейшему расплющиванию препятствуют силы поверхностного натя*жения*, приложенные к той части поверхности расплющенной капли, которая граничит с воздухом. В наших опытах вещество капли практически не смачивало кварц (именно поэтому опыты и ставились с кварцевыми пластинками) и, следовательно, можно считать, что радиус закругления свободной поверхности $r = \frac{h}{2}$.

Величина поверхностного натяжения α может быть определена из условия равенства давления, которое оказывает пластинка на жидкую каплю ($P_{\text{п}}$), и лапласовского давления ($P_{\text{л}}$) — избыточного давления, обусловленного искривленностью свободной по*верхности капли*. Если пластинка давит на каплю с силой F, а площадь ее контакта с расплющенной каплей πR^2, то $P_{\text{п}} = \frac{F}{\pi R^2}$. Величина $P_{\text{л}} = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{h}$. Приравнивая $P_{\text{п}}$ к $P_{\text{л}}$, находим формулу, с помощью которой можно определить величину поверхностного натяжения вещества:

$$\alpha = \frac{Fh}{2\pi R^2}.$$

Величины h и R можно измерить с большой точностью, а силу F легко определить, зная вес верхней пластинки.

Способ решения стоявшей перед нами задачи, который подсказала возникшая вдруг аналогия, конечно же, был не единственно возможным. Видимо, можно было придумать и иные приемы, но нас привлекла в нем неожиданность аналогии и... возможность опровергнуть пословицу о двух зайцах.

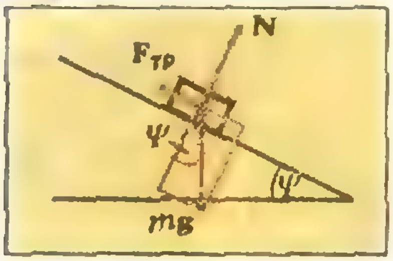
ДОЖДЬ НА ОКОННОМ СТЕКЛЕ

Если посмотреть во время дождя на окно, можно заметить, что дождевые капли, ударяясь *об оконное стекло*, часто не прилипают к нему. Они сначала движутся в направлении их свободного полета, а потом начинают ползти отвесно вниз. Очень часто движущаяся капля оставляет за собой влажный след. Со временем он распадается на капельки, которые оказываются столь малыми, что вначале покоятся, как бы приклеенные к стеклу. Но вскоре случайная дождевая капля покрупнее столкнется с одной из них, *за-*

хватит ее и вместе с ней поползет отвесно по стеклу, оставляя за собой новый след.

В этом явлении многое нуждается в объяснении. Почему одни капли ползут, а другие застывают, приклеившись к стеклу? Почему остается за каплей след? И всегда ли он остается?

Прежде чем объяснить, что происходит с дождевой каплей на отвесном оконном стекле, рассмотрим поведение капли на гладкой поверхности твердого тела, которая с горизонтом образует некоторый угол ψ. Если бы на гладкой поверхности располагалась не жидкая капля, а, скажем, твердый кубик, происходило бы следующее. До некоторого значения угла ψ кубик по поверхности не двигался бы, а затем, при дальнейшем увеличении угла, он начал бы скользить по поверхности. Об этом подробно рассказывают в школе на уроках физики, говоря, что на кубик действуют три силы: сила тяжести mg, сила реакции опоры $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. Будет или не будет скользить кубик по наклонной плоскости, зависит от соотношения между величинами силы трения и проекции силы тяжести на направление возможного движения кубика ($mg \sin\psi$):

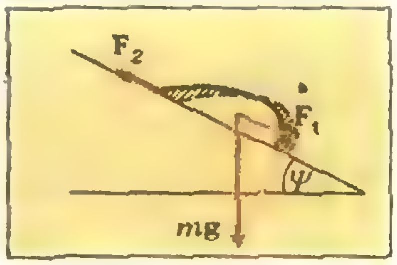


С увеличением угла ψ сила трения уменьшается (так как $F_{\text{тр}}$ пропорциональна N, а N уменьшается при увеличении угла ψ), а величина проекции силы тяжести растет.

Начиная с некоторого значения ψ (при котором $mg \sin\psi = F_{\text{тр}}$) при дальнейшем увеличении угла кубик начинает скользить.

Теперь вернемся к капле. Схематически здесь все так же, как в случае твердого кубика: есть сила тяжести, есть и сила, подобная силе трения, только в случае капли эта сила отличается некоторой особенностью, так как капля не скользит, а переливается по поверхности. По наклонной поверхности жидкая капля перемещается подобно гусенице. В тыльной части капли жидкость отрывается от поверхности и перетекает в лобовую часть. В этом процессе любой участок жидкости, контактирующий с поверхностью, со временем оказывается перед необходимостью оторваться от нее. Сила, которая для этого необходима, и является аналогом силы трения, действующей, когда твердый кубик скользит по твердой поверхности.

Чтобы понять, что же происходит на оконном стекле во время дождя, надо определить две конкурирующие силы: проекцию силы тяжести на направление, образующее с горизонтом угол ψ (F_1), и силу, необходимую для отрыва жидкости от твердой поверхности (F_2) в области тыльной части движущейся капли:



Сила F_1 с углом ψ связана очевидным соотношением: $F_1 = mg \sin\psi$ (m — масса капли).

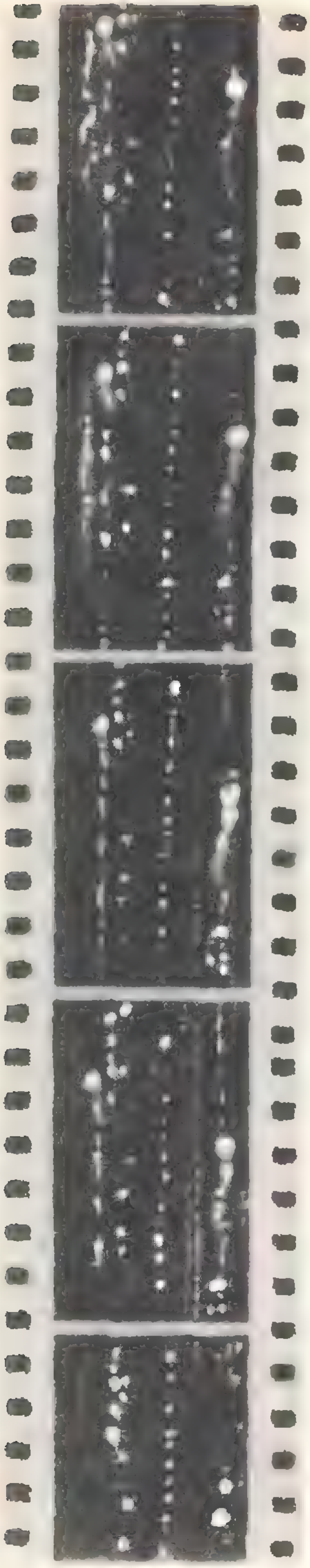
Происхождение силы F_2 связано с тем, что жидкость и твердое тело, на поверхности которого она находится, притягиваются друг к другу силами молекулярного взаимодействия. Это взаимодействие количественно можно охарактеризовать той энергией, которую необходимо затратить, чтобы отделить жидкость от твердой поверхности по площади контакта 1 $см^2$. До отрыва энергия, связанная с границей жидкость — твердое тело, равнялась $\alpha_{\text{жт}}$. После отрыва жидкости от твердого тела образуются две поверхности: одна из них — свободная поверхность жидкости с энергией $\alpha_{\text{ж}}$, вторая — свободная поверхность твердого тела с энергией $\alpha_{\text{т}}$. Таким образом, интересующая нас энергия отрыва в расчете на 1 $см^2$ равна

$$\Delta\alpha = \alpha_{\text{т}} + \alpha_{\text{ж}} - \alpha_{\text{жт}}.$$

Имея в виду каплю, которая с поверхностью твердого тела соприкасается по кругу диаметра $2R$, величину силы F_2 можно вычислить, следуя очевидной логике. Мысленно сместим каплю как целое на некоторое расстояние x. При этом будет выполнена работа (или затрачена энергия), равная произведению площади, на которой жидкость оторвалась от твердого тела, на величину $\Delta\alpha$. Легко сообразить, что эта площадь равна $2Rx$ и, следовательно, выполненная работа $A = 2R\Delta\alpha x$. А так как работа равна произведению силы F_2 на путь x, то $F_2 = 2R\Delta\alpha$. Может возникнуть вопрос: почему учитывается затрата энергии на отрыв тыльной части капли от поверхности твердого тела и не учитывается выигрыш энергии вследствие «набегания» лобовой части капли на эту поверхность? Дело в том, что энергия, выигранная при «набегании», не используется для облегчения отрыва. Она просто рассеивается, быть может, чуть-чуть нагревая каплю. (Идущему по болоту не легче вытаскивать правую ногу из трясины из-за того, что левая в это время легко туда проваливается.)

Чтобы капля поползла по наклонной поверхности, необходимо выполнение условия: $F_1 > F_2$, или $mg \sin\psi > 2R\Delta\alpha$.

Учтя, что оконное стекло наклонено по отношению к линии горизонта под углом $\psi = 90°$, — а это означает, что $\sin\psi = 1$, — легко придем к заключению, что по стеклу поползут лишь те



капли, масса которых удовлетворяет условию:

$$m > \frac{2R\Delta\alpha}{g}.$$

Для простоты предположим, что на поверхности горизонтально расположенного стекла капля имеет форму полусферы. Тогда

$$m = \frac{2}{3}\pi R^3\rho \approx 2R^3\rho$$

(ρ — плотность жидкости капель). Имея это в виду, из предыдущего соотношения легко получим следующий результат: по поверхности оконного стекла поползут капли, радиус которых удовлетворяет условию:

$$R > \left(\frac{\Delta\alpha}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Изложенные соображения и простые формулы дают возможность понять многое из того, что происходит во время дождя на оконном стекле. Во-первых, становится ясным, что движущаяся капля будет за собой оставлять след при условии, если величина $\Delta\alpha > 2\alpha_{\text{жк}}$. В этом случае капле выгоднее смещаться по оставляемому на стекле жидкому слою, чем оголять твердую поверхность. Величину $\Delta\alpha$ мы сравниваем с величиной $2\alpha_{\text{жк}}$ потому, что при отрыве жидкой капли от жидкого слоя образуются две поверхности жидкости. Если же величина $\Delta\alpha$ окажется меньше, чем $2\alpha_{\text{жк}}$, капли будут скатываться по стеклу, не оставляя за собой влажного следа.

На сухом, точнее, на почти сухом стекле окна капли оставляют след. Это означает, что в последней формуле вместо $\Delta\alpha$ мы можем писать $2\alpha_{\text{жк}}$. Для воды $\alpha_{\text{жк}} \approx 70$ *дин/см*, и поэтому по оконному стеклу будут скатываться капли, радиус которых больше 0,35 *см*. Посмотрите во время дождя на окно и вы убедитесь, что дело именно так и обстоит.

Очень много любопытного в поведении дождинок на оконном стекле связано с тем, что все время на нем появляются новые капли. Некоторые из них — новые дождевые капли, а некоторые — маленькие капельки, возникшие из распадающегося следа, оставляемого движущимися большими каплями.

Описать словами, что происходит на оконном стекле с дождинками — затея невероятно трудная: никакими словами не передать огромного разнообразия происходящих событий. В лаборатории мы сняли об этом фильм. И назвали его так же, как называется этот очерк, «Дождь на оконном стекле». Чтобы отчетливее запечатлеть все происходящее, устроили «чернильный» дождь: воду слегка подкрасили чернилами и направили капли на вертикально стоящее стекло.

Кинокадры выразительнее слов, и поэтому без дополнительных комментариев к очерку прилагается кинограмма.

ВЕСЕННЯЯ КАПЕЛЬ

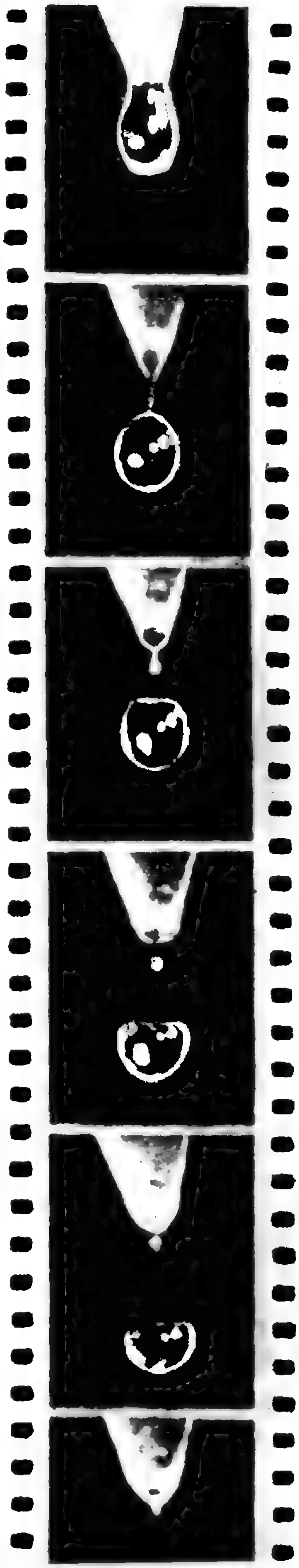
Много физических явлений связано с весенней капелью. Например, можно бы рассказать о закономерностях образования изумительной по совершенству и красоте «каплевидной» формы капли, готовящейся оторваться от тающей сосульки. Не могу объяснить почему, но форма набухающей капли мне представляется верхом геометрического совершенства. Разве лишь сфера может сравниться с ней по красоте и логической законченности формы. Можно бы рассказать о солнечных бликах, живущих на поверхности капли, которая набухает на кончике сосульки. Блики колеблются в ритме дыхания набухающей капли. Можно рассказать о весеннем звоне, который, по мысли поэта, сопровождает полет сосульки из зимы в весну. Звон капели звучит во многих стихотворных и музыкальных строчках, и, конечно же, следовало бы рассказать об акустике удара капли о поверхность воды или льда, покрытого водяным слоем. Капля разбивается на мелкие осколки, и каждый из осколков вносит свое звучание в весенний звон.

Много физических явлений связано с весенней капелью, и здесь рассказ лишь об одном из них — о том, что происходит в тот момент, когда набухшая капля отрывается от родившей ее сосульки. Обычно глаз этого явления не замечает, точнее, в глаза оно не бросается. А кинокамера помогла сделать его зримым, очевидным.

Перед нами две кинограммы, смонтированные из кадров ленты, на которую был заснят процесс отрыва капли от двух различных сосулек, одна из которых — поострее, а другая — потупее. Первые кадры на этих кинограммах практически одинаковы. Они рассказывают о том, что набухающая капля увеличивает свой объем и, двигаясь по направлению к земле, вытягивает тонкую перемычку — связующее звено между сосулькой и каплей. Затем капля от перемычки отрывается и свободно падает, а оставшаяся перемычка начинает изменять свою форму. Она укорачивается, утолщается в нижней части и в виде сформировавшейся капельки отрывается от сосульки. Итак, рождению каждой крупной капли сопутствует рождение еще одной маленькой капельки. Ее объем существенно, приблизительно в 100 раз, меньше объема первой капли, и, как правило, глаз ее не замечает.

Судьба маленькой капли оказывается очень неожиданной. Возникнув, она не летит вслед за падающей большой, а, наоборот, начинает двигаться вверх, по направлению к сосульке. Иногда это движение оканчивается тем, что малая капля достигает сосульки и как бы поглощается ею, а иной раз, немного переместившись вверх, она летит вниз вслед за большой.

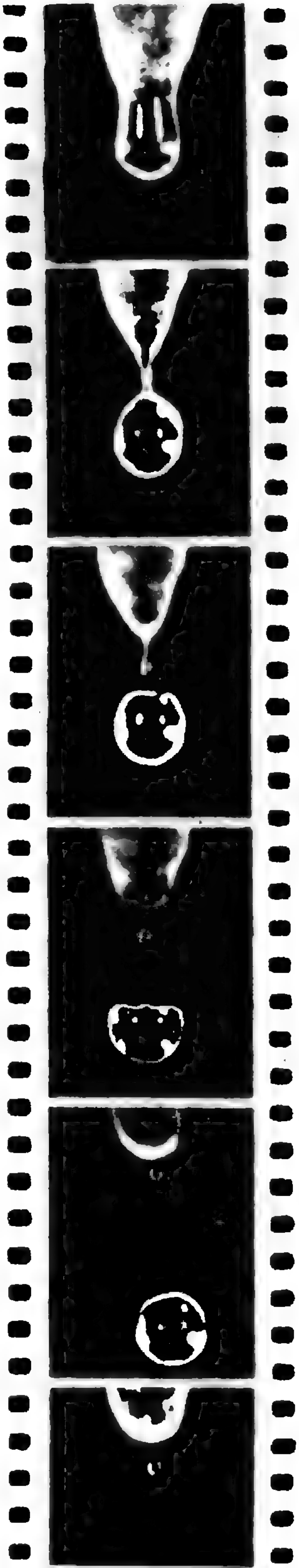
Участь маленькой капли зависит от того, какой толщины была перемычка, превратившаяся в капельку, а толщина перемычки зависит от того, насколько остра тающая сосулька. Капельки, возвращающиеся в сосульку,



обычно порождаются сосульками остроконечными. Кинограммы потому и различаются последними кадрами, что они относятся к сосулькам с разным углом при вершине.

Попытаемся понять то, о чем рассказывают кинограммы. После отрыва большой капли с перемычкой происходят два процесса: первый — на ее конце формируется маленькая капелька; второй — капиллярными силами эта капелька подталкивается вверх. Эти силы не возникли бы, если бы капля была обособленной, ограниченной сферической поверхностью. В такой капле было бы лишь скомпенсированное давление всестороннего сжатия. Капля на кончике сосульки вверху не закрывается сферической поверхностью, и поэтому к противоположному участку ее поверхности приложена нескомпенсированная сила, обусловленная лапласовским давлением $P_Л$; она-то и толкает каплю вверх. В тот момент, когда маленькая капля, сформировавшись, отрывается от сосульки, она еще продолжает двигаться вверх. Достигнет или не достигнет она сосульки, зависит от ее массы, от соотношения между силой, толкнувшей каплю вверх ($F_\uparrow$), и силой тяжести ($F_\downarrow$), но некоторое движение вверх, как правило, наблюдается всегда.

Точно, с помощью формул, описать все происходящее с маленькой каплей очень не просто. Ограничимся приближенной оценкой. Сила, вынуждающая капельку падать вниз, определяется точно: $F_\downarrow = mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$. А вот силу, толкающую каплю вверх, $F_\uparrow$, можно лишь грубо оценить, придав определенное значение диаметру перемычки, соединяющей капельку с сосулькой. Если R — радиус капли, r — радиус перемычки, а $P_Л = \frac{2\alpha}{R}$,



то $F_\uparrow = P_Л \pi r^2 = \frac{2\alpha\pi r^2}{R}$.

Чтобы капелька начала двигаться вверх, необходимо выполнение условия $F_\uparrow > F_\downarrow$. Из этого условия следует, что

$$R^4 < \frac{6}{4}\frac{\alpha r^2}{\rho g}.$$

Предположим, что $\frac{R}{r} \simeq 10$. Разумеется, не точно 10, но такого порядка. В этом случае вверх заведомо полетит капелька, радиус которой удовлетворяет условию:

$$R < 10^{-1}\left(\frac{6}{4}\frac{\alpha}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставив в эту формулу значения констант (поверхностное натяжение $\alpha = 70$ *дин/см*, плотность воды $\rho = 1$ *г/см*^{3} и $g \approx 10^3$ *см/с*^{2}), убедимся, что радиус капельки, летящей вверх, должен быть меньше 0,3 *мм*. Именно такие капельки и запечатлены *на кинограммах*.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Игра «Жизнь»

И. Н. Клумова

> *— А можете вы исчезать и появляться не так внезапно? — спросила Алиса. — А то у меня голова идет кругом.*
> *— Хорошо, — сказал Кот и исчез — на этот раз очень медленно. Первым исчез кончик его хвоста, а последней — улыбка. Она долго парила в воздухе, когда все остальное уже пропало.*
> *— Д-да, подумала Алиса. — Видала я котов без улыбок, но улыбка без кота! Такого я в жизни не встречала.*
> Льюис Кэрролл. *«Алиса в стране чудес».*

В октябрьском номере журнала «Scientific American» за 1970 год появилось описание увлекательнейшей игры — «Жизнь», придуманной современным американским математиком Джоном Хортоном Конвеем. О ней прекрасно рассказано в книге известного американского специалиста в области занимательной математики М. Гарднера. Игра эта очень не похожа на все остальные: лишь вычислительная машина дает возможность полностью ощутить, насколько эта игра необычна и красива.

В игру «Жизнь» можно играть одному, без партнера. Внимательному и уже очень опытному игроку достаточно иметь большой лист клетчатой бумаги и карандаш, чтобы делать ходы. Но начинающему игроку лучше запастись доской, разграфленной на клетки, и фишками двух цветов, например, черными и белыми (и лист, и доска считаются бесконечными).

Правила игры

Идея игры состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь простого расположения черных фишек («организмов») на доске, проследить, что будет происходить с этой исходной позицией («колонией») под действием «генетических законов» Конвея. «Генетические законы» — это и есть правила игры, они управляют рождением, гибелью и выживанием фишек на доске.

Заметим, что каждая клетка доски может находиться в одном из двух состояний — либо она пустая, либо же на ней стоит одна черная фишка, — и что у нее есть восемь соседних клеток (четыре имеют с ней общие стороны, и еще четыре — общие вершины). Будем называть колонию, получающуюся из предыдущей в результате одного хода, следующим поколением. Сформулируем теперь правила игры, то есть определим, когда фишка «погибает», когда «рождается» и когда «выживает».

Фишка выживает (остается на доске на своем месте) и переходит в следующее поколение, если у нее есть две или три соседние фишки.

Фишка погибает, — снимается с доски, — если она имеет больше, чем три или меньше, чем два соседа (соответственно из-за перенаселенности или же от одиночества).

Фишка рождается в некоторой пустой клетке, если в клетках, соседних с этой пустой клеткой, стоит ровно три фишки. Процессы «рождения» и «гибели» происходят одновременно.

Конвей рекомендует производить ходы следующим образом. Определить, какие фишки должны погибнуть и положить на каждую из них еще по одной черной фишке. Затем определить, в каких клетках должны «родиться» фишки, — и поместить в каждую такую клетку белую фишку. Внимательно проверить еще раз, все ли сделано правильно (допустить ошибку, особенно, если играешь впервые, очень легко!), и затем убрать с доски все столбики из черных фишек, а белые фишки заменить черными — при этом получится следующее поколение исходной колонии (для этого нам и нужны фишки двух цветов).

Начав игру, вы обнаружите, что первоначальная колония может претерпевать самые неожиданные и порой очень красивые изменения. Иногда колония вымирает (с доски исчезают все клетки): произойти это может и не сразу, а лишь после того, как сменится очень много поколений. Но чаще всего исходные конфигурации либо переходят в устойчивые, то есть перестают изменяться вообще (их Конвей называет «любителями спокойной жизни»), либо «выходят на колебательный режим», то есть испытывают цикл превращений с определенным периодом. Во всех этих трех случаях эволюция конфигурации считается законченной.

Происхождение «видов»

Посмотрим, что происходит с некоторыми простыми конфигурациями.

Одна или две фишки всегда погибают после первого же хода. Конфигурация из трех фишек (ее Конвей называет триплетом) чаще всего погибает. На рисунке 1 изображены пять триплетов. Первые три погибают уже *на втором ходу*. Триплет (*г*) переходит в устойчивую конфигурацию из четырех фишек, называемую *«блоком»*. Триплет (*д*) Конвей называет *«мигалкой»* — он превращается попеременно то в вертикальный, то снова в горизонтальный ряд.

Отметим еще, что любой диагональный ряд фишек постепенно вымирает: с каждым ходом число фишек на доске уменьшается на два («погибают» крайние фишки).

На рисунке 2 изображена эволюция пяти тетрамино — так Гарднер называет конфигурацию из четырех клеток, связанных между собой ходом ладьи. Конфигурация (*а*) нам уже известна — это «блок»; тетрамино (*б*), (*в*) и (*г*) переходят также в устойчивую конфигурацию, называемую *«ульем»*: (*б*) и (*в*) — на втором ходу, а (*г*) — на третьем. Конфигурация (*д*) называется *«навигационными огнями»*; замечательна она тем, *что на* девятом ходу распадается на четыре отдельные «мигалки», дальнейшие превращения которых и

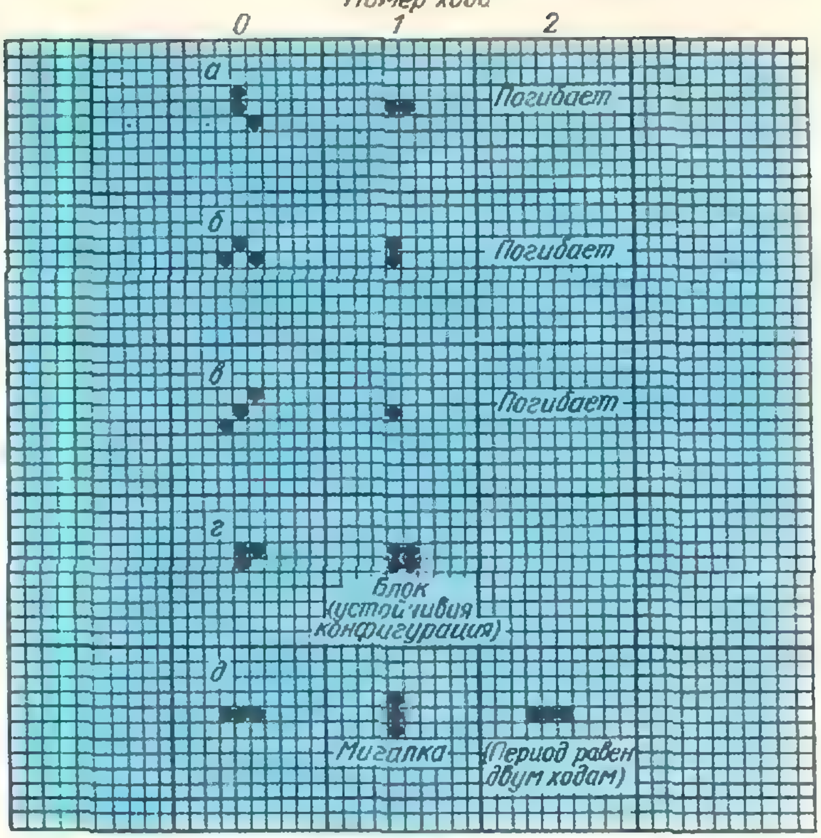
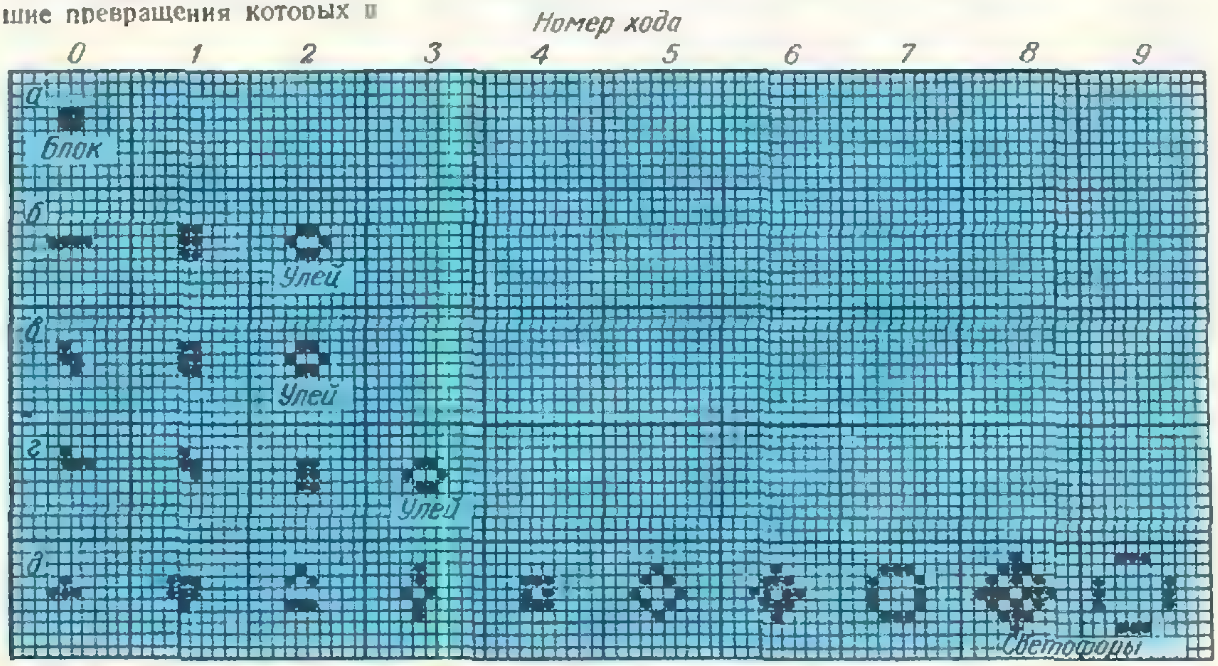

Номер хода
0
1
2
а
Погибает
б
Погибает
в
Погибает
г
Блок
(устойчивая конфигурация)
д
Мигалка
(Период равен двум ходам)

Рис. 1. Эволюция пяти триплетов

Рис. 2. Эволюция пяти тетрамино


Номер хода
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
а
Блок
б
Улей
в
Улей
г
Улей
д
Светофоры

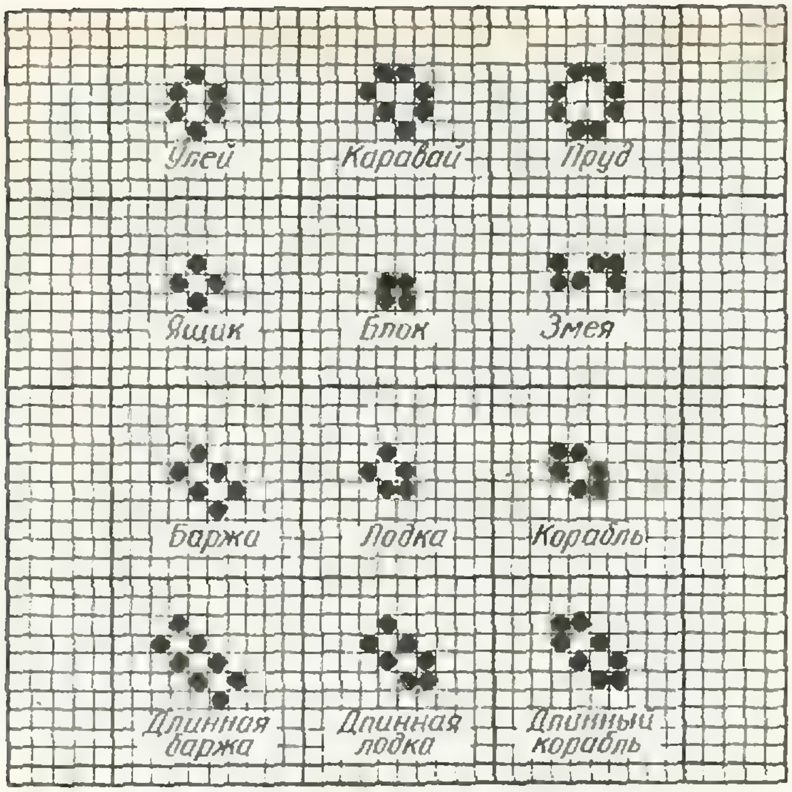


Рис. 3. Устойчивые конфигурации

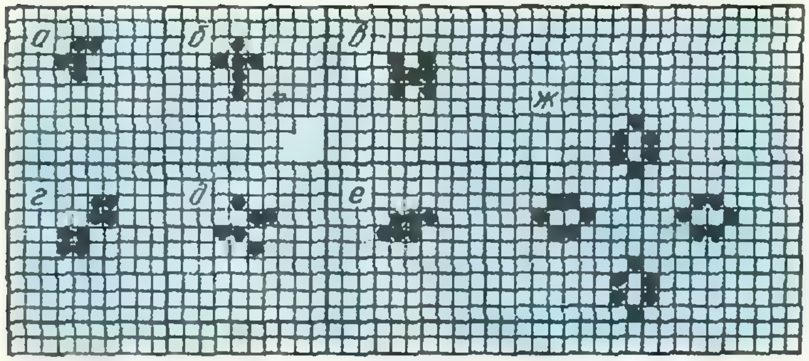
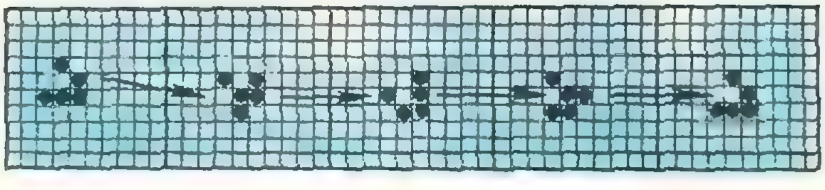


Рис. 4.

Рис. 5. «Планер»



самом деле напоминают «деятельность» светофоров.

На рисунке 3 изображены двенадцать наиболее часто встречающихся устойчивых конфигураций — «любителей спокойной жизни».

Задание 1. Существует двенадцать конфигураций из пяти клеток, связанных между собой ходом ладьи («пентамино»). Самый сложной из них является пентамино в форме буквы г (рис. 4 *а*). Эта конфигурация превращается в устойчивую лишь после тысяча сто третьего хода, распадаясь при этом на восемь «блоков», четыре «мигалки», четыре «улья», «каравай», «лодку» и «корабль» (см. рис. 3)! Получить этот результат без ЭВМ было бы, конечно, невозможно; при этом счетная машина должна еще обладать устройством, позволяющим выводить выходные данные на экран, — только тогда мы сможем *наблюдать* за всеми изменениями, происходящими на доске. Попробуйте выяснить, что будет происходить с остальными одиннадцатью конфигурациями.

Задание 2. Выясните судьбу конфигураций, изображенных на рисунке 4*б*—*е*.

Заметим лишь, что если эволюция буквы **Н** заканчивается быстро, то буква **П** (или *«ворота»*), неожиданно оказывается «долгожителем» — лишь после 173 хода она распадается на пять «мигалок», шесть «блоков» и два «пруда»!

На рисунке 5 изображена конфигурация из пяти фишек, которую Гарднер считает одним из самых изумительных открытий игры «Жизнь»; Конвей назвал ее *«планером»*. Замечательно здесь то, что «планер» является фигурой, действительно перемещающейся по доске («летящей»): после второго хода он «входит в пике», а на четвертом ходу переходит в себя, смещаясь при этом на одну клетку вправо и одну вниз относительно начальной позиции. В игре «Жизнь» скорость, с которой

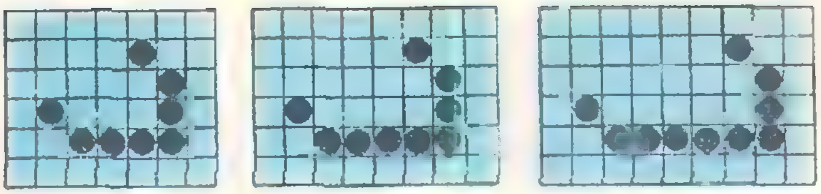
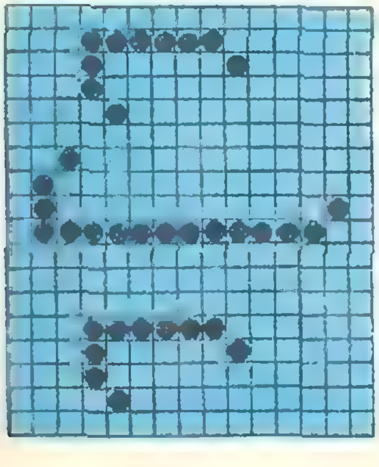


Рис. 6. «Космические корабли»

по доске перемещается шахматный король, называется «скоростью света». Связано это с тем, что бо́льшие скорости в этой игре просто не достигаются: ни одна конфигурация не воспроизводит себя настолько быстро, чтобы двигаться с такой скоростью. Скорость движения фигуры у Конвея равна дроби, в знаменателе которой стоит число ходов, необходимых для воспроизведения фигуры, а в числителе — число клеток, на которое она при этом смещается. Скорость «планера» (по диагонали) составляет $^1/_4$ *скорости света* (проверьте это!). Конвей доказал, что в «Жизни» такая скорость (по диагонали) будет максимальной и что скорость любой конечной фигуры, перемещающейся по вертикали или по горизонтали, не может превышать половины скорости света. На рисунке 6 показаны три *«космических корабля»* («планер» — самый «легкий» из всех «космических кораблей»), передвигающиеся по горизонтали со скоростью, равной половине скорости света. «В полете из них вылетают «искры», — *пишет* Гарднер, — которые тут же гаснут при дальнейшем движении «корабля». Оказывается, что «сверхтяжелые космические корабли» (у них горизонтальный ряд состоит более чем из шести фишек) уже требуют эскорта из двух или большего числа «кораблей» меньших размеров, в противном случае на доске появляются мелкие фигуры, мешающие движению. На рисунке 7 изображен *самый тяжелый из «космических кораблей»*, которым достаточно иметь два сопровождающих более легких «корабля». Как вычислил Конвей, «кораблю» длиной в 100 клеток нужен эскорт, состоящий уже из тридцати кораблей.

Рис. 7.

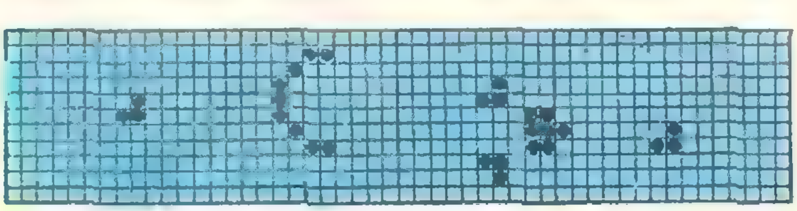


ПРОБЛЕМА «РОСТА»

Пожалуй, самой сложной задачей игры «Жизнь» была следующая: *существует ли такая конечная исходная колония, число «организмов» которой росло бы при переходе от поколения к поколению бесконечно.*

Опубликовав свою игру, Конвей пообещал премию тому, кто найдет ответ на этот вопрос. Задача была решена в ноябре 1970 года группой математиков Массачусетского технологического института: они построили конфигурацию (рис. 8), про которую Гарднер говорит, что она «стреляет «планерами», — первый «планер» образуется *на сороковом ходу*, после чего каждые тридцать ходов прибавляется еще один «планер». Конфигурация эта получила название «планерного ружья»; понятно, что каждый «выстрел» увеличивает число организмов на пять, и, значит, исходная колония растет беспредельно.

Рис. 8. «Планерное ружье»



Позднее те же математики умудрились так скомбинировать придуманные ими «ружья», что, помимо *потока «планеров»*, через каждые 300 ходов «запускался» даже целый «космический корабль»!

Улыбка

В заключение приведем примеры еще двух *интересных* конфигураций.

Первая — это так называемый *«Чеширский кот»* (рис. 9): на пятом ходу от его «морды» остается лишь «улыбка» (*е*), исчезающая на следующем ходу и затем превращающаяся уже в устойчивую конфигурацию — «блок», которую Гарднер называет «отпечатком кошачьей лапы, напоминающей о том, что некогда на этом месте находился кот».

Вторая конфигурация называется *«Жнейка»* (рис. 10); она движется по бесконечной диагонали снизу вверх и оставляет на своем пути «снопы» — устойчивые конфигурации. «К сожалению, — пишет изобретатель «жнейки», — мне не удалось придумать сеятеля — движущуюся фигурку, которая мог-

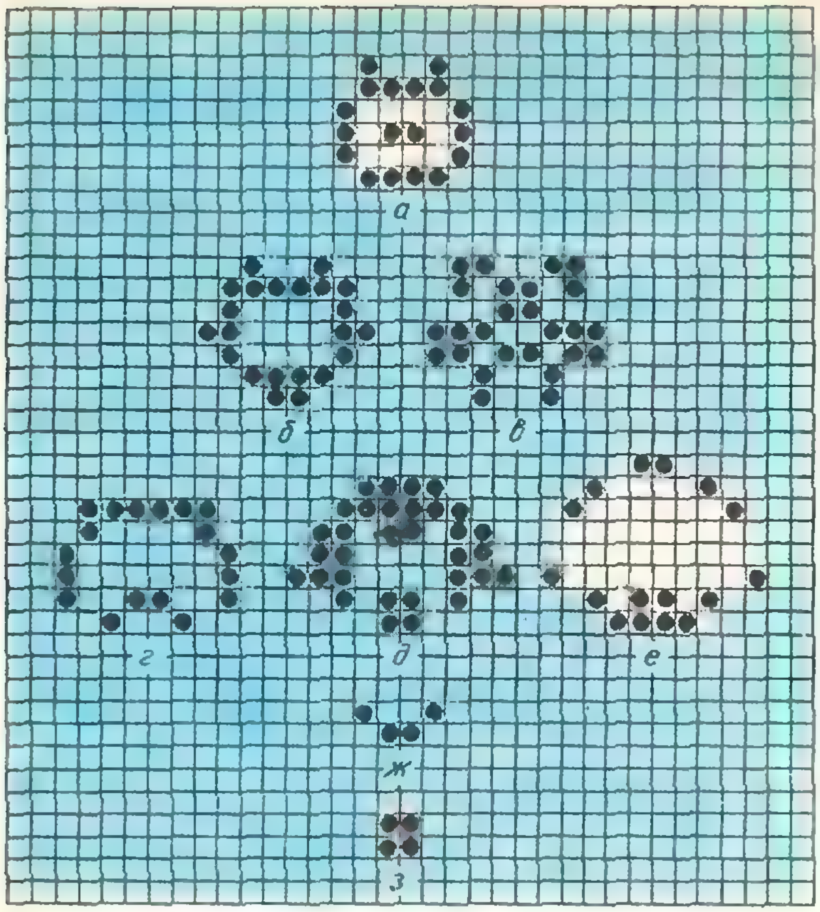


Рис. 9. «Чеширский кот»

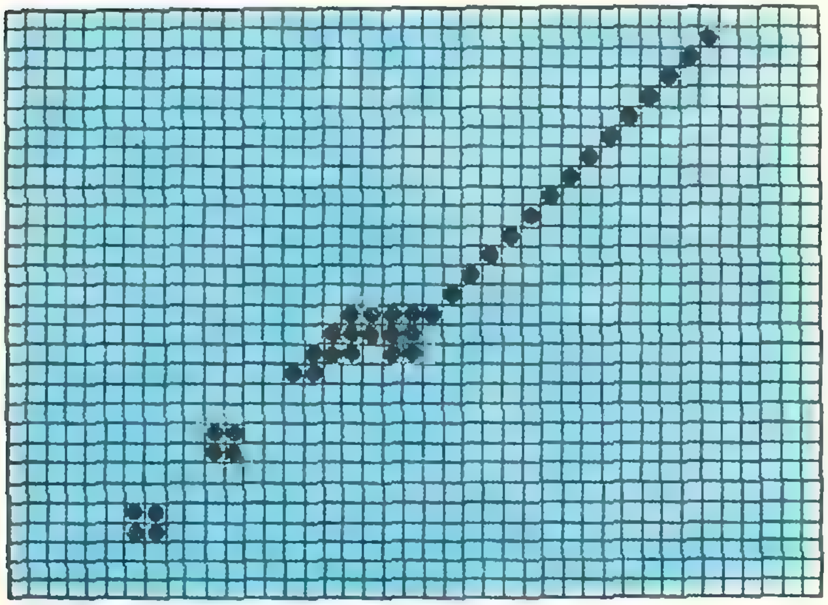
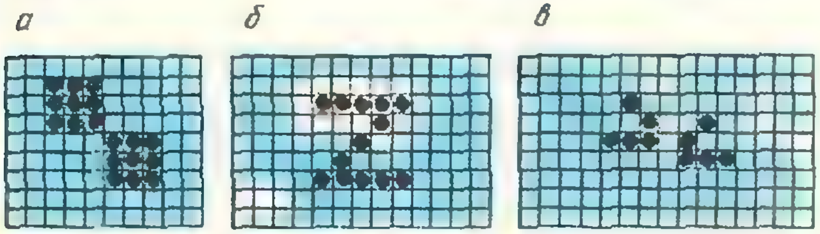


Рис. 10. «Жнейка»

Рис. 11.



ла бы засевать поле с той же скоростью, с которой жнейка его убирает».

И, наконец, отметим, что игра «Жизнь» — далеко не только игра; она по праву заняла видное место в «теории клеточных автоматов», вызвав интерес у многих ученых, занимающихся проблемами использования ЭВМ. «Например, создание «планерного ружья», — пишет Гарднер, — открывает волнующую возможность имитации в игре Конвея машины Тьюринга*), способной (в принципе) производить все действия, которые только доступны самым совершенным из современных ЭВМ».

Читателям, заинтересовавшимся игрой Конвея, мы предлагаем еще несколько задач.

Задание 3. Что происходит с горизонтальными рядами из n фишек при $n=5, 6, ..., 9$?

Задание 4. Как ведут себя конфигурации, изображенные на рисунке 11*а*, *б*, *в* («восьмерка», буква Z, два «планера», летящие навстречу друг другу).

---

*) Машина Тьюринга — это идеальный автомат, способный производить любые вычисления, изобретен английским математиком А. М. Тьюрингом.

Из жизни единиц

А. Л. Тоом

Увы! — сказал сатурниец,
— мы живем всего лишь пятьсот
больших оборотов Солнца...
Наше существование — точка, срок
нашей жизни — мгновение, наша
планета — атом.

Вольтер. *«Микромегас».*

Не так давно стало известно, что некоторые, на первый взгляд, совершенно разные явления и процессы, происходящие в жизни, например, превращения полимеров, жизнедеятельность биологических тканей, рост кристаллов и даже работа вычислительной машины, у которой вычисления происходят одновременно во всех рабочих ячейках (такой вычислительной машины пока нет, но построить ее было бы очень заманчиво), тем не менее имеют нечто общее. Это общее выявляется тогда, когда делается попытка описать данные процессы языком математики, создать то, что ученые называют математической моделью.

Известный советский физик Я. И. Френкель говорил, что математическая модель должна быть похожа скорее на карикатуру, чем на «реалистический» рисунок. Основное требование, предъявляемое к модели — это простота: жизненные процессы настольком математики, создать то, что ученые надель поддается математическому изучению с трудом. В настоящее время большую популярность приобрели так называемые «решетчатые модели», описывающие процессы, происходящие на решетке из одинаковых «клеточек». В таких моделях трудности возникают уже тогда, когда каждая клеточка может находиться только в двух состояниях. Об этом мы и расскажем в статье.

1. Колонии и операторы

Для математика клетчатая бумага таит в себе много привлекательных возможностей. Воспользуемся здесь одной из них. Откройте страницу тетради в клетку. Вы видите на ней сетку из вертикальных и горизонтальных линий. Точки их пересечения будем для краткости называть *узлами*. Представим себе мир, который только из всех этих узлов и состоит. Правда, страницу при этом вообразим бесконечной. Пусть в этих узлах могут жить существа: *единицы*. На рисунках единицы будем обозначать жирными точками, как на рисунке 1. В каждом узле может находиться одновременно только одна единица, а если в узле нет единицы, то там стоит нуль. Совокупность всех узлов, занятых единицами, будем называть *колонией*. Если единиц конечное число, то колонию назовем *конечной*. Если нет ни одной единицы, то мы скажем, что у нас *пустая* колония. (Время, как и пространство, дискретно. Это значит, что оно нумеруется целыми числами: 0, 1, 2,...) Должен быть задан *оператор* **P**, то есть правило, которое для любой колонии K, существующей в некоторый момент времени t, определяет, какая из нее получится колония $\mathbf{P}K$ в следующий момент времени $t+1$.

Пусть такой оператор **P** задан. Основной вопрос, который мы попытаемся выяснить, таков. *Существует ли для данного оператора* **P** *бессмертная конечная колония, то есть такая конечная колония* K, *что, сколько бы раз ни применять к ней оператор* **P**, *всегда будет получаться непустая колония? Или же наоборот, оператор* **P** *таков, что всякая конечная колония через некоторое время вымирает, то есть не остается ни одной единицы?*

Разберем сначала два примера. Введем координатные оси, взяв за начало координат O один из узлов и направив, как обычно, ось абсцисс вправо, ось ординат вверх (см. рис. 1) и приняв сторону клетки за единицу.

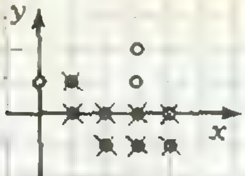


Рис. 1.

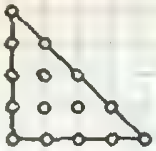


Рис. 2.

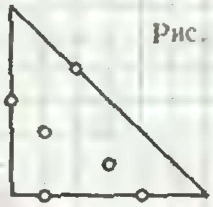


Рис. 3.

Пример 1. Пусть в момент $t+1$ в узле $A=(x, y)$ будет единица в том и только в том случае, если в момент t единицами было занято большинство из пяти узлов: этого узла A и четырех соседних с ним: справа $(x+1, y)$, слева $(x-1, y)$, сверху $(x, y+1)$ снизу $(x, y-1)$. Оператор **P** задан.

Упражнение 1. Что порождают колонии, изображенные на рисунке 1 («жирные» точки и крестики), под действием этого оператора? Проследите дальнейшую эволюцию колоний. Существует ли для этого оператора бессмертная конечная колония?

Пример 2 (см. задачу М215). Пусть в момент $t+1$ в узле $A=$ $=(x, y)$ будет единица тогда и только тогда, если в момент t единицами было занято большинство из трех узлов: этого узла A и двух соседних: справа $(x+1, y)$ и сверху $(x, y+1)$. Оператор **P** задан.

Из решения задачи М215 (опубликованного в «Кванте» № 3, 1974) следует, что под действием этого оператора всякая конечная колония вымирает. (Проверьте это для колонии на рис. 1). Докажем этот факт еще раз способом, который пригодится нам в дальнейшем.

Изучим эволюцию колоний специального вида, заполняющих равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, направленными вправо и вверх от вершины прямого угла (рис. 2). Оказывается, каждый такой треугольник в следующий момент времени переходит в треугольник такого же вида, но с меньшей на единицу длиной катетов. Только самый маленький треугольник с длиной катетов 1 переходит в одну точку, а она на следующем шаге пропадает. (Проверьте это, проследив эволюцию рисунка 2.) Поэтому каждый такой треугольник вымирает за время, равное первоначальной длине катетов.

Пусть теперь у нас есть произвольная конечная колония K. Ее можно заключить в равнобедренный прямоугольный треугольник, что и сделано на рисунке 3. Тогда колония, получающаяся из нее в следующий момент, будет помещаться внутри меньшего треугольника такого же вида, и так далее.

Здесь мы воспользовались важным свойством оператора **P**: если колония K_1 есть часть колонии K_2 (это можно записать так: $K_1 \subset K_2$*)), то $\mathbf{P}K_1$ есть часть $\mathbf{P}K_2$: $\mathbf{P}K_1 \subset \mathbf{P}K_2$ (что не исключает возможности, что $\mathbf{P}K_1$ и $\mathbf{P}K_2$ совпадают). Назовем это свойство, которое коротко можно записать так:

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow \mathbf{P}K_1 \subset \mathbf{P}K_2,$$

монотонностью оператора **P**. В этой статье рассматриваются только *монотонные* операторы.

Для немонотонных операторов вопрос о том, когда существуют бессмертные конечные колонии, в общем виде не решен и, возможно, очень труден. Интересный и обширный материал об исследовании одного конкретного немонотонного оператора, получившего название игры «Жизнь», собран в книге М. Гарднера «Математические досуги» (глава 38). Познакомиться с этой игрой вы можете на с. 26 этого номера журнала.

Опишем теперь точно, какого вида операторы **P** мы будем рассматривать.

---

*) Знак ⊂ означает *включение* множеств. Мы будем дальше пользоваться также понятиями *пересечения*, *объединения* и *дополнения* множеств (об операциях над множествами см., например, статью С. Г. Гиндикина «Сколько существует операций над множествами», «Квант», 1973, № 7).

Пусть O — «нулевой» узел, начало координат. В описание **P** входит *список* **U**, состоящий из r узлов $u_1, \ldots, u_r$, от состояний которых в момент t зависит состояние узла O в момент $t+1$. В примере 1 число этих узлов $r = 5$, в примере 2 $r = 3$. Состояние любого узла A в момент $t+1$ зависит от состояний узлов $A+u_1, \ldots, A+u_r$ в момент t. Знак $+$ здесь означает сложение векторов. Например, если $A = (x, y)$, $u_1 = (x', y')$, то $A+u_1 = (x+x', y+y')$.

Упражнение 2. Напишите координаты векторов $u_1, \ldots, u_5$ в примере 1 и векторов u_1, u_2, u_3 в примере 2.

Кроме списка **U**, в задание оператора **P** входит функция, определяющая, как именно зависит состояние узла A в момент $t+1$ от состояний узлов $A+u_1, \ldots, A+u_r$ в момент t. Чтобы задать такую функцию, нужно указать, что будет в узле A в момент $t+1$ — единица или же нуль — для каждой комбинации единиц и нулей в узлах $A+u_1, \ldots, A+u_r$ в момент t. Всего таких комбинаций 2^r. Можно, например, составить таблицу, в которой против каждой комбинации из единиц и нулей поставить либо единицу, либо нуль, что и сделано на рисунке 4 (проверьте, что функция, заданная этой таблицей, определяет оператор **P** из примера 2). Составлять таблицу, конечно, не обязательно, можно функцию задать словесно, но так, чтобы по словесному заданию можно было бы однозначно составить такую таблицу.

СОСТОЯНИЯ УЗЛОВ			
В МОМЕНТ t			t+1
(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Рис. 4

Функции $f = f(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, аргументы и значения которых принимают только два значения, 0 и 1, называются *булевскими* или *двоичными*. Булевская функция называется *монотонной*, если из

$$a_1 \leqslant a'_1, \ldots, a_r \leqslant a'_r$$

следует

$$f(a_1, \ldots, a_r) \leqslant f(a'_1, \ldots, a'_r).$$

Как уже говорилось, мы будем рассматривать только монотонные операторы. Они задаются монотонными функциями. Положим, кроме того, $f(0, \ldots, 0) = 0$, $f(1, \ldots, 1) = 1$.

Эти ограничения несущественны, поскольку не удовлетворяют им из монотонных функций только *константы* — функции, принимающие только одно значение (всегда нуль или всегда единицу). Функции-константы очень просты, и поэтому неинтересны.

Пример 3. Пусть в момент $t+1$ в узле $A = (x, y)$ будет нуль в том и только в том случае, если в момент t выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) нули стоят в обоих узлах (x, y) и $(x, y+1)$;

б) нули стоят в обоих узлах $(x+1, y)$ и $(x+1, y+1)$.

Оператор **P** задан.

Упражнение 3. а) Проследите эволюцию колоний, изображенных на рисунке 1, под действием этого оператора.

Не правда ли, создается впечатление, что колонии сплющиваются с правого бока, но зато вытягиваются вверх?

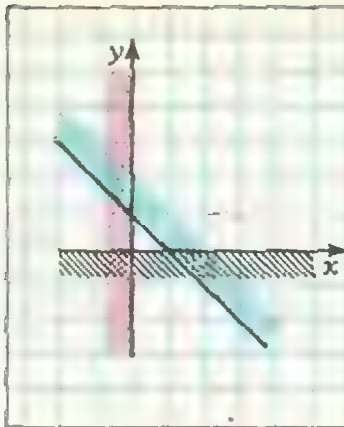
б) Докажите, что под действием оператора примера 3 всякая конечная колония вымирает.

Пример 4. Пусть в момент $t+1$ в узле $A = (x, y)$ будет нуль тогда и только тогда, если в момент t выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) нули стоят в обоих узлах (x, y) и $(x+1, y+1)$;

б) нули стоят в обоих узлах $(x+1, y)$ и $(x, y+1)$.

Оператор **P** задан.



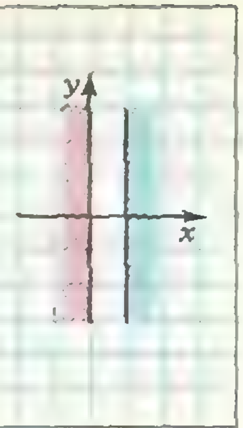


Рис. 5. Рис. 6.

Для этого оператора существуют бессмертные конечные колонии, правда, все время изменяющиеся, но никогда не вымирающие. Найдите какую-нибудь из них.

2. Нулевые множества. Теорема о выживании

Вспомним теперь, что на плоскости, кроме узлов, есть еще и другие точки. Конечно, с точки зрения единиц, живущих только в узлах, никаких других точек в природе не существует, но для нас-то они существуют. Будем рассматривать всевозможные геометрические фигуры — множества точек на плоскости. Скажем, что фигура **M** *заполнена нулями*, если нули стоят во всех узлах, принадлежащих этой фигуре.

Определение 1. *Фигура* **M** *называется нулевой (для данного оператора* **P**), *если из того, что она заполнена нулями в момент t, следует, что в узле O будет нуль в момент $t+1$.*

Так, в примерах 1, 2 фигура является нулевой, если она содержит большинство из пяти — в примере 1 — или трех — в примере 2 — узлов, составляющих множество **U**.

Пусть на плоскости проведена прямая l. Назовем *полуплоскостью* множество точек, расположенных по одну сторону от прямой, включая саму эту прямую.

В соответствии с определением 1 *полуплоскость* называется *нулевой*, если из того, что она заполнена нулями в момент t, следует, что в узле O будет нуль в момент $t+1$.

Обозначим через σ_P пересечение всех полуплоскостей, нулевых для данного оператора **P**.

Теорема о выживании. *Под действием оператора* **P** *всякая конечная колония вымирает тогда и только тогда, если множество σ_P пусто.*

Упражнение 4. (Проверка теоремы для примеров 1—4.) Докажите следующие утверждения.

а) В примере 2 три полуплоскости, заштрихованные на рисунке 5, являются нулевыми. В примере 3 две полуплоскости, заштрихованные на рисунке 6, являются нулевыми.

В обоих случаях заштрихованные полуплоскости не имеют общих точек, то есть их пересечение пусто. Поэтому σ_P — пересечение всех нулевых полуплоскостей тем более пусто. В соответствии с теоремой все конечные колонии вымирают.

б) В примере 1 множество σ_P состоит из одной точки O (и в соответствии с теоремой, существует бессмертная конечная колония).

В примере 4 множество σ_P состоит из одной точки $\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (Точка ξ — не узел. Вот почему нам не хватило узлов!)

В примере 1 точка O входит в σ_P, а конечная бессмертная колония остается на месте. В примере 4 простейшая бессмертная колония состоит из четырех узлов — вершин одного единичного квадратика (рис. 7). В следующий момент времени она порождает «крест», а этот крест в свою очередь порождает такой же квадратик, но сдвинутый

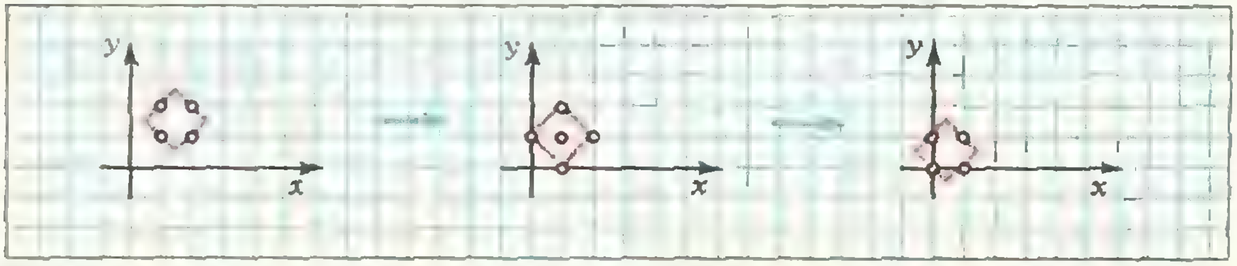


Рис. 7.

на единицу влево и вниз. Скажем, что колония K заполняет *фигуру* **M**, *если она содержит все узлы, входящие в* **M**. И крест, и квадратик на рисунке 7 можно представить как колонии, заполняющие равные фигуры — квадраты, показанные на этих рисунках. Таким образом, колонии, порождаемые в последовательные моменты времени, можно представить как заполняющие один и тот же квадрат, сдвигающийся за единицу времени на вектор — $\vec{\xi} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Заметим, что стороны этого квадрата параллельны прямым $u_i\xi$, где $u_i \in$ **U**. В примере 1 стороны единичного квадрата, заполняемого колонией, также параллельны линиям u_iO.

Упражнение 5 (*издевательское*) Если бы вы были единицей и жили бы в мире, управляемом оператором примера 4, то существовала бы для вас точка $\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *или нет?*

3. Выпуклые множества и выпуклые оболочки

Множество точек **M** на плоскости называется *выпуклым*, если удовлетворяет следующему условию:

если точки A, B принадлежат **M**, *то и все точки отрезка с концами A, B принадлежат* **M**.

Упражнение 6. Докажите, что всякая полуплоскость — выпуклое множество.

Упражнение 7. Докажите, что пересечение нескольких выпуклых множеств — выпуклое множество.

Упражнение 8. В некоторых учебниках многоугольник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от прямой, проведенной через каждую его сторону. Докажите, что многоугольник будет выпуклым в этом смысле тогда и только тогда, когда выпукло множество точек, расположенных на его контуре и внутри него.

Итак, если выпуклое множество **M** содержит точки $A_1, \ldots, A_k$, то оно содержит также и все отрезки с концами в этих точках, и все треугольники с вершинами в этих точках. Объединение всех точек $A_1, \ldots, A_k$ на плоскости, *отрезков* с концами в этих точках и треугольников с вершинами в этих точках называется *выпуклой оболочкой* точек $A_1, \ldots, A_k$ (на рисунке 8 выпуклая *оболочка* точек $A_1, \ldots, A_k$ закрашена). Можно сказать, что выпуклая оболочка точек $A_1, \ldots, A_k$ — это то, что *обязательно* входит во всякое выпуклое множество, *содержащее точки* $A_1, \ldots, A_k$.

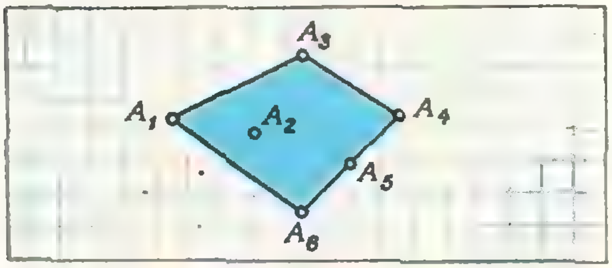


Рис. 8.

Упражнение 9. а) Докажите, что множество, состоящее из четырех точек (на плоскости), всегда можно разбить на два подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

б) То же, *если множество состоит из* $n > 4$ точек.

Вспомним определение множества σ_P. Если искать σ_P, следуя этому определению, то придется *строить* все *нулевые полуплоскости*, а их бесконечно много. Правда, в примерах 1—4 мы сумели найти σ_P, но пока не ясно, как сделать это в общем случае. Оказывается, с помощью *выпуклых оболочек* можно строить σ_P уже для любого оператора **P**.

Рассмотрим все подмножества множества **U**. В соответствии с определением 1, *множество* $\mathbf{U}' \subset \mathbf{U}$ называется *нулевым*, если из того, что $\mathbf{U}'$ заполнено нулями в момент t, следует, что в точке O будет нуль в момент $t+1$.

Лемма 1. *Множество σ_P совпадает с пересечением выпуклых оболочек всех нулевых подмножеств* **U**.

Докажите эту лемму самостоятельно. Указание. Полуплоскость является *нулевой тогда и только тогда*, когда она содержит целиком хотя бы одно нулевое подмножество **U**.

Пользуясь леммой 1, можно по всякому оператору **P**, заданному *своим набором* **U** и функцией f, построить σ_P. Именно, надо выписать все подмножества **U** (их 2^r штук), далее, зная функцию f, выбрать из них нулевые, построить их выпуклые

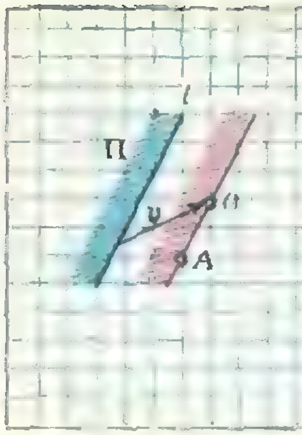


Рис. 9.

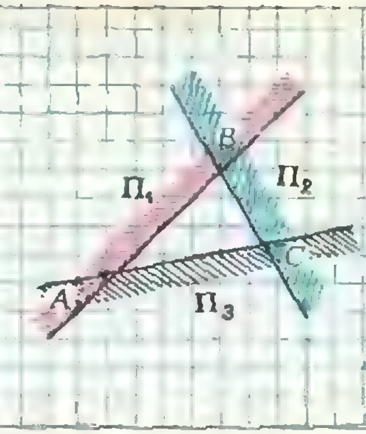


Рис. 10.

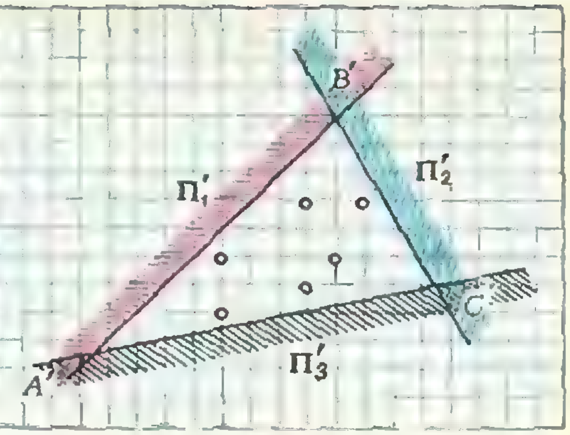


Рис. 11

оболочки (каждая из них — многоугольник, отрезок или точка) и найти их пересечение.

Следствие. *Множество σ_P всегда есть пересечение конечного числа нулевых полуплоскостей.*

Упражнение 10. Постройте еще раз σ_P для примеров 1—4, пользуясь способом, вытекающим из леммы 1.

4. Доказательство теоремы о выживании. Известная теорема Хелли в роли «бога из машины»

А. Найдем сначала условия, при которых все конечные колонии вымирают. Прежде всего сделаем ряд важных замечаний. Пусть нулевая полуплоскость **П** ограничена прямой l. Тогда, если **П** была заполнена нулями в момент t, то в момент $t+1$ нуль будет не только в узле O, но и во всяком узле A, для которого прямая AO параллельна l (рис. 9).

Далее, обозначим через **v** вектор, на который нужно параллельно сдвинуть прямую l, чтобы она в новом положении проходила через узел O (таких векторов бесконечно много, в качестве **v** можно выбрать любой из них). Тогда, если в момент t нулевая полуплоскость **П** заполнена нулями, то в момент $t+1$ нулями будет заполнена полуплоскость **П** + **v**, полученная из **П** сдвигом на вектор **v** (полуплоскость **П** + **v** заштрихована красным на рисунке 9). Аналогично, если в момент t полуплоскость **П** + **w** заполнена нулями, то в момент $t+1$ будет заполнена нулями полуплоскость **П** + **w** + **v**.

Лемма 2. *Пусть дан треугольник ABC. Пусть три полуплоскости* **П**$_1$, **П**$_2$, **П**$_3$, *ограниченные прямыми AB, BC, AC и находящиеся с внешних сторон по отношению к треугольнику ABC, являются нулевыми для оператора* **P** *(заштрихованы на рисунке 10). Тогда под действием этого оператора всякая конечная колония единиц вымирает.*

Доказательство. Пусть K — конечная колония. Сдвинем нулевые полуплоскости **П**$_1$, **П**$_2$, **П**$_3$ на такие векторы **w**$_1$, **w**$_2$, **w**$_3$, чтобы получающиеся после сдвига полуплоскости **П**$'_1$ = **П**$_1$ + **w**$_1$, **П**$'_2$ = **П**$_2$ + **w**$_2$, **П**$'_3$ = **П**$_3$ + **w**$_3$ не имели бы общих точек с K, то есть были бы заполнены нулями (рис. 11). Граничные прямые полуплоскостей **П**$_1$, **П**$_2$, **П**$_3$ образуют треугольник $A'B'C'$, подобный ABC (и также ориентированный); обозначим коэффициент подобия через d. Докажем, что колония K *вымрет за время, не большее, чем d.*

Пусть **v**$_1$, **v**$_2$, **v**$_3$ — векторы, на которые нужно сдвинуть плоскости **П**$_1$, **П**$_2$, **П**$_3$, чтобы их граничные прямые проходили через узел O. Из подобия тогда следует, что если полуплоскости **П**$'_1$, **П**$'_2$, **П**$'_3$ сдвинуть соответственно на векторы d**v**$_1$, d**v**$_2$, d**v**$_3$, то их граничные прямые будут также проходить через одну точку; сами же полуплоскости в новом положении покроют всю плоскость. Но

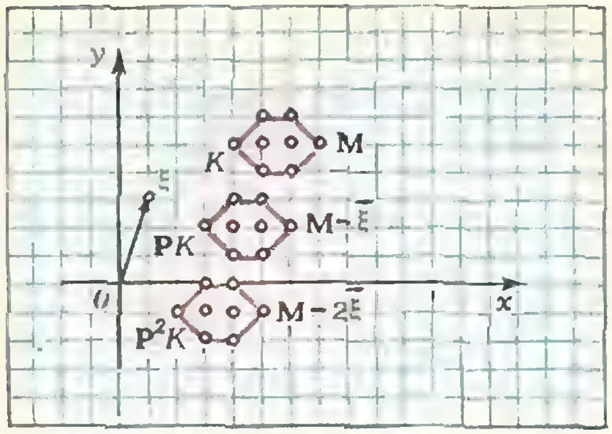


Рис. 12.

после t применений оператора $\mathbf{P}$ согласно сделанным замечаниям заведомо будут заполнены нулями полуплоскости, получающиеся из $\mathbf{\Pi}'_1$, $\mathbf{\Pi}'_2$, $\mathbf{\Pi}'_3$ сдвигами на $t\mathbf{v}_1$, $t\mathbf{v}_2$, $t\mathbf{v}_3$; при $t \geqslant d$ эти полуплоскости тем более покроют всю плоскость. Значит, вся плоскость будет заполнена нулями, а это и означает, что колония K вымирает.

Лемма 3. *Пусть две полуплоскости, ограниченные двумя параллельными прямыми и расположенные по внешние стороны от них, являются нулевыми для оператора* $\mathbf{P}$ *(как на рис. 6). Тогда под действием этого оператора всякая конечная колония единиц вымирает.*

Докажите эту лемму самостоятельно. Указание. Обобщите решение упражнения 3.

Леммы 2 и 3 можно объединить в одно следующее утверждение:

Лемма 4. *Если пересечение трех нулевых полуплоскостей пусто, то всякая конечная колония единиц вымирает.*

Доказательство. Если пересечение трех полуплоскостей пусто, то либо они расположены как на рисунке 10, либо какие-то две из них расположены как на рисунке 6, а для этих двух случаев утверждение леммы 4 доказано.

Б. Пусть теперь множество $\sigma_{\mathbf{P}}$ содержит хотя бы одну точку. Докажем, что тогда существует конечная бессмертная колония.

Лемма 5. *Пусть бесконечная колония K заполняет (в момент времени t) полуплоскость* $\mathbf{\Pi}$, *имеющую хотя бы одну общую точку с множеством $\sigma_{\mathbf{P}}$. Тогда колония* $\mathbf{P}K$ *содержит узел O.*

Доказательство. Допустим, что $\mathbf{P}K$ не содержит O. Значит, в момент $t+1$ в точке O стоит 0, то есть в момент t какое-то нулевое подмножество $\mathbf{U}$ было целиком заполнено нулями. Значит, это нулевое подмножество не имело ни одной общей точки с $\mathbf{\Pi}$, то есть принадлежало *дополнению* к $\mathbf{\Pi}$. Но дополнение к $\mathbf{\Pi}$ — выпуклое множество. Поэтому выпуклая оболочка этого нулевого подмножества тоже целиком принадлежала дополнению к $\mathbf{\Pi}$. Значит, (см. лемму 1) и $\sigma_{\mathbf{P}}$ целиком принадлежало дополнению к $\mathbf{\Pi}$, что противоречит условию.

Следствие. Пусть бесконечная колония K заполняет полуплоскость $\mathbf{\Pi}$, имеющую хотя бы одну общую точку с множеством $A+\sigma_{\mathbf{P}}$, где A — узел. Тогда колония $\mathbf{P}K$ содержит узел A.

Основной для случая Б является

Лемма 6. *Пусть точка ξ принадлежит $\sigma_{\mathbf{P}}$ (как точка $(^1/_2, {}^1/_2)$ в примере 4). Тогда существует такой выпуклый многоугольник* $\mathbf{M}$, *что, если колония K заполняет* $\mathbf{M}$, *то колония* $\mathbf{P}K$ *заполняет многоугольник* $\mathbf{M}-\vec{\xi}$ *(рис. 12), колония* $\mathbf{P}^2K$ *заполняет* $\mathbf{M}-2\vec{\xi}$ *и так далее; вообще, колония* $\mathbf{P}^nK$, *получаемая из K через n моментов времени, заполняет многоугольник* $\mathbf{M}-n\vec{\xi}$, *равный* $\mathbf{M}$ *и полученный из* $\mathbf{M}$ *сдвигом на вектор* $-n\vec{\xi}$*). *При этом все колонии K,* $\mathbf{P}K$, $\mathbf{P}^2K$, ... *непусты.*

---

*) Мы утверждаем, что единицами заняты все узлы, принадлежащие $\mathbf{M}-n\vec{\xi}$, но, возможно, не только они: не исключено, что единицы будут и вне этого многоугольника.

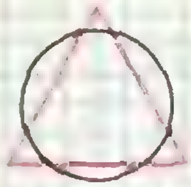


Рис. 13.

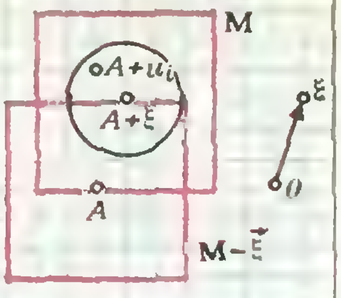


Рис. 14.

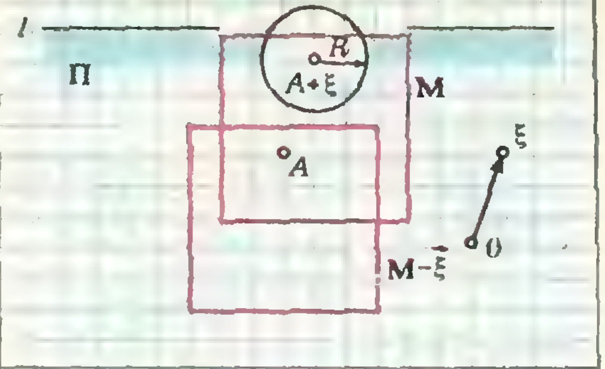


Рис. 15.

Из этой леммы, в частности, следует, что если точка O принадлежит σ_P, то существует *«стабильная»* колония, не теряющая в процессе эволюции ни одного своего узла (но, возможно, приобретающая новые).

Доказательство. Заметим, что мы не претендуем на то, чтобы найти наименьшую бессмертную колонию (как мы нашли для примеров 1 и 4). Нам достаточно найти какую-нибудь. Поэтому будем с самого начала считать многоугольник **M** очень большим. Каким точно, скажем ниже.

Утверждение леммы достаточно доказать только для $n = 1$; для больших n это будет следовать по индукции. Итак, предположим, что колония K, существующая в момент t, заполняет **M**: докажем, что колония $\mathbf{P}K$ заполняет многоугольник $\mathbf{M} - \vec{\xi}$.

Пусть какой-то узел A принадлежит $\mathbf{M} - \vec{\xi}$ (см. рис. 14). Покажем, что A принадлежит $\mathbf{P}K$ (это записывают так: $A \in \mathbf{P}K$). Очевидно, $(A + \xi) \in \mathbf{M}$. Обозначим через R наибольшее из расстояний от точки ξ до узлов $u_1, \ldots, u_r$. Тогда круг с центром $A + \xi$ и радиусом R накроет все узлы $A + u_1, \ldots, A + u_r$. Выберем **M** столь большим, чтобы всякий круг с центром внутри **M** радиуса R либо вообще не накрывал точек сторон многоугольника **M**, либо накрывал точки лишь одной стороны **M**, либо накрывал точки лишь двух соседних сторон, но не больше. (На рисунке 13 изображен круг, накрывающий точки трех сторон треугольника — такого быть не должно!) Рассмотрим три случая.

а) Круг с центром $A + \xi$ радиуса R помещается целиком внутри **M** (см. рис. 14). Тогда все узлы $A + u_i$ тем более внутри **M**, то есть все они входят в K; значит, узел A входит в $\mathbf{P}K$.

б) Круг с центром $A + \xi$ и радиусом R накрывает точки только одной из сторон **M** (как на рисунке 15). Проведем прямую l через эту сторону. Если бы колония K заполняла всю полуплоскость **П**, ограниченную l (на рисунке 15 эта полуплоскость заштрихована), то колония $\mathbf{P}K$ содержала бы узел A по следствию из леммы 5 (полуплоскость **П** содержит точку $A + \xi$, и поэтому пересекается с множеством $A + \sigma_P$). Но колония $\mathbf{P}K$ будет содержать узел A и в том случае, если K заполняет только **M**, так как состояние узла A в момент $t + 1$ зависит только от состояний узлов $A + u_i$ в момент t, а эти узлы не входят в разность между **П** и **M**.

в) Круг с центром $A + \xi$ радиуса R накрывает точки двух соседних сторон **M** (см. рис. 16). Мы хотим доказать, что для того, чтобы в узле A в момент $t + 1$ была единица, достаточно, чтобы в момент времени t единицы были в тех точках

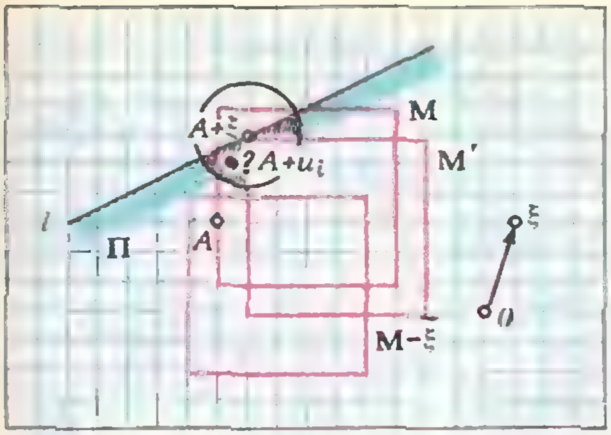


Рис. 16.

$A+u_1, \dots, A+u_r$, которые попадают в область пересечения **M** с кругом. Мы докажем, что на самом деле для этого достаточно наличия единиц даже в меньшей области — пересечении того же круга с многоугольником **M′**, полученном из **M** таким сдвигом, при котором общая вершина двух соседних сторон **M**, часть которых накрыта кругом, попадает в точку $A+\xi$ (рис. 16). Для этого нам потребуется наложить на **M** еще одно, теперь уже последнее, условие.

Проведем прямые через точку ξ и каждый из узлов $u_1, \dots, u_r$, отличных от ξ (если все u_i отличны от ξ, то получится r прямых; если один из них совпадает с ξ, то получится $r-1$ прямая). Потребуем, чтобы для каждой из этих (r или $r-1$) прямых нашлись две стороны многоугольника **M**, ей параллельные. Тогда каждая прямая, параллельная прямой, проходящей через ξ и какую-нибудь из точек $u_1, \dots, u_r$, отличных от ξ, либо вовсе не пересекает **M**, либо имеет с **M** целый общий отрезок. Этому условию, например, удовлетворяет квадрат на рисунке 7 (пример 4).

Проведем теперь через точку $A+\xi$ прямую l, имеющую с многоугольником **M′** лишь одну общую точку $A+\xi$ (см. рис. 16). Если бы колония K заполняла всю полуплоскость **П**, ограниченную прямой l (на рисунке 16 она заштрихована синим), то по следствию леммы 5, в точке A в момент $t+1$ была бы единица. Но колония **P**K будет содержать узел A и в том случае, если K заполняет только **M**, поскольку узлов $A+u_i$, лежащих в полуплоскости **П**, но вне **M′**, — нет. Докажем это. Допустим, что какой-то узел $A+u_i$ оказался в разности между **П** и **M′**. Но в то же время он находится в круге с центром $A+\xi$ радиуса R. Значит, узел $A+U_i$ лежит в одном из двух секторов, заштрихованных черным. Тогда прямая, проходящая через $A+u_i$ и $A+\xi$, имеет с **M′** лишь одну общую точку, что невозможно в силу выбора **M**. Тем самым лемма 6 доказана.

В. Теорема Хелли. Итак, мы исследовали такие два случая:

А) пересечение каких-то трех нулевых полуплоскостей пусто (лемма 4);

Б) пересечение всех нулевых полуплоскостей непусто (лемма 6).

Оказывается, только эти случаи и возможны. Это следует из известной теоремы Хелли.

Это очень важная и красивая теорема, имеющая много разных формулировок, доказательств и применений. Нам она понадобится лишь в следующем варианте (доказательство ее см. на с. 77).

Теорема Хелли. *Пусть на плоскости имеется $n \geqslant 4$ выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Тогда все эти n множеств имеют общую точку.*

Применим ее к нашему случаю. По следствию из леммы 1 множество σ_P есть пересечение конечного числа полуплоскостей. Пусть случай **Б** не имеет места: σ_P *пусто*. Тогда, применяя теорему Хелли и рассуждая от противного, получаем, что пересечение каких-то *трех* нулевых полуплоскостей пусто, а это и есть случай **А**. Тем самым теорема о выживании доказана.

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

Редколлегия журнала «Квант» установила специальные премии за наиболее интересные решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта».

Редакция получила за 1973—1974 гг. около 3000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1975 год.

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады эти школьники допущены на областные туры Всесоюзной олимпиады 1975 года наравне с победителями районных математических и физических олимпиад.

1. ГОНЧАРОВ А. (г. Никополь Днепропетровской обл., 9 кл.)
2. ДОКУЧАЕВ Ю. (г. Ленинград, 10 кл.)
3. ИВАЩУК В. (г. Киев, 10 кл.)
4. КОРШУНОВ С. (п. Монино Моск. обл., 10 кл.)
5. ЛЮБИЧ М. (г. Харьков, 10 кл.)
6. МЕЛЬНИК С. (г. Харьков, 10 кл.)
7. МИХЛИН Л. (г. Курск, 9 кл.)
8. РЕМЕЕВ А. (г. Ташкент, 10 кл.)
9. РЕШЕТНЯК В. (г. Киев, 10 кл.)
10. РЫЖИКОВ В. (г. Ахтубинск, 10 кл.)
11. ФИНАШИН С. (г. Ленинград, 9 кл.)
12. ШМЕЛЕВ Г. (г. Ярославль, 10 кл.)

За успешное участие в VIII Всесоюзной физико-математической олимпиаде годовой подпиской на журнал «Квант» награждаются:

1. БЕЛОШАПКО А. (Брянская обл., Новозыбковский р-н, п. Вышков, 9 кл.)
2. БОТВИЧ Д. (Курская обл., Обоянский р-н, с. Камынино, 10 кл.)
3. КРИВОПУЩЕНКО А. (БССР, Витебская обл., п. г. т. Ушачи, 9 кл.)
4. ПЕЧЕНКОВ В. (Приморский край, Спасский р-н, с. Красный Кут, 10 кл.)
5. ЯЦАЛО Б. (УССР, Ровенская обл., Зареченский р-н, с. Морочное, 9 кл.)

Годовой подпиской на 1975 год награждаются также следующие участники научной конференции учащихся физико-математических школ-интернатов (об этой конференции мы рассказываем в этом номере журнала):

1. МИМИНОШВИЛИ М. (г. Тбилиси, 9 кл.)
2. ТОРОНДЖАДЗЕ М. (г. Тбилиси, 10 кл.)
3. САНИКИДЗЕ М. (г. Тбилиси, 8 кл.)
4. ТИМОШИН А. (г. Рига, 10 кл.)

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М281, М282» или «... Ф293». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М281—М285; Ф293—Ф297

М281. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

Г. А. Гальперин

М282. В клетках прямоугольной таблицы размерами $m \times n$ записаны любые натуральные числа. За один ход разрешается удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться, чтобы все числа стали равными нулю.

С. Конягин

М283. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на единицу во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

М284. Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

М285*. Прямоугольный лист бумаги размерами $a \times b$ разрезан на прямоугольные полоски, у каждой из которых одна сторона имеет длину 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел a и b — целое.

А. В. Климов

Ф293. Марс во время противостояния находится на расстоянии $l = 5{,}56 \cdot 10^{10}$ *м* от Земли и его угловой диаметр равен $25'',1$. Определить ускорение свободного падения на поверхности Марса, если известно, что максимальное угловое расстояние между центрами Марса и его

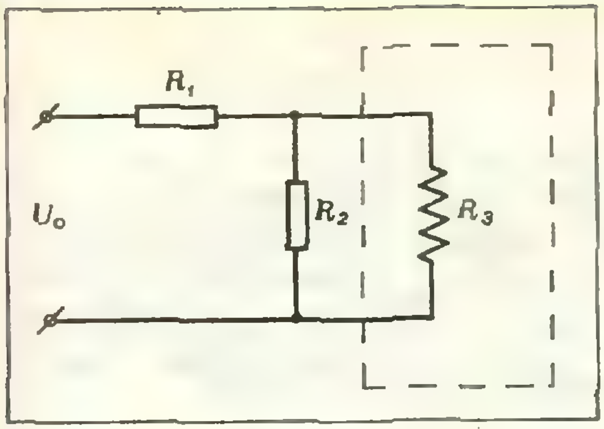


Рис. 1.

спутника Фобоса $\beta = 34''$, 5, а период обращения Фобоса вокруг Марса $T = 2{,}76 \cdot 10^4$ с.

М. П. Погребняк

Ф294*. К некоторому прибору, находящемуся внутри камеры высокого давления, необходимо подводить тепло. Во время опыта меняется давление в камере, и это приводит к изменению сопротивления любой проволоки, используемой в качестве нагревателя. На рисунке 1 показана схема, используемая в случае, когда необходимо, чтобы количество подводимого за одно и то же время тепла очень слабо зависело от давления. Сопротивление R_3 — это обмотка нагревателя, R_1 и R_2 — некоторые постоянные сопротивления, которые находятся вне камеры высокого давления. При каком соотношении между R_1, R_2 и R_3 мощность, рассеиваемая на сопротивлении R_3, меняется меньше всего при изменении величины сопротивления R_3?

Ф295. Какова должна быть точность измерения ускорения свободного падения у поверхности Земли для того, чтобы можно было обнаружить изменение этой величины в течение суток из-за притяжения Луны? Считать, что измерение производится в точке, которая лежит в плоскости орбиты Луны; вращением Земли пренебречь.

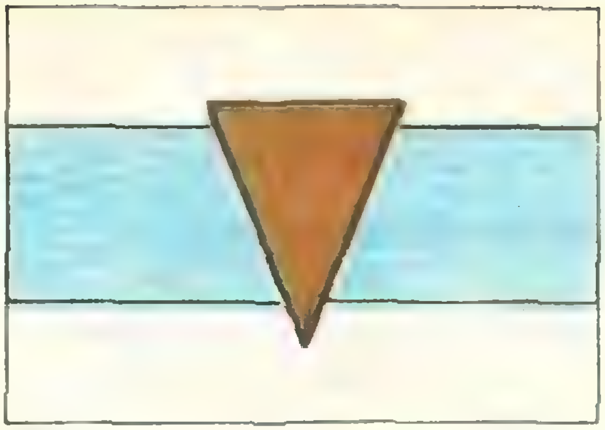


Рис. 2.

Ф296. Каждый из k различных конденсаторов с емкостями C_1, C_2, . . . , C_k заряжен до разности потенциалов U. Затем все конденсаторы соединены последовательно разноименными полюсами в замкнутую цепь. Найти напряжение на каждом конденсаторе в этой цепи.

Б. Б. Буховцев

Ф297. Коническая пробка перекрывает сразу два отверстия в плоском сосуде, заполненном жидкостью при давлении p (рис. 2). Радиусы отверстий R и r. Определить суммарную силу, действующую на пробку со стороны жидкости. Поле тяжести не учитывать.

О. Я. Савченко

Решения задач

М241—М245; Ф248—Ф252

М241: *Докажите, что*

$$3^{1974}+5^{1974}$$

делится на 13.

Автор задачи *С. И. Майзус* предложил такое довольно хитрое решение. Запишем число $3^{1974}+5^{1974}$ в виде суммы

$$(3^{1974}+2^{1974})+(5^{1974}-2^{1974})$$

и докажем, что каждая скобка делится на 13.

1°. При любых целых a, b и нечетном n a^n+b^n делится на $a+b$:

$$a^n+b^n=(a+b)\times$$
$$\times(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}).$$

Поэтому

$$(3^2)^{987}+(2^2)^{987}=9^{987}+4^{987}$$

делится на 13.

2°. При любых целых a, b и натуральном n a^n-b^n делится на $a-b$:

$$a^n-b^n=(a-b)\times$$
$$\times(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}).$$

Поэтому

$$(5^3)^{658}-(2^3)^{658}=125^{658}-8^{658}$$

делится на $125-8=117=9\cdot 13$.

Большинство читателей предлагают более естественное решение, пригодное для любых аналогичных примеров.

Будем следить за тем, какие остатки дают степени 3 и 5 при делении на 13. Обозначим эти остатки чисел 3^n и 5^n через r_n и r_n соответственно. Последовательно находим остатки r_n при делении 3^n на 13:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
r_n	1	3	9	1	3	9	1	...

(Для того чтобы составлять такую таблицу, вовсе не нужно делить 3^5, 3^6, .. на 13: ясно, что если 3^n-r_n делится на 13, то $3^{n+1}-3r_n$ тоже делится на 13, так что остаток r_{n+1} можно получить просто как остаток при делении $3r_n$ на 13.) Таким образом, остатки повторяются с периодом 3, и поскольку 1974 делится на 3, то $r_{1974}=r_0=1$.

Для остатков, получающихся при делении на 13 чисел 5^n, имеем такую таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
r'_n	1	5	12	8	1	5	12	...

Здесь период равен 4, и $r'_{1974}=r'_2=12$. Таким образом, 3^{1974} дает в остатке 1, 5^{1974} дает в остатке 12, а их сумма делится на 13.

Подробнее о закономерностях, которые встречаются в последовательности остатков чисел a^n ($n=0, 1, 2, \ldots$) при делении на некоторое простое p, рассказано в статье С. Г. Гиндикина «Малая теорема Ферма», «Квант» № 10, 1972.

М242. *Пусть A_iH_i — высота и A_iM_i — медиана, проведенные из вершины A_i остроугольного треугольника $A_1A_2A_3$ ($i=1, 2, 3$). Докажите, что одно из трех произведений $|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|$, $|H_2M_2|\cdot|A_3A_1|$, $|H_3M_3|\cdot|A_1A_2|$ равно сумме двух других* *). *Верно ли это утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольника?*

Докажем, что это утверждение верно для любого треугольника. Выразим произведение $|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|$ через длины сторон

$$|A_2A_3|=a_1,\ |A_3A_1|=a_2,\ |A_1A_2|=a_3.$$

Из теоремы Пифагора, примененной к $\triangle A_1H_1A_2$ и $\triangle A_1H_1A_3$ следует, что (рис. 1)

$$|A_1H_1|^2=|A_1A_2|^2-|A_2H_1|^2=$$
$$=|A_1A_3|^2-|A_3H_1|^2,$$

откуда

$$|A_2H_1|^2-|A_3H_1|^2=a_3^2-a_2^2. \qquad (1)$$

Докажем, что по модулю разность (1) равна $2|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|$.

Чтобы не рассматривать отдельно случаи различного расположения точки H_1 относительно точек A_2, M_1, A_3, введем на прямой A_2A_3 систему координат. Примем за начало отсчета точку M_1. Пусть координаты точек A_2, A_3 и H_1 соответственно

---

*) Через $|KL|$ обозначается длина отрезка с концами K и L.

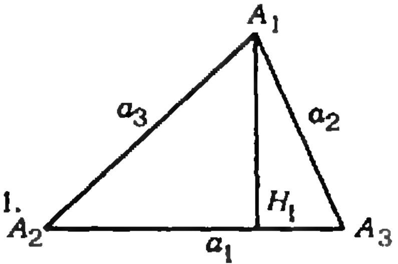


Рис. 1.

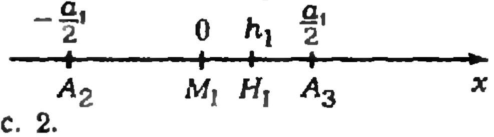


Рис. 2.

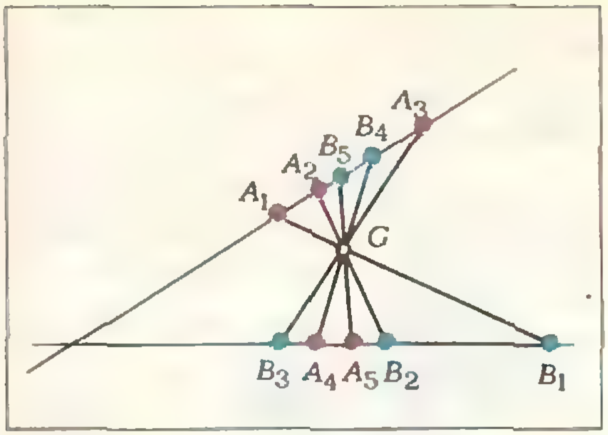


Рис. 3.

равны $-\frac{a_1}{2}$, $\frac{a_1}{2}$ и h_1 (рис. 2). Расстояние между точками с координатами x_1 и x_2 равно $|x_2 - x_1|$, поэтому

$$|A_2H_1|^2 - |A_3H_1|^2 =$$
$$= \left|h_1 + \frac{a_1}{2}\right|^2 - \left|h_1 - \frac{a_1}{2}\right|^2 =$$
$$= \left(h_1 + \frac{a_1}{2}\right)^2 - \left(h_1 - \frac{a_1}{2}\right)^2 = 2h_1a_1. \quad (2)$$

Поскольку $|h_1| = |H_1M_1|$, то из (1) и (2) вытекает равенство

$$2\,|H_1M_1|\cdot|A_2A_3| = |a_3^2 - a_2^2|.$$

Аналогично доказываются равенства

$$2\,|H_2M_2|\cdot|A_3A_1| = |a_1^2 - a_3^2|,$$
$$2\,|H_3M_3|\cdot|A_1A_2| = |a_2^2 - a_1^2|.$$

Но сумма трех чисел $a_3^2 - a_2^2$, $a_1^2 - a_3^2$ и $a_2^2 - a_1^2$ равна 0. Поэтому модуль одного из них равен сумме модулей двух других. Отсюда следует утверждение задачи.

(Если обозначения вершин выбрать так, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, то

$$|a_1^2 - a_3^2| = |a_1^2 - a_2^2| + |a_2^2 - a_3^2|$$

и, стало быть,

$$|H_2M_2|\cdot|A_3A_1| = |H_1M_1|\cdot|A_2A_3| + |H_3M_3|\cdot|A_1A_2|.)$$

Н. Б. Васильев

М243. *n отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n (рис. 3) расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых, оканчивается на другой прямой, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) — центр тяжести единичных масс, помещенных в точках A_1, A_2, ..., A_n. Докажите, что*

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + \ldots + \frac{A_nG}{GB_n} = n.$$

Мы немного обобщим формулировку данной задачи, именно, будем считать, что в точках A_i находятся не единичные массы, а массы m_i (точка G — центр тяжести масс m_i, расположенных в точках A_i). Докажем, что тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{A_iG}{B_iG} = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Поместим в каждую из точек B_i массу $M_i = m_i \frac{A_iG}{B_iG}$. Тогда центр тяжести пары точек B_i и A_i (для всех i) будет находиться в точке G. Мы предполагаем, что не все точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на одной прямой (для удобства обозначим наши прямые буквами l_1 и l_2). Центр тяжести точек A_i, лежащих на прямой l_1, обозначим через C_1; соответственно центр тяжести точек A_i, находящихся на l_2, обозначим через C_2. Аналогично, центр тяжести точек B_i, лежащих на прямой l_k ($k = 1, 2$), обозначим через D_k. Соответствующие массы обозначим $P(C_1)$, $P(C_2)$, $P(D_1)$, $P(D_2)$.

Из условия задачи следует, что центр тяжести точек C_1 и C_2 будет в точке G. С другой стороны, из выбора масс M_i следует, что центр тяжести точек C_1 и D_2 будет также в точке G. Поэтому должно быть $P(C_2) = P(D_2)$. Аналогично получаем $P(C_1) = P(D_1)$; значит,

$$P(C_1) + P(C_2) = P(D_1) + P(D_2).$$

Но $P(C_1) + P(C_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, а $P(D_1) +$

$$P(D_2) = \sum_{i=1}^{n} M_i,$$ то есть

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{A_iG}{B_iG},$$

что и требовалось доказать.

Б. Д. Гинзбург

М244. *Даны два набора из n вещественных чисел:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ и } b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) из $a_i < a_j$ следует, что $b_i \leqslant b_j$;

б) из $a_i < a < a_j$, где $a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, следует, что $b_i \leqslant b_j$,*

то верно неравенство

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant$$
$$\geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \times$$
$$\times (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Так как из пункта б) следует пункт а), мы решим сразу пункт б).

Предположим, что при некоторых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_n b_n) < \\ < (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \times \\ \times (b_1 + b_2 + \ldots + b_n). \qquad (1)$$

Если не все a_i равны между собой, то найдутся a_i и a_j такие, что $a_i < a < a_j$. Рассмотрим числа a и $a_i + a_j - a$; большим из этих чисел заменим a_j, а меньшим a_i (понятно, что при этом a_i увеличивается, а a_j — уменьшается, причем на одну и ту же величину $\Delta > 0$, так что $\overset{\bullet}{a}_i = a_i + \Delta$, $\overset{\bullet}{a}_j = a_j - \Delta$).

Новые наборы $\{\overset{\bullet}{a}_i\}$, $\{b_i\}$ по-прежнему будут удовлетворять условию задачи. Если в новом наборе $\{\overset{\bullet}{a}_i\}$ не все числа оказываются одинаковыми, то снова проделаем указанную выше операцию и т. д. После конечного числа шагов мы получим набор, в котором уже все числа $\{a_i\}$ равны между собой и равны a. Причем, поскольку на каждом шаге правая часть неравенства (1) не менялась $(\overset{\bullet}{a}_i + \overset{\bullet}{a}_j = a_i + a_j)$, а левая — убывала $(\overset{\bullet}{a}_i b_i + \overset{\bullet}{a}_i b_j = (a_i + \Delta) b_i + (a_j - \Delta) b_j = a_ib_i + a_jb_j + \Delta(b_i - b_j) < a_ib_i + a_jb_j$, так как $b_i - b_j < 0$, а $\Delta > 0$), то и для последнего набора неравенство (1) должно выполняться. Но если все a_i равны a, то и левая и правая части неравенства (1) одинаковы и равны $na(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, а это противоречит нашему предположению о том, что при некоторых значениях $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ имеет место неравенство (1). Тем самым задача решена: при всех значениях $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, удовлетворяющих условию задачи, будет

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant \\ \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \times \\ (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Л. Г. Лиманов

М245. *Предлагается построить N точек на плоскости так, чтобы все попарные расстояния между ними равнялись заранее заданным числам: для каждых двух точек M_i, M_j известно, чему должно равняться расстояние $|M_iM_j| = r_{ij}$ (i и j — любые числа от 1 до N).*

а) Можно ли произвести построение, если расстояния r_{ij} заданы так, что всякие 5 из N точек построить можно?

б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из N точек?

в) Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее K, для которого возможность построения любых K из данных N точек обеспечивает построение и всех N точек?

а) Возможны два взаимно исключающих друг друга случая.

1°. Всякие пять из N точек, построенных с соблюдением требований задачи, оказываются расположенными на одной прямой.

2°. Не всякие пять из N точек оказываются на одной прямой: по крайней мере три точки образуют треугольник; пусть это будут точки M_1, M_2 и M_3 (этого всегда можно добиться, меняя, если нужно, нумерацию чисел r_{ij}).

Рассмотрим сначала более общий случай 2°. Докажем, что в случае 2° все N точек построить можно. Построим $\triangle M_1M_2M_3$ (так, чтобы $M_1M_2 = r_{12}$, $M_1M_3 = r_{13}$, $M_2M_3 = r_{23}$). Так как по условию можно построить на плоскости любые пять из N точек, то четыре из N точек тем более можно построить (так, чтобы расстояния между ними равнялись заданным числам).

Воспользовавшись этим, построим поочередно точки M_4, M_5, $\ldots$, M_N, следя при построении точки M_k $(4 \leqslant k \leqslant N)$ лишь за тем, чтобы $M_1M_k = r_{1k}$, $M_2M_k = r_{2k}$ и $M_3M_k = r_{3k}$.

Нам понадобится следующая

Лемма. *Даны четыре точки на плоскости: A, B, C и D; A, B и C не лежат на одной прямой. Пусть E такая точка, что $AE = AD$, $BE = BD$ и $CE = CD$. Тогда E обязательно совпадает с D.*

Доказательство. $AE = AD$ и $BE = BD$; значит, если E и D не совпадают, то они симметричны относительно AB. Аналогично, если E и D не совпадают, то они симметричны относительно AC (и относительно BC). Так как две точки не могут быть одновременно симметричны и относительно AB, и относительно AC, то, значит $E = D$.

Вернемся к решению нашей задачи.

Согласно лемме положение точки M_k $(4 \leqslant k \leqslant N)$ всякий раз определяется однозначно. Проверим, что построенные таким образом точки — искомые: для любых i и j расстояние $M_iM_j = r_{ij}$.

Если хотя бы один из индексов равен 1, 2 или 3, то это следует непосредственно из построения. Пусть оба индекса, i и j, больше 3. Построим на плоскости пять точек A_1, A_2, A_3, A_i и A_j так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись заданным числом (в частности, $A_iA_j = r_{ij}$) — по условию это сделать можно. Передвинем пятиугольник $A_1A_2A_3A_iA_j$ так, чтобы $\triangle A_1A_2A_3$ совпал с $\triangle M_1M_2M_3$ (эти два треугольника равны). По лемме точки A_i и A_j совпадут при этом с точками M_i и M_j. Тем самым $M_iM_j = r_{ij}$, что и требовалось доказать.

В случае 1° (когда любые пять точек оказываются на одной прямой) все N точек тем более можно построить, поскольку верно следующее утверждение:

Пусть нужно построить N точек на прямой (так, чтобы попарные расстояния

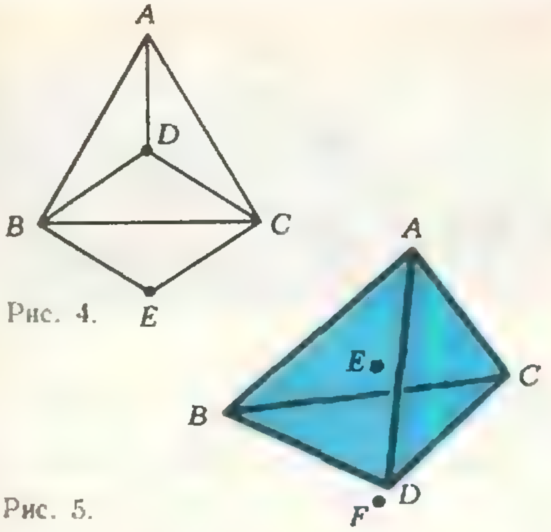


Рис. 4.

Рис. 5.

между ними равнялись заданным числам r_{ij}). Числа r_{ij} заданы так, что всякие четыре из N точек построить можно. Тогда можно построить *все N точек.*

Доказывается это утверждение в точности по той же схеме, что и выше.

б) В общем случае из возможности построения любых *четырех точек не следует* возможность построения всех N точек. Приведем соответствующий пример для $N = 5$.

Пусть D — центр правильного треугольника ABC (рис. 4), E — точка, симметричная D относительно BC. Положим $r_{12} = r_{13} = r_{23} = AB$, $r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{15} = r_{25} = r_{35} = AD$, $r_{45} = DE$. Построить пять точек $M_1, \ldots, M_5$ так, чтобы $M_iM_j = r_{ij}$ при всех i и j, очевидно, невозможно: если выполнены 9 равенств $M_iM_j = r_{ij}$ (все, кроме $M_4M_5 = r_{45}$), то по лемме $M_4 = M_5$; значит, все 10 равенств одновременно выполняться не могут. Вместе с тем любые четыре точки из пяти построить можно: все точки, кроме M_4 и все, кроме M_5, образуют конфигурацию $ABCD$; остальные три «четверки» точек образуют конфигурацию $BDCE$ на рисунке. 4.

в) В случае построения точек не на плоскости, а в пространстве, *наименьшее* число K, такое, чтобы возможность построения любых K из N точек, обеспечивала построение и всех N точек, равно *шести.*

То, что шести точек достаточно, доказывается так же, как и в пункте а). То, что *пяти* точек мало, следует, как и в пункте б), из рисунка 5, где E — центр правильного тетраэдра $ABCD$, а F — точка, симметричная точке E относительно грани $KBCD$.

М. Л. Гервер

Ф248. *Тонкий тяжелый обруч радиуса R с очень легкими спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. К обручу прикрепили маленький шарик, масса которого равна массе обруча. Найти период малых колебаний обруча с шариком. Для этого можно попытаться найти аналогию в движении обруча с шариком и математического маятника.*

Обычный способ найти период колебаний маятника заключается в том, что записывается уравнение движения маятника и затем, используя связь периода колебаний с коэффициентами в уравнении движения, находится сам период. В данном случае нам пришлось бы записать уравнение вращательного движения обруча. Имеется, однако, и другой способ — сравнить движение рассматриваемого маятника с движением математического маятника. Воспользуемся этим способом.

Очевидно, что в положении равновесия обруча с шариком шарик занимает крайнее нижнее положение и радиус-вектор, соединяющий шарик с осью вращения, вертикален. Найдем скорость шарика в тот момент, когда радиус-вектор составляет с вертикалью угол α, и сравним ее со скоростью математического маятника, когда его нить образует с верикалью тоже угол α. Естественно считать, что длина нити математического маятника равна R и что одинаковы максимальные отклонения от положения равновесия (высоты h_0 на рис. 6, *а* и *б*).

Из закона сохранения энергии следует, что

$$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2} + W_{вр},$$

где $mgh + \frac{mv^2}{2}$ — энергия шарика, а $W_{вр}$ — энергия вращательного движения самого обруча.

Так как все точки обруча в каждый данный момент времени движутся с одинаковой по абсолютной величине скоростью v, то кинетическая энергия $W_{вр}$ вращательного движения обруча равна

$$W_{вр} = \frac{mv^2}{2}.$$

Поэтому

$$mgh_0 - mgh = 2\frac{mv^2}{2}$$

и

$$v = \sqrt{g(h_0 - h)}.$$

В случае математического маятника имеем:

$$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2},$$

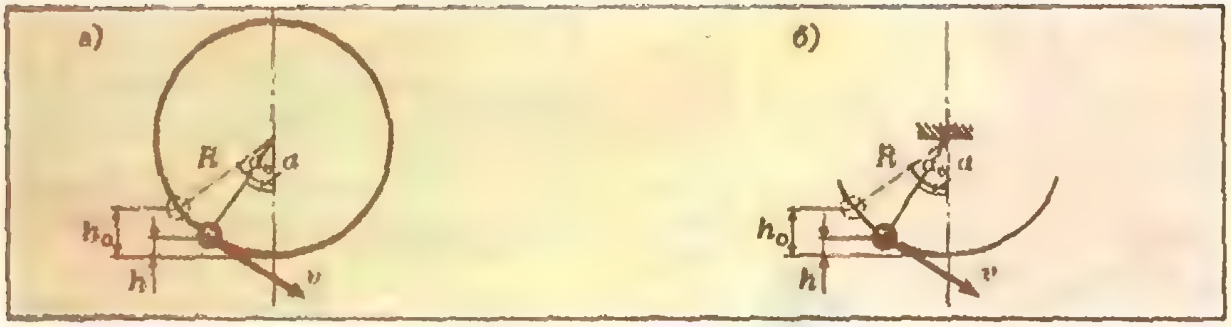


Рис. 6.

откуда

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)}.$$

Мы видим, что при любом положении шарика (то есть при любом h) скорость маятника, который представляет собой обруч с шариком, в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости математического маятника. Это означает, что любой участок траектории шарик проходит в $\sqrt{2}$ раз медленнее, чем математический маятник, так как средняя скорость на этом участке меньше в $\sqrt{2}$ раз. Следовательно, период колебаний этого маятника T_1 в $\sqrt{2}$ раз больше периода колебаний математического маятника T и поэтому равен

$$T_1 = \sqrt{2}\,T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Ф249. *Невесомый стержень, на концах которого закреплены шарики массами m и M, опирается серединой на жесткую подставку, вокруг которой он может свободно вращаться в вертикальной плоскости. В начальный момент стержень расположен горизонтально, а скорость его равна нулю. С какой силой давит он в этот момент на подставку?*

Сила давления на подставку $\mathbf{F}_д$ равна сумме сил давления $\mathbf{F}_{д.1}$ и $\mathbf{F}_{д.2}$ шариков на стержень, так как сам стержень невесомый.

На каждый из шариков действуют две силы: сила тяжести и сила реакции со стороны стержня, которая по третьему закону Ньютона равна по величине силе давления шарика на стержень (рис. 7).

Запишем уравнения движения шариков:

$$Mg - F_{р.1} = Ma, \qquad (1)$$

$$F_{р.2} - mg = ma. \qquad (2)$$

Заметим, что силы $\mathbf{F}_{р.1}$ и $\mathbf{F}_{р.2}$ равны. Действительно, вращение самого стержня относительно оси, проходящей через его середину, вызывается моментами сил $\mathbf{F}_{д.1}$ и $\mathbf{F}_{д.2}$, но поскольку стержень невесомый, на его вращение не надо затрачивать никаких усилий. Следовательно, моменты сил $\mathbf{F}_{д.1}$ и $\mathbf{F}_{д.2}$ одинаковы. А так как одинаковы плечи, то равны и сами силы.

Таким образом, из (1) и (2) с учетом того, что $\mathbf{F}_{р.1} = \mathbf{F}_{р.2}$ (так как силы реакции равны по величине соответствующим силам давления), получаем

$$F_{р.1} = F_{р.2} = \frac{2Mmg}{M+m}.$$

Тогда сила давления на подставку, равная по абсолютной величине сумме сил реакции, равна

$$F_д = F_{д.1} + F_{д.2} = F_{р.1} + F_{р.2} = \frac{4Mmg}{M+m}.$$

Ф250. *Одинаковые заряды q находятся на расстояниях a и b от заземленной сферы малого радиуса r (рис. 8). Расстояние до поверхности земли и других заземленных предметов много больше a и b. Найти силу, с которой заряды действуют на сферу.*

Под влиянием внешних зарядов на заземленной сфере наведется некоторый заряд Q

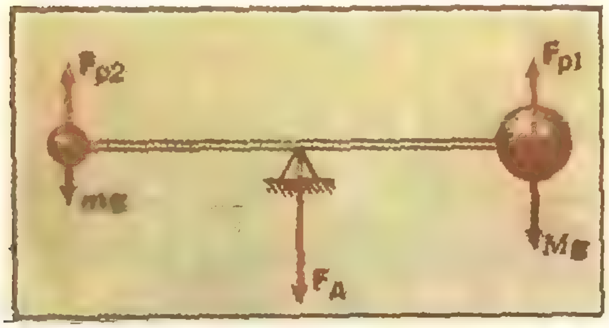


Рис. 7.

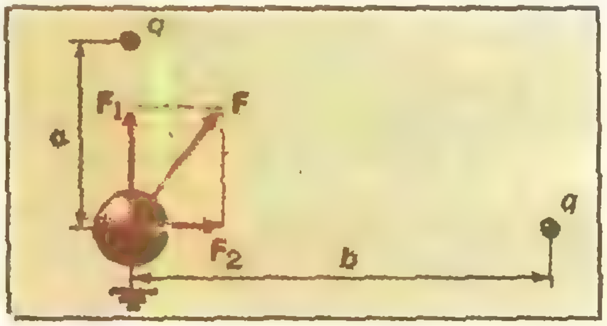


Рис. 8.

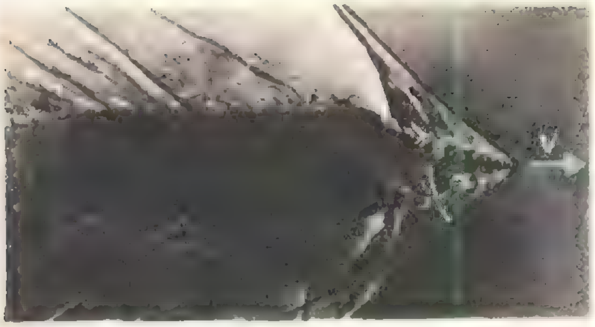


Рис. 9.

который соответствующим образом распределится *по поверхности* сферы. Найдем величину этого заряда.

Так как сфера заземлена, потенциал ее поверхности равен нулю. Но если внутри проводящей оболочки нет зарядов, то электрическое поле там отсутствует. Поэтому потенциал любой точки внутри сферы равен потенциалу на ее поверхности, то есть в нашем случае равен нулю.

В то же время согласно принципу суперпозиции потенциал поля в центре сферы (будем рассматривать именно эту точку) равен сумме потенциалов полей зарядов q и заряда сферы Q:

$$\varphi_0 = 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \varphi_Q.$$

Для того чтобы найти потенциал поля заряженной сферы, разобьем поверхность сферы на такие малые участки, что заряды на них можно считать точечными. Потенциал поля в центре сферы от произвольного участка равен

$$\varphi_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где ΔQ_i — заряд этого участка. Очевидно, что потенциал поля всего заряда Q в центре сферы будет равен

$$\varphi_Q = \Sigma\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\Sigma Q_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Таким образом,

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0,$$

откуда

$$Q = -qr\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Теперь нетрудно подсчитать силу, действующую на сферу. Поскольку радиус сферы мал по сравнению с расстояниями a и b, можно считать, что заряд сферы Q является точечным и находится в центре сферы. Поэтому (см. рис. 8)

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2},$$

где

$$F_1 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 b^2}.$$

Подставив найденное выше значение заряда Q, получим окончательно

$$F = \frac{q^2 r}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}}.$$

Ф251. *На фотографии летящей пули (рис. 9) видны звуковые волны, которые возбуждаются при движении пули. (Такую фотографию удалось получить благодаря тому, что области, в которых плотность воздуха различна, по-разному преломляют световые лучи.) Воспользовавшись линейкой, определите примерную величину скорости пули. Скорость звука в воздухе равна 340 м/с.*

Из каждой точки траектории пули распространяется *сферическая* звуковая волна. Эти волны, складываясь, дают картину, которая существенно зависит от соотношения между скоростью пули и скоростью звука. Если скорость звука больше скорости пули, то волны, которые излучаются в разных точках, никогда не смогут догнать друг друга (рис. 10). Если же скорость пули больше скорости звука, то фронты волн будут пересекаться, как показано на рисунке 11, и, складываясь, эти волны будут образовывать «усы», расходящиеся от пули, аналогичные «усам», идущим от носа глиссера. Эти «усы» представляют собой огибающие фронтов сферических звуковых волн. Подобная картина

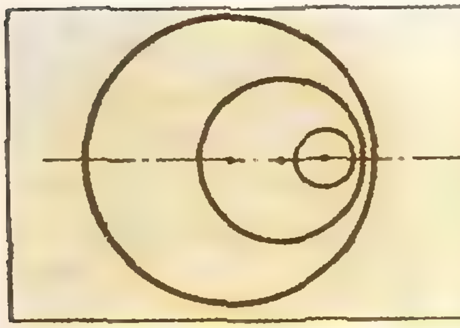


Рис. 10.

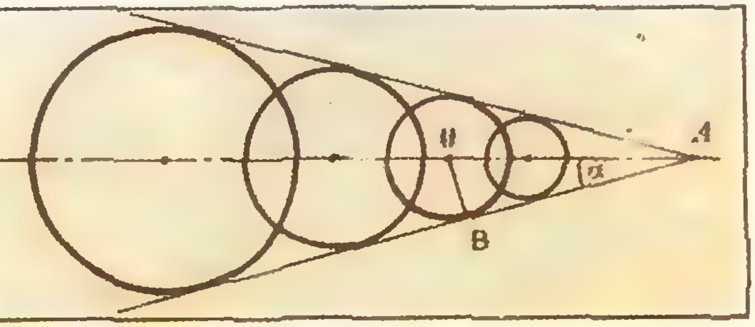


Рис. 11.

представлена на фотографии. Следовательно, пуля двигалась со скоростью v, большей скорости звука u.

Угол между «усами» простым образом связан с отношением скоростей пули и звука. Так как за время t пуля пролетает расстояние $OA = vt$ (см. рис. 11), а звук из точки O проходит расстояние $OB = ut$, то

$$\sin\alpha = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v}.$$

В нашем случае $\alpha \approx 45°$ и поэтому

$$v \approx 480\ м/с.$$

Ф252. *На цилиндрический столб намотан канат. За один из концов каната тянут с силой F. Для того чтобы канат не скользил по столбу, когда на столб намотан только один виток каната, второй конец каната нужно удерживать с силой f. С какой силой нужно удерживать этот конец каната, если на столб намотано n его витков? Как изменится сила f, если взять столб вдвое большего радиуса? (Сила f не зависит от толщины каната.)*

Сила f может зависеть только от диаметра столба d, коэффициента трения μ между столбом и канатом и от величины силы F. Однако из соображений размерности можно сделать вывод, что

$$f \sim F.$$

Действительно, невозможно подобрать такую комбинацию из F, μ и d, чтобы она имела размерность силы.

Таким образом,

$$f = kF,$$

где коэффициент пропорциональности k связан с коэффициентом трения каната о столб.

Из этой формулы сразу же следует, что при любом изменении радиуса столба сила f останется прежней.

Для того чтобы ответить на первый вопрос задачи, рассмотрим второй виток каната. Для него роль силы F играет сила f, поэтому

$$f_2 = kf,$$

где f_2 — сила, которую надо приложить к свободному концу каната, когда на столб намотано два витка. Для третьего витка

$$f_3 = kf_2 = k^2 f$$

и так далее.

Для n-го витка получим

$$f_n = kf_{n-1} = k^2 f_{n-2} = \ldots = k^{n-1} f.$$

Из первого равенства найдем коэффициент k:

$$k = \frac{f}{F}.$$

Следовательно

$$f_n = k^{n-1} f = \left(\frac{f}{F}\right)^{n-1} f.$$

И. Ш. Слободецкий

В этом номере мы приводим список читателей, приславших в редакцию верные решения задач **М231—М245**. В большинстве писем содержалось верное решение задач **М231**, **М241** и **М242**. Остальные задачи решили (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи): *А. Абдуррахманов* (Баку) **34, 38**; *П. Агаронов* (Баку) **36, 40**; *С. Агеев* (Воронеж) **34, 36—38, 40, 43**; *Д. Азов* (Челябинск) **34, 36, 38**; *М. Аронов* (Володарск Горьковской обл.) **45а**; *В. Ашихмин* (Таллин) **43**; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) **34, 36, 44**; *П. Баньковский* (Уральск) **36, 37, 40, 43**; *П. Барсуков* (Пятигорск) **37**; *В. Басманов* (Воронеж) **34, 35, 37, 39, 40**; *И. Бахмутский* (Львов) **34**; *Я. Беленький* (Москва) **44**; *В. Беляев* (Москва) **37**; *А. Берлин* (Бобруйск) **32, 43**; *В. Бильдин* (с. Молодия Черновицкой обл.) **43, 44**; *А. Блох* (Харьков) **32, 43, 44**; *А. Браилов* (Москва) **35, 38, 40**; *А. Вальков* (Ташкент) **34, 37, 38, 40, 43**; *Р. Вассерман* (Одесса) **44**; *А. Векслер* (Ташкент) **37, 39**; *А. Волков* (Челябинск) **40**; *Г. Воль* (Ворошиловград) **34**; *С. Всеволод* (с. Куйзовка МССР) **34**; *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл.) **32, 34—36, 38—40, 43—45**; *В. Галоян* (Октемберян Арм. ССР) **34**; *В. Гальперин* (Москва) **34**; *А. Гончаров* (Никополь) **32—33, 36, 37**; *Е. Горбатый* (Одесса) **34, 36, 38—40, 44**; *М. Грабельковский* (Воронеж) **32**; *А. Григорян* (Баку) **32, 34, 36—40, 43—45**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **34**; *К. Данильченко* (Волгоград) **36, 38**; *П. Дедик* (Москва) **33, 34, 36—38, 40, 43, 44**; *С. Дориевич* (Ленинград) **36, 38**; *Н. Довжиков* (Ленинград) **34**; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) **34, 37, 43**; *А. Еременко* (Харьков) **34**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **36, 38—40**; *Г. Зайцев* (Кимры Калинниской обл.) **44**; *М. Закс* (Пермь) **43**; *С. Золотарев* (Москва) **36**; *В. Иващук* (Киев) **32, 34, 43**; *И. Калика* (Киев) **35**; *В. Калабин* (Москва) **45а**; *А. Карабегов* (Ереван) **32—38, 40**; *П. Кацыло* (Москва) **36, 38—40, 43**; *Н. Киричук* (Луцк) **37**; *В. Конев* (Ангарск) **34**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **37, 39, 40, 43, 44**; *А. Кукуш* (Киев) **32, 34**; *А. Куряндчик* (Вильнюс) **33, 34, 36, 37, 39, 43**; *А. Лебедев* (Бийск Алтайского края) **43**; *М. Левин* (Витебск) **38, 39**; *А. Леонтьев* (Щигры Курской обл.) **37, 43**; *М. Любич* (Харьков) **32—34, 36, 37, 43, 44**; *А. Макаричев* (Львов) **32, 34, 36, 40, 43**; *С. Малинский* (Полтава) **34**; *С. Мерзляков* (Уфа) **34**; *В. Мильман* (Минск) **36—38**; *В. Митюк* (Ружин Житомирской обл.) **34**; *Ю. Михайлов* (Ленинград) **33, 34**; *Л. Михлин* (Курск) **32, 34, 36**; *С. Насыров* (Казань) **43, 45б**; *Н. Нецветаев* (Ленинград) **32—36, 38; 43**; *С. Нужный* (Куйбышев) **34**; *О. Окунев* (Казань) **43**; *И. Панин* (Ленинград) **34**; *Е. Парилис* (Ташкент) **43, 44**; *Б. Певзнер* (Москва) **37, 40**; *Н. Петров* (Болгария) **38**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **33, 34, 40,, 43**; *А. Плахов* (Москва) **40**; *А. Поблагуев* (Винница) **45а**;

М. Половинник (Мена Черниговской обл.) **36, 37**; *А. Поносов* (Пермь) **32—34, 36, 38, 39, 43, 44**; *В. Поркшеян* (Ростов-на-Дону) **37, 45а**; *В. Прасолов* (Ворошиловград) **33—35**; *Л. Рабинович* (Тула) **32—34, 36, 39**; *А. Рапацкий* (Братск) **34**; *А. Резников* (Киев) **37, 40**; *Р. Рожков* (Москва) **43**; *Ф. Рожков* (Рязань) **43**; *В. Ронкин* (Харьков) **37, 40**; *Б. Соломяк* (Ленинград) **43**; *М. Ситников* (Москва) **43**; *Г. Скляр* (Харьков) **32—34**; *С. Скоков* (д. Соковни, г. Слободской) **37**; *В. Слепой* (Фрунзе) **37, 43**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края)**34—38, 43, 44**; *А. Слинкин* (Москва) **43, 44**; *И. Смирнов* (Москва) **34**; *А. Соломахов* (Москва) **34**; *Ю. Соркин* (Москва) **38**; *К. Стемиак* (Польша) **43**; *А. Торнопольский* (Коростень) **34**; *К. Тевосян* (Абовян Арм. ССР) **34**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **32—34, 43, 44, 45 б**; *В. Урываев* (Москва) **43**; *И. Усвят* (Ташкент) **34**; *С. Финашин* (Ленинград) **32—34, 36, 43—45**; *Г. Храпунович* (Ленинград) **40**; *И. Цукерман* (Ленинград) **34, 36, 37, 39, 40**; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) **37**; *М. Чеповецкий* (Ленинград) **34**; *А. Черебатов* (Омск) **36, 40, 43, 44**; *И. Чернов* (Кривой Рог) **32, 34**; *Р. Шаринов* (Казань) **40**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **43, 44, 45**; *О. Шор* (Харьков) **44**; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **32, 34**; *И. Юнус* (Харьков) **34, 36, 37, 43, 45**; *С. Юркевич* (Ленинград) **32—34, 43**; *Б. Юсин* (Москва) **32—34, 36—40, 44, 45**; *Р. Ямилов* (Уфа) **34, 36, 37**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **37**.

Ю. П. Лысов

Правильные решения задач **Ф243—Ф252** прислали следующие читатели (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *Д. Азов* (Челябинск) **6, 8, 9, 0, 1**; *Р. Акбаров* (Андижан) **9, 0, 1**; *Ю. Алекна* (Алитус) **8, 1**; *И. Алексеева* (Миасс) **9**; *П. Анциферов* (Фатеж) **4, 6, 7, 9, 0, 1**; *В. Ашихмин* (Таллин) **8, 1, 2**; *Р. Бабчанник* (с. Манома Хабаровского края) **3, 4, 9, 0**; *В. Бакуров* (Новосибирск) **4, 6, 8, 9, 1, 2**; *А. Бараов* (Москва) **4, 6**; *А. Барсуков* (Пятигорск) **9**; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) **8, 9, 1, 2**; *В. Бганцов* (Рубежное) **9**; *Л. Бейгельман* (Калининград) **6**; *В. Беляев* (Москва) **3, 4, 8, 9, 0, 1**; *П. Бендорюс* (п/о Паюрис Лит. ССР) **1**; *В. Бенхан* (Калинин) **9**; *С. Березин* (Кимры) **3, 4, 6, 8, 2**; *А. Берлин* (Бобруйск) **8, 1**; *М. Бижоев* (с. Старый Урух КБАССР) **3**; *С. Бобков* (Курган) **6, 8, 9**; *Л. Богомолов* (Одесса) **4, 6, 9, 1, 2**; *А. Браславец* (Новосибирск) **1**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **4**; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) **4, 7**; *Ю. Бучинскас* (Шилальский р-н Лит. ССР) **4, 6, 8, 9, 1, 2**; *А. Бушмакин* (Иваново БАССР) **1**; *Ю. Вавич* (Кировоград УССР) **9**; *А. Визитов* (п. Глыбокое Черновицкой обл.) **6**; *В. Винс* (с. Андреевка Омской обл.) **8**; *И. Виняр* (Оргеев) **9, 1**; *А. Волков* (Челябинск) **1**; *П. Волохов* (Криуляны) **1**; *Д. Габриэльян* (Белая Калитва) **8**; *С. Гаврилов* (Свердловск) **6**; *В. Гаврилюк* (Минск) **8, 9, 0, 1**; *В. Галцев* (Оренбург) **1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **9**; *С. Герц* (Хуст) **9**; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) **4**; *Л. Глазман* (Харьков) **3, 4, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2**; *И. Голдовский* (Брянск) **6**; *В. Голутва* (п. Высокополье Херсонской обл.) **1, 2**; *Е. Горбатый* (Одесса) **8, 0, 1**; *В. Гребень* (д. Белоуша Брестской обл.) **9**; *С. Григорьев* (Ессентуки) **6**; *А. Гринберг* (Кишинев) **8, 1**; *И. Гринштейн* (Одесса) **8, 9, 1**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **4, 6, 2**; *И. Грушецкий* (Екабпилс) **3, 1**; *В. Губени* (Угнев Львовской обл.) **3, 1**; *М. Гулянский* (Магнитогорск) **3, 4, 6**; *А. Гуревич* (Минск) **4, 6, 8, 9, 0, 1**; *А. Давыдкин* (Горький) **1**; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **6**; *А. Дмитриенко* (Воронеж) **9, 1, 2**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **4, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2**; *А. Дробинин* (Евпатория) **4, 6, 9, 1, 2**; *И. Дубровский* (Омск) **8, 0, 1**; *В. Дяченко* (Гадяч) **8**; *Р. Егорян* (Раздан) **8, 9, 1**; *С. Ержанова* (с. Баршечтол Семипалатинской обл.) **8**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **8, 9, 2**; *В. Железнов* (п. Октябрьский Амурской обл.) **6, 9**; *В. Жук* (Грозный) **6, 8, 9, 0, 2**; *Д. Жуховицкий* (Магадан) **6**; *С. Загидулин* (Феодосия) **1**; *С. Зазовский* (Новомосковск Тульской обл.) **6, 2**; *С. Закурин* (п. Мышкино Ярославской обл.) **2**; *Р. Залавутдинов* (Канаш) **8, 0**; *Ю. Зельдин* (Орша) **2**; *С. Зенович* (Ташкент) **9, 1**; *И. Зорин* (Курск) **8**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **3, 4, 8, 1**; *А. Иванов* (Фергана) **6**; *Т. Иванова* (Москва) **2**; *В. Иващук* (Киев) **4, 6, 8, 9, 0, 1, 2**; *А. Ивлев* (п. Стройкерамики Куйбышевской обл.) **4**; *А. Измайлов* (Баку) **6—9**; *И. Иовик* (Магнитогорск) **2**; *С. Казанцев* (Новокузнецк) **8, 9, 0, 1**; *С. Капляев* (п. Сосновый Бор Ленинградской обл.) **3, 4, 6, 7, 1**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **8, 0, 1**; *В. Карлин* (п. ММС Волоколамского р-на) **6**; *В. Карпухов* (Челябинск) **1**; *В. Картюков* (Батайск); **1**; *К. Кацман* (Мытищи) **4, 6**; *А. Касюм* (Гайворон) **6**; *А. Клочко* (Жуковский) **6, 1**; *Я. Коган* (Глазов) **6—9, 1**; *В. Комаров* (Ачинск) **6**; *И. Кондратенко* (Ворошиловград) **9, 1, 2**; *А. Коптелов* (Челябинск) **1**; *И. Кормильченко* (Орджоникидзе) **2**; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) **4, 6—9, 0, 1, 2**; *Л. Кофлеш* (Таллин) **4, 6, 7**; *Л. Кофман* (Таллин) **8, 9, 0, 1, 2**; *Г. Коява* (Цхинвали) **8, 9, 1**; *С. Крекин* (Магадан) **6**; *В. Кузнецов* (с. Кага БАССР) **6, 9, 0, 1**; *В. Кузьмин* (Грозный) **7, 8**; *А. Лекчинов* (Шахты) **6, 2**; *В. Лисенков* (Киреевск) **8, 1**; *А. Лукьянов* (Дубовский Ростовской обл.) **8**; *Ю. Лурье* (Москва) **9, 0**; *А. Львов* (Саратов) **8, 0, 1, 2**; *В. Мазалов* (Шауляй) **8, 9, 0, 1**; *В. Майоров* (Душанбе) **8**; *С. Макаров* (Саратов) **8, 1, 2**; *В. Малов* (Ташкент) **1**; *Н. Матехин* (Новокузнецк) **3, 4, 9, 0, 1, 2**; *С. Мельник* (Харьков) **3, 4, 6, 9, 1, 2**; *А. Набатчиков* (Курск) **6, 2**; *Р. Нартикоев* (Орджоникидзе); **6**; *А. Немыкин* (Кировабад) **7**; *И. Никитин* (Ленинград) **6, 8, 2**; *В. Николаев* (Канаш) **1, 2**; *Б. Новосядлый* (Чортков) **3**; *Р. Нугаев*

(Казань) 3; *С. Нужный* (Куйбышев) 4, 6, 7; *Г. Оганисян* (Ереван) 4; *А. Оксак* (Ворошиловград) 6; *А. Осин* (Камышин) 1; *Р. Оспанов* (Байрам-Али) 8, 9; *А. Островский* (Алма-Ата) 9; *М. Островский* (Ленинград) 8, 9, 0, 1, 2; *Г. Павлов* (Москва) 6; *П. Паровичников* (Обнинск) 2; *А. Парфентьев* (с. Миосское Челябинской обл.) 8, 1; *Е. Патяева* (Москва) 8; *Ю. Перфильев* (Саратов) 4, 6, 7, 8, 0; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) 3, 4, 6, 7, 9, 0, 1, 2; *К. Пирятинский* (Кишинев) 9; *А. Поблагуев* (Винница) 4, 6; *О. Поваляев* (Подольск) 4, 6, 8, 9, 1; *А. Полянский* (Челябинск) 9, 1, 2; *С. Поляруш* (Жабинка) 6; *Р. Портнэй* (Черновцы) 9; *Ю. Прилепский* (Алма-Ата) 1, 2; *В. Прупис* (Москва) 4; *В. Разин* (Белорецк) 8, 9, 1; *А. Резников* (Киев) 4, 6; *А. Ремеев* (Ташкент) 4, 7, 8, 1; *В. Решетняк* (Киев) 6, 8, 0, 1, 2; *А. Решетов* (Грозный) 1; *Э. Розенкранц* (Магнитогорск) 3, 6, 1, 2; *В. Ройна* (Познань, Польша) 1; *М. Рывкин* (Бобруйск) 4, 6, 8, 1, 2; *В. Рыжиков* (Ахтубинск), 4, 6, 8, 9, 0, 1, 2; *Е. Ряписов* (Ломоносов) 8,0, 1, 2; *А. Савин* (Москва) 8, 1; *П. Самовал* (Гайворон) 6; *И. Сафаргалиев* (с. Янги-Курган Ферганской обл.) 8, 0; *В. Свиридов* (ВНИИСС Воронежской обл.) 6, 8, 9, 2; *С. Семенюк* (ст. Посевная Черепановского р-на) 1; *А. Семченко* (Старые Дороги) 6; *Р. Сергеев* (д. Перебродье Витебской обл.) 2; *А. Синьсовский* (Душанбе) 8; 1; *Р. Сирота* (Харьков) 4, 5, 6, 9, 1, 2; *В. Слепой* (Фрунзе) 2; *В. Смоленков* (Ленинград) 9, 1; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 3—9, 1, 2; *А. Смык* (Красноярск) 6, 8; *И. Снигирев* (с. Чепца УАССР) 1, 2; *М. Султангалиев* (с. Ваныш БАССР) 4, 6; *А. Тралле* (Минск) 8; *Л. Требулёва* (Ташкент) 9, 0; *М. Тульчинский* (Киев) 2; *Д. Узненко* (Магнитогорск) 4; *И. Усвят* (Ташкент) 4, 6; *С. Утнасупов* (Элиста) 8, 9, 0; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *В. Филиппов* (Балашиха) 4, 8; *А. Хомич* (Брест) 6, 8, 9, 0; *С. Хоружий* (Абинск) 1; *Ю. Цыганов*(п. Вербилки Московской обл.) 6, 8, 9, 2; *А . Черников* (Воронеж) 8, 2; *Е. Чернышов* (Ленинград) 1, 2; *А. Шаблатович* (п. Верхнее Синевидное Львовской обл.) 4, 6; *М. Шаймухамбетов* (Алма-Ата) 9, 2; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 4—9, 0, 1, 2; *А. Шень* (Москва), 8, 9, 0, 1, 2; *В. Шнейдман* (Харьков) 3, 4, 7, 8, 9, 1, 2; *В. Шоев* (Фрунзе) 6; *С. Шульга* (Славянск) 3, 4, 7; *О. Щербаков* (Лида) 8, 0, 1, 2.

С. Г. Семенчинский

Максимум найден

В «Кванте» 1973, № 10 была напечатана заметка «Максимум?». Редакцией получено много писем с ответами на помещенную в этой заметке задачу. Все ответы, присланные читателями, оказались правильными. Действительно, рекордное произведение, о котором говорилось в условии задачи и которое было найдено в Японии, равно 7448. Очень приятно, что этой задачей заинтересовались многие читатели, но, к сожалению, не все прислали свои решения, и поэтому в большинстве случаев, невозможно выяснить, как был получен правильный ответ. Решения же тех читателей, которые их прислали, как правило, заключались в переборе возможных вариантов.

Конечно, нахождение решения с использованием таблиц или вычислительных машин не представляет никаких логических трудностей, хотя довольно громоздко и неинтересно. Поэтому наиболее любопытны те решения, которые используют логический анализ приведенной в задаче ситуации и доказывают единственность полученного ответа. Таких решений немного. В первую очередь хочется отметить решения *Андрея Мишина* (Ленинград), *Сергея Тернового* (Волгоград) и *Сергея Гладковского* (г. Георгиевск Ставропольского края). Этим читателям удалось значительно сократить число рассматриваемых комбинаций и довольно быстро прийти к правильному решению. Решение тов. *Челябова* (Махачкала) — полное и правильное, однако оно очень громоздко.

Нельзя не упомянуть и самого молодого из читателей, приславшего правильный ответ на эту задачу — шестиклассника *Леню Чехова* из Москвы.

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Четырехугольники

В. Г. Болтянский

Вспомним прежде всего определение параллелограмма: *четырехугольник* *) *называется параллелограммом, если его противоположные стороны попарно параллельны.* Разберемся в структуре этого определения.

Во-первых, следует отметить общий характер этого определения: его можно применять к любому четырехугольнику (хотя в определении это явно и не сказано). Иными словами, какой бы четырехугольник мы ни взяли, стоит только убедиться, что его противоположные стороны попарно параллельны, и мы скажем, что это — параллелограмм.

Во-вторых, следует отметить, что попарная параллельность противоположных сторон является необходимым и достаточным условием для того, чтобы мы могли назвать четырехугольник параллелограммом. Иначе говоря, мы в том и только в том случае считаем четырехугольник $ABCD$ параллелограммом, если знаем, что $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.

Сказанное позволяет кратко записать определение параллелограмма следующим образом:

$$(\forall ABCD)\quad (ABCD — \text{пар-мм}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (AB \parallel CD \text{ и } AD \parallel BC). \tag{1}$$

Знак $\forall$ применяется в математике вместо слов «любой», «каждый», «всякий» и т. п. Далее, знак $\Leftrightarrow$ читается «необходимо и достаточно» (или «в том и только в том случае»). Наконец, обозначение «Def» представляет собой сокращение английского слова Definition (определение). Таким образом, сокращенную запись (1) можно прочитать словами следующим образом: *произвольный четырехугольник $ABCD$ является, по определению, параллелограммом в том и только в том случае, если $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.* Обычно, для краткости, указание о том, что это определение пригодно для произвольного четырехугольника, пропускают; кроме того, пропускают слова «в том и только в том случае»; наконец, словосочетание «является, по определению» заменяют одним словом «называется». Вот и получается формулировка, приведенная в начале статьи.

Все дальнейшие свойства параллелограммов формулируются в виде теорем. Вот основные свойства параллелограммов (записанные теми же символами):

$$(\forall ABCD)\quad (ABCD — \text{пар-мм}) \Leftrightarrow (AB \parallel CD \text{ и } AB = CD); \tag{2}$$

$$(\forall ABCD)\quad (ABCD — \text{пар-мм}) \Leftrightarrow (AB = CD \text{ и } AD = BC); \tag{3}$$

$$(\forall ABCD)\quad (ABCD — \text{пар-мм}) \Leftrightarrow (\sphericalangle A = \sphericalangle C \text{ и } \sphericalangle B = \sphericalangle D); \tag{4}$$

$$(\forall ABCD)\quad (ABCD — \text{пар-мм}) \Leftrightarrow (\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ \text{ и } \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ); \tag{5}$$

$$(\forall ABCD)\quad (ABCD — \text{пар-мм}) \Leftrightarrow (\text{точка пересечения диагоналей делит их пополам}); \tag{6}$$

---

*) Всюду в статье имеются в виду выпуклые четырехугольники.

$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Leftrightarrow (ABCD \text{ имеет центр симметрии});$ (7)

$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2). \qquad (8)$$

Каждая из записей (2)—(8) содержит две теоремы, прямую и обратную (причем не во всех случаях обе теоремы изучаются в школе). Например, теорема (2) утверждает: *для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы стороны AB и CD были равны и параллельны.* В этой формулировке содержатся две теоремы. Одна из них состоит в том, что *если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB \| CD$ и $AB = CD$.* Это записывается так:

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Rightarrow (AB \| CD \text{ и } AB = CD). \qquad (9)$$

Другая теорема (обратная) гласит: *если в четырехугольнике $ABCD$ имеем $AB \| CD$, и $AB = CD$, то $ABCD$ — параллелограмм.* Вот ее запись:

$$(\forall ABCD)\ (AB \| CD \text{ и } AB = CD) \Rightarrow (ABCD \text{ — пар-мм}). \qquad (10)$$

Обе формулировки (9) и (10), каждая из которых содержит одностороннюю стрелку ⇒ («если..., то...»), объединяются одной записью (2), содержащей двустороннюю стрелку⇔(«...необходимо и достаточно...»). Подобным же образом каждую из теорем (3) — (8) можно разбить на две теоремы, прямую и обратную. Большинство из этих теорем хорошо известны учащимся. Остальные (не доказывавшиеся в школе) можно рассматривать как задачи на доказательство. Читателю рекомендуется вспомнить (или придумать) доказательства всех этих теорем, как прямых, так и обратных.

Следует обратить внимание на то, что запись каждой из теорем (2)—(8) очень похожа на запись определения (1) — только отсутствует обозначение «Def». Каждая из записей (1)—(8) утверждает, что четырехугольник $ABCD$ в том и только в том случае является параллелограммом, если выполнено то или иное свойство. Однако роль утверждений (1)—(8) не одинакова. Первое из них является *определением*, то есть используется для первоначального введения понятия параллелограмма. Поэтому оно не нуждается в доказательстве. Соотношения (2)—(8) не являются определениями, а представляют собой теоремы и требуют доказательства.

Заметим, что мы могли ввести понятие параллелограмма и иначе; например, можно было бы принять (2) за определение параллелограмма. В этом случае соотношение (2) не нужно было бы доказывать (оно имело бы место «по определению»), но тогда утверждение (1) следовало бы уже рассматривать как теорему, которая (так же как и остальные утверждения (3)—(8)) должна быть доказана с помощью утверждения (2).

Расчленение записи определения на три части (см. (1)), хотя и похоже на расчленение записи теоремы на три части (см. (2)—(8)), но имеет несколько иной оттенок. Первая часть определения указывает *родовое понятие*. В данном случае это — понятие четырехугольника (то есть параллелограммы выделяются из множества всех четырехугольников). Вторая часть определения вводит *название* нового понятия (новый термин — в данном случае «параллелограмм»). Наконец, третья часть определения содержит описание *видового отличия*, в данном случае описание того свойства (попарная параллельность противоположных сторон), которое выделяет параллелограммы среди всех четырехугольников.

Для сравнения возьмем еще одно определение:

$$(\forall n \in N)\ (n \text{ четно}) \underset{\mathrm{Def}}{\Leftrightarrow} (n \text{ делится на } 2).$$

Здесь N — множество всех *натуральных чисел* (родовое понятие), определяемым термином является понятие *четного числа*, а видовое отличие — свойство *делиться на 2* (без остатка).

В случае теоремы назначение частей иное; его лучше всего рассмотреть на примере теорем с односторонней стрелкой (см. (9) или (10)). Первая часть представляет собой *разъяснительную часть* теоремы. Вторая и третья части (идущие непосредственно до и после знака ⇒) называются соответственно *условием* и *заключением* теоремы. Разъяснительная часть описывает те обстоятельства, которые должны иметь место, чтобы можно было сформулировать теорему, и те обозначения, которые применяются при ее формулировке. В теоремах (9), (10) (а также в каждой из теорем (2)—(8)) разъяснительная часть указывает, что *рассматривается произвольный четырехугольник, вершины которого обозначены буквами A, B, C, D*. Теорема в целом утверждает, что если (при обстоятельствах, описанных в разъяснительной части) выполняется условие теоремы, то справедливо и ее заключение.

Заметим, что для получения *обратной* теоремы нужно сохранить ту же разъяснительную часть, а условие и заключение поменять местами (ср. (9) и (10)). Заметим также, что в теоремах, выражающих необходимые и достаточные условия (например, (2)—(8)) условие и заключение равноправны, то есть их можно менять местами без изменения смысла теоремы.

Запишем теперь определение и основные свойства *ромба* (знак ▱ заменяет слово «параллелограмм»):

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (AB = AD); \tag{11}$$

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Leftrightarrow (\measuredangle BAC = \measuredangle CAD); \tag{12}$$

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Leftrightarrow (AC \perp BD); \tag{13}$$

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Leftrightarrow (AC - \text{ось симметрии}). \tag{14}$$

На примере этих теорем легко проследить, как важно правильно формулировать разъяснительную часть — особенно при переходе к обратной теореме. Возьмем для примера теорему (13), которую запишем в виде двух теорем, прямой и обратной:

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Rightarrow (AC \perp BD); \tag{15}$$

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (AC \perp BD) \Rightarrow (ABCD - \text{ромб}). \tag{16}$$

Если в разъяснительной части теоремы 15 мы укажем, что $ABCD$ — произвольный четырехугольник (а не параллелограмм), то она примет вид:

$$(\forall\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Rightarrow (AC \perp BD). \tag{17}$$

«По смыслу» теорема (17) вроде бы не отличается от теоремы (15): одна теорема утверждает, что если параллелограмм является ромбом, то его диагонали перпендикулярны; а вторая говорит о том, что если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны, то есть в обеих формулировках речь идет о том, что диагонали ромба перпендикулярны. Однако для (15) обратная теорема (16) верна, а для (17) обратная теорема неверна (из того, что диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, еще не следует, что $ABCD$ — ромб). Это показывает, насколько важным является четкое указание разъяснительной части, условия и заключения, — особенно при формулировке обратной теоремы.

Запишем, далее, определение и основные свойства *прямоугольника*:

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (ABCD - \text{прямоугольник}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (\measuredangle A = 90^\circ); \tag{18}$$

$$(\forall\,\text{▱}\ ABCD)\ (ABCD - \text{прямоугольник}) \Leftrightarrow (AC = BD); \tag{19}$$

$$(\forall ▱\ ABCD)\ (ABCD \text{ — прямоугольник}) \Leftrightarrow (\text{средняя линия является осью симметрии}). \qquad (20)$$

В связи с последней теоремой заметим, что средняя линия четырехугольника — это прямая, соединяющая середины двух противоположных его сторон (так что в любом четырехугольнике имеются две средние линии). Теорема (20) утверждает, что *параллелограмм $ABCD$ в том и только в том случае является прямоугольником, если одна из его средних линий служит его осью симметрии*:

Определение *трапеции*:

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — трапеция}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (AB \parallel CD \text{ или } AD \parallel BC) \qquad (21)$$

требует некоторых разъяснений. Союз «или» имеет в математике (в отличие от обычной речи) *неразделительный* смысл. Иначе говоря, если в математическом тексте сказано, что *имеет место a или b*, то допускаются три возможности: 1) имеет место a, но не b; 2) имеет место b, но не a; 3) имеют место оба обстоятельства a и b.

Обращаясь теперь к определению трапеции, мы заключаем, что четырехугольник $ABCD$ считается трапецией в следующих трех случаях:

1) $AB \parallel CD$, но $AD \nparallel BC$ (в этом случае основаниями трапеции будут отрезки AB и CD);

2) $AD \parallel BC$, но $AB \nparallel CD$ (основаниями будут отрезки AD и BC);

3) $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ ($ABCD$ — параллелограмм).

Теорема о том, что средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме длин оснований, на первый взгляд не имеет обратной. Однако ее нетрудно разбить на две теоремы, каждая из которых содержит необходимое и достаточное условие:

$$(\forall ABCD;\ M \text{ и } N \text{ — середины сторон } AB \text{ и } CD)\ (ABCD \text{ — трапеция}) \Leftrightarrow \left(MN = \frac{AD + BC}{2}\right); \qquad (22)$$

$$(\forall ABCD;\ M \text{ и } N \text{ — середины сторон } AB \text{ и } CD)\ (ABCD \text{ — трапеция}) \Leftrightarrow (MN \parallel AD). \qquad (23)$$

Отметим еще теорему о равнобочной трапеции:

$$(\forall ABCD;\ AD \parallel BC,\ AB \nparallel CD)\ (\angle A = \angle D) \Leftrightarrow (AB = CD). \qquad (24)$$

Здесь указание $AB \nparallel CD$ в разъяснительной части существенно, так как иначе обратная теорема будет неверна.

Напомним теперь теоремы о вписанных и описанных четырехугольниках. Многоугольник называется *вписанным* (говорят также «вписуемым»), если существует окружность, проходящая через все его вершины. Многоугольник называется *описанным*, если существуете окружность, касающаяся всех его сторон. Вот необходимые и достаточные условия для того, чтобы четырехугольники обладали этими свойствами:

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — вписанный}) \Leftrightarrow (\angle A + \angle C = 180^\circ); \qquad (25)$$

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — описанный}) \Leftrightarrow (AB + CD = AD + BC). \qquad (26)$$

Упражнения (задачи на доказательство теорем)

1. $(\forall ABCD;\ l, m, n, p$ — биссектрисы углов $A, B, C, D)$ $(ABCD$ — пар-мм$) \Leftrightarrow$ (прямые l, m, n, p образуют прямоугольник);

2. $(\forall ABCD;\ M, N$ — середины диагоналей$)$ $\left(MN = \frac{|AD - BC|}{2}\right) \Leftrightarrow (AD \parallel BC)$;

3. $(\forall ABCD;\ AB = BC = AC)$ $(ABCD$ — вписанный$) \Leftrightarrow (BD = AD + CD)$;

4. $(\forall ABCD;\ S$ — его площадь$)$ $(AC \perp BD) \Leftrightarrow \left(S = \frac{1}{2} AC \cdot BD\right)$;

5. $(\forall ABCD;\ M, N$ — середины AD, BC, O — точка пересечения диагоналей$)$ $(AD \parallel BC) \Leftrightarrow (MN$ проходит через $O)$.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Рассказ о капле

Физика так устроена, что за любым, даже самым, казалось бы, простым объектом ее исследований скрывается много неожиданного. Не только антимир, но и обыкновенная капля таит в себе множество интереснейших проблем. Только вот увидеть эти проблемы, увидеть «сложное в простом» ничуть не легче, чем «простое в сложном».

Новая научно-популярная книга Я. Е. Гегузина «Капля»*) состоит из отдельных очерков, рассказывающих о физических законах, управляющих поведением капли, и об ученых, которым капля помогла решить ряд сложных и важных задач в различных областях науки. Так, словами аннотации, можно кратко изложить содержание книги. Но аннотация совершенно не передает поэтический дух книги. Автор поставил перед собой цель показать родственность науки и искусства. И это ему удалось.

Удалось не только внешне (в книге есть стихи, отрывки из художественных произведений, посвященных капле), но и внутренне. Сходство между научным и художественным творчеством особенно проглядывает в очерках, посвященных ученым, изучавшим каплю. Книга населена живыми людьми. Особенно достоверно автор рассказывает о Леммлейне, Френкеле, Пинесе, с которыми он был лично знаком.

Читатель узнает о том, как падают, скользят и сливаются капли, о том, как ведет себя капля в невесомости, что такое капли пустоты и каплеподшипники, что представляет собой глицериновая капель и антидождь. Вот названия некоторых очерков, которые, как мне кажется, хорошо передают стиль книги: «Талая вода», «Капля-шарик и капля-парашют», «Водяная корона», «Капля живого серебра», «Засада на росу» и т. п. Этот стиль изложения, легкий и непринужденный, лишний раз подчеркивает мысль автора о том, что между наукой и искусством нет строгого разделительного барьера.

Элементарна и ненавязчива математика в книге. Оценки требуют не столько знания математики, сколько понимания физики. Выкладки доступны каждому, кто свыкся с мыслью о том, что любой физический процесс можно описать с помощью математических символов.

Книга иллюстрирована кинограммами, полученными при скоростной киносъемке, что делает очень наглядными все процессы, о которых рассказывает автор.

«Капля», несомненно, будет прочитана с интересом всеми, кто интересуется физикой.

В. П. Лишевский

---

*) **Гегузин Я. Е.**, Капля. М., «Наука», 160 стр., тираж 40 000 экз., цена 29 коп.

Читатели предлагают задачи

1. Доказать, что уравнение

$$2^x + 13^y = 19^z$$

не имеет решений в натуральных числах.

А. Хоцанян

2. Рассмотрим множество натуральных четырехзначных чисел $\overline{xyzt}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \overline{zt} = 3zt - 10, \\ xyzt = 252. \end{cases}$$

Найти в этом множестве *наименьшее число.*

Д. А. Дворский

3. В примере на умножение

$$\begin{array}{r} \times\, xyz \\ xyz \\ \hline *** \\ **** \\ **y \\ \hline ***** \end{array}$$

разные цифры обозначены разными буквами или звездочками. Попробуйте расшифровать пример.

С. П. Терновой

4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике *сумма длин катетов* равна сумме диаметров вписанной и описанной окружности.

К. Д. Мамедов

5. *Двузначное число* 81 обладает следующим свойством: сумма его цифр в квадрате дает это же число, $9^2 = 81$. Аналогичным свойством обладает трехзначное число 512 : $8^3 = 512$.

Попробуйте найти все числа, сумма цифр которых, возведенная в некоторую степень, дает то же число. Насколько много цифр могут иметь такие числа?

В. В. Малинин

Слишком маленькая серия

Мы расскажем о математической части выпускаемой московским издательством «Наука» серии «Библиотечка физико-математической школы» (редактор — член-корреспондент Академии наук СССР И. М. Гельфанд).

К настоящему времени вышли в свет 8 книжек «Библиотечки», ряд из которых выдержал уже несколько изданий. «Основную серию» составляют следующие брошюры (выпуски 1—5): *И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов*, Метод координат; *И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль*, Функции и графики (основные приемы); *С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко*, Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы); *Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер*, Прямые и кривые; *М. И. Башмаков*, Уравнения и неравенства. Наряду с этим имеются еще 3 книжки, образующие «дополнительную серию» (выпуски 1*—3*): *Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго*, Математические задачи; *А. А. Кириллов*, Пределы; *Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь*, Математические соревнования (арифметика и алгебра).

Заметим сразу же, что деление серии на «основную» и «дополнительную» представляется вполне уместным: в самом деле, между отдельными брошюрами имеются весьма заметные различия и в характере, и в целевом назначении (что, впрочем, более или менее неизбежно для любой достаточно обширной серии, составляемой большим авторским коллективом). Мне кажется даже, что в рецензируемой серии можно выделить не две, а три «струи», различающиеся, в первую очередь, соотношением между теоретическим материалом и задачами: первую из них составляют выпуски 1, 2 и 5, вторую — выпуски 3, 4 и 2*, третью — выпуски 1* и 3*.

Обращаясь к содержанию отдельных книжек серии, начнем с наиболее простых для рецензирования брошюр 1* и 3*: «Математические задачи» и «Математические соревнования». Уже сами названия этих книг полностью раскрывают их характер: это просто сборники (довольно разнородных по темам и методам решения) задач, предлагавшихся на различных конкурсах в московских специализированных «математических» школах; в конце брошюр собраны решения (или указания к решению) всех без исключения задач «основной части» книги. Помимо этого каждая из книжек заканчивается разделом «Дополнительные задачи», решения к которым не указаны.

Высокий уровень задач и тщательность составления ответов и указаний гарантируется уже самим списком авторов, включающим известных математиков, много лет работающих в «математических» школах. Для решения большинства задач выпусков 1* и 3* «Библиотечки» вполне достаточно знаний в объеме курса математики первых восьми классов средней школы. По характеру задачи во многом близки к публикуемым в «Задачнике «Кванта», являясь, впрочем, в среднем несколько более простыми. Более удачной из этих двух брошюр мне кажется вторая, частично это объясняется подзаголовком «Арифметика и алгебра» выпуска 3*, ибо в целом геометрическая часть сборника 1* представляется наиболее слабой.

В этом отношении остается только надеяться на то, что некоторую «задолженность» составителей «дополнительной» серии «Библиотечки» перед любителями геометрии ликвидирует служащий продолжением выпуска 3* и выходящий вскоре в свет выпуск 4*: *Н. Б. Васильев, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. П. Савин*, Математические соревнования (геометрия).

Перейдем теперь к «самой основной» части серии, представленной выпусками 1, 2 и 5. Несмотря на то, что и здесь, разумеется, задачи и упражнения составляют существенную компоненту текста (ибо как же можно учиться математике без задач?), все же основой этих трех выпусков служат учебные материалы теоретического характера. Очевидна связь этих трех книг (особенно двух первых из них) с существующей при Московском университете Заочной математической школой: эти выпуски излагают курс ЗМШ, включающий сведения теоретического характера и «контрольные задания», предлагаемые учащимся для проверки степени усвоения материала (эти задания легли в основу сопровождающих каждый раздел брошюр упражнений для самостоятельного решения). Написанные на высоком научном и методическом уровне, посвященные самым важным вопросам общематематического характера, брошюры эти пользуются вполне заслуженной популярностью и, бесспорно, оказывают существенную помощь многим интересующимся математикой школьникам. Именно потому, что автор оценивает эти брошюры достаточно высоко, далее речь идет не об их бесспорных достоинствах, а о том, что автора в них не вполне удовлетворяет.

Прежде всего не удовлетворяет количество составляющих серию брошюр.

Серия книг только в том случае достойна такого наименования, если входящие в нее книги следуют одна за другой достаточно регулярно. Можно только пожалеть о том, что содержащееся в первых изданиях выпуска 2 обещание скорого продолжения темы «Функции и графики» (находящее косвенное подтверждение в подзаголовке «Основные приемы» выпуска 2) не только не было реализовано, но даже и вовсе исчезло из дальнейших изданий этой книги.

Далее, кажется недостаточно подчеркнутой аналогия тем выпусков 1 и 2 «Библиотечки». По существу в этих двух книгах речь идет о двух сторонах применений координатного метода. В первом случае во главу угла кладется понятие уравнения $F(x, y) = 0$ линии L (переход: $M(x, y) \in L \Leftrightarrow F(x, y) = 0$); во втором — понятие графика γ функции $y = f(x)$ (обратный переход: $y = f(x) \Leftrightarrow M(x, y) \in \gamma$). Эти две идеи последовательно раскрываются в выпусках 1 и 2 «Библиотечки», однако тесная их связь акцентируется недостаточно. Заметим тут же, что развитый математический язык более важен для начинающих, чем для опытных математиков — и отсутствие основных теоретико-множественных и логических символов или недостаточно свободное их использование несколько связывают авторов выпусков 1 и 2.

В противоположность этому в выпуске 5, в основном посвященном обсуждению самого смысла выражений «уравнение», «система уравнений», «равносильность уравнений», «решение уравнения (или неравенства)» и т. д., соответствующая символика использована достаточно широко, однако для школьника, последовательно изучающего книжки «Библиотечки», отсутствие привычки к подобным записям может несколько затруднить восприятие этой брошюры.

Я также склонен был бы считать несколько преувеличенным внимание авторов выпуска 2 «Библиотечки» к функции $y = |x|$ и разным ее комбинациям.

И уж во всяком случае неоправданным кажется мне включение в число «основных приемов» построения графиков имеющего довольно частное значение перехода $y = f(x) \Rightarrow y = |f(x)|$.

Несколько преувеличенным кажется также ощущающееся в последних изданиях выпуска 1 внимание к частным видам уравнения прямой (ведь школьник, чего доброго, сочтет необходимым запомнить «уравнение в отрезках на осях»!). Однако, наряду с этим, трудно не выразить свое восхищение, скажем, удачной трактовкой темы о четырехмерном кубе в выпуске 1, тщательностью подбора примеров и задач (во всех выпусках), рациональным (и редким для советской учебной или научно-популярной литературы) использованием полей для рисунков и чертежей, яркими вставками на отдельных листках книжек, методически продуманным использованием обычных дорожных знаков — да и многим другим, с чем познакомится любознательный школьник, захотевший узнать книжки «Библиотечки физико-математической школы» не только по настоящей рецензии.

Пока ничего не сказано о выпусках 3, 4 и 2*, которые можно считать промежуточными между «самой основной» и «дополнительной» сериями. Дело в том, что если выпуски 1* и 3* можно, пожалуй, назвать «задачниками», а выпуски 1, 2 и 5 — «учебниками», то выпуски 3, 4 и 2* — это, так сказать, «задачники-учебники», то есть задачники по форме, но учебники по существу. В этих трех небольших книжках изложен достаточно серьезный теоретический материал. Так, например, выпуск 2* «Библиотечки» посвящен одной из труднейших тем школьного курса математики — пределам. Однако изложен этот материал в форме сборников задач, сопровождаемых эпизодическими, хоть и достаточно важными, «теоретическими» пояснениями и, — что, пожалуй, играет тут еще большую роль, — разбором ряда характерных примеров, иллюстрирующих основные черты исследуемых понятий и приемов. Такой путь изложения материала требует немалого искусства — и удача авторов этих книжек представляется большой и принципиальной. И к этим книжкам можно предъявить некоторые частные претензии. Наибольшее число замечаний есть к наиболее понравившемуся и наиболее близкому по теме автору этих строк выпуску 4, посвященному геометрии. Например, здесь можно было бы приветствовать несколько более развитый «математический язык», чем используемый авторами (которые даже в § 3 «Пересечение и объединение» старательно избегают использования общераспространенных символов $A \cap B$ для пересечения множеств A и B и $A \cup B$ — для их объединения). Далее, «азбука» геометрических мест (составляющая § 2 выпуска) кажется слишком обширной (образно говоря, включающей давно устаревшие «ять» и «ижицу», а ведь свободно можно было обойтись меньшим алфавитом).

Очень удачно применение в одной книжке и аналитических и чисто геометрических методов решения задач, — но и тут стоило пойти еще дальше, сделав аналитические (то есть алгебраические или «координатные») подходы полностью равноправными с синтетическими (геометрическими). Но «самое главное» недовольство рецензируемой серией все же таково: превосходных книжек ряда «Библиотечка физико-математической школы» мы имеем пока слишком мало!

И. М. Яглом

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1974 году, представляющие интерес для наших читателей.

В III квартале 1974 года выйдут в свет следующие книги (заказы на них можно направлять через магазины «Книга — почтой»):

Математика

Издательство «Наука»

1. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. *Элементарная математика* (объем 35 л., тираж 400 000 экз., цена 1 руб. 08 коп., изд. 2-е, переработ. и дополн.).

Книга представляет собой пособие для поступающих в вузы. В ней систематически изложен материал, соответствующий программе вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения. Большое количество решенных задач существенно облегчает чтение книги.

2. Коровкин П. П. *Неравенства* (объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 14 коп., изд. 4-е).

Брошюра П. П. Коровкина выходит в серии «Популярные лекции по математике». Она посвящена некоторым замечательным неравенствам, играющим большую роль в математике.

Большее количество задач, приведенных в книге, делает ее особенно ценной для школьников.

Книга рассчитана на школьников старших классов.

3. Маркушевич А. И. *Замечательные синусы* (объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 18 коп., изд. 2-е).

Весьма живо и интересно автор рассказывает читателю о ближайших «родственниках» кругового синуса — гиперболическом и лемнискатическом синусах. Книга рассчитана на вдумчивого читателя. Ее могут читать сильные школьники 10-х классов.

Физика

Издательство «Наука»

1. Селезнев Ю. А. *Основы элементарной физики* (объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 коп., изд. 4-е).

Книга предназначена в первую очередь для людей, готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения. В ней последовательно изложен весь курс «школьной» физики. Большое количество задач (с решениями) помогает лучшему усвоению материала.

2. *Механика*. Под редакцией А. С. Ахматова (объем 30 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 29 коп., изд. 2-е).

Данная книга является третьей частью четырехтомного курса физики для американских средних школ (1-я часть — Вселенная, 2-я — Оптика и волны, 3-я — Механика и 4-я — Электричество и строение атома).

Книга полезна учителям физики и школьникам 8—10-х классов, интересующимся вопросами физики.

3. Ланге В. Н. *Экспериментальные физические задачи на смекалку* (объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 коп.).

В книге приведены 116 задач, в которых предлагается придумать способ измерения некоторых величин, используя самые примитивные и элементарные приборы. В конце дается разбор задач. Книга написана живо и интересно. Ее с удовольствием прочтут все любители физики.

4. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике* (объем 13 л., тираж 200 000 экз., цена 69 коп.)

В справочнике кратко изложены теоретические сведения, формулировки основных понятий и физических законов. В нем также приводятся справочные таблицы и графики.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей.

5. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике* (объем 46 л., тираж 200 000 экз., цена 2 руб. 63 коп., изд. 6-е).

Данный справочник, по существу, является учебным пособием по курсу общей физики. В нем приведены определения всех основных физических понятий, сформулированы физические законы и сущность описываемых ими явлений. В нем отражены все основные разделы классической и современной физики.

Справочник может быть использован преподавателями физики в средней школе, а также наиболее сильными школьниками 10-х классов.

6. Капица П. Л., *Теория, эксперимент, практика* (объем 20 л., тираж 40 000 экз., цена 90 коп.).

Книга представляет собой сборник выступлений и статей известного советского физика академика Петра Леонидовича Капицы. В этих выступлениях Петр Леонидович рассказывает об экспериментальных результатах, полученных им в разные годы, о творческом воспитании молодежи.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

7. Левантовский В. И. *Механика космического полета в элементарном изложении* (объем 36 л., тираж 15 000 экз., цена 1 руб. 26 коп., изд. 2-е).

В книге строго, но вместе с тем вполне доступно излагаются основы космодинамики. В ней рассмотрены околоземные полеты, полеты к Луне, межпланетные и межзвездные полеты.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

8. Завельский Ф. С. *Масса и ее измерение* (объем 13 л., тираж 50 000 экз., цена 30 коп).

В книге в доступной и популярной форме рассказывается о фундаментальном физическим понятии—массе.

Ее с интересом прочтут школьники старших классов.

Из книг, вышедших в Атомиздате, имеются в продаже:

Арцимович Л. А. *Элементарная физика плазмы* (181 стр., цена 45 коп.).

Головин И. Н., *И. В. Курчатов* (100 стр., цена 34 коп.).

Губарев В. С. *Рождение атомного реактора* (90 стр., цена 14 коп.).

Калинин И. Ф. *Термоядерный реактор будущего* (90 стр., цена 14 коп.).

Кнорре Е. С. *Путешествие в мир трансуранов* (169 стр., цена 31 коп.).

Мухин К. Н. *Занимательная ядерная физика* (294 стр., цена 77 коп.).

Парнов Е. И. *На перекрестке бесконечностей* (460 стр., цена 91 коп).

Эдер Р. К., Фаулер Э. К. *Странные частицы* (210 стр., цена 63 коп.).

Издательство «Просвещение»

9. Составитель Угаров В. А, *Школьникам о современной физике* (объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 90 коп.).

Предлагаемый сборник содержит ряд статей специалистов-физиков по отдельным разделам современной физики: молекулярной биофизике, астрофизике, физике плазмы и т. д.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

10. Шишаков В. А., Дагаев М. М. *Школьный астрономический календарь на 1974/75 годы* (объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 30 коп).

Календарь содержит основные сведения о Солнце, Луне, планетах и других небесных объектах, а также необходимые справочные таблицы.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

11. Кац Ц. Б. *Биофизика на уроках физики* (объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 40 коп.).

В книге изложены элементы бионики и биофизики. Большое внимание автор уделил связи биофизики со школьной программой по физике.

Книга предназначена в первую очередь преподавателям физики. Она будет также полезна любознательным школьникам 8—10-х классов, интересующимся физикой и биологией.

Научно-популярная литература и фантастика

Издательство «Мир»

1. *Симпозиум мыслелетчиков* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 66 коп.).

Книга представляет собой сборник научно-фантастических произведений известных польских писателей.

Острый, занимательный сюжет, богатство научно-фантастических гипотез, без сомнения, привлекут всех любителей научной фантастики.

Издательство «Молодая гвардия»

2. Сергеев Б. *Тайны памяти* (объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 30 коп.).

Эта книга о памяти, точнее, о нашем мозге; о том, как он развивался и работает, какой его отдел чем ведает, как воспринимается, кодируется и передается информация.

Написана книга хорошим языком, ярко и занимательно. Эта книга будет с интересом прочтена самым широким кругом читателей.

3. Альтов Г. *Третье тысячелетие* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 62 коп.).

В яркой и очень занимательной форме автор рассказывает о далеком будущем Земли, о космических путешествиях, о встречах с инопланетянами и о контактах с ними.

Книгу с удовольствием прочтут все любители фантастики.

4. Толубеев Г. *След золотого оленя* (объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 65 коп.).

Книга посвящена ученым-археологам, ведущим раскопки скифских могильников. Читатель вместе с героями повести перенесется в далекое прошлое.

5. Подольный Р. *Вокруг света в сорок тысяч лет* (объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 70 коп.).

Это книга о самых замечательных и грандиозных путешествиях. Автор рассказывает об истории создания путей сообщения, о роли геофизических открытий в жизни людей.

6. Гастев А. *Леонардо да Винчи* (объем 31 л., тираж 100 000 экз., цена 95 коп.).

Это — книга о величайшем итальянском ученом, изобретателе, живописце Леонардо да Винчи. Написанная хорошим языком, она, безусловно, вызовет большой интерес у самого широкого круга читателей.

Издательство «Детская литература»

7. Томан Н. *Воскрешение из мертвых* (объем 26 л., тираж 100 000 экз., цена 93 коп.).

Книга состоит из некоторых остросюжетных повестей, объединенных общей тематикой.

Издательство «Знание»

8. *Научная фантастика*. Выпуск 4 (объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 54 коп.).

В сборнике напечатаны новые научно-фантастические произведения советских и зарубежных авторов.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

ИНФОРМАЦИЯ

Научная конференция учащихся специализированных школ-интернатов

Второй год подряд учащиеся Тбилисской средней физико-математической школы-интерната им. В. М. Комарова во время весенних каникул проводят научную конференцию. В этом году в гости к тбилисским школьникам приехали учащиеся средней школы № 7 г. Батуми, Ереванской физико-математической школы-интерната, специализированной школы-интерната физико-математического профиля г. Киева, физико-математической школы-интерната № 18 г. Москвы, физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска и средней школы № 52 г. Риги. В работе конференции также принимали участие учащиеся нескольких школ г. Тбилиси. По существу, это был слет учащихся физико-математических школ-интернатов.

Торжественное открытие конференции проходило 26 марта в помещении Вычислительного центра Академии наук Грузинской ССР. В этот же день начали работать секции математики и физики. Школьники заслушали ряд докладов по математике и физике. С 26 по 30 марта шла напряженная работа конференции.

Математика

Хотя большинство докладов носило реферативный характер, они с большим интересом были выслушаны участниками конференции. Отметим некоторые из этих докладов.

К. Татишвили (Тбилиси, 9 кл.) рассказала о выдающемся грузинском ученом, одном из основателей Тбилисского государственного университета, замечательном математике и патриоте своей страны Андрее Михайловиче Размадзе (1890—1929) создавшем современную грузинскую математическую школу.

Е. Бекая (Батуми, 10 кл.) рассказала о жизни великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева (1821—1894) и о решении им следующей задачи: *найти многочлен $T(n)$ n-й степени с коэффициентом 1 при старшем члене, который менее всего уклоняется от нуля на отрезке* $[1, -1]$, то есть такой многочлен $p(x)$, для которого $\max\limits_{|x| \leqslant 1} |p(x)|$ наименьшее по сравнению со всеми остальными многочленами той же степени с коэффициентом 1 при старшем члене. Эти многочлены имеют вид

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x). \qquad (1)$$

Теперь они называются полиномами Чебышева. Чтобы выписать их в явном виде, можно воспользоваться формулой

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad (2)$$

и первыми двумя полиномами Чебышева: $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$. Попробуйте доказать формулу (2), исходя из формулы (1).

Доклад Г. Тодуа (Тбилиси, 9 кл.), был посвящен построениям циркулем и линейкой, а также решению задачи об «удвоении куба» с помощью специальных приборов, придуманных Платоном, Менехмом, Эратосфеном и другими учеными древности.

М. Торонджадзе (Тбилиси, 9 кл.) рассказала о кривых Пеано (этот доклад был помещен в «Кванте», 1974, № 8).

В докладе М. Драчинского (Тбилиси, 10 кл.) было рассказано о методах интерполирования. *Интерполирование* — это оценка значения функции в некоторой точке, если известны значения этой функции в нескольких (n) точках.

Искомое значение принимается равным значению в той же точке многочлена (*многочлена Лагранжа*), который в данных n точках принимает те же значения, что и рассматриваемая функция. Докладчик рассказал о многочлене Лагранжа и об интерполяционном многочлене Ньютона, совпадающем с многочленом Лагранжа, но строящемся (по конечным разностям) гораздо быстрее.

В докладе А. Тимошина (Рига, 9 кл.) «Некоторые способы доказательства неравенств» были доказаны неравенство Коши

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

(все $x_i \geqslant 0$) и неравенство Бернулли

$$(1 + a)^n > 1 + na$$

$$(a \neq 0, \quad a > -1, \quad n \geqslant 2).$$

Комментируя этот доклад, руководитель секции предложил школьникам решить следующие задачи. *Возьмем окружность диаметра 1. Впишем в нее правильный n-угольник — обозначим его периметр через p_n — и опишем правильный n-угольник — периметра q_n. Число π находится на числовой оси между точками p_n и q_n. Разобьем отрезок $[p_n, q_n]$ на три равные части. В какой из них находится число π? Аналогичная задача ставится для числа e (основания натуральных логарифмов) и разделенного на четыре части отрезка* $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$

Наибольший интерес у присутствующих вызвали доклады с изложением результатов, полученных школьниками самостоятельно. Таким был доклад А. Давыдова (Москва, 10 кл.) «Проблема биллиарда». Представьте себе некоторую область на плоскости (например, круг) и шарик, катающийся внутри этой области и абсолютно упруго отскакивающий от ее границ (тогда выполняется закон «угол падения равен углу отражения», то есть шарик отражается от стенок так же, как луч света). Какими будут траектории движения шарика? Эту проблему и рассматривал Алексей в своем докладе. Это действительно проблема, потому что даже для областей, имеющих форму треугольника, исследованы лишь три случая (треугольники с углами 90°, 45°, 45°; 90°, 60°, 30°; 60°, 60°, 60° — в этих случаях получаются «правильные калейдоскопы»; см. «Квант», 1972, № 8).

Попробуйте, например, доказать, что в круге могут быть траектории двух типов:

а) правильные, возможно, звездчатые (самопересекающиеся) многоугольники;

б) линии, плотно заполняющие внутренность кольца, образованного границей круга и концентрической с нею окружности.

Алексей самостоятельно исследовал биллиард в треугольнике с углами 90°, 22,5° и 67,5°, а также показал, что изучение простейшей механической системы — двух шариков масс m_1 и m_2 в лотке, упруго отскакивающих от стенок лотка и друг от друга («одномерный газ из двух молекул»),— сводится к исследованию биллиарда в прямоугольном треугольнике с катетами $\sqrt{m_1}$ и $\sqrt{m_2}$.

М. Гедалин (Тбилиси, 8 кл.) прочитал доклад «Об одном минимальном свойстве треугольника». В этом докладе были приведены два доказательства следующего факта: *среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет треугольник, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.*

В. Харланов (Киев, 10 кл.) прочел доклад «Некоторые задачи о деревьях и теории графов». *Дерево* — это связный граф без циклов (замкнутых цепей) и петель (о графах в нашем журнале уже рассказывалось — см. «Квант», 1973, № 8, с. 55). Владимир доказал несколько теорем, например: *в дереве каждые две вершины соединяет лишь одна цепь, количество деревьев, построенных на n вершинах, равно n^{n-2}* и другие, а затем поставил несколько задач. Попробуйте, например, определить,

1) *сколько деревьев с m ребрами можно построить на n вершинах;*

2) *сколько графов без циклов с m ребрами можно построить на n вершинах.*

Доклад В. Федорова (Москва, 8 кл.) «Системы счетных множеств» был посвящен, в основном, решению следующих трех задач: *существует ли несчетное множество A подмножесте счетного множества Q такое, что*

1) *Для всяких $x, y \in A$ множество $x \cap y$ конечно, если $x \neq y$?*

2) *Для всяких $x, y \in A$ множество $x \Delta y$ конечно $(x \Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y))$?*

3) *Для всяких $x, y \in A$ либо $x \subset y$ либо $y \subset x$?*

А. Воронов (Новосибирск, 10 кл.) в докладе «Некоторые сведения о факториальных кольцах» описал алгоритм разложения многочлена над кольцом целых чисел на неприводимые многочлены. Руководителям секции доклад понравился, а школьники почти ничего не поняли, что не удивительно — для понимания этого доклада требуется знание основ высшей алгебры.

То же самое можно сказать о докладе А. Иванова (Москва, 10 кл.) «О разложении полинома $x^3 + y^3 + z^3$ в кольце, удовлетворяющем условию эквивалентности и левой и правой обратимости».

На сфере нет подобных треугольников. Доказательство этого факта было основным в докладе Л. Сегеда (Москва, 10 кл.) «Некоторые задачи сферической геометрии». Люда привела также решения нескольких задач, например: *сколько непересекающихся дуг* (большого круга) *по 300° каждая можно без пересечений разместить на сфере? А по 299° каждая?* Попробуйте доказать, что ответ таков: *в первом случае 2, во втором — 3.*

Физика

Доклады по физике отличались большим разнообразием как по существу рассматриваемых вопросов, так и по форме проделанной работы.

Темы работ, о которых рассказывали участники конференции, выходят далеко за рамки школьного курса физики. Только серьезная теоретическая подготовка, помощь научных руководителей (ими, как правило, были научные сотрудники университетов и научно-исследовательских физических институтов), возможность участвовать в проведении экспериментов в научных лабораториях и, конечно, огромный интерес к физике позволили ребятам добиться успехов.

Одни доклады были теоретического плана. Они носили реферативный характер.

Например, доклад В. Санадзе (Тбилиси, 9 кл.) «О частицах, движущихся быстрее света». Как известно, один из постулатов специальной теории относительности Эйнштейна утверждает, что ни один материальный объект не может достичь скорости равной c — скорости света в вакууме. Можно лишь неограниченно приближаться к этому барьеру, но перейти его невозможно. А что, если уже при рождении объект имеет скорость, большую скорости света? Оказывается, это ничуть не противоречит теории относительности. Интересно, что гипотеза о возможности существования таких частиц была высказана еще в начале XX века. Сейчас в ряде научных лабораторий ведутся экспериментальные поиски этих частиц, получивших название тахионов (в переводе с греческого «tachys» означает «скорый»). В докладе Санадзе было рассказано об удивительных свойствах, которыми должны обладать эти частицы, и об экспериментах по их обнаружению.

Были прочитаны также доклады, посвященные отдельным вопросам теории относительности и квантовой механики: С. Шаташвили (Тбилиси, 8 кл.) «Пространство — время», А. Пузаиков и Л. Трахтенберг (Москва, 10 кл.) «Геометрия пространства релятивистских скоростей», З. Церетели (Тбилиси, 9 кл.) «Релятивистская ракетодинамика», А. Бударин (Ереван, 9 кл.) «Квантовая природа электрического сопротивления» и др.

Некоторые доклады носили характер отчетов о проделанных самостоятельных исследованиях.

Л. Сургуладзе (Тбилиси, 9 кл.) сделал доклад «Исследование электрического пробоя в монокристалле германия на низких температурах». Как известно, проводимость полупроводников очень сильно зависит от наличия примесей и от внешних условий — температуры, облучения светом и т. п. Чистые кристаллы при низких температурах являются плохими проводниками, поскольку очень мала концентрация носителей тока. Однако подвижность носителей (электронов) достаточно большая. А если в электрическом поле ускорить свободные электроны, имеющиеся в кристалле? Тогда при своем движении они будут рождать новые носители тока. Это явление своим механизмом очень похоже на электрический пробой в газах. В Тбилисском государственном университете проводились исследования такого процесса в монокристаллах германия. Л. Сургуладзе рассказал об экспериментах, в которых он участвовал, привел схему эксперимента и подробный анализ полученных результатов.

Об изучении свойств полупроводниковых материалов рассказывалось также в сообщениях Г. Джанишвили (Тбилиси, 9 кл.). «Измерение концентрации и подвижности электронов в полупроводниках» и П. Джавахидзе (Тбилиси, 9 кл.) «Термоэлектродвижущая сила в полупроводниках».

И. Августинович (Новосибирск, 10 кл.) сделал доклад на тему «Угловое распределение μ-мезонов». Группой учащихся был сделан прибор, регистрирующий количество μ-мезонов, входящих в состав космического излучения вблизи поверхности Земли. Основной элемент прибора — «телескоп» из двух сцинтилляционных счетчиков, наиболее простых по конструкции. По полученным данным был построен график зависимости количества зарегистрированных μ-мезонов от угла наблюдения. Оказалось, что результаты хорошо согласуются с известной теоретической кривой, которая следует из предполагаемого учеными механизма образования μ-мезонов в космических лучах.

Ученики 9-го класса С. Марущак и С. Неупокоев (Киев) — члены научно-технического общества учащихся — рассказали о своей работе по изучению механических свойств полимеров с помощью рентгеновского излучения.

В докладе А. Сергеева (Москва, 10 кл.) рассказывалось о результатах работы по измерению модуля Юнга (модуля упругости) методом резонанса стержня.

Среди докладов были и такие, в которых рассказывалось о создании различных физических приборов, о методике работы с ними и о перспективах их дальнейшего использования.

С большим интересом было прослушано сообщение С. Грехова (Новосибирск, 10 кл.) о сконструированном им устройстве для автоматизации лечения ложной близорукости. Глаз человека — это сложная оптическая система, в которой одну из главных ролей играет хрусталик. С помощью соответствующей мышцы может меняться кривизна хрусталика, при этом меняется оптическая сила системы. Если у человека нормальное зрение, то изображение на сетчатке глаза остается четким, на каком бы расстоянии от глаза ни находился рассматриваемый предмет. Как говорят, глаз аккомодирует. Если же мышца не справляется со своей задачей, пределы аккомодации глаза существенно изменяются. Например, при близорукости глаз хорошо различает мелкие детали только очень близких предметов. Было установлено, что иногда возникает так называемый спазм аккомодации, то есть некоторое продолжительное напряжение в мышце, и это является начальной стадией близорукости. Этот спазм можно снять с помощью специального аппарата, созданного группой ученых (медиков и физиков) Новосибирска. Основная идея лечения — тренировать мышцу, последовательно создавая в ней различные напряжения с помощью набора линз с разными оптическими силами. Этим аппаратом уже пользуются в одной из поликлиник, но методика работы с ним несколько сложна и громоздка.

С. Грехов сделал автоматическое устройство для подачи линз. Это позволит упростить работу с прибором и, что очень важно практически, существенно уменьшить время лечения.

Интересным было сообщение П. Иванова (Новосибирск, 10 кл.) «Перестраиваемые лазеры на органических красителях», в котором рассказывалось о конструкции жидкостного лазера с плавной перестройкой частоты, созданного группой учащихся в лаборатории Новосибирского института ядерной физики.

В лаборатории техники физических измерений научно-технического общества учащихся г. Киева уже много лет ведется поисковая работа по созданию электронных приборов, которые могут быть использованы в школьном физическом эксперименте. В докладах В. Коваля и П. Мовчана (Киев, 10 кл.) было рассказано о созданных в лаборатории стабилизаторах тока и напряжения, высококачественного усилителя электрических сигналов, генератора стабильных сигналов и т. п.

В. Драчев (Новосибирск, 9 кл.) в докладе «Фотокамера «Рыбий глаз» рассказал о сделанном им приборе для получения фотографий с углом обзора, близким к 180°.

* * *

Не надо думать, что на конференции школьники с утра до вечера слушали или читали доклады. Хозяева организовали для гостей очень интересные экскурсии по Тбилиси и по его окрестностям — в Джвари, Мцхету и Сагурами, а также в дом-музей И. Г. Чавчавадзе.

29 марта была проведена встреча участников конференции с редакцией нашего журнала. Перед школьниками выступил заместитель главного редактора М. Л. Смолянский. Он рассказал о работе редакции, о планах журнала на 1974—1975 гг. Школьники приняли самое активное участие во встрече. Они высказывали свое мнение о журнале, об отдельных статьях, говорили о том, какие разделы математики и физики их особенно интересуют. Затем сотрудники редакции ответили на многочисленные вопросы школьников.

Утром 30 марта была проведена занимательная «блицолимпиада» по математике. Вот несколько задач, предложенных на этом соревновании.

1. *Циферблат часов разделите двумя линиями на три части так, чтобы суммы чисел в каждой части были одинаковы.*

2. *Что больше:* e^{π} *или* π^{e}*?*

3. *Можно ли пятью бронзовыми монетами (по 1, 3 и 5 копеек) отсчитать сумму в 16 копеек?*

4. *В ящике лежит 70 шаров: 20 красных, 20 желтых, 20 зеленых и 10 черных. Сколько надо вытащить шаров из ящика (в темноте!), чтобы одноцветных шаров оказалось не менее 10?*

Торжественное закрытие конференции состоялось днем 30 марта. Гости тепло поблагодарили хозяев за гостеприимство, а хозяева пригласили всех присутствующих на следующую конференцию.

По итогам конференции отдельные школьники были награждены дипломами и грамотами.

Грамоты ЦК комсомола Грузии получили: *Николай Албуташвили* (Тбилиси), *Александр Бударин* (Ереван), *Александр Воронов* (Новосибирск), *Алексей Давыдов* (Москва), *Владимир Драчев* (Новосибирск), *Марк Драчинский* (Тбилиси), *Виктор Зубко* (Киев), *Анатолий Иванов* (Москва), *Павел Иванов* (Новосибирск), *Виктор Иткин* (Рига), *Майя Миминошвили* (Тбилиси), *Вахтанг Пхакадзе* (Тбилиси), *Владимир Санадзе* (Тбилиси), *Андрей Сергеев* (Москва), *Леван Сургуладзе* (Тбилиси), *Медея Торонджадзе* (Тбилиси) и *Самсон Шаташвили* (Тбилиси).

Ряд премий присудила редакция нашего журнала.

Памятные номера журнала с автографами получили: *Елена Бекая* (Батуми), *Александр Бударин* (Ереван), *Владимир Коваль* (Киев) и *Владимир Харланов* (Киев).

Годовой подпиской на 1975 год были награждены: *Майя Миминошвили*, *Марина Саникидзе*, *Александр Тимошин* и *Медея Торонджадзе*. Кроме того, некоторые наиболее интересные доклады будут опубликованы на страницах журнала (так, доклад Медеи Торонджадзе уже опубликован).

Что же сказать в заключение?

Наш журнал уже писал о слетах учащихся школ с физико-математическим уклоном (см. «Квант», 1972, №№ 2, 5). Эти слеты проводятся регулярно с 1971 года. Отрадно, что теперь и учащиеся физико-математических школ-интернатов организовали свои научные конференции, которые проходят очень интересно и содержательно.

Мы уверены, что в недалеком будущем конференции физико-математических школ-интернатов завоюют прочный авторитет и будут проводиться не только в Тбилиси, но и, скажем, в Новосибирске, Риге и других городах нашей страны. Мы желаем им новых успехов.

А. Н. Виленкин, В. А. Тихомирова

XIV математическая олимпиада школьников Украины

С 25 по 30 марта 1974 года в городе Днепропетровске проходила XIV Республиканская олимпиада по математике. На нее были приглашены победители областных олимпиад — те, кто на предшествовавших соревнованиях продемонстрировал гибкость ума, незаурядность математического мышления, математическую грамотность.

В Днепропетровск приехало 300 школьников: 54 семиклассника, 66 восьмиклассников, 86 девятиклассников и 94 десятиклассника.

Тепло и сердечно встретил Днепропетровск будущих ученых-математиков. Открытие олимпиады состоялось 25 марта во Дворце пионеров и школьников Днепропетровска. Все участники предстоящих соревнований собрались в зале Дворца. С приветственой речью к ним обратился председатель жюри XIV олимпиады ректор Днепропетровского государственного университета академик АН УССР В. И. Моссаковский. Владимир Иванович подробно рассказал ребятам о Днепропетровском университете, о городе, поздравил их с началом ответственных соревнований и пожелал успеха.

I тур соревнований состоялся 26 марта. Учащимся каждого класса было предложено по три задачи, по три задачи было предложено и на второй день соревнований 27 марта. И в первый, и во второй день на решение задач отводилось по три часа.

Работой жюри как опытный дирижер руководил представитель министерства просвещения УССР А. П. Шатковский.

Тщательно и добросовестно были проверены все работы учащихся. Разбор задач с глубоким анализом типичных ошибок был проведен сразу же после проверки работ.

В перерывах между турами и разборами задач школьники знакомились с Днепропетровском. Любезные хозяева — учащиеся школ Днепропетровска — сопровождали своих гостей по городу, с гордостью показывая им всё достопримечательные места. Ребята посетили музей Комсомольской славы, театр юного зрителя, побывали в школах города.

Незаметно промелькнула неделя. Флаг олимпиады был спущен 30 марта. На закрытии были подведены итоги.

Дипломы первой степени получили

по 7 классам: *Владимир Вовк* (Червоноградская с. ш. № 1, Львовской обл.), *Игорь Калика* (с. ш. № 32, г. Киев) и *Марк Нудельман* (с. ш. № 50, г. Одесса);

по 8 классам: *Дмитрий Литвиненко* (с. ш. № 1, г. Севастополь), *Сергей Лифшиц* (с. ш. № 27, г. Харьков);

по 9 классам: *Александр Блоха* (с. ш. № 27, г. Харьков), *Илья Бахмутский* (с. ш. № 52, г. Львов), *Александр Резников* (с. ш. № 145, г. Киев), *Илья Юнус* (с. ш. № 27, г. Харьков);

по 10 классам: *Григорий Скляр* (с. ш. № 27, г. Харьков), *Николай Чернов* (с. ш. № 95, Кривой Рог, Днепропетровской обл.), *Николай Щербина* (с. ш. № 80, г. Днепропетровск).

Дипломы второй степени получили 17 человек и третьей — 29. 242 человека получили дипломы участников XIV олимпиады школьников Украины. Кроме того, многие ребята получили дипломы, премии и памятные подарки, учрежденные высшими учебными заведениями г. Днепропетровска.

Приводим некоторые из задач, предлагавшихся на олимпиаде.

8 класс

1. Найти минимум выражения

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\ldots+a_{1974}}+$$
$$+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\ldots+a_{1974}}+$$
$$+\ldots+\frac{a_{1974}}{1+a_1+\ldots+a_{1973}},$$

если $a_i \geqslant 0$ и $a_1+a_2+\ldots+a_{1974}=1$.

2. На плоскости заданы четыре прямые общего положения (то есть каждые три из них образуют треугольник). Одна из них параллельна медиане треугольника, образованного тремя другими прямыми. Доказать, что этим свойством обладают и все остальные прямые.

9 класс

3. Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел, не представимых в виде

$$a_1^6+a_2^6+\ldots+a_7^6,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — натуральные числа.

10 класс

4. Из точки в пространстве проведено n лучей так, что любые два из них образуют угол не менее 30°. Доказать, что лучей не более 58.

Л. В. Кованцова

Телевидение готовит в вуз

1-го сентября начинаются занятия на Московских подготовительных телевизионных курсах для поступающих в вузы.

Основной целью телевизионных подготовительных курсов является оказание помощи поступающим в вузы. В течение учебного года телезрителям предлагаются циклы передач по физике, математике и русскому языку, в основу которых положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Телекурсы ставят своей задачей систематизировать знания учащихся, научить их применять свои знания при решении конкретных вопросов и задач. Занимаясь на телекурсах, слушатели смогут познакомиться с лекционной формой ведения занятий и приобрести определенные навыки самостоятельной работы.

Телевизионные занятия продолжаются в течение всего учебного года. Слушателям телекурсов систематически предлагаются обязательные для выполнения домашние задания различной трудности. Периодически по пройденным разделам проводятся контрольные работы.

Правила оформления ответов на задания указываются в аннотациях занятий, которые будут высланы всем зачисленным слушателям.

На телекурсы зачисляются все желающие, как учащиеся выпускных классов общеобразовательных школ и техникумов, так и лица, имеющие законченное среднее образование. Прием на Московские подготовительные телекурсы проводится без конкурса.

Для зачисления на телекурсы слушатель должен прислать в одном конверте в адрес курсов «Анкету-заявление», «Регистрационные карточки» и конверт со своим обратным адресом.

«Анкета-заявление» оформляется на почтовой карточке, на лицевой стороне которой следует написать свой адрес и номер телефона (домашнего или служебного), если он имеется. Обратная чистая сторона карточки оформляется так, как указано на образце. В правом верхнем углу обязательно проставляйте буквы, соответствующие отделениям, на которых вы хотите заниматься (если слушатель собирается заниматься на всех отделениях, он должен проставить соответственно три буквы: «Ф» соответствует отделению физики, «М» — математики, «Р» — русского языка,— и указать в тексте заявления названия всех отделений).

«Регистрационная карточка» оформляется также на почтовой карточке. На лицевой стороне напишите свой адрес, чистую оформите как указано на образце. В левом верхнем углу должна быть приклеена фотография (размером 3 см × 4 см). Для каждого отделения заполняется отдельная «Регистрационная карточка».

На письмах с заявлениями в адрес курсов слушатель должен проставлять в левом верхнем углу конверта все те буквы («Ф», «М», «Р»), которые указаны в анкете-заявлении.

М

АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество
2. Год рождения
3. Род занятий (учусь, работаю)
4. Место работы, должность, стаж (если работаете)
5. В какой вуз собираетесь поступать

Прошу принять меня на отделение математики Московских подготовительных телекурсов для поступающих в вузы.

Подпись, дата

фото
3×4

М

РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА

(отд. математики)

1. Фамилия, имя, отчество
2. Место учебы (если учитесь)
3. Последняя годовая оценка по математике, полученная Вами в школе или среднем учебном заведении
4. В какой вуз собираетесь поступать

Как показывает опыт работы телекурсов, свыше 90% слушателей, систематически занимающихся в течение учебного года, успешно поступают в различные вузы страны.

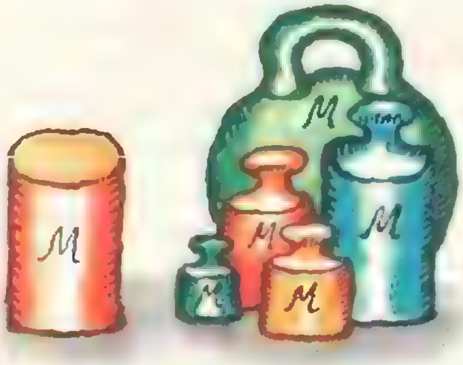
Адрес телекурсов: *Москва* 113162, *Шаболовка*, 37, *Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские телевизионные подготовительные курсы.*

И. А. Дьяконов, А. В. Качанов,
И. И. Наслузов

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В классе учится менее 50 школьников. За контрольную работу $^1/_7$ учеников получила пятерки, $^1/_3$ — четверки, $^1/_2$ — тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?



2. Имеется тело массы M и несколько гирь одинаковых масс M, сделанных из различных материалов. Какой гирей надо уравновесить тело на весах в вакууме, чтобы равновесие не нарушилось в воздухе?

3. Некоторое число возвели в третью степень. Полученное трехзначное число записали в обратном порядке, получили простое число. Найти исходное число.

4. Известно, что свет проходит расстояние от Солнца до Земли приблизительно за 8 минут. Если бы свет распространялся мгновенно, увидели бы мы на Земле восход Солнца на 8 минут раньше?

5. Директор завода ежедневно приезжает на станцию к 8 часам утра. К этому же времени на станцию приезжает машина и отвозит директора на завод, расположенный в поселке за несколько километров от станции.

Однажды директор приехал на станцию в 7 утра и пошел по шоссе по направлению к заводу. Вскоре он встретил свою машину, сел в нее и приехал на завод на 12 минут раньше, чем обычно.

В котором часу директор встретил свою машину?

Рисунки Э. Назарова

В редакцию нашего журнала пришло письмо от ученицы 9-го класса школы № 3 г. Губкина Иры Поповой. В этом письме Ира рассказывает о том, как она сама придумала и решила задачу. Письмо нам так понравилось, что мы решили поместить его в виде заметки, надеемся, что она будет полезна читателям нашего журнала.

Ира Попова

Об одной задаче

Я расскажу об одной задаче, которую я придумала. Вот *она: доказать, что число* $4^{2m} - 1$ *при натуральных* m *делится на* 15. *Придумала я ее так.*

В 1973 году, я тогда училась в 7-м классе, на областной олимпиаде была предложена следующая задача: *доказать, что число* $4^{1973} - 1$ *составное.* Я ее так решила:

$$4^{1973} - 1 = (2^{1973})^2 - 1 = (2^{1973} + 1) \times \times (2^{1973} - 1),$$

следовательно, $4^{1973} - 1$ делится на $(2^{1973} \pm 1)$. Еще можно заметить, что

$$4^1 - 1 = 3 \text{ делится на } 3,$$
$$4^2 - 1 = 15 \text{ делится на } 3$$

и так далее, я проверила до 14-й степени, получавшиеся числа всегда делились на 3. Но доказать утверждение, что $4^n - 1$ делится на 3 при натуральных n, я тогда не смогла. Потом я его все же доказала:

$$\begin{aligned}4^n - 1 &= 4^n - 4 + 3 = 4(4^{n-1} - 1) + 3 = \\ &= 4[4(4^{n-2} - 1) + 3] + 3 = \\ &= 4^2(4^{n-2} - 1) + 3 \cdot 4 + 3 = \\ &= 4^2(4^{n-2} - 1) + 3(4 + 1) = \\ &= \ldots = 4^n(4^{n-n} - 1) + \\ &+ 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4^2 + 4 + 1) = \\ &= 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + 4^{n-3} + \ldots + 4^{n-n}).\end{aligned}$$

Таким *способом можно доказать* много интересных утверждений, например: *если показатель степени* n *делится на какое-нибудь число* m, *то, кроме делителя 3, число* $4^n - 1$ *имеет еще делитель* $4^m - 1$. Наверное, это можно доказать проще с помощью метода математической индукции, но у меня ничего не получилось.

А теперь — решение задачи: *доказать, что число* $4^{2m} - 1$ *при натуральных* m *делится на* 15.

Решение. Число 4 в четной степени оканчивается цифрой 6, значит, $4^{2m} - 1$ оканчивается цифрой 5, и, следовательно, делится на 5.

Но число $4^n - 1$ делится и на 3 — это я уже доказала. Поэтому, если $n = 2m$, то $4^n - 1$ делится одновременно и на 3, *и на 5, то есть на 15.*

И. Г. Булавко

Делимость чисел

Все вы хорошо знаете, что такое делимость чисел. А умеете ли вы решать задачи на делимость? Задачи эти нередко предлагаются и на математических олимпиадах, и на вступительных экзаменах в математические школы. В этой статье мы подробно разбираем несколько задач на делимость; к каждой задаче дается совет, который может оказаться полезным и при решении других задач.

Напомним основные сведения из теории делимости.

Определение. *Пусть a и b — целые числа и $b \neq 0$. Будем говорить, что a делится на b, если $a = bq$, где q — тоже целое число**).

Замечание. Иногда тот факт, что a делится на b, записывают так: $a \vdots b$, или же говорят, что b делит a, и пишут: b/a (соответственно, если a не делится на b (то есть b не делит a), пишут a не $\vdots\, b$).

Теоремы

1) *Если a делится на b, b делится на c, то a делится на c:*

$$(a \vdots b \text{ и } b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c).$$

2) *Если a делится на m, то и ab делится на m (b — любое целое число):*

$$(a \vdots m) \Rightarrow (ab \vdots m).$$

3) *Если a делится на m и b делится на m, то и $a + b$ делится на m:*

$$(a \vdots m \text{ и } b \vdots m) \Rightarrow (a + b \vdots m).$$

4) *Если $a + b$ делится на m и a делится на m, то и b делится на m:*

$$(a + b \vdots m \text{ и } a \vdots m) \Rightarrow (b \vdots m).$$

5) *Если a делится на m, и a делится на k, причем m и k взаимно просты**), *то a делится на произведение mk:*

$$(a \vdots m \text{ и } a \vdots k \text{ и } (m, k) = 1) \Rightarrow (a \vdots mk).$$

6) *Если ab делится на m и a взаимно просто с m, то b делится на m:*

$$(ab \vdots m \text{ и } (a, m) = 1) \Rightarrow (b \vdots m).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться этими теоремами без специальных ссылок на них.

Задача 1. *Если к некоторому пятизначному числу***) *приписать справа цифру 6 и полученное новое число умножить на 4, то получится первоначальное число с приписанной цифрой 6 впереди. Найти получившееся число.*

Совет. Прежде чем решать задачу, запишите (по возможности — удачнее) ее текст на математическом языке.

Решение.

$$\begin{array}{r} \times\,\overline{abcde6} \\ 4 \\ \hline \overline{6abcde}. \end{array}$$

Выполняя умножение, последовательно находим цифры искомого числа: $e = 4$, $d = 8$ и так далее.

Ответ. 615384.

Задача 2. *Записали одну за другой четыре последовательные цифры, затем первые две поменяли места-*

---

*) Латинскими буквами a, b, c, d, ... мы впредь будем обозначать целые числа; если число при этом простое, обозначим его буквой p.

*) Говорят, что число a взаимно просто с b, если наибольший общий делитель a и b равен 1. Обозначают наибольший общий делитель чисел a_1, a_2, ..., a_n через $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда то, что a взаимно просто с b, записывается так: $(a, b) = 1$.

**) Многозначное, например, $n + 1$-значное, число принято обозначать следующим образом: $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$, где a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) — цифры числа; цифры можно обозначать также буквами a, b, c, ...

ми. Получилось четырехзначное число, являющееся точным квадратом. Найти это число.

Совет. Если в задаче идет речь о многозначном числе, и нас интересуют отдельные его цифры или числа, записанные несколькими рядом стоящими цифрами, то может оказаться полезным какое-либо из следующих представлений данного числа (в десятичной системе счисления):

$$\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}=\begin{cases} a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\dots+a_110+a_0,\\ \overline{a_na_{n-1}\dots a_1}\cdot10+a_0,\\ \overline{a_na_{n-1}\dots a_2}\cdot100+\overline{a_1a_0},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_n\cdot10^n+\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0}.\end{cases}$$

Решение. Пусть $\overline{(a+1)\,a\,(a+2)\,(a+3)}=n^2$ — искомое число (a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ — цифры! то есть $0\leqslant a\leqslant 6$).

Запишем n^2 в таком виде:

$$n^2=(a+1)\cdot1000+a\cdot100+(a+2)\cdot10+(a+3),$$

то есть

$$n^2=11\cdot(101a+93).$$

Понятно, что $101a+93$ должно делиться на 11 (произведение $11\cdot(101a+93)$ — точный квадрат). Но

$$101a+93=11(9a+8)+(2a+5);$$

значит, $2a+5$ тоже делится на 11. Так как $0\leqslant a\leqslant 6$, то

$$5\leqslant 2a+5\leqslant 17.$$

В промежутке $[5, 17]$ есть лишь одно число, делящееся на 11 — это 11. Поэтому $2a+5=11$, откуда $a=3$,

$$n^2=4356=66^2.$$

Упражнение 1. Если к некоторому двузначному числу приписать справа число, меньшее на единицу, то получится четырехзначное число, являющееся точным квадратом. Найти получившееся число.

Задача 3. *Найти остаток от деления числа n на 30, если известно, что остаток от деления n на 15 равен 7 и остаток от деления n на 6 равен 4.*

Совет. Часто при исследовании вопроса о делимости одного числа на другое бывает полезна теорема о делении с остатком: *для любых двух целых чисел a и b ($b>0$) существует пара чисел q и r, и притом единственная пара, таких, что*

$$a=bq+r \text{ и } 0\leqslant r<b. \qquad (1)$$

Решение. Представим n в таком виде: $n=30q+r$, $0\leqslant r<30$. Известно, что $n=15k+7$; значит, $r-7$ делится на 15 и

$$-7\leqslant r-7<23.$$

Но в промежутке $[-7, 23]$ на 15 делятся два числа: 0 и 15; поэтому либо $r=7$, либо $r=22$. Если $r=7$, то $n=30q+7$, и остаток от деления на 6 равен единице, а не четырем, — поэтому значение $r=7$ не годится.

Если $r=22$, то $n=30q+22=(30q+18)+4$, и при делении на 6 в остатке получается 4.

Поэтому $r=22$.

Упражнение 2. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Задача 4. *Доказать, что разность квадратов двух целых чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3 кратна 24.*

Совет. Иногда вместо равенства (1) полезно использовать несколько иную форму записи числа a. Перепишем правую часть равенства (1) так:

$$bq+r=b(q+1)-b+r=b(q+1)-(b-r)$$

и положим

$$q+1=m$$
$$b-r=r_1.$$

Получим такую форму записи числа a:

$$a=bm-r_1,\quad 0<r_1\leqslant b. \qquad (2)$$

Например, вместо равенств, которые

получаются из формы $a = 5q + r$, то есть вместо равенств $a = 5q$, или $a = 5q + 1$, или $a = 5q + 2$, или $a = 5q + 3$, или $a = 5q + 4$, учитывая (2), можно записать, что

$$a \text{ — либо } 5m, \text{ либо } 5m \pm 1, \text{ либо } 5m \pm 2.$$

Очевидно, что такая форма записи более компактна. (В приведенном примере вместо $r = 3$ и $r = 4$ мы записали $-(5 - r)$, то есть -1 и -2.)

Решение. Пусть a и b — два числа, удовлетворяющие условию задачи. Выясним, какие значения могут принимать остатки от деления этих чисел и их квадратов на 24. Представим число a в виде $a = 24q + r$, где $0 \leqslant r < 24$. Так как a не кратно 2 и не кратно 3, то r может принимать лишь значения 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Следовательно, a можно записать в одной из форм: $a = 24m_1 \pm 1$, $a = 24m_2 \pm 5$, $a = 24m_3 \pm 7$, $a = 24m_4 \pm 11$. Нетрудно проверить, что в любом из этих случаев остаток от деления a^2 на 24 равен 1.

Аналогично получим, что $b^2 = 24n + 1$. Тогда $a^2 - b^2 = 24\,(m - n)$, то есть $a^2 - b^2$ делится на 24. Задача решена.

Упражнение 3. Докажите, что число $5q + 2$ не является квадратом целого числа ни при каком значении q.

Задача 5. *Доказать, что* $A = n^5 - 5n^3 - 6n$ *делится на* 10.

Совет. При решении задач на делимость часто помогает следующая теорема: *из n последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на n.*

Докажите эту теорему самостоятельно. Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для n последовательных нечетных чисел и n последовательных четных чисел (здесь уже существенно то, каково n — четное или же нечетное).

Решение. $A = n\,(n^4 - 5n^2 - 6) = n\,(n^4 - 5n^2 + 4) - 10n = n\,[(n^4 - n^2) - (4n^2 - 4)] - 10n = n\,(n^2 - 1)\,(n^2 - 4) - 10n = (n - 2)\,(n - 1)\,n\,(n + 1) \times (n + 2) - 10n$.

Произведение $(n - 2)\,(n - 1)\,n\,(n + 1)\,(n + 2)$ делится, согласно упомянутой теореме, и на 2, и на 5, то есть делится на 10. Но, значит, и вся разность (равная A) также делится на 10, что и требовалось доказать.

Задача 6. *Доказать, что число* $N = \underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{цифр}}\underbrace{22\ldots2}_{k\ \text{цифр}}$ *есть произведение двух последовательных натуральных чисел.*

Совет. Если задача не поддается решению в общем виде, рассмотрите несколько ее частных случаев и затем попытайтесь перейти от них к общему случаю.

Решение. Заметим, что

$$12 = 3\cdot4,$$
$$1122 = 33\cdot34,$$
$$111222 = 333\cdot334.$$

Естественно предположить, что и в общем случае

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{k\ \text{цифр}}\underbrace{22\ldots2}_{k\ \text{цифр}} = \underbrace{33\ldots3}_{k\ \text{цифр}}\cdot\underbrace{33\ldots34}_{k\ \text{цифр}}. \qquad (3)$$

Докажем равенство (3). Имеем:

$$33\ldots3\cdot33\ldots34 = 3\cdot11\ldots1 \times (\underbrace{33\ldots3}_{k\ \text{цифр}} + 1) = 11\ldots1 \times (\underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{цифр}} + 3) = 11\ldots1 \times (10^k + 2) = 11\ldots122\ldots2,$$

что и требовалось доказать.

Задача 7. *Доказать, что* $A_n = 2^{n+2}\cdot3^n + 5n - 4$ *делится на* 25 *при любом натуральном* n.

Совет. Такие утверждения разумно доказывать методом математической индукции.

Решение. 1) При $n = 1$ утверждение справедливо:

$$A_1 = 2^3\cdot3 + 5 - 4 = 25$$

делится на 25.

2) Предложим, что утверждение уже доказано для всех $n \leqslant k$; докажем, что оно верно также и для $n = k + 1$, то есть докажем, что A_{k+1} делится на 25. Имеем:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1 = \\ &= 2 \cdot 2^{k+2} \cdot 3 \cdot 3^k + 5k + 1 = \\ &= 6\,(2^{k+2} \cdot 3^k) + 5k + 1 = \\ &= 6\,(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25k + \\ &+ 25 = 6A_k - 25\,(k - 1) \end{aligned}$$

делится на 25, так как A_k делится на 25 согласно индукционному предположению.

Следовательно, A_n делится на 25 при любом натуральном n.

Задача 8. *Четырехзначное число, являющееся полным квадратом, обладает следующим свойством: если все его цифры уменьшить на одно и то же число, то получится четырехзначное число, также являющееся полным квадратом. Найти все четырехзначные числа с описанным свойством.*

Совет. В некоторых случаях целесообразно попробовать решить задачу *подбором*. При этом следует помнить, что подбор обязательно должен быть исчерпывающим, иначе задача не может считаться решенной.

Решение. Дано, что

$$\left.\begin{aligned} &\overline{abcd} = A^2, \\ &\overline{(a-k)\,(b-k)\,(c-k)\,(d-k)} = B^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ясно, что

$$a \geqslant k, \; b \geqslant k, \; c \geqslant k, \; d \geqslant k. \qquad (5)$$

Рассмотрим разность $A^2 - B^2$:

$$A^2 - B^2 = (1000a + 100b + 10c + d) - [1000\,(a - k) + 100\,(b - k) + 10\,(c - k) + (d - k)] = 1111k,$$

то есть

$$(A + B)\,(A - B) = 11 \cdot 101k. \qquad (6)$$

Так как и A^2 и B^2 — четырехзначные числа, то $32 \leqslant A \leqslant 99$ и $32 \leqslant B \leqslant 99$; значит, во всяком случае

$$\left.\begin{aligned} 64 &\leqslant A + B \leqslant 200, \\ 0 &\leqslant A - B \leqslant 67. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Отсюда сразу следует, что $A + B = 101$, $A - B = 11 \cdot k$. Раз сумма $A + B$ — число нечетное, то и разность $A - B$ — тоже число нечетное. Поэтому и k должно быть нечетным. Так как $A - B < 67$, то могут подойти следующие значения k: 1, 3, 5. Подходит лишь $k = 1$ и $k = 3$.

Ответ. а) $3136 = 56^2$; $2025 = 45^2$.

б) $4489 = 67^2$, $1156 = 34^2$.

И, наконец, главный совет: решайте как можно больше задач, ведь догадка и смекалка приходят только с опытом.

Упражнения

4. Докажите, что $A = m\,(m^2 - 7)$ делится на 6 при любом натуральном m.

5. Докажите, что если к любому трехзначному числу приписать справа это же число, то полученное шестизначное число делится на 7, 11 и 13.

6. Найдите двузначное число, равное неполному квадрату суммы его цифр.

7. Докажите, что число, состоящее из 3^n единиц, делится на 3^n.

8. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, удовлетворяющих равенствам: $abc + a = 3333$, $abc + b = 5555$, $abc + c = 7777$.

9. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то $N = p^2 + 3n + 2$ — составное при любом натуральном n.

10. Докажите, что $S = 3 + 3^3 + 3^5 + \ldots + 3^{4n-1}$ делится на 10.

11. Найдите пятизначное число, превосходящее в 45 раз произведение его цифр.

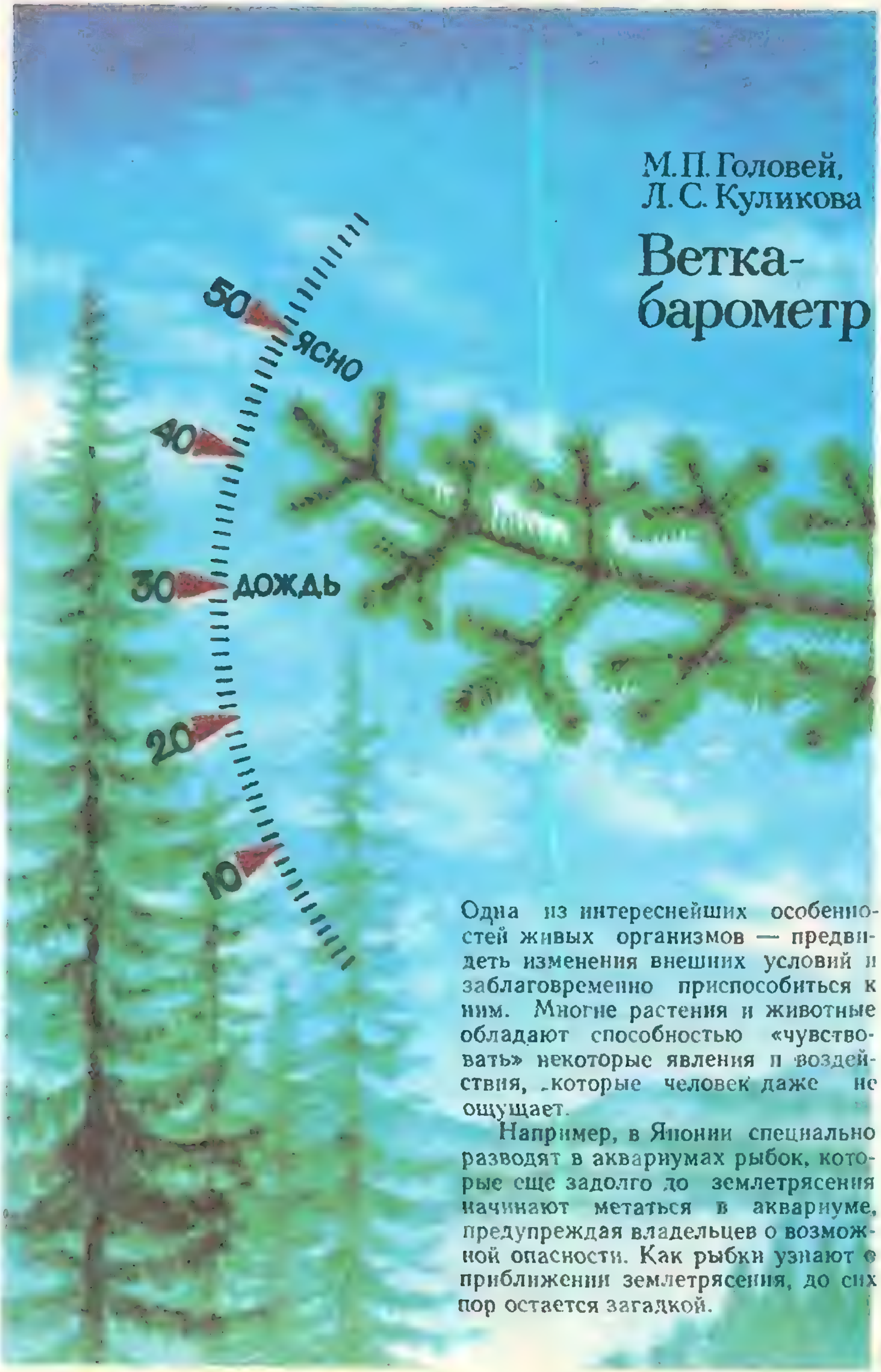
12. Докажите, что сумма

$$\underbrace{11\ldots1}_{m\ \text{цифр}} \cdot \underbrace{100\ldots5}_{m+1\ \text{цифра}} + 1$$

является квадратом натурального числа.

М. П. Головей,
Л. С. Куликова

Ветка-барометр



Одна из интереснейших особенностей живых организмов — предвидеть изменения внешних условий и заблаговременно приспособиться к ним. Многие растения и животные обладают способностью «чувствовать» некоторые явления и воздействия, которые человек даже не ощущает.

Например, в Японии специально разводят в аквариумах рыбок, которые еще задолго до землетрясения начинают метаться в аквариуме, предупреждая владельцев о возможной опасности. Как рыбки узнают о приближении землетрясения, до сих пор остается загадкой.

Погодные условия в жизни человека играют огромную роль, поэтому очень важно заранее знать обо всех ожидаемых изменениях погоды.

Сейчас во всех странах существуют метеорологические станции, ведущие наблюдения за состоянием атмосферы (измеряются количество осадков, сила ветра и давление воздуха на различных высотах) и составляющие прогнозы погоды. При составлении точного прогноза для данной местности необходимо учитывать большое количество различных факторов, влияющих на состояние атмосферы всей Земли. Эта сложная проблема в настоящее время еще не до конца решена. Такой метод определения погоды (он называется синоптическим) допускает некоторые неточности в прогнозах. Биофизические наблюдения природы позволяют уменьшить эти неточности.

Данные об изменении поведения животных и растений перед сменой погоды издавна используются в народе для прогнозирования различных атмосферных явлений. Например, было замечено, что если чайки рано утром улетают далеко в море, то до вечера сильного ветра не будет. И, наоборот, массовое возвращение птиц к берегу с моря предвещает приближение шторма. Еще пример — задолго до начала шторма медузы спешат заблаговременно укрыться в безопасном месте. Оказывается, сигналом к этому являются инфразвуки с частотой 3—13 *гц*, возникающие от трения волн о воздух. Интенсивные инфразвуковые колебания, образующиеся над поверхностью моря при сильном ветре в результате вихревых процессов у гребней волн, распространяются быстрее штормового фронта. Медузы и воспринимают эти колебания. В результате изучения этого явления был сконструирован прибор, позволяющий определить направление шторма и его силу задолго до его начала (примерно за 15 часов).

В результате многочисленных наблюдений установлено, что растения чрезвычайно восприимчивы к давлению, температуре и влажности воздуха. Например, хвойные деревья обычно опускают свои ветви перед дождем и поднимают их вверх перед ясной погодой. В большей степени этой особенностью обладает ель; наблюдательные туристы по состоянию ее кроны могут определить предстоящую погоду.

Способность реагировать на изменения погоды сохраняется и в неживом дереве. Это свойство можно с успехом использовать для изготовления самодельного барометра. Для этого отпилите от сухой ели ветку с куском ствола. Диаметр ветки у основания должен быть 10—15 *мм*, длина 30—50 *см*. Получившийся сучок очистите от коры и прикрепите его за остаток ствола к стене так, чтобы ветка находилась приблизительно в таком же положении, как и на дереве. Теперь остается сделать шкалу для отсчета положения конца ветки, и барометр будет готов. Вырежьте из бумаги или картона сектор с радиусом, равным длине ветки, и углом раствора 90°. На окружности сектора для удобства отсчета через каждые 5 *мм* нанесите деления. Еловая ветка будет выполнять роль стрелки, положение которой зависит от состояния атмосферы. Проведя несколько наблюдений положения ветки в зависимости от состояния погоды, можно проградуировать этот самодельный барометр.

Рекомендуем вам не только наблюдать, но и проводить ежедневные записи, отмечая в таблице положение ветки и состояние погоды. Такая таблица поможет вам делать более точные прогнозы погоды вашей местности. Для того чтобы барометр хорошо работал, надо его расположить в тени, избегая попадания прямых солнечных лучей, и вдали от источников тепла (например, отопительных батарей).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «От перемены мест слагаемых...»

Мы будем пользоваться задачами из статьи «20 задач на пределы» *). Ссылаясь на них, мы будем перед номером писать букву П.

3. а) $a_n = 1$; б) $a_n = (-1)^n$.

4. При любом натуральном n

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \leqslant \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$$

Согласно П1а сумма ряда в правой части равна $\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \leqslant 1,$$

причем для $n > 1$ выполняется строгое неравенство. Отсюда при $n > 1$

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \frac{1}{n!}. \qquad (1)$$

В частности, $\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots < \frac{1}{2}$, так что $e < 3$. Неравенство $e > 2$ очевидно. Положим

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = S_n;$$

согласно (1) тогда $0 < e - S_n < \frac{1}{n!}$, то есть $e - S_n = q_n/n!$, где $0 < q_n < 1$. Допустим, что e — рациональное число: $e = m/n$. Тогда $\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{q_n}{n!}$. Умножив обе части на $n!$, слева получим целое число, а справа — не целое. Значит, e — иррационально.

5. Сходимость ряда $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ и неравенство $S \leqslant 1\frac{3}{4} < 2$ следует из П1б. При $k > 2$ ряд $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$ и подавно сходятся. При $k = 1$ он расходится согласно П1в.

6. Положим $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{(-1)^n}{n} = S_n$. Тогда $S_{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = S_{2n}$, то есть последовательность $\{S_{2n}\}$ — возрастающая. При этом она ограниченная: $S_{2n} < 1$, так как

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n}.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ существует. Частичные суммы S_{2n+1} стремятся к тому же пределу, так как

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}.$$

7. Нет. Может оказаться, что ряд из положительных слагаемых расходится.

8. Можно. Для доказательства обозначим соответственно через S_n^+ и S_n^- суммы положительных и отрицательных слагаемых, входящих в состав частичной суммы $S_n = a_1 + \dots + a_n$. По условию, $S_n^+ \to p$, $S_n^- \to q$ при $n \to \infty$. Так как $S_n = S_n^+ + S_n^-$, то согласно П15а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и равен $p + q$, то есть $p + q = S$. (Заметим, что предположение о существовании всех трех пределов: S, p и q — было излишним — достаточно предполагать, что существуют два из них.)

9. Нельзя.

10. Можно (и а), и б)).

11. Не может. Докажем это. Частичные суммы ряда (7) (см. с. 16) обозначим через S_n, а ряда (8) — через $\overline{S}_n$. Согласно П17б, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для любого натурального $n > k$ и для любого натурального p

$$|\overline{S}_{n+p} - \overline{S}_n| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

---

*) См. «Квант», 1974, № 3.

Значит, согласно П17а, последовательность $\{S_n\}$ сходится, то есть ряд (7) сходится.

12. Условно.

13. Снова введем обозначения S_n^+ и S_n^- (см. решение упражнения 8). Разность $S_n^+ - S_n^-$ равна, очевидно, $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$. Следовательно, $|a_1| + |a_2| + \ldots = p - q$, то есть ряд $a_1 + a_2 + \ldots$ сходится абсолютно.

14. Ничего не получится: ряды из положительных и отрицательных членов оба расходятся, так что просуммировать порознь положительные и отрицательные члены ряда нельзя.

15. Используем обозначения S_n^+, S_n^-, S_n и $\overline{S}_n$ (см. решения упражнений 8 и 11), $S_n = S_n^+ + S_n^-$, $\overline{S}_n = S_n^+ - S_n^-$; отсюда

$$S_n^+ = \frac{S_n + \overline{S}_n}{2}, \quad S_n^- = \frac{S_n - \overline{S}_n}{2}.$$

Так как данный ряд сходится абсолютно, то $\{S_n\}$ и $\{\overline{S}_n\}$ имеют пределы S и $\overline{S}$ при $n \to \infty$. Значит, S_n^+ и S_n^- тоже имеют пределы:

$$p = \frac{S + \overline{S}}{2}, \quad q = \frac{S - \overline{S}}{2}.$$

Значит, $S = p + q$.

16. Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S$. Ряд, полученный после перестановки членов a_n, обозначим через $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, а его частичные суммы через T_n.

Пусть сначала все $a_n \geqslant 0$. Тогда теорема очевидна: $T_n \leqslant S$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ существует и равен $T \leqslant S$. Но ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ в свою очередь получается перестановкой из $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, поэтому $S \leqslant T$, то есть $S = T$. Теорема столь же очевидна, если все $a_n \leqslant 0$.

Пусть теперь $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ — произвольный абсолютно сходящийся ряд. Тогда:

1) так как $|a_n| \geqslant 0$, то $|a_1| + |a_2| + \ldots = |b_1| + |b_2| + \ldots$, то есть ряд $b_1 + b_2 + \ldots$ сходится абсолютно;

2) после перестановки ряд из положительных членов a_n сходится к прежней сумме p, а ряд из отрицательных членов a_n — к прежней сумме q; согласно упражнению 15 $T = p + q = S$.

17. Снова используем обозначения S_n^+, S_n^- и S_n (см. решения упражнений 8, 13 и 15). При $n \to \infty$ последовательность $\{S_n\}$ стремится к S. Равенство $S_n = S_n^+ + S_n^-$ показывает, что если при $n \to \infty$ какая-нибудь из последовательностей $\{S_n^+\}$ и $\{S_n^-\}$ имеет предел, то имеет предел и другая; но тогда стремится к пределу и их разность $\{S_n^+ - S_n^-\}$. Так как

$$S_n^+ - S_n^- = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|,$$

то ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится тогда абсолютно, а не условно вопреки предпосылкам. Итак, оба ряда (и из положительных, и из отрицательных членов a_n) расходятся.

18. Согласно П17а, б для сходимости ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k, что для любого $n > k$ и любого p

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

При $p = 1$ получаем отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последнее условие — необходимое, но, разумеется, не достаточное для сходимости ряда (например, оно выполнено для гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, и тем не менее этот ряд расходится).

19. Для всех трех упражнений: а), б) и в) — важно следующее

Замечание. Расставить скобки, объединив в группы члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, — это то же самое, что выбрать подпоследовательность из последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$.

а) Для последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда

$$-1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{4 \text{ слагаемых}} - \underbrace{\frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{3}}_{9 \text{ слагаемых}} + \ldots + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}}_{n^2 \text{ слагаемых}} + \ldots \qquad (\bullet)$$

любое действительное число S является предельной точкой. Согласно П8в $\{S_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к S. Значит, для любого S можно подобрать такую расстановку скобок, чтобы ряд $(\bullet)$ стал сходиться к S.

б) Пусть $\{S_n\}$ и $\{T_n\}$ — последовательности частичных сумм для исходного и полученного ряда соответственно. Тогда $\{T_n\}$ является подпоследовательностью $\{S_n\}$ и, согласно П4а, имеет тот же предел, что $\{S_n\}$.

в) Последовательность $\{a_n\}$ состоит из членов сходящегося ряда, только взятых в другом порядке. Значит, согласно упражнению 18 и П4в $a_n \to 0$. Поэтому (см. П20а) любая точка S отрезка $[a, b]$ является предельной для $\{S_n\}$. Это равносильно доказываемому утверждению согласно замечанию и П8в.

20. Так как ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots$ расходится, то найдется n, для которого

$|a_1| + \ldots + |a_n| > S$. Пусть n_1 — наименьшее из таких n. Далее найдется n, для которого $|a_1| + \ldots + |a_{n_1}| - |a_{n_1+1}| - \ldots - |a_n| < S$. Наименьшее из таких n назовем n_2. За n_3 примем наименьшее n, для которого

$$|a_1| + \ldots + |a_{n_1}| - \\ - |a_{n_1+1}| - \ldots - |a_{n_2}| + \\ + |a_{n_2+1}| + \ldots + |a_{n_3}| > S$$

и т. д. Числа b_n подберем так, чтобы $a_n b_n = |a_n|$ при $1 \leqslant n \leqslant n_1$, $a_n b_n = -|a_n|$ при $n_1 < n \leqslant n_2$, $a_n b_n = |a_n|$ при $n_2 < n \leqslant n_3$ и т. д. Так как $a_n — 0$, то так построенный ряд $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$ будет сходиться к S.

21. Ответ на вопросы а), б) и в) дает теорема Серпинского. Сформулируем ее.

Перестановки, перемещающие только отрицательные члены ряда и оставляющие положительные члены на своих местах, назовем C-перестановками.

а) Для любого условно сходящегося ряда можно найти C-перестановку, которая переведет его в расходящийся.

б) Пусть отрицательные члены условно сходящегося ряда образуют монотонную последовательность (пример: $1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + {}^1/_5 - {}^1/_6 + \ldots$), тогда C-перестановки не могут уменьшить его сумму.

в) Переставим между собой отрицательные члены ряда так, чтобы они образовали монотонную последовательность. После этого ряд может оказаться расходящимся $S_n \to \infty$) или сходящимся к некоторому числу S. В первом случае C-перестановками можно заставить ряд сходиться к любой сумме, во втором случае — к любой сумме $K > S$.

К статье «Игра «Жизнь»

1. Пять пентамино погибают на пятом ходу; два пентамино переходят в устойчивые конфигурации из семи клеток; четыре — довольно быстро превращаются в «навигационные огни».

2. Конфигурация *б* («латинский крест») погибает на пятом ходу, конфигурация *в* (буква *Н*) — на шестом. Конфигурации *г*, *д*, *е* через каждые два хода воспроизводят сами себя, то есть являются периодическими. Конфигурация *ж* является устойчивой; она называется «пасекой».

3. Ряд из пяти фишек переходит в «навигационные огни»; из шести — погибает. Семиклеточный ряд превращается в «пасеку» (см. задание 2); восьмиклеточный — в четыре «улья» и четыре «блока»; девятиклеточный — в два набора «навигационных огней».

4. Конфигурация *а* («восьмерка») — периодически переходит в себя (период равен восьми); конфигурация *б* (буква Z) после 12-го хода превращается в два «разлетающихся» «планера»; конфигурация *в* (сталкивающиеся «планеры») погибает после четвертого хода.

К статье «Из жизни единиц»

1. Да, существует. Например, четыре узла — вершины одного квадратика.

2. В примере 1:

(0, 0), (0, 1), (0, —1), (1, 0), (—1, 0).

В примере 2:

(0, 0), (0, 1), (1, 0).

3б. Указание. Обозначим $x_{\min}(K)$ и $x_{\max}(K)$ — минимальное и максимальное значения координаты x для узлов, входящих в колонию K. Докажите, что от применения **P** величина $x_{\min}$ не уменьшается, а $x_{\max}$ заведомо уменьшается (пока колония непуста).

4б. Для примера 1 можно доказать, что полуплоскость является нулевой тогда и только тогда, если она содержит точку O. Для примера 4 дело обстоит сложнее. Там всякая нулевая полуплоскость содержит точку $\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, поэтому $\xi \in \sigma_{\mathbf{P}}$. С другой стороны, существуют четыре нулевые полуплоскости, пересечение которых состоит из одной точки ξ. Это — четыре полуплоскости, ограниченные двумя прямыми: $y = x$, $y = 1 - x$. Поэтому $\sigma_{\mathbf{P}}$ состоит только из этой точки ξ.

5. Пожалуй, я бы заявил, что эта точка существует, как физики заявляют о существовании фотонов, нейтрино и всего другого, что им нужно, чтобы сформулировать законы, согласующиеся с данными экспериментов.

9а. Либо эти четыре точки — вершины выпуклого четырехугольника, либо одна из них принадлежит треугольнику с вершинами в трех других точках, либо все четыре лежат на одной прямой.

9б. Выберите из этих n точек четыре и разбейте их на два подмножества, а все остальные точки добавьте к любому из них.

Доказательство теоремы Хелли

Докажем теорему индукцией по числу n. Предположим, что каждые $n - 1$ из наших n множеств имеют общую точку и докажем, что все n множеств имеют общую точку. Обозначим через $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ наши выпуклые множества. Через $A_1, \ldots, A_n$ обозначим точки, принадлежащие $n-1$ из этих множеств, где A_k принадлежит всем множествам, кроме (быть может) Φ_k. Рассмотрим два случая.

а) *Какие-нибудь две из точек $A_1, \ldots, A_n$ совпадают.* Пусть $A_k = A_l$. Тогда эта точка принадлежит всем множествам $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, что и требовалось.

б) *Все точки $A_1, \ldots, A_n$ различны.* Тогда, согласно упражнению 9, множество этих точек можно разбить на две части, выпуклые оболочки которых пересекаются. Пусть точка A принадлежит пересечению обеих выпуклых оболочек. Докажем, что точка A принадлежит всем $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Действительно, пусть Φ_k — любое из них. Возьмем ту из двух частей $A_1, \ldots, A_n$, куда не входит A_k. Множество Φ_k содержит всю эту часть, значит, и ее выпуклую оболочку, в частности, и точку A. Теорема Хелли доказана.

К статье «Четырехугольники»

1. Если $l \perp m$, то $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, аналогично рассматриваются остальные углы.

2. Отразить четырехугольник в точке пересечения диагоналей.

3. Произвести поворот на 120° вокруг точки D.

4. Воспользоваться формулой

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между AC и BD.

5. Для доказательства прямой теоремы, используя подобия треугольников, доказать, что MON — прямая. Для доказательства обратной теоремы построить трапецию $ABCD'$ (D' на BD) и рассмотреть ее среднюю линию $M'N$, $M'N \parallel MN$ (по условию); получится, что $MM' \parallel BD$.

К статье «Делимость чисел»

1. Ответ. 8281.

Решение. Обозначим искомое число через $\overline{abcd}$. Дано, что $\overline{ab} = \overline{cd} + 1$ и $\overline{abcd} = n^2$. Так как n^2 — число четырехзначное, то $31 < n < 100$. Представим $\overline{abcd}$ в виде

$$\overline{abcd} = \overline{ab}.100 + \overline{cd};$$

тогда

$$n^2 = \overline{abcd} = 100\,(\overline{ed} + 1) + \overline{cd} = 101\,\overline{cd} + 100,$$

и, значит,

$$(n - 10)\,(n + 10) = 101\,\overline{cd},$$

то есть $(n - 10)(n + 10)$ делится на 101.

Но так как $n - 10 < 101$, и 101 — простое число, то на 101 делится $n + 10$. С другой стороны, $n + 10 < 110$, поэтому $n + 10 = 101$; значит, $n = 91$, $n^2 = 8281$.

2. Указание. Рассмотрите сумму $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ и представьте n в таком виде: $n = 3q + r$, где $r = 0$, или $r = 1$, или $r = 2$.

3. Всякое целое число может быть записано в одной из форм:

$$5m,\ 5m \pm 1,\ 5m \pm 2.$$

Если $a = 5m$, то $a^2 = 25m^2$, и остаток от деления на 5 равен нулю.
Если $a = 5m \pm 1$, то $a^2 = 5\,(m^2 \pm 2m) + 1$, и остаток от деления на 5 равен 1.
Если $a = 5m \pm 2$, то $a^2 = 5\,(5m^2 \pm 4m) + 4$, и остаток от деления равен 4.

Тем самым утверждение доказано.

4. Указание. $A = (m - 1) \cdot m \times (m + 1) - 6m$.

5. $\overline{abc\,abc} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001\overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13\overline{abc}$.

6. Ответ. 13 и 91.

Решение.

$$10a + b = a^2 + ab + b^2,$$
$$a^2 + (b - 10)\,a + b\,(b - 1) = 0,$$

$$a = \frac{-(b - 10) \pm \sqrt{(b - 10)^2 - 4b\,(b - 1)}}{2}.$$

Подкоренное выражение должно быть полным квадратом. Полагая $b = 0, 1, 2, \ldots, 9$, находим: $b = 1$ или $b = 3$. Поэтому $\overline{ab} = 13$ или $\overline{ab} = 91$.

7. Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции.

8. $a \cdot (bc + 1) = 3333 \Rightarrow a$ — нечетное. Аналогично получим, что b и c — нечетные. Тогда и произведение abc — нечетное число, $abc + a$ — четкое и, значит, $abc + a$ не может быть равным 3333.

9. Указание. Воспользуйтесь представлением p в виде

$$p = 6m \pm 1.$$

10. Указание. Докажите, что число слагаемых четно и сгруппируйте их последовательно по два.

11. Ответ. 77175.

Решение. $A = \overline{abcde} = 45abc\ de$.
Заметим следующее:

1) ни одна из цифр не равна 0;

2) a, b, c, d, e — нечетны (иначе было бы $e = 0$);

3) $e = 5$, так как среди сомножителей правой части есть 5 $(9 \cdot 5)$.

4) $A = 9 \cdot 25 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d) \Rightarrow (A \vdots 25) \Rightarrow$ (A оканчивается 25-ю, 50-ю, или 75-ю). Но $\overline{de} \neq 25$, $\overline{de} \neq 50$. Поэтому $d = 7$.

$$5)\ \left.\begin{array}{l} (A \vdots 9) \Rightarrow (a + b + c + 7 + 5 \vdots 9) \\ 12 < a + b + c + 12 < 39 \\ a + b + c + 12 \text{ — нечетно} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b + c) = 15. \qquad (*)$$

6) $A = 45 \cdot 35 \cdot a \cdot b \cdot c < 100000$,
то есть

$$a \cdot b \cdot c \leqslant 63 \qquad (**)$$

7) Из (*) и (**) подбором находим две тройки чисел 1, 5, 9 и 1, 7, 7. В первом случае $A = 45 \cdot 35 \cdot 45 = 70875$ — не годится.

Во втором $A = 45 \cdot 35 \cdot 49 = 77175 = 45 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5$.

$$12.\ A = \underbrace{11\ \ldots\ 1}_{m} \cdot \underbrace{100\ \ldots}_{m+1} 5 + 1 = \frac{1}{9} \times$$

$$\times \underbrace{99 \ldots 9}_{m} \cdot \underbrace{100\ \ldots\ 5}_{m+1} + 1 = \frac{1}{9}\ (10^m - 1) \times$$

$$\times\ (10^m + 5) + \frac{9}{9} = \frac{1}{9}\ (10^m + 2)^2.$$

Число $10^m + 2$ делится на три, так как сумма его цифр равна трем; поэтому $10^m + 2 = 3q$, то есть —

$$A = \frac{1}{9}(3q)^2 = q^2 -$$

что и требовалось доказать.

К задачам «Счастливые билеты»

(*см. с. 13*)

1. 11 120.
2. Существуют: 166229, 266338, 368449.

К задаче «Маневры»

(*см. с. 19*)

Достаточно сделать 21 операцию.

К задачам

(*см. «Квант», 1974, № 8, с. 35*)

1. Если число k стоит справа, то справа зачеркивается каждое $4k-1$-е число, то есть числа вида $k+(4k-1)n$, а слева — числа вида $4(k-1)n-k$. Справа зачеркиваются числа m такие, что $4m-1$ делится на $4k-1$, слева — такие, что $4m+1$ делится на $4k-1$.

2. Обозначить искомые отношения через l, m и n и выразить площади треугольников AL_1N_1, AL_2N_2 и т. д. через l, m, n и $S_{\triangle ABC}$.

3. б) Провести прямую FE, $\triangle ABC \backsim \triangle AFE$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант», 1974, № 8*)

1. Указание. Начинать надо с самого высокого семиклассника, перестановки можно осуществлять по парам (менять местами самого высокого с тем, кто занимает его «законное» место и так далее). При каждой такой перестановке условие, сформулированное в задаче, будет сохраняться (докажите).

2. При помощи удочки можно уравновесить рыбу и буханку хлеба, как показано на рисунке 1. Тогда

$$m_1 = m_2 \frac{l_2}{l_1},$$

где m_1 — масса рыбы, m_2 — масса буханки, l_1 и l_2 — указанные на рисунке расстояния, которые можно измерить с помощью любой единицы длины.

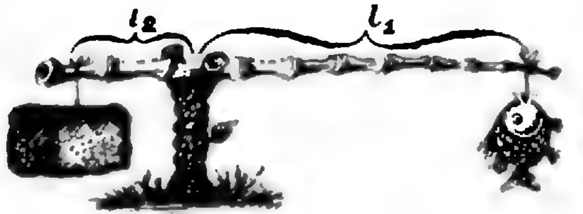


Рис. 1.

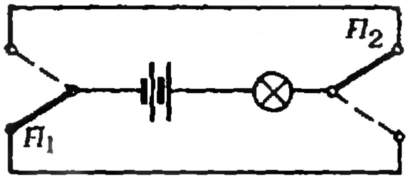


Рис. 2.

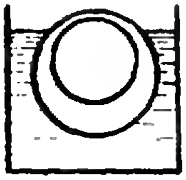


Рис. 3.

3. Число n^2+n+1 нечетно при любых целых n.

4. Одна из возможных схем приведена на рисунке 2. При таком положении переключателей лампа не горит.

5. Уменьшим все числа на доске на одно и то же число, чтобы наименьшее число на доске стало равным нулю. От него до наибольшего числа можно дойти не более, чем за 198 переходов (к соседним клеткам), поэтому наибольшее число не превосходит $198 \cdot 20 = 3960$. Если каждое число на доске не встречается не более двух раз, то на доске стоит не более $2 \cdot 3960 = 7920$ чисел, а их по условию 10 000.

6. Плотность шарика 0,9 *г/см*^{3}, а плотность алюминия 2,7 *г/см*^{3}, следовательно, шарик не является сплошным, в нем есть полость. Опустим шарик в сосуд с водой. Он будет плавать в воде; над водой будет находиться 0,1 его объема. Если полость находится не в центре шарика, то при разных положениях в воде он будет поворачиваться так, чтобы полость всегда находилась в наивысшем положении (рис. 3).

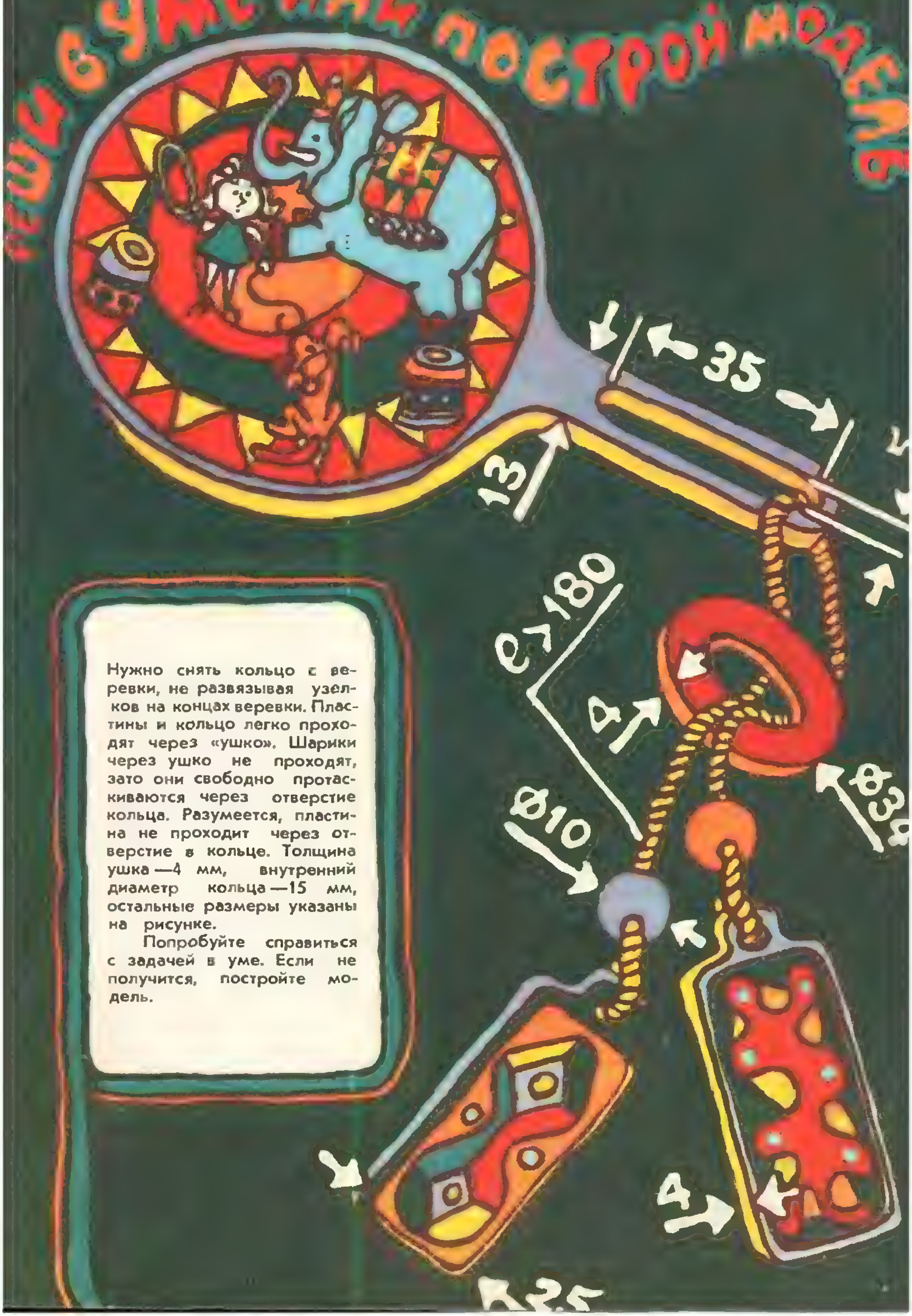
Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 17/VI—74 г.
Подписано в печать 12/VIII—74 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,78
Тираж 360 800 экз. Т—14536
Цена 30 коп. Заказ 1197

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

…ши в уме или построй модель



Нужно снять кольцо с веревки, не развязывая узелков на концах веревки. Пластины и кольцо легко проходят через «ушко». Шарики через ушко не проходят, зато они свободно протаскиваются через отверстие кольца. Разумеется, пластина не проходит через отверстие в кольце. Толщина ушка — 4 мм, внутренний диаметр кольца — 15 мм, остальные размеры указаны на рисунке.

Попробуйте справиться с задачей в уме. Если не получится, постройте модель.

Цена 30 коп.

ИНДЕКС 70465

К нашим читателям

Объявляется подписка на 1975 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще не занялись физикой или математикой, но хотели бы заняться этими науками.

Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. В 1975 г. на страницах журнала будут систематически публиковаться статьи, разъясняющие материал новых программ.

Много материалов будет опубликовано для школьников 10 классов, готовящихся к поступлению в институт.

В 1975 г. «Квант» будет продолжать печатать статьи для младших школьников. Объем этих публикаций будет существенно расширен.

«Квант» полезен также и преподавателям. Его материалы могут быть использованы на заседаниях математических и физических кружков и на факультативных занятиях.

Читайте в «Кванте» в 1975 г.:

Статьи, посвященные опытам, которые можно провести над моделями как физического, так и математического происхождения.

Так, в статье Г. В. Скроцкого будет рассказано о камере-обскуре. А в статье Э. Г. Белаги «Узлы на столе математики» читатели прочтут о топологических опытах.

Жизни и творчеству С. В. Ковалевской будет посвящена статья Н. Я. Виленкина и В. П. Лишевского.

Те читатели, которых особенно интересует оптика, встретят на страницах журнала статью о голографии и статью известного зарубежного физика В. Вайскопфа «Как свет взаимодействует с веществом».

Любители геометрии с интересом прочтут статью И. Ф. Шарыгина о мире геометрии с числом измерений более трех. Представляет для них особый интерес и некоторые задачи комбинаторной геометрии, которые решаются вполне элементарными методами. В серии статей Б. В. Гнеденко будут освещены некоторые вопросы теории вероятности и массовых процессов.

Большое количество статей будет посвящено новой программе в школе. Так, в статьях А. Г. Мордковича школьники познакомятся с понятием производной и ее применением при решении задач.

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник «Кванта»» учит школьников решать задачи повышенной трудности по математике и физике. В работе этого раздела принимают участие школьники из городов и сел. Читатели, регулярно присылающие правильные решения, получают право участия в областных олимпиадах. Редакция консультирует школьников, присылающих решения задач.

Для поступающих в вузы в 1975 году будут опубликованы статьи на следующие темы. Математика: тождественные преобразования иррациональных уравнений; проверка решений; уравнения с параметрами; доказательство неравенств ; использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств; решение тригонометрических уравнений; решение задач на тела вращения; прямоугольная проекция при решении стереометрических задач, «скрытые» данные в условии задачи.

Физика: законы идеальных газов; электрический ток, линии передач; трансформаторы; построение изображений (пластинка, линза, зеркало); оптические приборы; глаз; интерференция.

Мы будем продолжать знакомить наших читателей с новыми книгами, представляющими для них интерес рассказывать о работе физико-математических школ, об олимпиадах, о работе различных вузов со школьниками и т. д.

Подписка на «Квант» принимается без ограничения в пунктах приема подписки «Союзпечать», отделениями связи, почтамтах, общественными распространителями печати.

Подписная цена за год (12 номеров) — 3 руб. 60 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70 465.

1

3

4

Научная конференция учащихся специализированных школ-интернатов

1. Участники конференции во время заседания.
2. Майя Мимиошвили (Тбилиси) читает доклад «О группах преобразований».
3. Руководитель киевской делегации И. И. Яковлев и Владимир Харламов демонстрируют голограмму.
4. Доклад читает Анатолий Иванов (Москва).
5. Виктор Зубко (Киев) рассказывает о своей работе по исследованию комет.
6. Владимир Драчев (Новосибирск) и его фотокамера «Рыбий глаз».

7– 8. Встреча с «Квантом».

5

НОМЕР
10

Основан в 1970 году.
1974
Квант
10
Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *А. Л. Брудно.* Вокруг циркуля

10 *Н. Н. Малов.* Как сфотографировали свет

13 *Н. А. Минц.* Гейзеры

Математический кружок

17 *Б. В. Бекламов.* Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам

Задачник «Кванта»

20 Задачи М286—М290; Ф298—Ф302
21 Решения задач М246—М250; Ф253—Ф259

Практикум абитуриента

32 *И. Ф. Шарыгин.* Чертеж в стереометрических задачах

38 *Л. Н. Воронин, В. П. Ионов, И. Б. Лившиц, В. А. Ляховский.* Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

VIII Всесоюзная олимпиада школьников

40 *Л. Г. Лиманов, М. Л. Смолянский.* Олимпиада по математике

49 *Т. С. Петрова, Л. В. Чернова.* Олимпиада по физике

Рецензии, библиография

58 *Л. Е. Садовский.* Новый учебник по геометрии

«Квант» для младших школьников

59 Задачи

60 *В. В. Ушаков.* Метод бесконечного спуска

63 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 37, 48, 57, 62)*

На первой странице обложки вы видите фотографию позолоченной готовальни, изготовленной в XVI веке. В нее входит несколько различных циркулей, угломеров, линейка и т. д. Однако при решении геометрических задач большая часть ее инструментов не нужна: все задачи на построение, которые можно решить с их помощью, решаются и одним циркулем. Впрочем это стало известно лишь 200 лет спустя, когда итальянский математик Маскерони доказал, что все построения, которые производятся циркулем и линейкой, можно сделать одним циркулем (см. статью на с. 2).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1974 г.

А.Л.БРУДНО
ВОКРУГ ЦИРКУЛЯ
ПОСТРОЕНИЯ ЦИРКУЛЕМ БЕЗ ЛИНЕЙКИ

§ 1. Зачем нужны построения одним циркулем, где они употребляются?

Эти построения так же не нужны, как и построения циркулем и линейкой. Да, задачи на построение, решаемые в школе (или вообще сколько-нибудь содержательные), не находят никакого применения ни на практике, ни в теории. Они не нужны в машиностроении (в конструировании и изготовлении деталей). Не имеют они отношения и к проблеме возможности решения задач циркулем и линейкой, неразрешимости задач квадратуры круга, трисекции угла и т. д.

А вот для чего задачи на построение (циркулем и линейкой) оказались нужны. На них школьники *учатся самостоятельному решению задач, близких к творческим, развивают и проверяют свои способности к этой деятельности.*

Построения циркулем (без линейки) будут нам полезны некоторым иным образом. Но каким именно, мы предпочитаем обсудить в конце статьи, а не заранее.

§ 2. Постановка проблемы

В геометрии Евклида, да и вообще у древних греков, изучаются построения циркулем и линейкой. Ну, а *какие задачи, на построение могут быть решены одним циркулем?* Вот проблема *), которую нашел и решил Маскерони (в 1797 г.).

Когда человек решает готовую (поставленную перед ним) математическую задачу, он, разумеется, «работает математиком». А кем «работал» (лучше сказать, «являлся» или «был») Маскерони, когда *формулировал* свою задачу, — математиком или кем-то другим?

Для проверки мы предложили нескольким нематематикам проблему Маскерони. Спросили их, представляют ли интерес построения циркулем, какие из обычных задач на построение решаются одним циркулем, а какие не решаются и, наконец, любую ли задачу на построение, решаемую циркулем и линейкой, можно решить одним циркулем.

В одном нематематики согласны были между собой: «Не всякую задачу, решаемую циркулем и линейкой, можно решить одним циркулем, ибо прямую циркулем не проведешь», — сказали они. И тогда мы увидели, что нематематик не сможет поставить проблему Маскерони — он не может самостоятельно понять ее существа. Ведь решение Маскерони (забегая вперед, приведем его) состоит в том, что любая задача, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одним циркулем. Поэтому мы думаем, что, формулируя свою проблему, Маскерони «работал математиком», то есть что *формулировка математической проблемы была творчеством математическим.*

---

*) Если хотите, сверхзадача относительно самих задач на построение.

Конечно, Маскерони тоже знал, что циркулем прямую не проведешь. Ну, что ж (вероятно, решил Маскерони), а зачем ее проводить? Ну, как же, пусть, например, в задаче сказано «*провести* прямую, которая... обладает определенными свойствами». Так, ведь, строго-то говоря, в задаче должно быть сказано иначе: «*найти*» (или *определить*) прямую, которая... обладает определенными свойствами». А вот, чтобы определить прямую, ее проводить и не обязательно. Достаточно, например, задать на этой прямой две произвольные точки.

Как же быть, если понадобится точка пересечения двух таких «непроведенных» прямых? Ну, точку-то мы, может быть, и одним циркулем сумеем найти, так что это не возражение.

§ 3. Теорема Маскерони

Итак, Маскерони решил, что вместо того, чтобы проводить прямую, он будет указывать на прямой две (различные) точки. Решив это, Маскерони сформулировал свою теорему:

Теорема Маскерони. *Всякая задача, решаемая циркулем и линейкой, может быть решена и одним циркулем.*

В том, что мы назвали наше предположение теоремой, нет ничего плохого. Математик нередко так поступает, чтобы четко понять, что он хочет доказать (если предположение окажется верным) или опровергнуть (если оно неверно).

§ 4. Поиск путей доказательства

Как можно доказать теорему Маскерони? Задач, которые решаются циркулем и линейкой, бесконечно много. Нельзя же все их фактически перерешать (одним циркулем). Впрочем, мы постоянно встречаемся с теоремами, где нужно рассмотреть бесконечное множество объектов. Например, «сумма углов треугольника равна 180°». Здесь тоже речь идет о бесконечном множестве треугольников. И все же положение с этими теоремами разное. При доказательстве теоремы о треугольниках мы говорим: «Возьмем треугольник ABC». И уже самим *умолчанием* о размерах сторон и углов взятого треугольника делаем треугольник «общим»: что будет доказано для $\triangle ABC$, то окажется верным и для любого треугольника. А как взять «по умолчанию» общую задачу на построение циркулем и линейкой? Этого сделать мы не умеем.

И снова Маскерони должен был не столько «решать задачу», сколько *делать что-то иное*. Ему пришлось понять, что значит «решить задачу циркулем и линейкой». Вот результат его размышлений:

> *Решение задачи на построение циркулем и линейкой складывается из многократного применения нескольких (аксиомных) задач; отыскание решений этих аксиомных задач не выполняют фактически, а принимают как аксиомы.*

Рассмотрим, для примера, такую задачу: даны окружность и прямая, проходящая через ее центр. Найти точки пересечения прямой и окружности. Решая эту задачу циркулем и линейкой, мы ничего не станем строить (прямая и окружность уже проведены), а скажем, что точки пересечения «и так уже видны», то есть будем считать, что они «определены аксиомами». Внимательным размышлением Маскерони получил

Список

всех аксиомных задач, употребляемых при построениях циркулем и линейкой:

(α) *Найти точки пересечения двух прямых.*

(β) *То же для прямой и окружности.*

(γ) *То же для двух окружностей.*

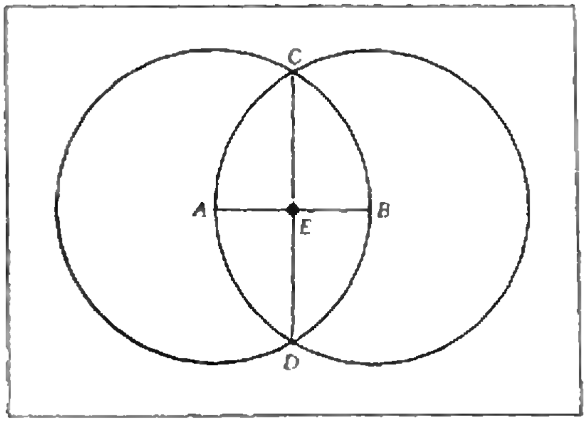


Рис 1.

(δ) *Даны три точки A, B и C. Провести из центра A окружность радиуса BC.*

В частности, в пунктах (α), (β) и (γ) определяется, имеются ли искомые точки пересечения.

Посмотрим, как используются аксиомные задачи. Предложим себе (для примера) разделить пополам заданный отрезок AB циркулем и линейкой (рис. 1). Пользуясь задачей (δ), проведем из точек A и B окружности радиуса AB. Пользуясь (γ), найдем их точки пересечения C и D. Пользуясь (α), найдем точку E пересечения прямых AB и CD. Точка E — искомая.

Подведем итог. Решение задачи циркулем и линейкой состоит в применении задач (α) — (δ). Значит, если некоторым способом решаются задачи (α) — (δ), то этим способом решается и любая задача, решаемая циркулем и линейкой.

При построениях одним циркулем могут быть использованы лишь две аксиомные задачи — именно задачи (γ) и (δ). Значит, для доказательства теоремы Маскерони достаточно доказать, что *с помощью задач* (γ) *и* (δ) *можно решить задачи* (α) *и* (β). Установив это, Маскерони понял, что именно нужно доказывать.

§ 5. Как решается трудная задача

Пусть нам надо открыть дверь. Убедившись, что дверь заперта, мы попытаемся выбить ее, навалившись с разбегу всем корпусом. Если это не поможет, мы испробуем имеющиеся в наличии ключи. Что будет испробовано раньше: подбор ключей или грубая сила, зависит от характера, но именно эти два средства пойдут в ход первыми. Допустим, однако, что они не помогли.

Тогда мы поучимся открывать двери. Мы возьмем тонкую дверь и какое-нибудь орудие, скажем кувалду. Кувалду возьмем легкую, чтобы удобно было работать. И выбьем нашу учебную дверь.

При этом мы выясним, как нужно бить по двери, чтобы она открылась, а главное — потренируемся обращаться с кувалдой, разовьем мускулатуру. На второй раз учебную дверь можно будет взять покрепче, а кувалду — потяжелей. И так будем продолжать, переходя к более крепким дверям и работая более тяжелыми орудиями. Время от времени мы будем ударять и по первоначальной,«заданной» двери, отбивая от нее щепки, а главное, чтобы подбирать учебные двери похожими на заданную.

И вот однажды (если нам повезет), кувалда станет достаточно тяжелой, удар выйдет сильным, а нужная дверь ослабится трещинами и будет выбита.

По этому же пути пойдет и доказательство теоремы Маскерони.

Сначала мы пытаемся непосредственно решить одним циркулем задачи (α) и (β). Пытаемся свести их решение к известным нам теоремам.

Затем (когда этого не удалось) мы учимся обращаться с циркулем, смотрим, что можно построить им. Потом тренируемся в решении циркулем более трудных задач и задач, составляющих частные случаи нужных задач (α) и (β). И, наконец, решаем сами задачи (α) и (β), точнее, то, что в них осталось доделать.

Именно так поступил Маскерони. Прежде чем решить задачи (α) и (β), он приобрел высокую технику изящного решения задач одним циркулем. Двинемся следом за ним.

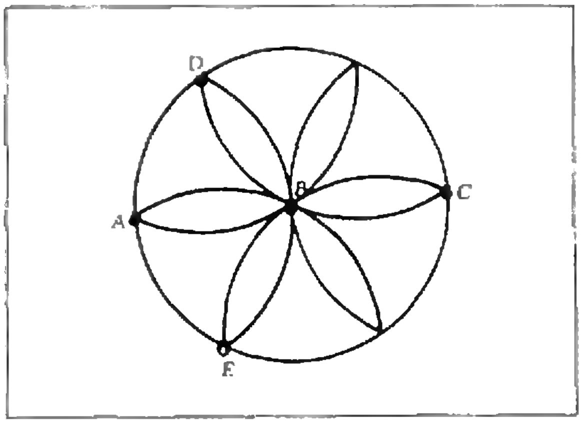


Рис. 2.

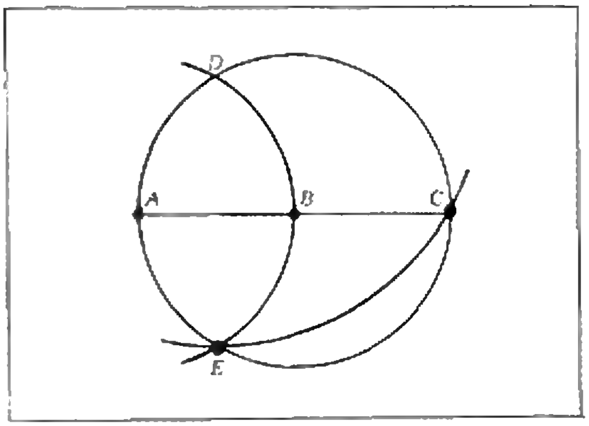


Рис. 3.

§ 6. Доказательство теоремы Маскерони

Договоримся о некоторых выражениях. Если мы говорим, что *дан отрезок AB*, то это значит, что *даны его концы A и B*; если *дана прямая AB*, то на ней *даны лишь две точки A и B*. Если нужно *построить отрезок AB*, то *нужно* лишь *построить его концы A и B*; если нужно *найти прямую AB*, то достаточно *указать на ней две точки A и B*, и т. д.

При построениях циркулем мы не можем проводить прямых, но это не мешает нам проводить их при доказательствах, на иллюстративных чертежах.

Первые попытки (надеюсь, вы их сделаете) решить задачи (α) и (β) одним циркулем, то есть с помощью задач (γ), (δ), большей частью не удаются. Поэтому мы перейдем к систематическому выполнению намеченной программы.

Поиграем с циркулем. Посмотрим, что мы умеем легко им построить.

Пусть имеются две точки A и B. Мы умеем нарисовать на них «розочку» (см. рис. 2). Треугольник CDE — равносторонний и $AC = 2\cdot(AB)$ — диаметр круга. Это наводит на мысль сформулировать следующую задачу.

Задача № 1. *Удвоение отрезка. Дан отрезок AB. Построить отрезок AC с серединой в точке B.*

Решение (рис. 3). Из центров A и B проведем окружности O_A и O_B радиуса AB. Найдем (с помощью задачи (γ)) точки E и D пересечения окружностей. Из центра D радиусом DE проведем окружность O_D. Новая (кроме E) точка C пересечения O_B и O_D будет искомой.

Доказательство. Треугольники ABD и ABE — равносторонние. Значит, в круге O_B

$$\text{дуга } AD = \text{дуга } AE = 60^\circ,$$

$$\text{дуга } CD = \text{дуга } DE = 120^\circ,$$

$$\text{дуга } ADC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ,$$

то есть ABC — прямая.

Задача № 2. *Дан отрезок AB и целое число n. Построить отрезок AC, который в n раз длиннее AB и содержит точку B.*

Последняя задача решается n-кратным применением предыдущей задачи.

Решим еще одну задачу.

Задача № 3. *Дана прямая AB и точка C. Построить точку C′, симметричную C относительно AB.*

Решение (рис. 4). Из центров A и B проведем через точку C окруж-

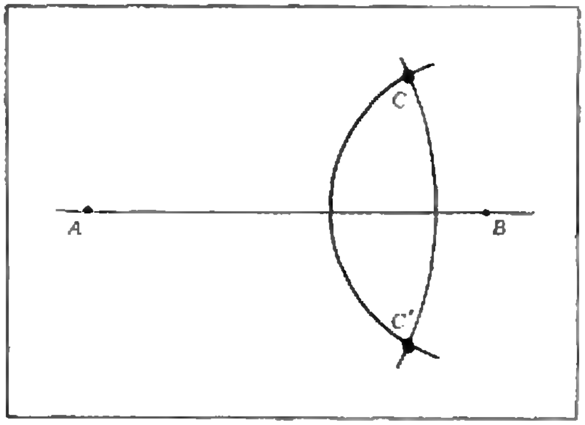


Рис 4.

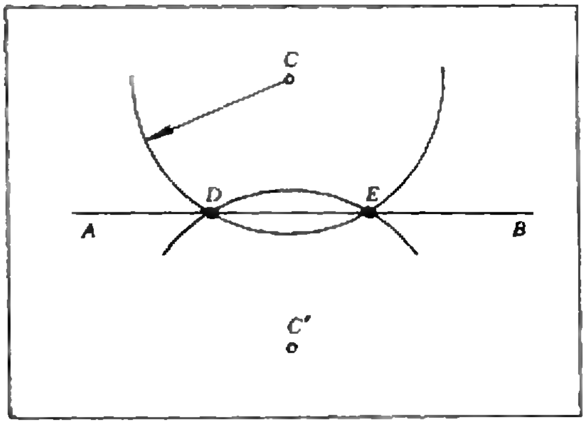


Рис. 5.

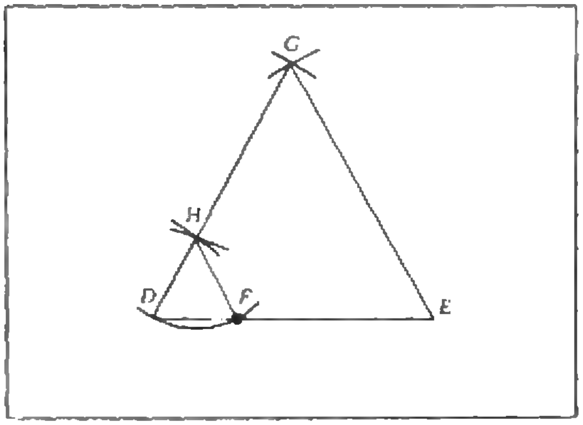


Рис. 6.

ности O_A и O_B. Их вторая (кроме C) точка пересечения и будет C'. Если же O_A и O_B будут иметь лишь одну точку пересечения, то C лежит на AB.

Доказательство. Треугольники ACC' и BCC' — равнобедренные по построению. Основание CC' у них общее. Значит, их высоты (перпендикулярные CC') проходят через середину отрезка CC' и лежат на одной прямой AB.

Таким образом, решена и

Задача № 4. *Определить, лежит ли точка C на прямой AB.*

Вернемся к аксиомным задачам (α) и (β). Попытаемся решить задачу (β) следующим образом. Пусть даны (рис. 5) прямая AB и окружность O с центром C. Найдем точку C', симметричную с C относительно AB (см. № 3). Радиусом окружности O проведем из центра C' окружность O'. Точки D и E пересечения окружностей O и O' принадлежат AB и являются искомыми. Действительно, точки A и B (как и D и E) равноудалены от точек C и C'. Поэтому все четыре точки A, B, D, E лежат на одной прямой — перпендикуляре к отрезку CC', проходящем через его середину.

К сожалению, это решение становится неверным, когда центр C окружности O лежит на AB. Тогда O и O' совпадают и не дают найти точки D и E. Поэтому нами решен лишь частный случай задачи (β) — именно

Задача № 5. *Дана прямая AB и окружность O с заданным центром, не лежащим на AB. Определить, пересекается ли O с AB, и найти точки пересечения.*

Продолжим упражнения по решению задач циркулем.

Задача № 6. *Пропорциональное деление. Даны два отрезка AB и DE. На AB находится точка C. Найти на DE такую точку F, чтобы*

$$AC : AB = DF : DE.$$

Решение. Увеличив отрезки AB и AC в нужное число раз (см. № 2), мы получим отрезок $A'B'$ с точкой C', достаточно длинный (для построения, к которому мы, сейчас подойдем), и тем же отношением $A'C' : A'B' = AC : AB$. Поэтому можно с самого начала считать, что AB достаточно длинен.

Теперь (рис. 6) из центров D и E проведем засечки радиусом AB. Эти засечки (при достаточной длине AB) пересекутся в некоторой точке G. Из точек D и G засечками радиусами AC и BC находим точку H. Она лежит на DG, и для нее

$$DH = AC \text{ и } GH = BC.$$

Из центра H проведем окружность радиусом HD и определим искомую точку F, где эта окружность пересекает прямую DE (см. № 5).

Доказательство. Треугольники DFH и DEG — равнобедренные, с общим углом при основании. Значит, они подобны. Поэтому

$$DF : DE = DH : DG = AC : AB.$$

Задача № 7. *Деление отрезка пополам.*

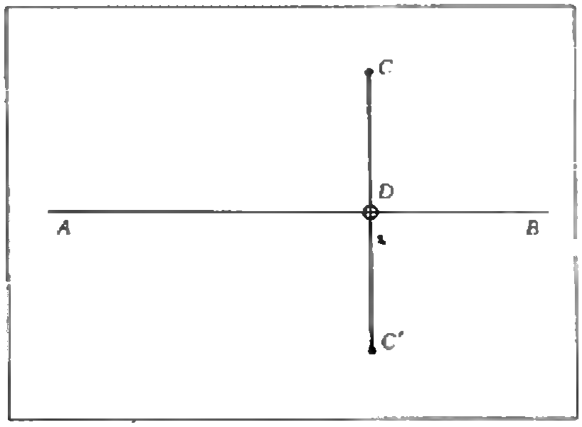


Рис. 7.

Решение. Пусть задан отрезок DE. Возьмем какой-нибудь отрезок AB с серединой в известной нам точке C. Для получения такого отрезка AB достаточно удвоить (см. № 1) отрезок DE. Применив к AB и DE предыдущую задачу, получаем точку F на середине DE.

Теперь легко решается

Задача № 8. *Из точки вне прямой опустить перпендикуляр на прямую.*

Решение. (рис. 7). Дана прямая AB и точка C. Построим точку C', симметричную C относительно прямой AB (см. № 3), и найдем середину D отрезка CC' (см. № 7).

Любопытно, что восставить перпендикуляр из точки, лежащей на прямой, мы еще, кажется, не умеем.

Легка, но важна

Задача № 9. *Определить, лежат ли точки A и B по разные стороны прямой CD.*

Решение. Сначала проверим, что A или B не лежат на CD (см. № 4). Если не лежат, то (рис. 8) опустим перпендикуляр AE из A на CD и перпендикуляр BF из B на прямую AE. Если (на прямой AE) точка E не лежит между A и F, то (в этом и только этом случае) A и B лежат по одну сторону от CD.

Эта задача требует пояснения. Мы воспользовались аксиомой порядка: из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими. В школьной геометрии эта аксиома не отмечается специально ввиду очевидности. Столь же очевидной принимается и сама задача № 8. Однако отказавшись от линейки и не имея возможности провести прямую CD, мы усомнились в очевидности задачи № 9 и предпочли получить ее строгое решение (одним циркулем).

Применением задачи № 9 являются следующие две задачи:

Задача № 10. *Построить параллелограмм $ABCD$ на трех точках A, B, C, не лежащих на одной прямой.*

Решение (рис. 9). Из центров A и C проводим окружности радиусов BC и AB соответственно. В качестве D берем ту точку пересечения окружностей, которая вместе с C лежит по одну сторону AB (см. № 9).

Замечание. Без решения задачи № 9 нам могла бы попасться другая точка D' пересечения окружностей и вместо параллелограмма получился бы звездчатый четырехугольник с

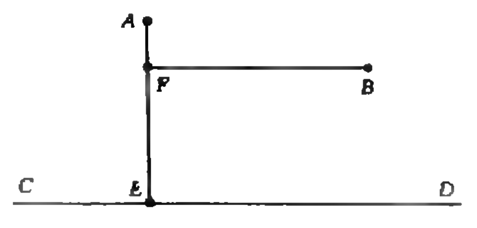


Рис. 8.

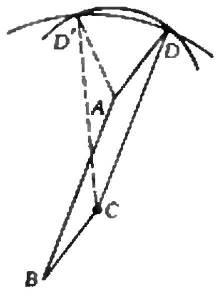


Рис. 9.

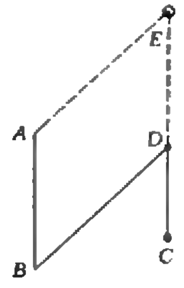


Рис. 10.

попарно равными противоположными сторонами. На рисунке 9 он показан пунктиром.

Задача № 11. *Сложение параллельных отрезков.*

Решение (рис. 10). Пусть AB и CD параллельны и нужно образовать отрезок CE, содержащий точку D, так, чтобы $AB = DE$. Для отыскания E надо построить параллелограмм $BAED$ или $BADE$ (см. № 10). Первый — когда A и C лежат по разные стороны прямой BD (рис. 10), второй — когда по одну. Случай, когда прямые AB и CD совпадают, нас не интересует (хоть он и не сложен).

В качестве частного случая задачи (α) решим следующую задачу:

Задача № 12. *Определить, параллельны ли две прямые:* AB *и* CD.

Решение. Если обе точки A и B лежат на CD (см. № 4), то прямые совпадают и ответ положителен. Если же хоть одна из них (скажем, A) не лежит на CD, то (рис. 8) опустим из A на CD перпендикуляр AE и из B на прямую AE перпендикуляр BF. Если F совпадает с A, то AB параллельна CD, иначе — не параллельна.

Теперь мы в силах решить задачу (α).

Задача № 13. *Найти пересечение прямых* AB *и* CD.

Решение. Отбросим известные случаи, когда точки A или B лежат на CD, или когда AB параллельна CD (см. № 4 и № 12), или когда $AB \perp CD$ (см. № 8). Теперь, отложив отрезок AB на прямой AB нужное число раз (см. № 2) в ту и другую сторону, мы заведомо получим на прямой AB две точки, лежащие по разные стороны от CD, и узнаем об этом с помощью № 9. Поэтому можно считать, что сразу же точки A и B лежали по разные стороны от CD (рис. 11). Из A и B опустим на CD перпендикуляры AA' и BB'. Сложим параллельные отрезки AA' и BB' (см. № 10). Получим отрезок $A'E$, содержащий точку A, причем $AE = BB'$. Разделим $A'B'$ точкой F в отношении

$$\frac{A'F}{A'B'} = \frac{AA'}{A'E}$$

(см. № 6). Точка F лежит на пересечении AB и CD.

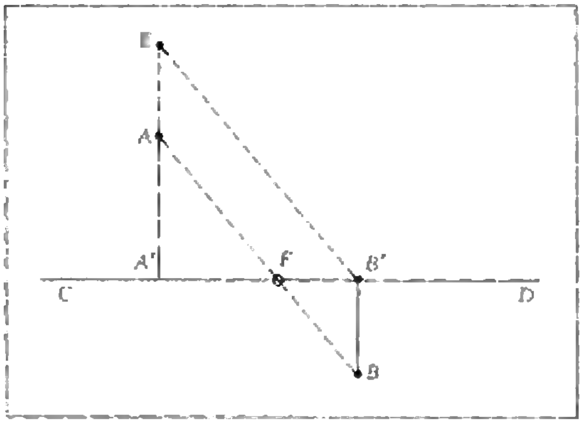


Рис. 11.

Доказательство. Обозначим (временно) через F' точку пересечения AB и CD и вычислим $A'F'$. Из подобия треугольников $A'F'A$ и $A'B'E$ имеем $A'F' : A'B' = A'A : A'E$. Значит, $A'F = A'F'$ и точка $F = F'$ — искомая.

Итак, для завершения доказательства теоремы Маскерони осталось найти лишь пересечение окружности и прямой, проходящей через ее центр. И эта мелкая задачка оказалась самой трудной. Много еще решил задач Маскерони, пока ему не пришло в голову воспользоваться преобразованием инверсии. Но мы пойдем по пути, указанному другим геометром.

Новое доказательство теоремы Маскерони представил Наполеон Бонапарт (тот самый). Суть доказательства заключалась в новом решении оставшейся части задачи (β).

Но и Наполеон не стал решать задачу в лоб, а выяснил сначала, какой длины отрезки мы можем построить циркулем, отправляясь от двух заданных, длиною a и $b > a$. Вот что он научился строить:

№ 14. $\sqrt{b^2 - a^2}$. № 16. $a\sqrt{2}$.

№ 15. $a\sqrt{3}$. № 17. $\sqrt{b^2 + a^2}$.

Научимся и мы.

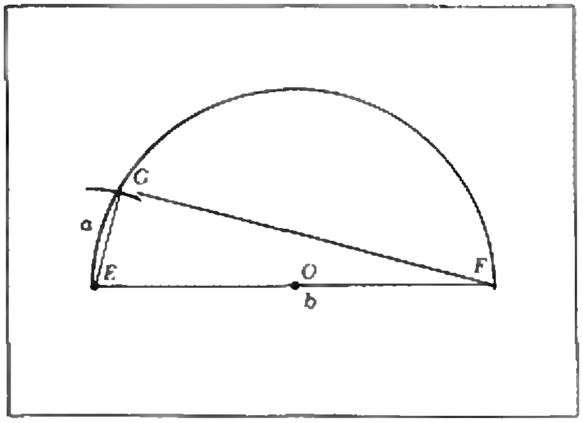


Рис. 12.

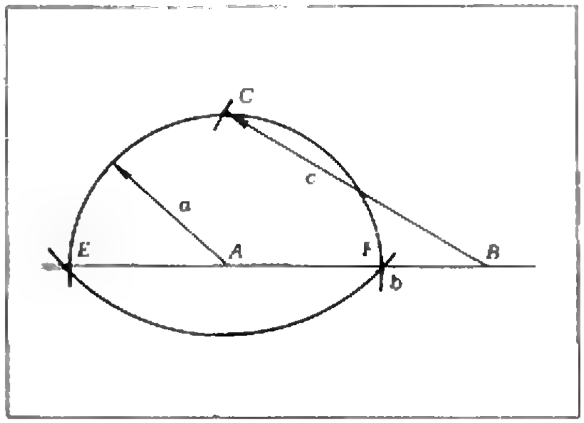


Рис 13.

№ 14. *Построение* $\sqrt{b^2-a^2}$.

Разделим отрезок $b = EF$ пополам (см. № 7). Из центра O проведем окружность O_b радиуса $b/2$ (рис. 12). Из точки E проведем засечку радиуса a, пересекающую O_b в некоторой точке G. Отрезок FG будет иметь нужную длину. Действительно, угол EGF прямой, так как опирается на диаметр. Поэтому $(GF)^2 = b^2 - a^2$.

№ 15. Для построения отрезка $a\sqrt{3}$ напишем

$$a\sqrt{3} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}.$$

С помощью № 1 построим отрезок $b = 2a$ и применим № 14 к отрезкам $b = 2a$ и a.

№ 16. Запишем тождество

$$a\sqrt{2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2}.$$

Мы умеем строить $a\sqrt{3}$ и, значит, умеем строить $a\sqrt{2}$, применив № 14 к $b = a\sqrt{3}$ и a.

№ 17. Запишем тождество

$$\sqrt{b^2+a^2} =$$

$$= \sqrt{(b\sqrt{2})^2 - (\sqrt{b^2-a^2})^2}.$$

Мы умеем строить $b\sqrt{2}$ (см. № 16) и $\sqrt{b^2-a^2}$ (см. № 14). Значит, умеем строить и $\sqrt{b^2+a^2}$.

Теперь мы можем решить нужную задачу.

Задача № 18. *Найти пересечение окружности с прямой, проходящей через ее центр.*

Решение. Пусть дана окружность O_A с центром A и точка $B \neq A$. Нужно найти пересечения O_A с прямой AB. Обозначим радиус O_A через a, длину AB через b и построим $c = \sqrt{a^2+b^2}$ и $a\sqrt{2}$ (см. № 16 и 17).

Теперь (рис. 13) из центра B проведем засечку радиуса c до пересечения с O_A в некоторой точке C. Из точки C проведем окружность O_C радиуса $a\sqrt{2}$. Пересечения O_C и O_A дадут искомые точки E и F.

Действительно, ΔBAC — прямоугольный, ибо $c^2 = a^2 + b^2$. Если E и F — точки пересечения прямой AB с окружностью O_A, то $(CE)^2 = (CF)^2 = 2a^2$, как и было сделано.

Теорема Маскерони доказана полностью.

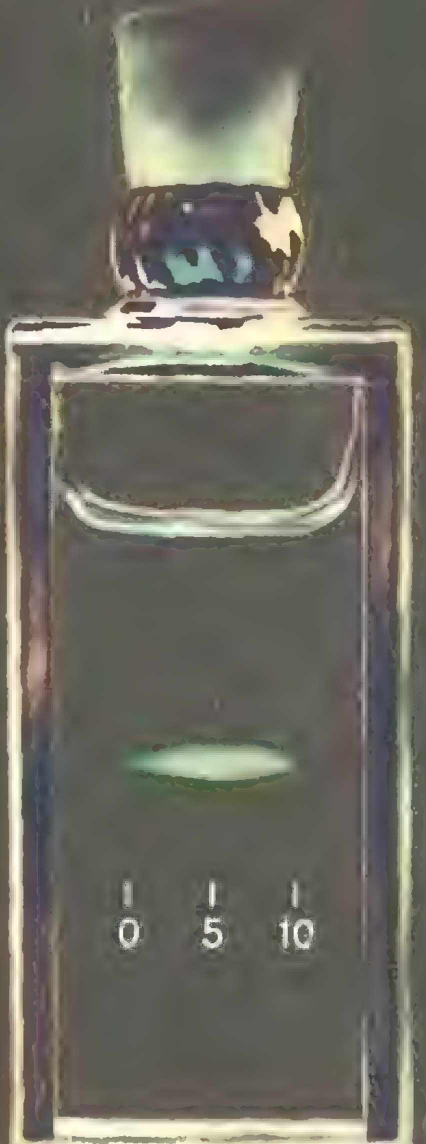
§ 7. Зачем нужны построения циркулем без линейки

Хорошо известно, что математика не исчерпывается решением готовых задач, что она включает поиск проблем и постановку задач, формулировку теорем. Эта часть математики остается скрытой, хоть мы и знаем, что направляет работу именно она. А на проблеме построения циркулем хорошо видны задачи и решения именно «второй» части математики.

Когда мы смотрим кино, то видим актеров, а о том, что есть режиссер, только догадываемся. Должен ли режиссер оставаться за кадром? Мы решили однажды вывести его на сцену.

Н. Н. МАЛОВ

КАК СФОТОГРАФИРОВАЛИ СВЕТ



При обычных способах фотографирования свет используется для получения изображения светящихся или отражающих свет предметов. Но недавно физики ухитрились сфотографировать распространяющийся свет, так сказать, «на лету».

Некоторые современные мощные источники света — лазеры — излучают свет не непрерывно, а отдельными периодически повторяющимися импульсами. Мощность импульса, длящегося всего 10 пикосекунд (1 *пс* = 10^{-12} *с*), может достигать громадной величины — нескольких гигаватт (1 *Гвт* = 10^9 *вт*) — примерно мощности Красноярской ГЭС. Но импульсы следуют сравнительно редко — около тысячи раз в секунду, так что средняя мощность излучения — несколько киловатт.

Для фотографирования света применялась установка, схема которой показана на рисунке 1.

Источником света служит мощный импульсный лазер *Л*, излучающий свет с длиной волны 1 *мкм*, что соответствует инфракрасной области спектра. Время излучения импульса 10 *пс*, значит, его протяженность в пространстве равна

$$3\cdot10^8\ м/с\cdot10^{-11}\ с = 3\cdot10^{-3}\ м = 3\ мм.$$

«Световую» полоску такой длины вполне можно сфотографировать. Но при этом необходимо, чтобы затвор фотоаппарата срабатывал очень быстро, так как иначе изображение будет сильно смазано. Импульс движется с громадной скоростью, и если затвор

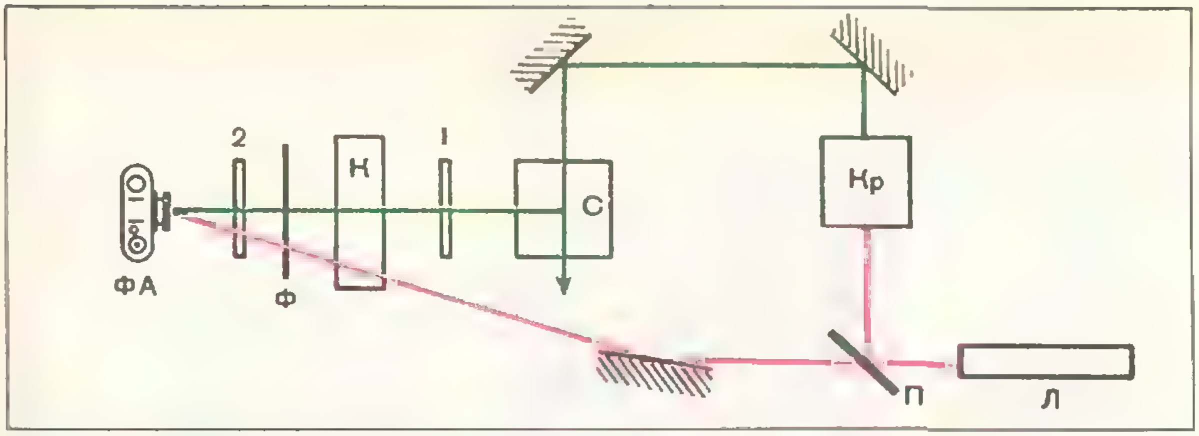

2
1
ФА
Ф
К
С
Кр
П
Л

Рис. 1. Схема установки для фотографирования светового импульса.

фотоаппарата открыт в течение 1 *пс*, смещение импульса в пространстве составит

$$3\cdot10^{8}\cdot10^{-12}=3\cdot10^{-4}\ (м)=0{,}3\ (мм).$$

Изображение такого объекта будет смазано незначительно, но осуществить столь малое время экспозиции довольно сложно. Другая трудность состоит в том, чтобы затвор фотоаппарата срабатывал именно в тот момент, когда импульс «проносится» мимо объектива.

Итак, инфракрасный импульс излучается лазером и попадает на полупрозрачную пластинку П, поставленную под углом 45° к направлению движения импульса. Здесь свет частично отражается, частично проходит сквозь пластинку. Проследим сначала за отраженным лучом. Отражен-

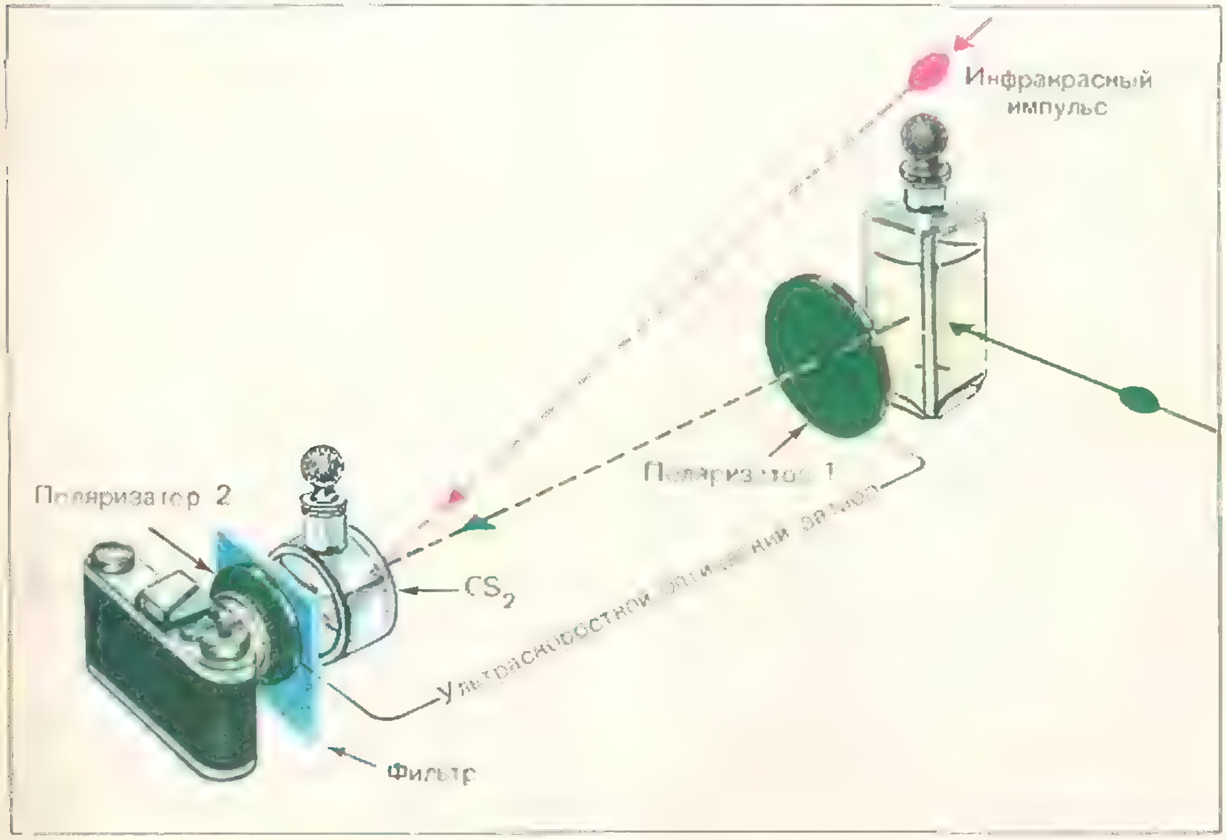

Инфракрасный импульс
Поляризатор 2
Поляризатор 1
CS_2
Ультраскоростной оптический затвор
Фильтр

Рис. 2. Устройство для фотографирования света.

ный импульс попадает в кристалл Кр и возбуждает его молекулы. Кристалл выбирается так, чтобы его возбужденные молекулы излучали свет с частотой вдвое большей, чем частота падающего света. Эта новая частота соответствует зеленому свету. Такой эффект возможен только при очень большой мощности падающего импульса. Отразившись от двух вспомогательных плоских зеркал, поставленных под углом 45°, зеленый импульс проходит через сосуд с водой С. В воду подмешивают немного молока, чтобы усилить рассеяние зеленого света во все стороны, в частности, в направлении фотоаппарата с открытым затвором. Далее располагается поляроид 1, пропускающий световые колебания с электрическим вектором, расположенным во вполне определенной плоскости, проходящей через луч. Затем свет идет через кювету К с сероуглеродом и через поляроид 2. Причем этот поляроид ориентируется так, чтобы пропускаемые им колебания были перпендикулярны колебаниям, пропущенным первым поляроидом. Таким образом, через оба поляроида свет вообще не проходит. Но сероуглерод обладает замечательной способностью, открытой в конце прошлого века физиком Керром: если в нем создать сильное электрическое поле, перпендикулярное направлению распространяющегося света, то поляризация света изменяется. Обычно это вспомогательное поле создают между пластинами плоского конденсатора, помещенного в сероуглерод и соединенного с источником высокого напряжения. Но в опыте по фотографированию света поле создавалось мощным инфракрасным лучом, прошедшим через пластинку П и также попадавшим в кювету Керра. Свет с измененной поляризацией может пройти через второй поляроид и попасть в фотоаппарат ФА. Между кюветой и фотоаппаратом помещают светофильтр Ф, пропускающий только зеленый свет (через кювету проходит и инфракрасный свет — его частично поглощает фильтр Ф). Расположить приборы так, чтобы зеленый и инфракрасный импульсы приходили к кювете Керра одновременно, не представляет труда. Таким образом, инфракрасный импульс «открывает» оптический затвор (при помощи комбинации двух поляроидов и кюветы Керра) на ничтожно малое время 10^{-11} *с* (время существования инфракрасного импульса).

Благодаря этому удалось сфотографировать зеленый импульс, который получился на фотографии в виде слегка смазанного пятна внутри сосуда с водой. Эта замечательная фотография представлена на рисунке на с. 10. Для ее получения была использована установка, показанная на рисунке 2.

Размеры изображения зеленого импульса вполне соответствуют предварительно рассчитанным размерам. Получившийся на фотографии красный блик — след инфракрасного импульса, также попавшего в фотоаппарат.

Литература

В. А. Угаров, Оригинальный эксперимент — фотографирование света, «Наука и жизнь», 1973, № 6.

М. Дюге, Свет, сфотографированный на лету, «Успехи физических наук», 1973, т. 109, № 1.

Н. А. МИНЦ

ГЕЙЗЕРЫ

Гейзеры *), горячие ключи, минеральные источники — все это отголоски вулканической деятельности.

Гейзеры — это горячие источники, в которых через определенные промежутки времени происходят извержения кипятка. Извержение большого гейзера — очень красивое зрелище. Со взрывом и грохотом столб кипящей воды, окутанный паром, взлетает фонтаном вверх, рассыпаясь на большой высоте. Фонтан бьет некоторое время, затем вода исчезает, пар рассеивается, и все успокаивается. Обычно вокруг гейзера есть бассейн, диаметром иногда в несколько метров. Земля около гейзеров бывает теплая или даже горячая.

Гейзеры и горячие источники расположены в местах активной вулканической деятельности, современной или сравнительно недавно прекратившейся. Они встречаются на Камчатке (около 100 гейзеров), в Исландии, в Новой Зеландии, в Северной Америке (Йеллоустонский национальный парк), в Японии, в Китае. В Исландии в долинах почти всех рек виден пар, поднимающийся от кипящих ключей и гейзеров. Тепло горячих источников используется там для обогрева жилищ и теплиц. На Камчатке есть даже река, получившая название Гейзерной. В долине этой реки находится около 20 крупных и множество мелких гейзеров. Самый большой гейзер Камчатки Великан выбрасывает струю воды высотой до 40 *м*, а пара — до нескольких сот метров. Мелкие гейзеры поднимают воду всего на несколько сантиметров над землей.

Деятельность гейзеров, как правило, периодична, но промежутки времени между извержениями у разных гейзеров различны. Извержения одних гейзеров происходят каждые несколько минут, извержения других — 1—2 раза в месяц. Интервал между извержениями может быть постоянным, а может и изменяться. Довольно строгой периодичностью отличается гейзер Старый Служака (Йеллоустонский национальный парк). период его извержений — от 53 до 70 минут. Струя воды Старого Служаки поднимается на высоту до 40 *м*. Извержения знаменитого Большого гейзера в Исландии повторяются через 20—30 часов и продолжаются по 2,5—3 часа. Но это не непрерывно бьющий фонтан. Мощная струя кипятка взлетает на большую высоту, бьет некоторое время и исчезает. Не успевает еще рассеяться пар, как вылетает новый столб кипятка, за ним еще и еще. Фонтан Большого гейзера достигает высоты [illegible] *м*.

---

*) Гейзер — производное слово от geyza (исл.) — хлынуть.

Если взглянуть в бассейн гейзера после извержения, можно увидеть, что воды в нем нет, а в дне имеется отверстие — канал, уходящий в глубину. Перед началом извержения вода поднимается по каналу, заполняет бассейн, бурлит, выплескивается, а затем взлетает фонтан кипятка. Когда извержение прекращается, вода снова уходит в трубку гейзера. Например, у Большого гейзера диаметр трубки 3 *м*, глубина 23 *м*. На поверхности земли трубка заканчивается бассейном шириной 16 *м* и длиной 18 *м*.

Внутренняя поверхность трубки и бассейна выстлана очень ровным слоем кремнезема, такого твердого, что ударами молотка его не разбить. Отложения кремнезема называют гейзеритом. Около некоторых гейзеров образуются конусы из гейзерита высотой от нескольких сантиметров до нескольких метров.

Как же образовалась эта удивительная трубка? Как появилась облицовка трубки и бассейна?

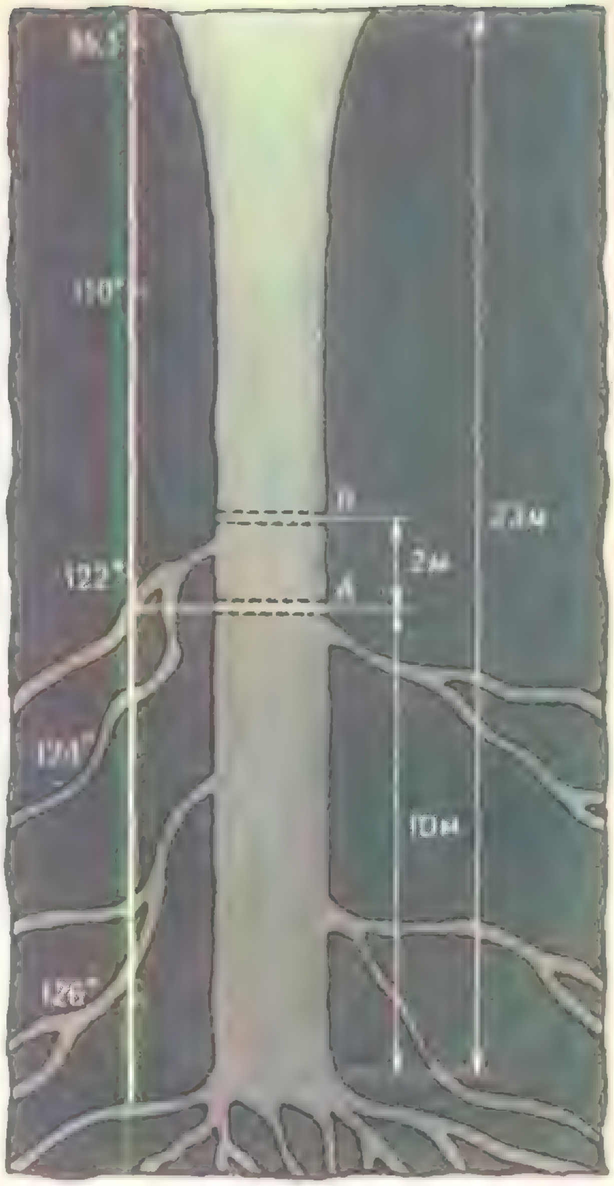


Рис. 1.

Можно предположить, что это связано с отложениями веществ, содержащихся в воде. Однако вода гейзера не дает осадка; налитая в бутылку, она годами остается чистой. И только если выпаривать воду в испарительной чашке, то по краям, там, где испарение идет быстрее, будет отлагаться кремнезем, образуется кремнистое кольцо. В середине даже после продолжительного кипячения вода может только помутнеть.

Теперь представьте себе теплый источник, вода которого стекает по небольшому склону. Растекаясь, вода быстро испаряется, и кремнезем оседает. Этот осадок постепенно возвышает ложе, по которому течет вода. Таким образом увеличивается глубина колодца источника, пока, наконец, не образуется трубка и бассейн.

Но какие силы заставляют горячую воду бить фонтаном?

Первые объяснения работы гейзера были основаны на гипотезе существования большого подземного бассейна, лишь отчасти заполненного водой. Вода в подземном бассейне разогревается за счет внутреннего тепла Земли и кипит. Образующиеся пары поступают в трубку, которая заполнена водой из подземных каналов. Пар из бассейна поднимается по трубке, увлекает за собой воду, находящуюся в трубке, и заставляет ее выплескиваться вверх фонтаном. Однако экспериментальные исследования это не подтвердили.

Механизм действия гейзера впервые был объяснен в XIX веке Г. Бунзеном, который исследовал гейзеры в Исландии. Оказывается, подземный бассейн совсем не нужен. Трубки, созданной источником, вполне достаточно для того, чтобы произошло извержение гейзера.

Бунзен измерял температуру воды в гейзере, опуская в трубку термометр и отмечая каждый раз глубину погружения термометра. На рисунке 1 приведены полученные им результаты. Видно, что по мере продвижения в глубь трубки гейзера температура повышается. У вершины гейзера температура была 85,5° С, у основания она возросла до 126° С.

Отчего же вода в гейзере не кипит, несмотря на то, что ее температура превышает 100 градусов?

Известно, что температура кипения воды зависит от давления. При понижении давления температура кипения уменьшается, а при повышении давления — увеличивается. На вершине высокой горы вода кипит примерно при 80° С. В трубке гейзера, наоборот, температура кипения выше 100° С, потому что там давление больше атмосферного на величину давления столба воды в трубке. Этот излишек давления и не позволяет воде кипеть. Ни в одном месте трубки температура воды не достигает температуры кипения, соответствующей давлению в этом месте.

Перед извержением временами слышатся взрывы, и каждый взрыв сопровождается сильным волнением в бассейне. По-видимому, это происходит оттого, что по боковым протокам (см. рис. 1) в трубку гейзера поступает горячая вода и перегретый пар. Пар, смешиваясь с более холодной водой в трубке, отдает воде свое тепло. Может произойти испарение какого-то количества воды, тогда из-за резкого расширения пара возникает взрыв. Часть воды, перетекая из трубки в бассейн, вызывает в нем волнение.

В промежутках между извержениями температура воды в трубке постепенно повышается, но даже перед самым извержением она нигде не достигает температуры кипения.

Как же происходит извержение?

Ключ к разгадке этого явления дают наблюдения Бунзена. Ему удалось измерить температуру воды за несколько минут до извержения.

Оказалось, что температура воды несколько ниже середины трубки лишь двумя градусами ниже температуры кипения в этом месте трубки. Так, действительная температура воды в 10 метрах от дна гейзера была 122° С, а температура точки кипения с учетом давления воды в этом месте — 124° С.

Мы уже говорили, что перед извержением наблюдаются взрывы, обусловленные притоком пара из подземных каналов в трубку гейзера и сопровождающиеся поднятием водяного столба. Пусть пар вошел в трубку на высоте 10 *м* над дном и поднял воду, находившуюся на уровне *A*, до уровня *B*, расположенного двумя метрами выше (см. рис. 1). Давление в этом месте трубки уменьшается на величину давления двух метров воды, вытекшей в бассейн *). Температура

---

*) Весом пара можно пренебречь, так как его плотность намного меньше плотности воды.

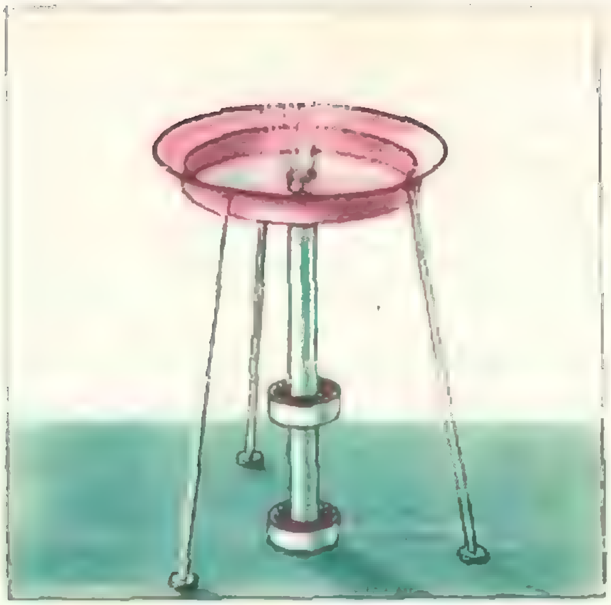


Рис. 2.

кипения при уменьшенном давлении будет 121° С. Следовательно, настоящая температура воды на уровне *А* (122° С) уже превышает температуру точки кипения на один градус. Вода в трубке сразу начинает кипеть, образуется пар, который еще выше поднимает воду и заставляет ее выливаться в наружный бассейн. Давление на нижние слои воды еще заметнее уменьшается, кипение идет все более бурно, паров образуется все больше и больше. Внезапно начинает кипеть вся масса воды, находящаяся в самой нижней части трубки; тогда верхние слои воды выбрасываются вверх с громадной скоростью, и происходит извержение гейзера.

Выброшенная вода снова падает в бассейн, охлаждается и через некоторое время начинает вливаться обратно в трубку, постепенно заполняя ее. Извержение кончилось. Время от времени слышатся взрывы, видны волнения воды, но следующий выброс начнется только тогда, когда вода в трубке достигнет температуры, близкой к температуре кипения.

Извержения природного гейзера не могут продолжаться бесконечно. Когда трубка достигнет такой длины, что температура воды в нижних слоях из-за слишком большого давления уже не сможет дойти до точки кипения, извержения должны прекратиться. Источник тем не менее продолжает откладывать кремнезем, и образуется красивый водоем. Глубина некоторых таких водоемов от 10 до 12 *м*.

Мы уже говорили, что температура воды в трубке гейзера во время «отдыха» нигде не достигает точки кипения. Следовательно, пар, производящий взрывы и поднимающий водяной столб, должен образовываться в боковых каналах, питающих трубку. Но гейзер может «работать» и без этих каналов, если несколько ниже середины его трубки есть дополнительный приток тепла. Это можно показать на действующей модели гейзера, которую нетрудно сделать самим. Общий вид установки такого искусственного гейзера показан на рисунке 2.

Нужно взять двухметровую металлическую трубку и установить ее вертикально. В верхней части трубки следует укрепить сосуд, достаточно большой, чтобы горячая вода не разбрызгивалась, а собиралась в сосуде и могла стекать обратно в трубку. Вся конструкция должна быть надежно закреплена. Поскольку придется иметь дело с горячей водой и паром, обращаться с искусственным гейзером нужно очень осторожно. Для работы такого гейзера нужно два источника тепла: один внизу, а второй немного ниже середины трубки. В качестве источников тепла можно взять большие консервные банки, наполненные горящими угольками. В дне банки надо вырезать дыру, немного меньшего диаметра, чем диаметр трубки, и, нагрев банку без углей, плотно насадить ее на трубку. Если отверстие не слишком велико, а банка хорошо разогрета, то при одновременном нагревании банки и трубки банка будет прочно держаться на том месте трубки, куда ее насадили. Извержение такого «гейзера» происходит каждые 5—6 минут.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам

Б. В. Бекламов

В этой статье мы предлагаем читателям несколько задач, в решении которых центральную роль играет теорема Эйлера. Уделяя основное внимание задачам, мы не доказываем здесь эту теорему, а приводим лишь ее формулировку. Доказательство теоремы Эйлера, как и более общие формулировки этой теоремы, можно найти в книгах «Что такое математика?» Куранта и Роббинса и «Наглядная геометрия» Гильберта и Кон-Фоссена.

Прежде чем формулировать теорему Эйлера, договоримся, что линию с концами в двух данных точках мы будем называть *дугой, соединяющей эти точки*, в том случае, если эту линию можно пройти, не побывав ни в одной из ее точек дважды.

Теорема Эйлера. *Пусть на плоскости задано m точек и n попарно непересекающихся дуг, каждая из которых соединяет какие-либо две данные точки и не проходит через остальные $m-2$ точки, и пусть эти дуги делят плоскость на l областей. Если из каждой данной точки в любую из остальных можно попасть, двигаясь по этим дугам, то*

$$m-n+l=2.$$

В случае, изображенном на рисунке 1, все условия теоремы Эйлера выполнены, $m=12$, $n=18$, $l=8$ и $m-n+l=2$. На рисунках 2 и 3 изображены случаи, когда условия этой теоремы не выполняются. Так, на рисунке 2 из точки A_1 нельзя попасть в точку A_5 и $m-n+l=3\neq2$, а на рисунке 3 линия, соединяющая точки A_1 и A_2, является самопересекающейся и опять $m-n+l=3\neq2$.

В некоторых задачах совокупность, состоящую из нескольких точек и соединяющих их попарно непересекающихся дуг, мы называем *картой*; при этом точки из этой совокупности мы называем *вершинами*, а области, на которые дуги делят плоскость, — *странами*.

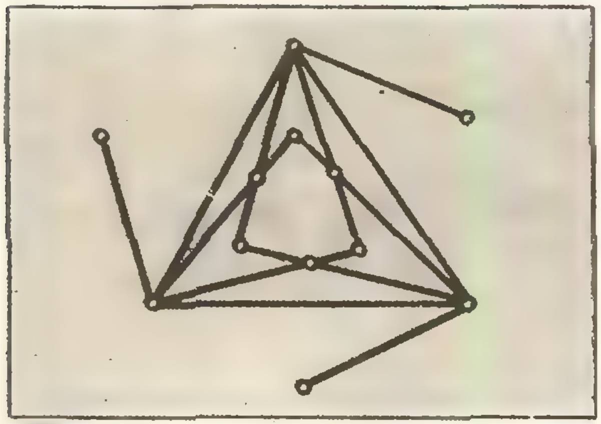


Рис. 1.

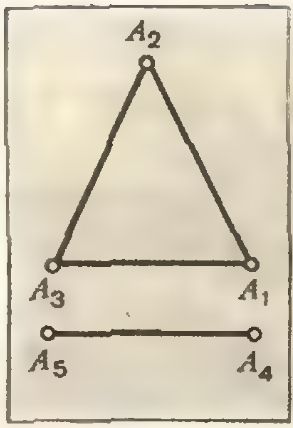


Рис. 2.

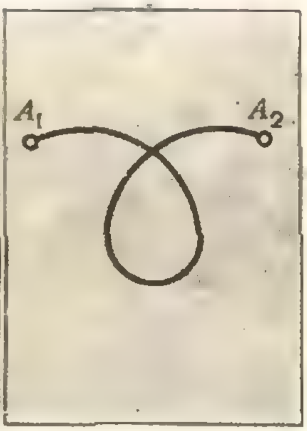


Рис. 3.

Теперь мы можем перейти к решению задач.

Задача 1. *Можно ли десять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города выходило пять дорог, ведущих в пять других городов?*

Решение. Предположим, что города можно соединить между собой дорогами так, как указано в задаче. В таком случае, если какие-то два города окажутся не соединенными дорогой непосредственно, то найдется третий город, который уже будет непосредственно соединен с каждым из них. Изобразив на плоскости города точками, а дороги — дугами, получим, что любые две точки соединены цепочкой дуг. Так как в каждой точке сходятся пять дуг, то общее число дуг равно $\frac{5 \cdot 10}{2} = 25$. Согласно теореме Эйлера эти дуги делят плоскость на $2 + 25 - 10 = 17$ областей. Каждая из этих семнадцати областей ограничена по крайней мере тремя дугами, так как в противном случае нашлись бы два города, непосредственно соединенные по крайней мере двумя дорогами, а это противоречит условию задачи. Следовательно, число дуг не меньше $\frac{3 \cdot 17}{2} = 25{,}5$. Таким образом, исходное предположение приводит нас к противоречию, и города нельзя соединить между собой так, как это требуется в задаче.

Задача 2. *Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?*

Решение. Предположим, что это сделать можно.

Изобразим дома синими, а колодцы — черными точками и каждую синюю точку соединим дугой с каждой черной точкой так, чтобы девять полученных дуг попарно не пересекались. Тогда всякие две точки, изображающие дома или колодцы, будут соединены цепочкой дуг, и в силу теоремы Эйлера эти девять дуг разделят плоскость на $9 - 6 + 2 = 5$ областей. Каждая из пяти областей ограничена по крайней мере четырьмя дугами, так как по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Поэтому число дуг должно быть не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, и, следовательно, наше предположение неверно.

Задача 3. *Докажите, что на всякой карте найдется страна, граничащая не более чем с пятью странами.*

Решение. Если число стран на карте не превосходит шести, то утверждение задачи очевидно. Мы докажем, что на карте, имеющей более шести стран, найдутся даже четыре страны, каждая из которых граничит не более чем с пятью странами. Окрасим вершины и дуги исходной карты в черный цвет, а красной краской отметим в каждой стране по одной точке. Всякие две отмеченные точки, лежащие в соседних странах (то есть странах, имеющих общую граничную дугу), соединим внутри этих стран красной дугой так, чтобы красные дуги попарно не пересекались. Тогда всякие две красные точки будут соединены цепочкой дуг, и так как никакие две построенные дуги не будут соединять одни и те же точки, то каждая страна на карте, состоящей из точек и дуг красного цвета, будет ограничена не менее чем тремя дугами. Если какая-то страна на этой карте ограничена более чем тремя дугами, то на ее границе можно выбрать две вершины, не соединенные дугой, и соединить их красной дугой внутри этой страны. Повторяя несколько раз эту операцию, мы получим красную карту, на которой каждая страна ограничена ровно тремя дугами. Так как, кроме того, на этой карте никакие две дуги не соединяют одни и те же вершины и так как число вершин больше трех, то из каждой вершины выходят не менее чем три дуги. Обозначим через n число дуг, через l — число стран, через m — число всех вершин красной карты и через a — число вершин, из которых выходят менее чем шесть дуг. Тогда получим

$$3l = 2n, \qquad (1)$$

$$3a + 6(m - a) \leqslant 2n. \qquad (2)$$

Из формулы (1) и теоремы Эйлера, примененной к системе точек и дуг красного цвета, следует, что

$$2n = 6m - 12,$$

$$3a + 6(m - a) \leqslant 6m - 12,$$

которое показывает, что $a \geqslant 4$. Остается заметить, что если некоторая страна на черной карте имеет больше пяти соседей, то из отмеченной в этой стране красной точки выходит больше пяти дуг, и потому, в силу неравенства $a \geqslant 4$, на черной карте найдутся четыре страны, каждая из которых имеет не больше пяти соседей.

Задача 4. *Можно ли семиугольник разрезать на выпуклые шестиугольники?*

Решение. Предположим, что какой-то семиугольник удалось разрезать на выпуклые шестиугольники. Обозначим число тех вершин шестиугольников, которые лежат внутри исходного семиугольника, через m, а число оставшихся вершин (то есть лежащих на границе семиугольника) — через m'. В качестве дуг, соединяющих вершины, выберем прямолинейные отрезки сторон многоугольников, удовлетворяющие следующему условию: отрезок должен соединять две вершины и не проходить через остальные вершины. Обозначим через n число таких дуг и через l — число областей, на которые эти дуги делят плоскость (число l на единицу больше числа шестиугольников). Ясно, что любые две вершины окажутся соединенными цепочкой дуг. В силу теоремы Эйлера

$$m + m' - n + l = 2. \qquad (3)$$

Так как внешняя область ограничена m' дугами, а каждая из остальных — не менее чем шестью дугами, то

$$2n \geqslant 6(l - 1) + m'. \qquad (4)$$

Из некоторых вершин на границе семиугольника выходят только две дуги. Обозначим число таких вершин через a. Из всякой другой вершины выходят по крайней мере три дуги, так что

$$3m + 3(m' - a) + 2a \leqslant 2n.$$

Отсюда в силу равенства (3)

$$n \leqslant 3l + a - 6.$$

Сравнивая это неравенство и неравенство (4), мы получаем

$$2a - m' \geqslant 6. \qquad (5)$$

Так как на границе семиугольника найдутся по крайней мере две вершины, из которых выходят дуги, ведущие внутрь семиугольника, то $m' - a \geqslant 2$. Из этого неравенства и неравенства (5) следует, что $a \geqslant 8$.

С другой стороны, так как семиугольник разрезан на выпуклые многоугольники, то всякая вершина, из которой выходят две дуги, является вершиной семиугольника, и потому $a \leqslant 7$. Таким образом, семиугольник нельзя разрезать на выпуклые шестиугольники.

Следующие задачи мы предлагаем читателю решить самостоятельно.

Упражнения

1. Можно ли пять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города в любой другой город вела дорога, не проходящая через остальные города?

2. Докажите, что если на карте число стран больше девятнадцати, то на этой карте найдутся три страны с одинаковым числом соседей.

3. Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны исходного пятиугольника остались неразрезанными. Докажите, что если число получившихся многоугольников не менее пяти, то в одном из них найдется угол, который больше либо равен 72°.

4. Треугольник, все углы которого не больше 120°, разрезан на несколько треугольников. Докажите, что в одном из получившихся треугольников все углы не больше 120°.

5. В игре принимают участие два игрока. Перед началом игры на плоскости отмечается m точек. Игроки поочередно разыскивают две точки, еще не соединенные дугой, и соединяют эти точки дугой, которая не пересекает ранее построенные дуги. Выигрывает тот, кто делает последний ход. При каких m выигрывает игрок, сделавший первый ход, а при каких — его противник?

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М286, М287» или «...Ф303». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М286—М290; Ф298—Ф302

М286. На плоскости расположено N точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости может оказаться отмеченным?

А. Печковский

М287. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число 1, 2, 3, ... можно представить в виде разности двух чисел этой последовательности единственным способом?

А. Лифшиц

М288. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, у которого ровно один друг.

С. Конягин

М289. N гирь, каждая из которых весит целое число граммов, разложены на K равных по весу куч. Докажите, что можно не менее чем K разными способами убрать одну из гирь так, что оставшиеся $(N-1)$ гири уже нельзя разложить на K равных по весу куч.

С. Конягин

М290. Для каких n существует такая замкнутая несамопересекающаяся ломаная из n звеньев, что любая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит еще хотя бы одно ее звено?

С. Конягин

Ф298. Внутри фотоаппарата перпендикулярно фотопластинке расположено плоское зеркало, длина которого DB равна половине фокусного расстояния объектива (рис. 1). Изобра-

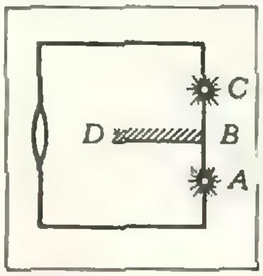


Рис. 1.

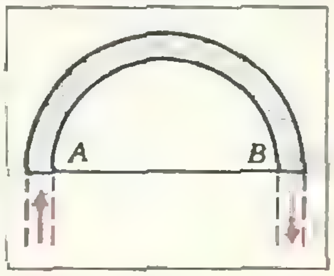


Рис. 2.

жение A звезды Вега находится от центра фотопластинки на расстоянии, вдвое меньшем радиуса объектива. Во сколько раз освещенность «отраженного изображения» C звезды Вега меньше освещенности ее изображения A в присутствии зеркала?

Г. Л. Коткин

Ф299. По гибкому шлангу сечением S течет жидкость плотности ρ со скоростью v. Найти натяжение нити AB, соединяющей концы A и B шланга, если известно, что она является диаметром полуокружности, которую образует шланг (рис. 2).

С. А. Беляев

Ф300. Найти, на какую высоту поднимается жидкость в расширяющемся и суживающемся конических капиллярах. Смачивание полное. Угол при вершине конуса, который образует капилляр, равен α. Этот угол считать малым. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ.

Ф301. Круглая линза диаметра D состоит из двух соединенных по диаметру половинок. Фокусное расстояние одной из них F, другой $2F$. На расстоянии a от линзы находится источник света, на расстоянии $2a$ по другую сторону линзы — экран. Нарисуйте график зависимости освещенности изображения источника на экране от расстояния точки экрана до оптической оси линзы. Источник находится на оптической оси линзы, экран перпендикулярен этой оси.

Ф302. За лисой, бегущей прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$, гонится собака, скорость которой $\mathbf{v}_2$ постоянна по величине и направлена все время на лису. В момент, когда скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ оказались взаимно перпендикулярными, расстояние между лисой и собакой было равно l.

Каково было ускорение собаки в этот момент?

Б. Б. Буховцев

Решения задач

М246—М250; Ф253—Ф259

М246. *На плоскости даны две прямые m и n и точка O. Постройте треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых m и n, а центр описанной окружности находится в точке O.*

Чтобы не рассматривать различных случаев взаимного расположения прямых m, n и точки O, будем решать задачу без чертежа.

Предположим вначале, что точка O не совпадает с точкой пересечения прямых m и n. Заметим следующее:

1) Если через точку O провести прямые m' и n', параллельные прямым m и n соответственно, то мы должны получить перпендикуляры, проходящие через середины сторон искомого треугольника (это сразу следует из того, что O — центр описанной окружности).

2) Прямая m'', симметричная прямой m относительно прямой n', должна проходить через вершину искомого треугольника (скажем, через точку C). Аналогично, прямая n'', симметричная прямой n относительно прямой m', также должна проходить через точку C. (Оба эти утверждения вытекают из первого замечания.)

3) Если прямые m'' и n'' пересекаются (а они могут и не пересечься; потому-то мы всюду в 1) и 2) и писали слово должна), то точка их пересечения — это вершина C нужного треугольника.

После того, как вершина C найдена, вершины A и B находятся без труда: нам известны направления сторон CA и CB и то, что они пересекаются с прямыми m и n в точках A и B соответственно.

Итак, мы описали процесс построения. Однако осталось невыясненным, всегда ли это построение приводит к цели; иначе говоря, произвольно ли можно задавать прямые m, n и точку O? Из нашего построения следует, что это не так: если прямые m'' и n'' параллельны, то вершину C найти нельзя. Проверьте, что прямая m'' будет параллельна n'' в том и только том случае, когда либо острый угол между прямыми m и n равен 60°, либо когда $m \parallel n$.

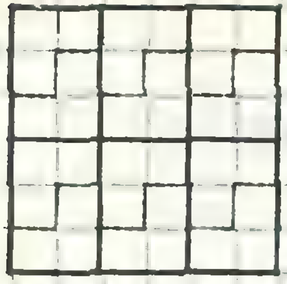


Рис. 1.

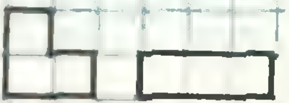


Рис. 2.

Если $m \| n$, то решений нет. Если же угол между прямыми m и n равен 60°, то прямые m'' и n'' могут совпадать, и в этом случае получается целое семейство решений. Происходит это лишь тогда, когда параллелограмм, образованный прямыми m, n, m' и n', является ромбом с углом 60° при вершине O.

Наконец, если точка O совпадает с точкой пересечения прямых m и n, то треугольник либо вырождается в точку, либо же решением является целое семейство правильных треугольников, — в этом случае угол между прямыми m и n равен 60°.

Отметим в заключение, что если немного изменить формулировку задачи, — считать, что на прямых m и n лежат не высоты, а биссектрисы треугольника, — то получится задача, в некотором смысле *двойственная* к решенной. (Впрочем, она легко решается и без использования этой двойственности.) Постарайтесь решить и эту задачу и понять, в чем состоит двойственность.

M247. *Квадрат 6×6 нужно заполнить 12 плитками, из которых k имеют форму уголка, а остальные $12-k$ прямоугольника (рис. 1). При каких k это возможно?*

Если k — четное, то квадрат можно заполнить уголками и прямоугольниками (рис. 2). При k, равном 5, 7, 9 и 11, заполнение также возможно (рис. 3).

Остается разобрать случаи $k=1$ и $k=3$. Оказывается, что в этих случаях укладка невозможна.

1) Пусть $k=1$. Занумеруем строки квадрата (рис. 4) и сопоставим каждой клеточке прямоугольника (или уголка) номер строки, в которой она находится. Нетрудно заметить, что сумма номеров строк (по клеточкам) для любого прямоугольника делится на 3, а для любого уголка — не делится. Сумма номеров строк квадрата (по клеточкам) делится на 3, значит, при $k=1$ укладка невозможна.

2) Пусть $k=3$. Занумеруем строки и столбцы квадрата (рис. 5).

Сопоставим каждой из фигур два числа: сумму номеров строк и сумму номеров столбцов, в которых находятся клеточки этой фигуры. Для прямоугольников оба эти числа делятся на 3, а для уголков — не делятся. Остатки, получающиеся при делении на 3 чисел, соответствующих уголкам, определяются лишь видом уголка и не меняются, если передвигать уголок по квадрату не переворачивая (см. рисунки 5 и 6; на рисунке 6 изображен пример такого перемещения; в клеточках поставлены номера строк и столбцов, в которых лежат клеточки).

Сумма номеров строк и сумма номеров столбцов (по клеткам) для всего квадрата делятся на 3; следовательно, укладка квадрата тремя уголками и девятью прямоугольниками возможна только тогда, когда все три уголка одного вида. В силу симметрии квадрата будем считать, что все уголки такие, как на рисунке 6.

Покажем теперь, что полосу ширины 6 и высоты n невозможно уложить, если использовать прямоугольники и уголки только такого вида (при условии, что хоть один уголок должен быть использован).

Предположим противное. Покажем тогда, что если возможна укладка полосы $6\times n$, то возможна укладка полосы $6\times m$, где m — некоторое число, меньшее n.

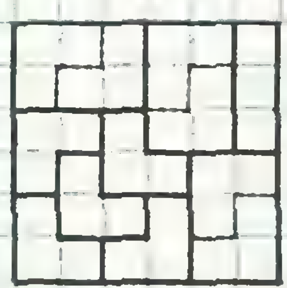


Рис. 3.

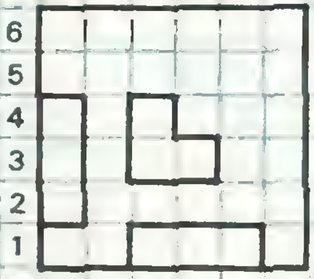


Рис. 4.

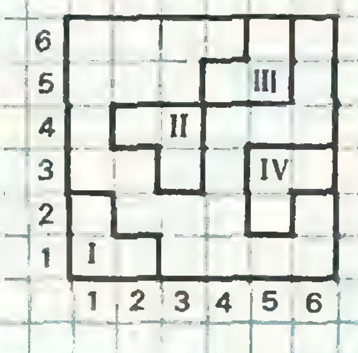


Рис. 5.

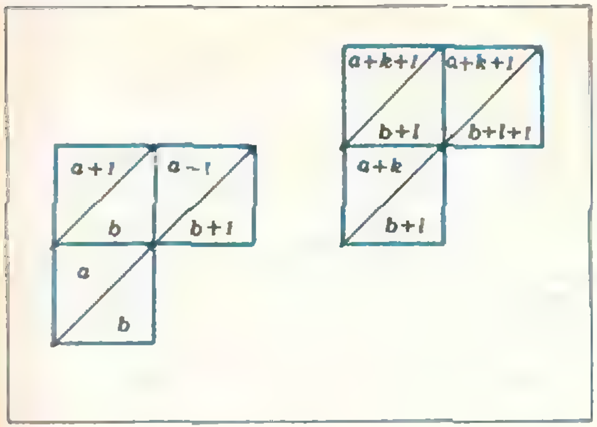


Рис. 6.

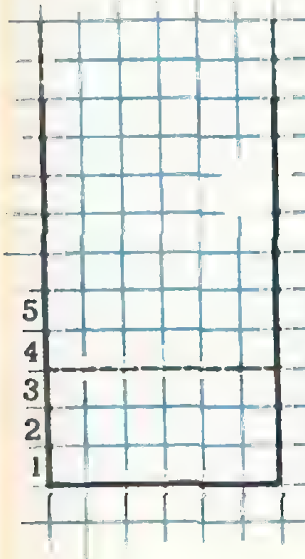


Рис. 7.

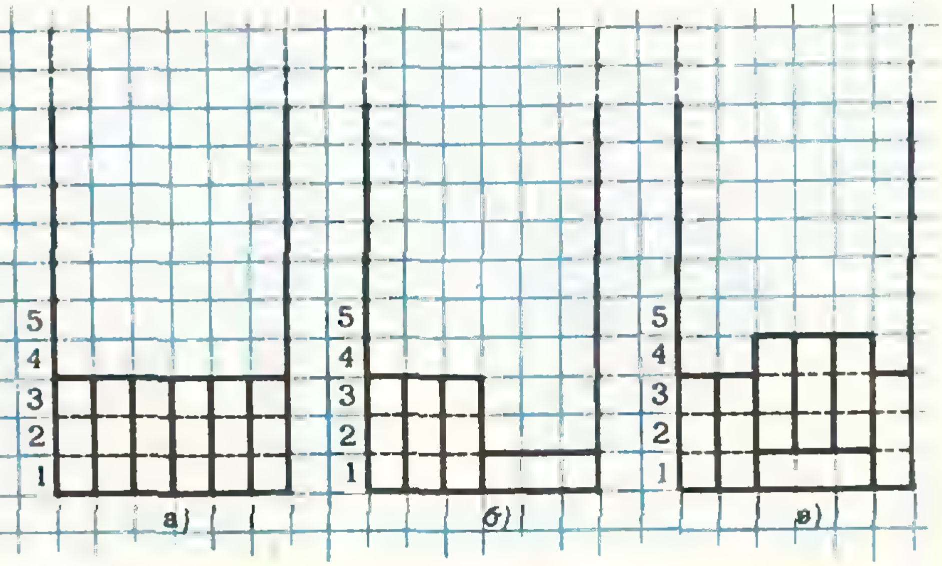


Рис. 8.

Занумеруем строки полосы снизу вверх (рис. 7). Из рисунков 8 *а, б, в* следует, что если в первых трех строках полосы нет клетки, принадлежащей уголку, то у полосы *можно отрезать первую строку*, то есть можно сделать индуктивный шаг.

Пусть есть уголок, содержащий клетку первой или второй строки. Возьмем самый правый из таких уголков. Ясно, что красная клетка на рисунке 9 (уголок, изображенный на нем, — самый правый) покрыта горизонтальным прямоугольником, иначе укладка вылезет за пределы полосы. Синяя клетка либо лежит за пределами полосы, либо покрыта вертикальным прямоугольником — случаи *а*) и *б*). В случае *б*) укладка невозможна — это видно из рисунка. В случае *а*) раз синяя клетка покрыта вертикальным прямоугольником, то черная и зеленая клетки тоже покрыты вертикальными прямоугольниками. Перестроив конфигурацию рисунка 9, *а*, как показано на рисунке 10, мы «поднимем» уголок так, что он уже не будет содержать клеток первых двух строк.

Итак, нам осталось рассмотреть, что будет в том случае, когда клетки первой и второй строк покрыты только прямоугольниками. Из рисунков 8 *а — в* следует, что во всех случаях, кроме изображенных на рисунках 11 *а, б*, индуктивный переход возможен. Рассмотрим эти два случая. Красная клетка не может быть покрыта уголком — иначе синюю клетку вообще нельзя будет *покрыть. Если красная клетка покрыта горизонтальным* прямоугольником, то индуктивный шаг можно сделать. Поэтому будем считать, что она покрыта вертикальным прямоугольником. Но тогда и черная клетка тоже покрыта вертикальным прямоугольником. Если и синяя клетка покрыта вертикальным прямоугольником, то полосу

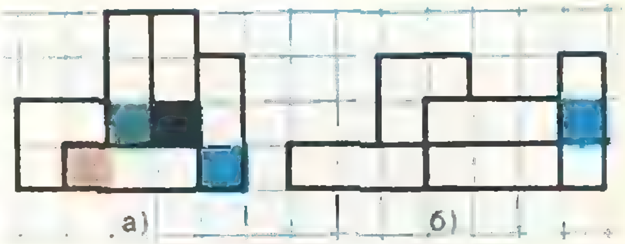


Рис. 9.

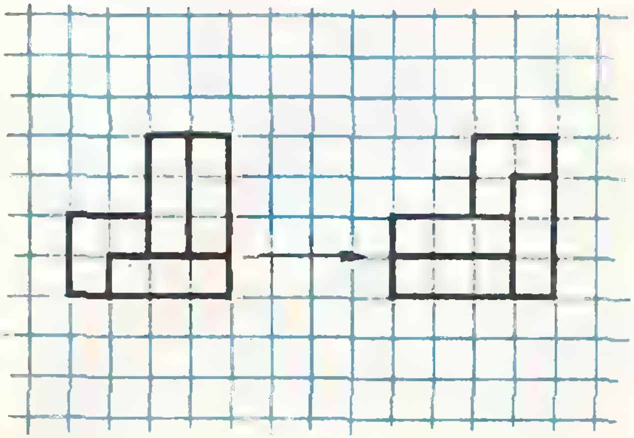


Рис. 10.

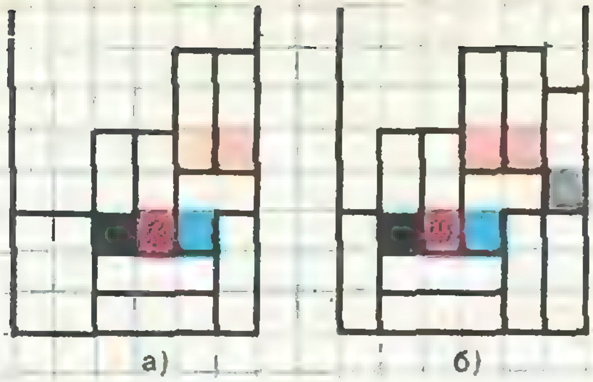


Рис. 11.

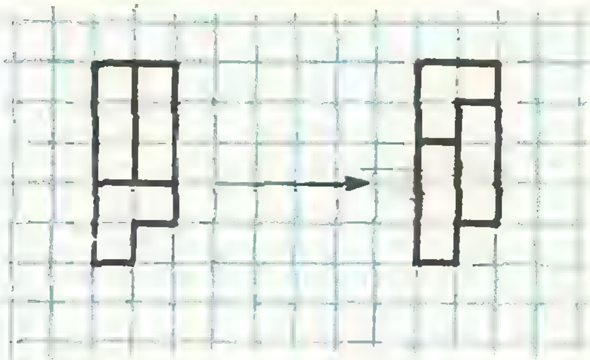


Рис. 12.

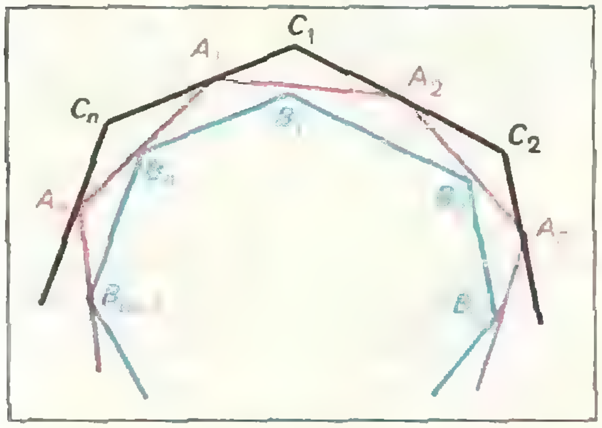


Рис. 13

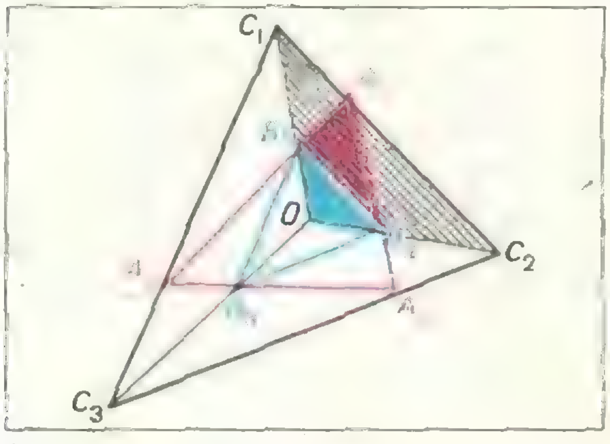


Рис. 14.

можно обрезать (см. рис. 8,в). Поэтому рассмотрим случай, когда синяя клетка покрыта уголком. Тогда зеленая клетка покрыта вертикальным прямоугольником. После этого легко сообразить, что желтые клетки также покрыты вертикальными прямоугольниками. Значит, уголок можно поднять (рис. 12).

Таким образом, нам удалось убрать все уголки из первых трех строк полосы. Мы уже убедились, что в этом случае от полосы $6\times n$ можно перейти к полосе $6\times m$, где $m<n$. То есть, мы доказали следующее:

Если полосу $6\times n$ можно покрыть прямоугольниками и уголками (такими, как на рисунке 6), то тогда можно заполнить и полосу $6\times m$, где m — некоторое число, меньшее n.

Остается убедиться, что при достаточно малых m такое покрытие невозможно. Это очевидно, если $m<3$.

Итак, задача полностью решена.

Л. Г. Лиманов

М248. *В выпуклый n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$, площадь которого равна P (вершина B_i лежит на стороне A_iA_{i+1} для $i=1, 2, \ldots, n-1$, а вершина B_n — на A_nA_1). Около того же n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ описан n-угольник $C_1C_2\ldots C_n$, площадь которого равна Q, так, что $C_1C_2 \parallel B_1B_2$, $C_2C_3 \parallel B_2B_3$, $\ldots$, $C_nC_1 \parallel B_nB_1$ (вершина A_i лежит на стороне $C_{i-1}C_i$ для $i=2, \ldots, n$, а вершина A_1 — на стороне C_nC_1; см. рис. 13). Найдите площадь n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$.*

Решим сначала задачу для $n=3$. Докажем, что в этом случае площадь S треугольника $A_1A_2A_3$ равна среднему геометрическому площадей вписанного и описанного треугольников:

$$S^2=QP. \qquad (1)$$

Поскольку треугольники $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$ подобны, то прямые B_1C_1, B_2C_2 и B_3C_3 пересекаются в одной точке O (докажите это!), при этом $\Delta B_1B_2B_3$ можно получить из $\Delta C_1C_2C_3$ подобным сжатием (гомотетией) с центром в точке O и коэффициентом

$$k=\frac{B_1B_2}{C_1C_2}=\frac{B_2B_3}{C_2C_3}=\frac{B_3B_1}{C_3C_1}=\frac{OB_i}{OC_i} \qquad (2)$$

$$(i=1,\ 2,\ 3).$$

Обозначим через q_i, s_i и p_i части площадей Q, S и P соответственно, лежащие внутри треугольников C_1OC_2 (при $i=1$), C_2OC_3 ($i=2$) и C_3OC_1 ($i=3$); например, q_1 — площадь голубого треугольника на рисунке 14, s_1 — сумма площадей голубого и розового треугольников (с общим основанием), p_1 — сумма площадей голубого треугольника и заштрихованной трапеции (то есть площадь треугольника C_1OC_2). Тогда для каждого $i = 1, 2, 3$

$$\frac{q_i}{s_i} = k, \qquad \frac{q_i}{p_i} = k^2$$

и значит, $\dfrac{s_i}{p_i} = k$. Поэтому

$$\frac{Q}{S} = \frac{\Sigma q_i}{\Sigma s_i} = k$$

и

$$\frac{S}{P} = \frac{\Sigma s_i}{\Sigma p_i} = k,$$

откуда следует (1).

Этот же ответ получается и для произвольного n, если n-угольники $B_1B_2 \ldots B_n$ и $C_1C_2 \ldots C_n$ подобны. В условии задачи содержится искусная ловушка (в нее попалось большинство читателей, приславших нам письма по поводу этой задачи): там сказано лишь, что стороны многоугольников параллельны; из этого, конечно, следует равенство углов, но не следует подобие многоугольников — пропорциональность соответствующих сторон. Уже для $n = 4$ нетрудно построить примеры (рис. 15 и 16), показывающие, что равенство (1) не обязательно выполняется (четверо наших читателей: *В. Тарасов* (Ленинград), *С. Финашин* (Ленинград), *А. Вятчин* (Павлово) и *А. Гончаров* (Никополь) заметили это), то есть S не определяется однозначно по заданным P и Q. В этом случае вопрос задачи естественно понимать так: *какие значения может принимать S при заданных P и Q?*

Сравнительно нетрудно придумать примеры, в которых S, Q и P связаны неравенством

$$S^2 \geqslant QP. \tag{3}$$

Проверьте, что уже рисунок 16 (где $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — равнобочные трапеции) позволяет реализовать любую тройку значений S, Q и P, связанных неравенством (3). Значительно более трудной и интересной задачей является такая: *обязательно ли выполняется неравенство* (3)?

Мы предоставляем читателям возможность подумать над этим вопросом; ему мы посвятим заметку в одном из следующих номеров «Кванта».

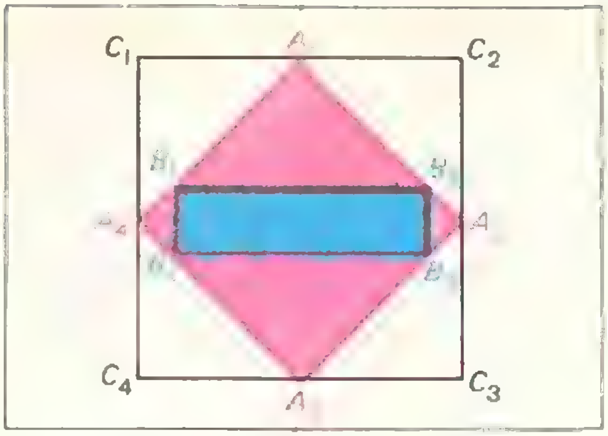


Рис. 15.

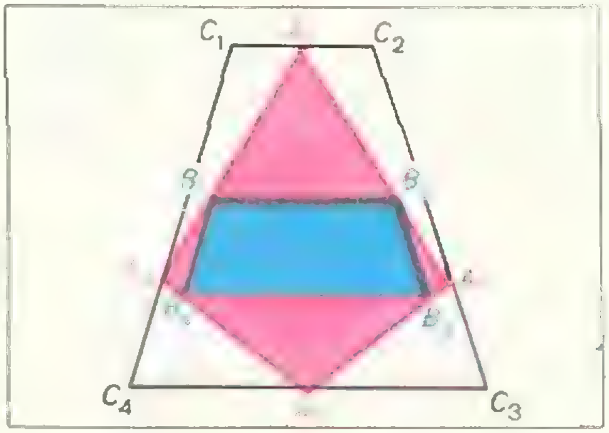


Рис. 16.

М249. *На ребрах $A'D'$ и $C'D'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбирают две точки K и M так, что плоскость KDM касается шара, вписанного в куб (рис. 17). Докажите, что величина φ двугранного угла при ребре $B'D$ тетраэдра $B'DKM$ не зависит от выбора точек K и M. Найдите эту величину φ.*

Приведем наиболее короткое решение этой задачи, использующее лишь соображения симметрии.

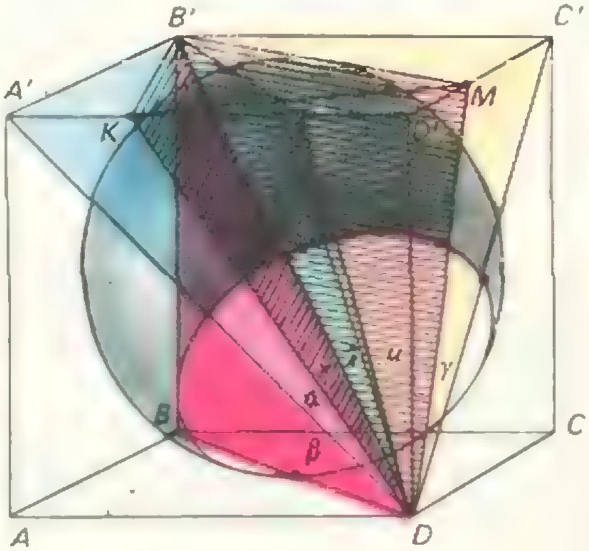


Рис. 17.

Обозначим точку касания шара с плоскостью KDM через L, диагональ куба $B'D$ — через d. Проведем через d шесть плоскостей α, $\varkappa$, λ, μ, γ и β, проходящих соответственно через точки A', K, L, M, C' и B.

Двугранный угол $\angle\alpha d\gamma$ (угол между плоскостями α и γ) равен 120°, поскольку при поворотах куба на 120° вокруг диагонали d углы $\angle\alpha d\gamma$, $\angle\gamma d\beta$ и $\angle\beta d\alpha$ совмещаются друг с другом.

Но $\angle\alpha d\varkappa = \angle\varkappa d\lambda$: точки, в которых две плоскости — KDM и KDA', — проходящие через прямую KD, касаются шара, разумеется, симметричны друг другу относительно плоскости $KB'D$, проходящей через центр шара, а следовательно, плоскости α и λ тоже симметричны друг другу относительно плоскости $\varkappa$. Аналогично, $\angle\lambda d\mu = \angle\mu d\gamma$.

Поскольку сумма углов $\angle\alpha d\lambda + \angle\lambda d\gamma = \angle\alpha d\gamma$ равна 120°, сумма их половин $\varphi = \angle\varkappa d\lambda + \angle\lambda d\mu = \angle\varkappa d\mu$ равна 60°.

Большинство читателей, так же как и автор *И. Ф. Шарыгин*, решили эту задачу с помощью вычислений и получили следующий интересный промежуточный результат: сумма длин $|KD'| + |D'M|$ всегда равна длине ребра куба (то есть так же, как величина угла φ, не зависит от положения точки L).

Н. Б. Васильев

М250. а) *При дворе короля Артура* *) *собрались n рыцарей. Некоторые из них враждуют друг с другом, но у каждого рыцаря не менее $\frac{n}{2}$ друзей среди собравшихся. Докажите, что Мерлин — советник короля Артура — может усадить рыцарей за круглым столом так, чтобы рядом с каждым сидели его друзья.*

б) *Докажите, что если у каждого рыцаря одинаковое четное (и, конечно, положительное) число друзей, то Мерлин может рассадить рыцарей за несколько круглых столов так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом (у Артура есть столики на двоих, на троих и т. д.).*

Задача М250 б) приведена здесь в уточненной формулировке. Это очень трудная задача. Ее решению будет посвящена заметка «Задачи о графах и сказка «Иван-царевич и серый волк», которую можно будет прочесть в следующем номере нашего журнала.

Приведем решение М250 а).

Рассаживая рыцарей за круглым столом или на одну скамью (то есть в ряд), мы всегда будем подразумевать, что соседи являются друзьями. Нам понадобится такой факт.

Лемма. *Пусть на одной скамье сидят k рыцарей, и пусть у каждого из двух крайних среди сидящих рыцарей более половины друзей. Тогда этих k рыцарей можно усадить за круглым столом.*

Доказательство. Обозначим рыцарей слева направо в том порядке, как они сидят, через

$$B_1, B_2, \ldots, B_k.$$

Если B_1 и B_k — друзья, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим всех тех рыцарей, слева от которых сидит друг рыцаря B_k. Их не менее $k/2$. Поэтому среди них найдется друг рыцаря B_1. Обозначим его B_s (тогда B_{s-1} — друг B_k). Теперь пересадим рыцарей в таком порядке:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{s-1}, B_k, B_{k-1}, \ldots, B_s.$$

Поскольку B_1 и B_s — друзья, то рыцарей уже можно усадить за стол.

Утверждение леммы доказано. Теперь докажем, что n рыцарей всегда можно усадить на одной скамье. Пусть на скамью уже удалось усадить r рыцарей ($r < n$); покажем, что тогда на скамью можно поместить еще одного рыцаря.

Возможны два случая: 1) у крайних рыцарей все друзья уже сидят на скамье; 2) у крайних рыцарей есть друзья среди не сидящих на скамье. Во втором случае очевидно, что с краю можно посадить еще одного рыцаря.

Если имеет место первый случай, то r рыцарей, сидящих на скамье, согласно лемме, можно посадить и за круглым столом. Обозначим рыцарей, уже сидящих за столом, по порядку через $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Возьмем рыцаря A из числа $n - r$ нерассаженных рыцарей, знакомого с каким-нибудь сидящим за столом рыцарем, например с B_m ($m < r$) (такой найдется, поскольку либо $r \leqslant \frac{n}{2}$, либо $n - r \leqslant \frac{n}{2}$). Теперь $r + 1$ рыцаря можно усадить на скамью так:

$$A, B_m, B_{m+1}, \ldots, B_r, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что постепенно можно усадить на одной скамье всех n рыцарей. Применяя лемму к n рыцарям, сидящим на скамье, усаживаем их за круглый стол.

В. Л. Гутенмахер

Ф253. *Шар, изготовленный из твердого диэлектрика, поместили в однородное электрическое поле с напряженностью E. При этом диэлектрик оказался полностью поляризованным. Воспользовавшись принципом суперпозиции, найти напряженность электрического поля в центре шара и в точках на расстоянии r от центра шара (r меньше радиуса шара).*

Молекулы диэлектрика можно представить как гантельки длины l с зарядами $+q$ и $-q$ на концах. Число молекул в единице объема равно n.

---

*) См. Марк Твен, Янки при дворе короля Артура.

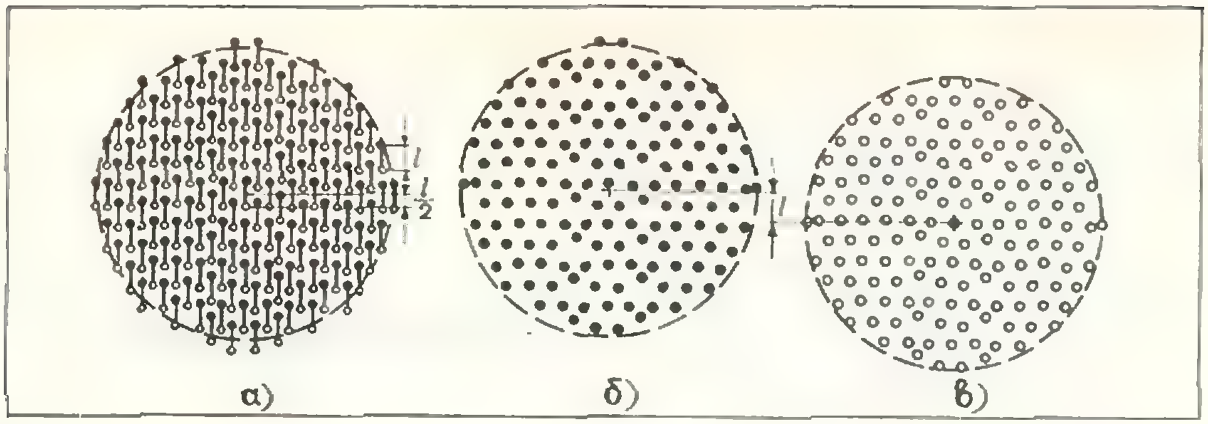


Рис. 18.

Во внешнем электрическом поле все гантельки ориентируются вдоль поля (рис. 18, *а*), при этом на шаре возникают заряды, распределенные определенным образом по его поверхности. Внутри шара, где плотности положительных и отрицательных зарядов одинаковы, заряды уничтожают друг друга.

Если внимательно посмотреть на приведенный рисунок, то можно представить себе, что шар из полностью поляризованного диэлектрика эквивалентен двум как бы вложенным друг в друга шарам. Один шар заряжен только отрицательно, другой — только положительно (рис. 18, *б*, и *в*). Центры этих шаров смещены друг относительно друга на расстояние l (длина гантельки), а относительно центра реального шара они смещены на расстояние $\frac{l}{2}$ (рис. 19).

Таким образом, поле в любой точке складывается из внешнего поля и полей, созданных положительно и отрицательно заряженными шарами. Поэтому вначале решим вспомогательную задачу: найдем напряженность поля внутри равномерно заряженного шара на расстоянии r от его центра.

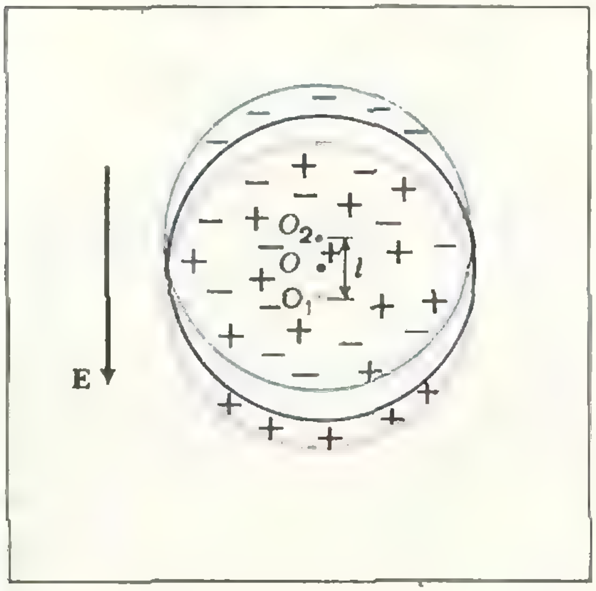


Рис. 19.

Как известно*), напряженность поля внутри равномерно заряженной сферы равна нулю, а вне сферы поле такое же, как если бы оно создавалось точечным зарядом, находящимся в центре сферы. Разобьем равномерно заряженный шар на тонкие сферические слои, толщина которых много меньше радиуса шара. Согласно принципу суперпозиции напряженность поля на расстоянии r от центра шара равна сумме напряженностей полей зарядов таких сферических слоев. Но напряженность поля, созданного зарядами тех слоев, радиусы которых больше r, равна нулю, а слоев, радиусы которых меньше r, — такая, как если бы заряды этих слоев находились в центре шара. Следовательно, напряженность поля на расстоянии r от центра шара равна $E_r = \frac{Q_r}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, где Q_r — заряд шара радиуса r. Если число зарядов q в единице объема шара равно n, то

$$Q_r = qn\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{и} \quad E_r = \frac{qnr}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Воспользовавшись полученными результатами, нетрудно найти напряженность поля в любой точке шара из диэлектрика.

Рассмотрим центр шара. Напряженность в этой точке равна сумме трех векторов (рис. 20): вектора $\mathbf{E}$ напряженности внешнего поля, вектора $\mathbf{E}_1$ напряженности поля, созданного в этой точке положительно заряженным шаром, и вектора $\mathbf{E}_2$ напряженности поля, созданного отрицательно заряженным шаром. Так как центр шара находится на расстоянии $\frac{l}{2}$ от центров положительно и от-

---

*) См., например, статью Л. П. Бакиной и С. М. Козела «Принцип суперпозиции в электростатике», «Квант», 1973, № 3.

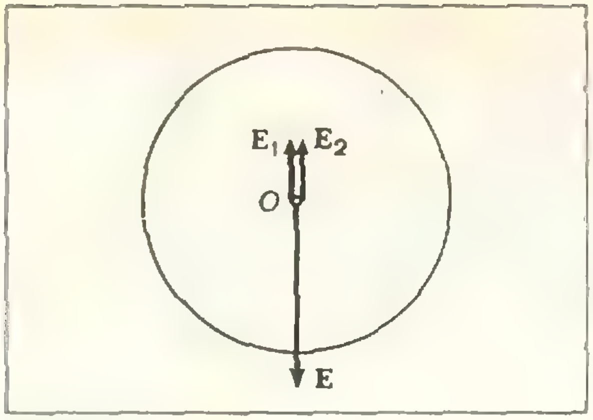


Рис. 20.

рицательно заряженных шаров, то

$$E_1 = E_2 = \frac{qn}{3\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{l}{2} = \frac{qnl}{6\varepsilon\varepsilon_0}\,.$$

Поэтому (см. рис. 20)

$$E_0 = E - E_1 - E_2 = E - \frac{qnl}{3\varepsilon\varepsilon_0}\,.$$

Теперь найдем напряженность поля в некоторой точке A внутри шара. Обозначим расстояние от этой точки до центра положительно заряженного шара r_1, а до центра отрицательно заряженного шара r_2. Вектор напряженности поля в точке A складывается из трех векторов (рис. 21): $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_1'$ и $\mathbf{E}_2'$, где $E_1' = \frac{qnr_1}{3\varepsilon\varepsilon_0}$ — поле положительно заряженного шара, $E_2' = \frac{qnr_2}{3\varepsilon\varepsilon_0}$ — поле отрицательно заряженного шара.

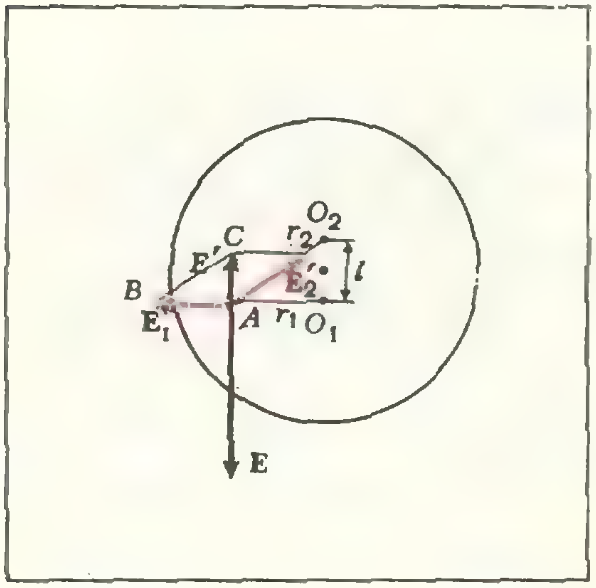


Рис. 21.

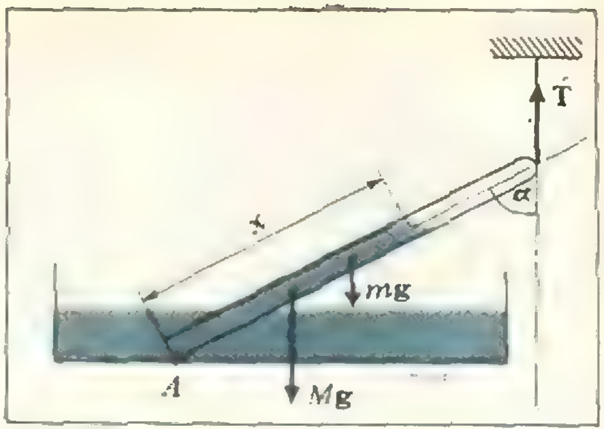


Рис. 22.

Найдем сначала сумму $\mathbf{E}'$ векторов $\mathbf{E}_1'$ и $\mathbf{E}_2'$. Рассмотрим треугольники AO_1O_2 и ABC. Углы $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle O_1AO_2$ равны, и выполняется следующее соотношение:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{O_1A}{O_2A}\,,$$

так как

$$\frac{AB}{BC} = \frac{E_1'}{E_2'} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1A}{O_2A}\,.$$

Из подобия треугольников следует, что вектор $\mathbf{E}'$ параллелен линии O_1O_2.

Величину вектора $\mathbf{E}'$ можно найти из соотношения

$$\frac{E'}{E_1'} = \frac{O_1O_2}{O_1A}\,,$$

откуда

$$E' = E_1'\,\frac{O_1O_2}{O_1A} = \frac{qnl}{3\varepsilon\varepsilon_0}\,.$$

Тогда окончательно напряженность поля в точке A равна

$$E_A = E - E' = E - \frac{qnl}{3\varepsilon\varepsilon_0}\,.$$

Как видно, напряженность поля в точке A не зависит ни от r_1, ни от r_2, то есть не зависит от положения точки A внутри шара. Это означает, что поле внутри полностью поляризованного шара однородно.

Ф254. *Тонкостенная трубка ртутного барометра открытым концом опирается на дно чашки со ртутью. Закрытый конец удерживается вертикальной нитью, так что трубка составляет угол α с вертикалью (рис. 22). Длина трубки l, масса m, плотность ртути ρ, атмосферное давление h мм рт. ст. Найти силу натяжения нити. Размером погруженной в ртуть части трубки пренебречь. Площадь сечения трубки S.*

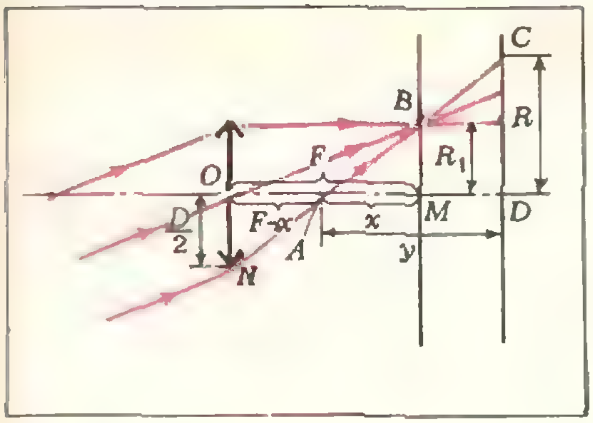


Рис. 23.

Так как трубка барометра находится в равновесии, то сумма моментов всех сил, действующих на трубку со ртутью, относительно любой оси должна быть равна нулю. Запишем условие равновесия для оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку A, в которой трубка опирается на дно сосуда:

$$Tl\ \sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Mg\frac{x}{2}\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Здесь T — сила натяжения нити, mg — сила тяжести трубки, $Mg = \rho xSg$ — вес ртути, находящейся в трубке, x — длина столбика ртути.

Давление столбика ртути в трубке равно атмосферному давлению, поэтому

$$x = \frac{h}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Следовательно, из (1) и (2)

$$T = \frac{mg\frac{l}{2} + \frac{\rho Sx^2g}{2}}{l} = \frac{1}{2}g\left(m + \frac{\rho Sh^2}{l\cos^2\alpha}\right).$$

Ф255. *При фотографировании Луны с Земли фотоаппаратом, объектив у которого имеет фокусное расстояние F, на фотопластинке получено размытое изображение Луны в виде диска радиуса R. Затем с помощью того же аппарата получают резкое изображение Луны. Оно имеет радиус R_1. На какое расстояние сместили при втором фотографировании Луны объектив фотоаппарата относительно фотопластинки?*

Диаметр объектива D. Дифракцию не учитывать.

Так как Луна находится очень далеко от Земли и размеры объектива малы по сравнению с расстоянием до Луны, то можно считать, что из каждой точки Луны в объектив попадает параллельный пучок лучей, который собирается в точку в фокальной плоскости объектива. В этой плоскости и образуется резкое изображение Луны. Если фотопластинка расположена не в фокальной плоскости, а ближе к объективу или дальше от него, то изображение Луны оказывается размытым.

Будем для определенности считать, что экран расположен за фокальной плоскостью, и рассмотрим ход лучей, идущих от края Луны (рис. 23). Эти лучи и определяют размер изображения Луны на фотопластинке. Треугольники ABM и ACD подобны, поэтому можно записать следующее соотношение:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{y}{x},$$

или

$$\frac{R-R_1}{R_1} = \frac{y-x}{x}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников OAN и ABM получим

$$\frac{R_1}{D/2} = \frac{x}{F-x}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдем расстояние $\delta = y - x$, на которое сместили объектив относительно фотопластинки:

$$\delta = \frac{R-R_1}{R_1 + D/2}F.$$

Ф256. *В центр квадратной свободно подвешенной доски попадает пуля. Если скорость пули $v > v_0$, то она пробивает доску насквозь. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость пули будет равна $2v_0$, nv_0? При какой скорости пули скорость доски будет максимальной?*

Масса пули m, масса доски M, сопротивление считать не зависящим от скорости.

В горизонтальном направлении на систему пуля — доска не действуют никакие внешние силы, то есть система изолирована. Запишем законы сохранения импульса и энергии ($v > v_0$):

$$mv = mv_1 + MV, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + Q. \qquad (2)$$

Здесь v_1 — скорость пули по выходе из доски, V — скорость доски, Q — количество выделившегося тепла. Причем это тепло равно работе силы сопротивления, действующей на пулю при ее движении внутри доски:

$$Q = A = F_c d,$$

где d — толщина доски.

Так как по условию задачи сила сопротивления не зависит от скорости, а d — величина постоянная, то и количество выделившегося тепла Q одинаково при всех значениях начальной скорости пули v.

Рассмотрим случай, когда начальная скорость пули равна v_0. Очевидно, что это минимальная скорость, с которой должна лететь пуля, чтобы насквозь пробить доску. При этом пуля, пробив доску, будет иметь скорость такую же, как и доска. Обозначим эту скорость u и запишем законы сохранения импульса и энергии для этого случая:

$$mv_0 = (m+M)u,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)u^2}{2} + Q.$$

Отсюда

$$Q = \frac{mMv_0^2}{2(m+M)}. \qquad (3)$$

Теперь равенства (1) — (3) можно объединить в систему и, решив эту систему, найти величину V. Исключив из (1) и (2) скорость v_1, получим квадратное уравнение относительно V:

$$V^2 - 2\frac{mv}{m+M}V + \frac{2mQ}{M(m+M)} = 0,$$

откуда

$$V = \frac{m}{m+M}v \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{m^2}{(m+M)^2}v^2 - \frac{2mQ}{M(m+M)}}.$$

Подставим сюда значение Q из (3) и получим

$$V = \frac{m}{m+M}\left(v \pm \sqrt{v^2 - v_0^2}\right).$$

Теперь проанализируем, оба ли корня уравнения соответствуют условию данной задачи. Импульс доски численно равен импульсу силы сопротивления, то есть произведению величины F_c на время ее действия t. Очевидно, что чем больше начальная скорость пули, тем быстрее пуля проходит сквозь доску, то есть тем меньше время t. Следовательно, скорость доски максимальна при скорости пули, равной v_0. С увеличением начальной скорости пули скорость доски уменьшается. Этому соответствует такое выражение для V:

$$V = \frac{m}{m+M}\left(v - \sqrt{v^2 - v_0^2}\right).$$

При $v = 2v_0$

$$V = \frac{m}{m+M}(2 - \sqrt{3})\,v_0,$$

а при $v = nv_0$

$$V = \frac{m}{m+M}(n - \sqrt{n^2 - 1})v_0.$$

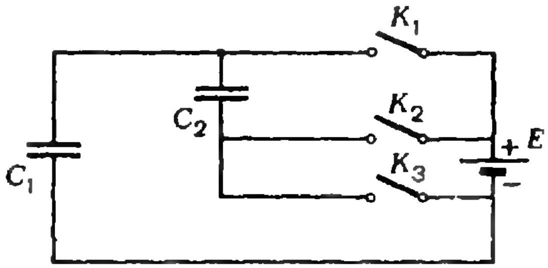


Рис. 24.

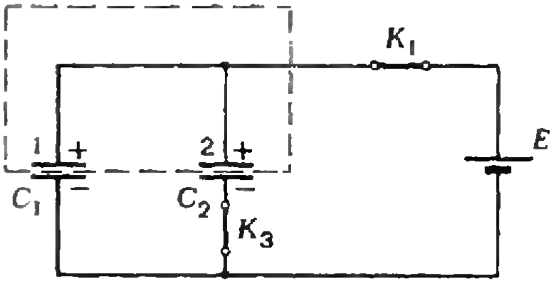


Рис. 25.

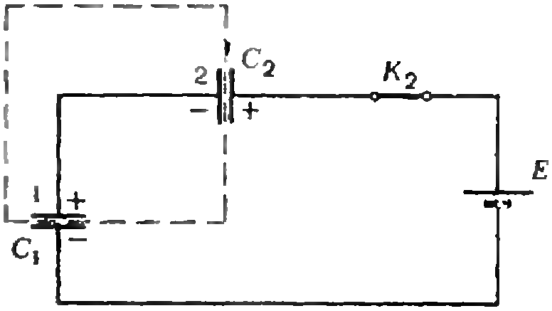


Рис. 26.

Ф257. *В схеме, изображенной на рисунке 24, вначале все ключи разомкнуты. Конденсаторы C_1 и C_2 разряжены. Э. д. с. батареи E. Затем ключи K_1 и K_3 замыкают и через некоторое время их размыкают. После этого замыкают ключ K_2. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе C_1 после замыкания ключа K_2?*

При замыкании ключей K_1 и K_3 конденсаторы C_1 и C_2 оказываются подключенными к источнику параллельно (рис. 25), поэтому напряжение на каждом из них равно E, а заряды равны соответственно $Q_1 = C_1E$ и $Q_2 = C_2E$. После размыкания ключей K_1 и K_3 и замыкания ключа K_2 конденсаторы подключаются к источнику последовательно (рис. 26).

Однако, в отличие от обычного последовательного соединения конденсаторов, в данном случае суммарный заряд пластин 1 и 2 равен не нулю, а $Q = Q_1 + Q_2$. Такой заряд был сообщен этим пластинам в первом случае (при замыкании ключей K_1 и K_3). Во втором случае суммарный заряд пластин

1 и 2 равен $Q_1' - Q_2'$. Поскольку рассматриваемый участок цепи изолирован, можно воспользоваться законом сохранения заряда:

$$Q_1' - Q_2' = Q,$$

или

$$C_1U_1' - C_2U_2' = (C_1 + C_2)E. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения энергии

$$U_1' + U_2' = E. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), найдем

$$U_1' = E\left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right).$$

Ф258. *Кольцо из тонкой проволоки разрывается, если его зарядить зарядом Q. Диаметр кольца и диаметр проволоки увеличили в 3 раза. При каком заряде будет разрываться это новое кольцо?*

Под действием сил электрического отталкивания кольцо деформируется, и в любом месте кольца результирующая сила упругости равна силе электрического взаимодействия выбранного элементарного участка со всем остальным кольцом: $F_{эл} = F_{упр}$.

Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами Q_1 и Q_2, находящимися на расстоянии r друг от друга, согласно закону Кулона равна $\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Это, очевидно, единственная комбинация из Q_1, Q_2 и r, имеющая размерность силы. Поэтому электрическая сила в кольце должна быть пропорциональна $\frac{Q^2}{R^2}$ (R — радиус кольца):

$$F_{эл} = \alpha\frac{Q^2}{R^2},$$

где α — коэффициент пропорциональности.

В момент разрыва сила упругости, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения проволоки, равна пределу прочности σ, который зависит только от материала проволоки, поэтому

$$F_{упр} = \sigma S$$

(S — площадь сечения проволоки).

Таким образом,

$$\alpha\frac{Q^2}{R^2} = \sigma S. \qquad (1)$$

Если кольцо, имеющее втрое больший радиус и втрое больший диаметр проволоки, разрывается при заряде Q_1, то в этом случае

$$\alpha\frac{Q_1^2}{(3R)^2} = \sigma S_1.$$

Так как $S \sim d^2$ и $S_1 \sim d_1^2$ (d и d_1 — диаметры проволоки), то $S_1 = 9S$, и поэтому

$$\alpha\frac{Q_1^2}{9R^2} = 9\sigma S. \qquad (2)$$

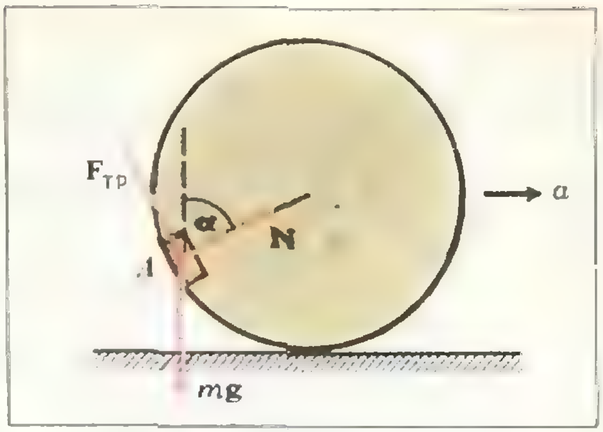


Рис. 27.

Тогда из равенств (1) и (2) получаем

$$Q_1 = 9Q.$$

Ф259. *Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной плоскости с ускорением a. Брусок A, размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, скользит по внутренней поверхности цилиндра так, что угол между радиусом-вектором точки A и вертикалью остается постоянным. Найти этот угол, если коэффициент трения бруска о поверхность цилиндра равен k.*

В системе координат, связанной с горизонтальной плоскостью, на брусок действуют три силы: сила тяжести mg, сила нормальной реакции **N** со стороны цилиндра и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ (рис. 27). Равнодействующая этих трех сил направлена горизонтально и сообщает бруску ускорение **a**. Поэтому, спроектировав все силы на вертикальную и горизонтальную оси, можно записать:

$$-mg + N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha = 0,$$

$$N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha = ma,$$

где $F_{тр} = kN$. Исключая из этих уравнений N, получим

$$\cos\alpha - k\sin\alpha = \frac{g}{a}(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

Разделим обе части уравнения на $\cos\alpha$:

$$1 + k\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{g}{a}(\mathrm{tg}\,\alpha - k).$$

Отсюда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a + gk}{g - ak},$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{a + gk}{g - ak}.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Чертеж в стереометрических задачах

И. Ф. Шарыгин

При проверке письменных работ поступающих в высшие учебные заведения часто обнаруживается следующее: в чистовике геометрическая задача сопровождается достаточно хорошим чертежом, а то, что изображено в черновике, чертежом можно назвать лишь условно. И приходится только удивляться, как с помощью такого «чертежа» абитуриенты умудрились все-таки решить задачу. Ведь не секрет, что хороший чертеж может оказать существенную помощь в решении геометрических задач, особенно задач по стереометрии. Конечно, научиться делать такие чертежи, какие делают художники «Кванта», вряд ли возможно для рядового школьника. Однако если при решении каждой геометрической задачи обращать внимание на качество чертежа, то в конце концов вы научитесь делать его вполне прилично. Возьмите себе за правило не приступать к решению задачи до тех пор, пока вы не сделаете хорошего чертежа. Не жалейте бумаги, делайте свой чертеж крупным, невидимые линии изображайте пунктиром, не проводите вспомогательных линий, пока не убедитесь в их необходимости. Очень часто стереометрические задачи сводятся к одной или нескольким задачам по планиметрии. Сделайте для каждой такой задачи отдельный чертеж. Шары, как правило, изображать не следует; достаточно бывает указать их центр, точки касания с прямой, плоскостью или другими шарами. Факт касания двух шаров означает, что расстояние между их центрами равно сумме радиусов, если касание внешнее, и это же расстояние равно разности радиусов, если касание внутреннее.

Перейдем к примерам.

Задача 1 (МГУ, химический факультет, 1968 г.). *Внутри сферы расположены четыре шара радиуса r. Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Определить радиус сферы.*

Решение. Пусть A, B, C и D — центры шаров радиуса r, а O — центр сферы (рис. 1). Из того, что шары касаются попарно друг друга внешним образом, следует, что $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром $2r$. Все шары касаются внутренним образом сферы с центром O, поэтому расстояния AO, BO, CO, DO равны между собой и равны $R - r$, где R — искомый радиус сферы. С другой стороны, все эти расстояния

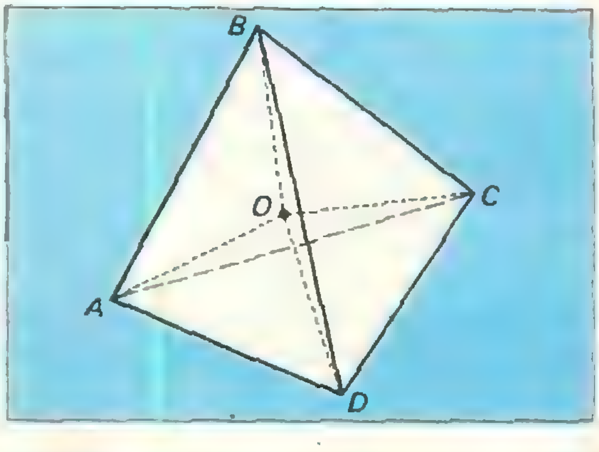


Рис. 1.

равны радиусу шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром $2r$. Теперь уже легко найти искомый радиус R. Сделайте это сами.

Ответ: $R = r\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Задача 2 (МФТИ, 1966 г.). *Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре AB, как на диаметре, построена сфера. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающегося построенной сферы.*

Решение. Пусть O — середина AB — центр данной сферы, O_1 — центр искомого шара. Легко сообразить, что O_1 лежит на высоте AM тетраэдра $ABCD$ (рис. 2).

Обозначим через x радиус шара с центром в точке O_1. Из того, что этот шар вписан в трехгранный угол A, следует, что $AO_1 = 3x$. В самом деле, для любого шара, вписанного в трехгранный угол A, отношение расстояния от его центра до вершины A к радиусу есть величина постоянная. Рассмотрим шар, вписанный в правильный тетраэдр $ABCD$; центр его, как известно, совпадает с центром описанного шара; отношение же радиусов описанного и вписанного шаров для правильного тетраэдра легко вычисляется и равно 3.

Изобразим $\triangle AMB$ на отдельном чертеже ($\sphericalangle M$ — прямой) (рис. 3). Рассмотрим $\triangle AOO_1$.

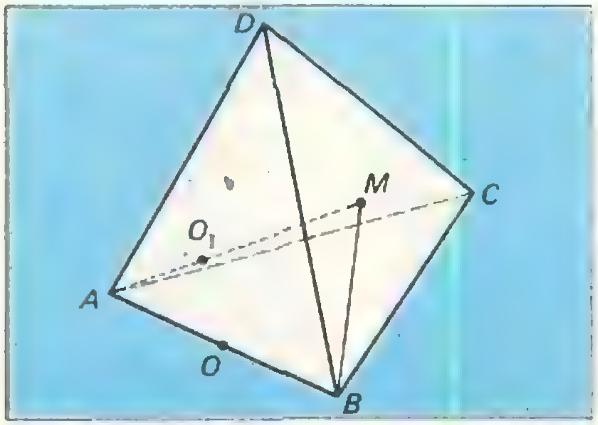


Рис. 2.

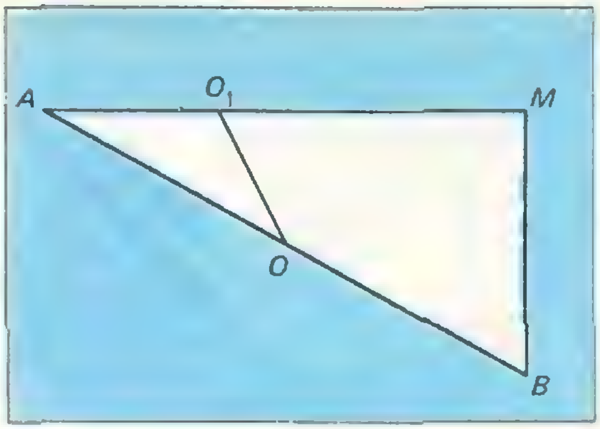


Рис. 3.

Имеем

$$AO_1 = 3x, \qquad AO = \frac{a}{2},$$

$$O_1O = \frac{a}{2} \pm x.$$

Знак «+» соответствует случаю внешнего касания шаров с центрами в точках O и O_1, знак «—» — случаю касания внутреннего. (На рисунке 3 изображен случай внутреннего касания. В случае внешнего касания точка O_1 должна находиться на продолжении AM за точку M.)

Из прямоугольного треугольника AMB находим $\cos \sphericalangle O_1AO$, а затем, написав теорему косинусов для $\triangle OAO_1$, находим x.

Ответ: $\frac{a}{8}\left(\sqrt{6} \pm 1\right)$.

Задача 3. (МГУ, химический факультет, 1971 г.). *Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны r и составляют $^3/_4$ их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трех конусов.*

Для решения задачи нам понадобятся следующие две леммы (докажите их самостоятельно):

Лемма 1. *Если шар внешним образом касается поверхности конуса и плоскости, в которой лежит основа-*

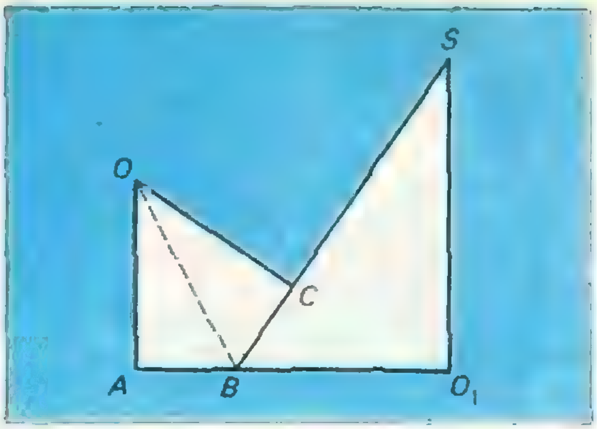


Рис. 4.

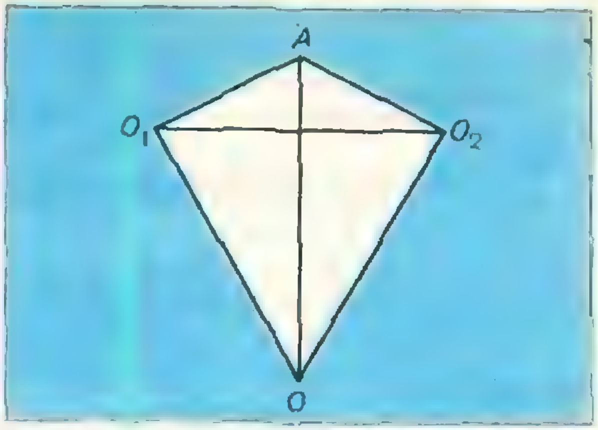


Рис. 5.

ние конуса, то ось конуса, образующая конуса, на которой расположена точка касания конуса с шаром, центр шара и точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса, находятся в плоскости, перпендикулярной к плоскости основания конуса (рис. 4). (На рисунке 4 SO_1 — ось конуса, SB — его образующая, O — центр шара, A — точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса, C — точка касания шара с конусом.)

Лемма 2. *Точка касания шара с плоскостью P находится в центре правильного треугольника, образованного центрами окружностей оснований конусов (шар, конусы и плоскость P — из условия задачи).*

Теперь рисунок 4 поможет нам решить задачу. Имеем

$$AO_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}, \quad BO_1 = r, \quad SO_1 = \frac{4}{3}r.$$

Искомый радиус OA легко найти из прямоугольного треугольника AOB, в котором известен катет AB и $\sphericalangle OBA = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABS)$, а все тригонометрические функции $\sphericalangle ABS$ легко вычисляются.

Ответ: $2r\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

Задача 4 (МГУ, физический факультет, 1972 г.). *На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиусом 1, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.*

Перечислим следующие факты, на которые мы будем опираться при решении задачи; вам следует доказать их самостоятельно:

1) если две окружности, расположенные на сфере, касаются друг друга, то центр сферы, центры этих окружностей и точка касания расположены в одной плоскости;

2) центры O_1, O_2, O_3 данных окружностей радиуса 1 образуют правильный треугольник;

3) центр искомой окружности находится на радиусе сферы, перпендикулярном плоскости $O_1O_2O_3$.

Для решения задачи нам понадобятся рисунки 5 и 6.

На рисунке 5 O — центр сферы, O_1 и O_2 — центры двух окружностей радиусов 1, A — точка их касания, $\sphericalangle AO_1O = \sphericalangle AO_2O = 90°$, $OA = 2$.

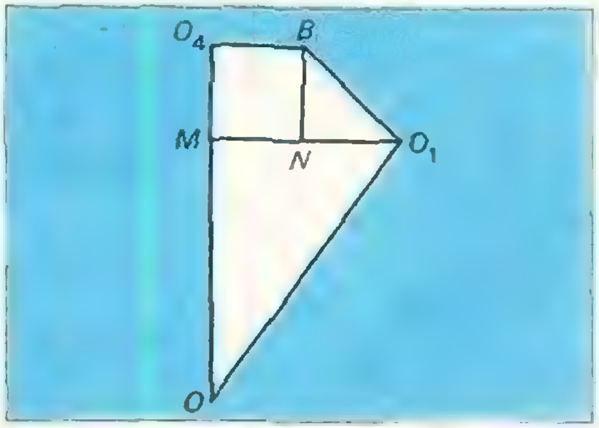


Рис. 6.

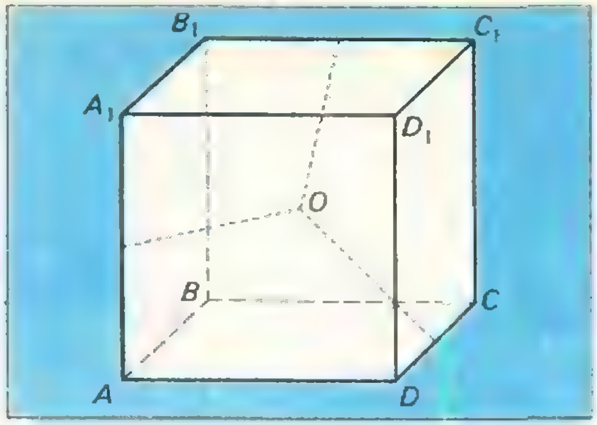


Рис. 7.

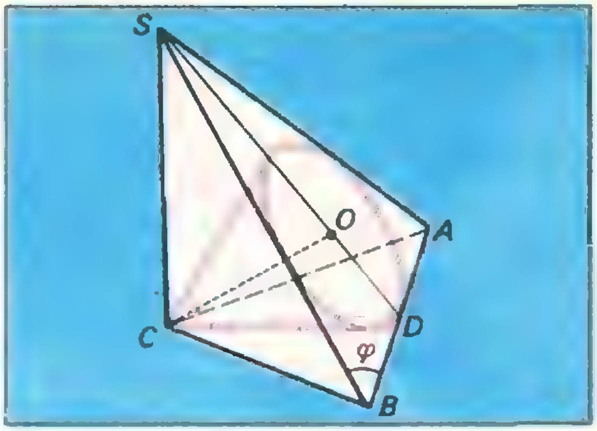


Рис. 8.

Теперь легко найдем

$$OO_1 = OO_2 = O_1O_2 = \sqrt{3}.$$

На рисунке 6 M — центр правильного $\triangle O_1O_2O_3$ со стороной $\sqrt{3}$ и, значит, $O_1M = 1$, O_4 — центр искомой окружности, B — точка ее касания с первой окружностью, $BN \perp MO_1$. Отрезок NO_1 легко найти из подобия $\triangle O_1BN$ и $\triangle O_1MO$, а искомый радиус $O_4B = MN = MO_1 - NO_1$.

Ответ: $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Иногда бывает полезно рассмотреть какое-нибудь геометрическое тело — пирамиду, параллелепипед, призму и т. д., не фигурирующее в условии задачи.

Задача 5 (формулировка этой задачи является перефразировкой задачи, дававшейся в 1973 году на олимпиаде в МФТИ). *Оси трех равных, попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найти радиус наименьшего шара, касающегося всех трех поверхностей, если радиус каждой из них равен r.*

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2r$. Мы можем считать, что ребро AA_1 лежит на оси одного цилиндра, ребро DC — на оси другого и, наконец, ребро B_1C_1 — на оси третьего (рис. 7).

Докажем, что центр искомого шара совпадает с центром O куба. В самом деле, рассмотрим три цилиндра, концентрических данным и проходящих через точку O. Тогда O — единственная точка, лежащая внутри или на поверхности всех этих трех цилиндров, и, значит, для любой точки, отличной от O, расстояние до одной из трех прямых AA_1, DC и B_1C_1 больше, чем расстояния от O до этих прямых.

Ответ: $r(\sqrt{2} - 1)$.

Задача 6. *n равных конусов ($n \geqslant 3$) имеют общую вершину, каждый касается двух других, а все касаются одной плоскости. Найти угол при вершине осевого сечения этих конусов.*

Решение. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$ (рис. 8), у которой в основании лежит равнобедренный $\triangle ABC$ ($AC = CB$) с углом ACB, равным $\frac{2\pi}{n}$, SC перпендикулярна плоскости ABC и проекция C на плоскость SAB совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABS. Рассмотрим теперь конус, вершина которого находится в точке C, а окружностью основания является окружность, вписанная в $\triangle SAB$. Легко убедиться, что этот конус можно рассматривать в качестве искомого. В самом деле, если поставить рядом друг с другом n пирамид, равных пирамиде $SABC$, так, чтобы у них совпадали вершины S, то конусы, вписанные в эти пирамиды, будут образовывать систему, удовлетворяющую условиям задачи.

Обозначим через l образующую конуса, а через r — радиус окружности его основания. Из подобия пря-

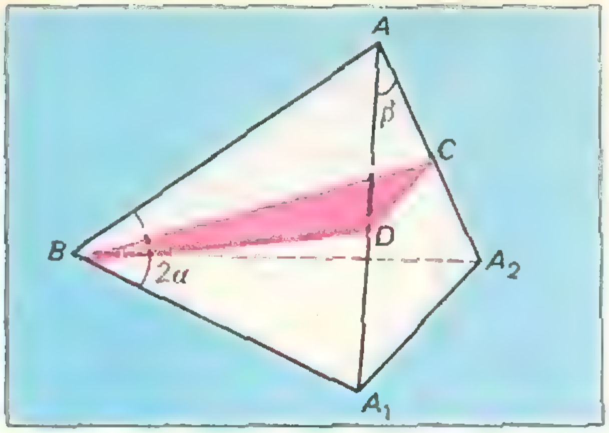


Рис. 9.

моугольных треульников SCD и OCD найдем $SD = \frac{l^2}{r}$, из $\triangle CDB$ — $DB = l\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$. С другой стороны, из $\triangle SDB$ находим

$$SD = DB \cdot \mathrm{tg}\,\varphi = DB \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}},$$

где φ — угол SBD, то есть

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{OD}{DB} = \frac{r}{l\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}.$$

Синус половины искомого угла равен отношению r/l, которое легко определяется из получившегося уравнения:

$$\frac{l^2}{r} = l\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n} \frac{2\frac{r}{l\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}}{1 - \frac{r^2}{l^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Ответ: $2 \arcsin \dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + 2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}}}$.

Задача 7. *На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?*

Пусть A — некоторая точка на луче, B — точка падения луча на зеркало, A_1 — точка, симметричная A относительно данного зеркала, а A_2 — точка, симметричная A относительно повернутого зеркала, D и C — проекции точки A на эти зеркала (рис. 9). Тогда BA_1 и BA_2 суть продолжения отраженных лучей и, следовательно, искомый угол равен $\angle A_1BA_2$.

В тетраэдре AA_1A_2B (см. рис. 9) D и C — середины ребер AA_1 и AA_2 соответственно; плоскость BDC (плоскость повернутого зеркала) перпендикулярна ребру AA_2, $AB = A_1B = A_2B$, $\angle ABA_1 = 2\alpha$, $\angle A_1AA_2 = \beta$. Отсюда легко находим:

$A_1A_2 = 2DC = 2AD \sin \beta = 2AB \sin\alpha \sin\beta$.

Теперь из $\triangle A_1BA_2$ находим нужный угол.

Ответ: $2 \arcsin (\sin\alpha \sin\beta)$.

Переходя к самостоятельному решению задач, список которых приводится в конце этой заметки, просмотрите внимательно еще раз решения задач 1—7. На первый взгляд кажется, что во всех этих задачах необходим весьма сложный чертеж. Однако мы сумели обойтись простыми, в некоторых случаях даже чисто планиметрическими чертежами. Чтобы проиллюстрировать достаточно трудную стереометрическую задачу простым чертежом, необходимо обладать хорошо развитым пространственным воображением. Достигается это практикой и только практикой.

Упражнения

1 (МГУ, физ. фак., 1963 г.). В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности и остальных четырех шаров. Определить объем конуса, если радиус каждого шара равен R.

2 (МГУ, хим. фак., 1968 г.). Три шара радиуса r лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определить высоту призмы.

3 (МФТИ, 1966 г.). В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна сто-

роне основания. Внутри пирамиды расположены два шара: шар радиуса r касается всех боковых граней; шар радиуса $2r$ касается основания и двух смежных боковых граней; оба шара касаются друг друга внешним образом. Найти апофему этой пирамиды.

4 (МФТИ, 1973 г.). Два равных шара касаются друг друга и граней двугранного угла 2α. Пусть A — точка касания одного шара с одной гранью угла, а B — точка касания другого шара с другой гранью угла. В каком отношении отрезок AB делится сферами?

5 (МГУ, механико-математический факультет, 1968 г.). Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром a. Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается ребер SB и SD в их серединах. Найти объем пирамиды $OSCD$.

6 (МГУ, химический факультет, 1971 г.). Правильный треугольник со стороной a лежит в плоскости P. Средними линиями он разделен на четыре треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, построены, как на основаниях, три правильные треугольные пирамиды высотой a. (Все три — по одну сторону от плоскости P). Найти радиус шара, лежащего между пирамидами и касающегося как плоскости P, так и всех трех пирамид.

7. (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1972 г.). Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

8. Оси трех равных, попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найти радиус наибольшей цилиндрической поверхности, которая может пройти между данными цилиндрами, если радиусы данных равны r.

Представления числа 1974

1. $(1+9+7+4)\times[(19+74)-(1+9-7-4)]=1974.$

2. $1!\,[9^3+7^3+(4!)^2]+(1+9)^2\cdot(7-4)+(1+9+7-4)\cdot[1974^0+(\sqrt{1}+\sqrt{9}+7^0-4)]=1974.$

3. $(1+9)^3+(7+4)^3-(1+9+7^3+4)=1974.$

4. $(1\cdot 9+7\cdot 4)^2+1\cdot 9\times 7\cdot 4+1^0\cdot 9^0\cdot 7^3\cdot 4^0+(1+9)\cdot 7^0\cdot 4^0=1974.$

5. $(1+9\cdot 7\cdot 4)\times(1+9-7+4)+(1^0+9\cdot 7+4^0)\times(1-9+7+4)+\sqrt[3]{(1+9\cdot 7)}\cdot\sqrt{4}=1974.$

6. $[(1+9+7+4)^2+(1+9+\sqrt{7}+4)\times(1+9-\sqrt{7}+4)]\cdot 1^0\times\sqrt{9}\cdot 7^0\cdot 4^0+(1^0+9^2+7^0+4^0)=1974.$

7. $(1\cdot 9+7)^2\cdot 4+(1+9)^3-7^2-4^0=1974.$

8. $(1+9^2+7\cdot 4)\cdot 1!\times\sqrt{9}\cdot(7-4)!-\sqrt{1}\cdot\sqrt{9}\times 7^0\cdot\sqrt{4}=1974.$

А. Ф. Гулиев

Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

Наш завод — втуз является одним из самых молодых институтов Москвы.

Всего восемь лет назад — в 1966 году первым его выпускникам была присвоена квалификация инженера-механика.

Втуз имеет три факультета: автомобильный, механико-технологический и вечерний.

Специалисты, окончившие автомобильный или механико-технологический факультеты, работают в областях конструирования, расчета и исследования автомобилей, двигателей и кузовов, технологии машиностроения, инструментального производства, ремонта и модернизации металлорежущего оборудования, электрофизических и электрохимических методов обработки металлов, проектирования изготовления и ремонта технологической оснастки и оборудования механических и сборочных цехов, технологии литейного производства, обработки металлов давлением, металловедения, оборудования и технологии термической обработки. На вечернем факультете, кроме перечисленных, ведется также подготовка по специальности «экономика и организация машиностроительной промышленности».

Главной особенностью подготовки специалистов на автомобильном и механико-технологическом факультетах является органическое сочетание теоретического и производственного обучения. Студентами этих факультетов зачисляются в случае сдачи вступительных экзаменов работники ЗИЛ, АЗЛК, 1 ГПЗ и их филиалов, а также выпускники средних школ, направленные на обучение указанными заводами.

Система обучения предусматривает чередование теоретического обучения («учебная неделя») с работой на производстве («рабочая неделя»).

На «учебной неделе» студенты учатся, как и в других институтах, а на «рабочей неделе» работают на одном из базовых заводов, выполняя производственную программу. На «рабочей неделе» теоретические занятия проводятся четыре раза в неделю по четыре часа утром или вечером в зависимости от смены на заводе.

В течение всего периода обучения (6 лет) студенты ежемесячно получают половину месячной зарплаты и половину стипендии.

Стипендию, повышенную на 15% по сравнению с обычной, получают все успевающие студенты завода-втуза.

Студенты первых трех курсов работают рабочими, а на четвертом курсе их переводят на инженерно-технические должности.

Инженерам — выпускникам завода-втуза, хорошо знающим производство, где они работали шесть лет, значительно легче сразу же войти в ритм работы завода и активно участвовать в решении поставленных перед ними задач, чем выпускникам обычных дневных вузов.

В институте ведется большая работа по внедрению современных методов обучения и контроля знаний студентов. На кафедрах математики, физики, графики, автоматики процесс обучения ведется с широким использованием таких обучающих комплексов и электронной техники как «Огонек», «КИСИ», «Наири» и т. д.

В течение последних двух лет разрабатывается программа и проводится эксперимент, позволяющий организовать приемные экзамены в наш институт с широким использованием электронно-счетной машины «Минск-32». Уже в будущем году машина не только составит разнообразные варианты билетов для абитуриентов, но и поможет оценить степень их подготовленности.

Ниже приведены типичные варианты, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике и задачи, предлагавшиеся на экзамене по физике в 1974 году.

Математика

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит ромб, один из углов которого равен α. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания. Через середины двух смежных сторон основания и вершину пирамиды проведена плоскость. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, равный β. Площадь сечения, образованного этой плоскостью, равна S. Найти сторону ромба.

2. Найти все решения уравнения

$$(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x.$$

3. Решить уравнение

$$5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x + \log_5 2}.$$

Вариант 2

1. Треугольник ABC вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, проходящей вне его через вершину A и одинаково наклоненной к сторонам AB и AC. Найти объем тела вращения, если $AB = a$, $AC = b$ и $\measuredangle BAC = \alpha$.

2. Решить уравнение

$$2\sin z - \cos z = \frac{2}{5}.$$

3. Решить уравнение:

$$\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0.$$

Вариант 3

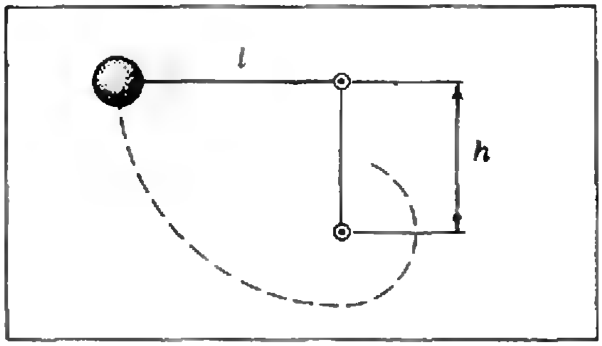
1. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

2. Решить уравнение

$$3(1 - \sin t) + \sin^4 t = 1 + \cos^4 t.$$

3. Решить уравнение

$$x^{\lg^4 x - 5\lg x} = 0{,}0001.$$



Физика

Билет 1

Через двояковыпуклую тонкую линзу проходит луч и пересекает фокальную плоскость на расстоянии 5 *мм* от главного фокуса. Фокусное расстояние линзы $F = 1000$ *мм*. Найти угол между падающим лучом и главной оптической осью линзы.

Билет 2

Математический маятник, длина которого $l = 1000$ *мм*, отклонен до горизонтального положения и затем отпущен. Под горизонтальной осью, вокруг которой начинает двигаться маятник, параллельно ей на расстоянии $h = 700$ *мм* находится тонкий стержень (см. рисунок), вокруг которого происходит дальнейшее вращение маятника. Найти скорость грузика в верхней точке траектории после того, как нить коснется стержня.

Билет 3

К источнику с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r подключена плитка с двумя нагревательными элементами сопротивления R каждый ($r \ll R$). На плитке подогревают чайник с водой. Параллельно или последовательно нужно соединить сопротивления R, чтобы вода в чайнике закипела скорее?

Билет 4

Электрон, пролетая между обкладками конденсатора, длина которых $l = 300$ *мм*, отклоняется на $d = 8$ *мм* от первоначального направления, параллельного обкладкам конденсатора. Определить начальную скорость v электрона, если напряженность электрического поля между обкладками конденсатора $E = 1$ *кв/м*. Считать поле внутри конденсатора всюду однородным.

Л. Н. Воронин, В. П. Ионов,
И. Б. Лившиц, В. А. Ляховский

VIII Всесоюзная олимпиада школьников

Л. Г. Лиманов,
М. Л. Смолянский

Олимпиада по математике

С 11 по 17 апреля 1974 года в столице Армянской республики Ереване проходил заключительный этап VIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике.

Взяв старт в декабре 1973 года, олимпиада успешно пришла к своему финишу. Много работы пришлось проделать школьникам за это время. Они участвовали в соревнованиях в школах, районах, областях или республиках. И вот школьники, с успехом прошедшие три этапа, снова сели за парты, чтобы принять участие в четвертом, наиболее ответственном этапе Всесоюзной олимпиады.

Кроме победителей областных и республиканских олимпиад к участию в заключительном туре были допущены также призеры VII Всесоюзной олимпиады. Всего в заключительном туре приняло участие: по 8 классам — 169 человек, по 9 классам — 212 человек и по 10 классам — 220 человек.

11 апреля в здании Ереванского университета состоялось торжественное открытие заключительного тура VIII Всесоюзной олимпиады. С приветствием к школьникам обратились министр просвещения Армении С. Т. Ахумян, председатель жюри олимпиады член-корреспондент АН СССР С. Мергелян и другие. Было также зачитано приветствие министра просвещения СССР М. А. Прокофьева:

«Дорогие ребята! Сегодня в городах Донецке, Горьком и Ереване встречаются лучшие представители областей, союзных и автономных республик нашей страны — юные физики, химики и математики, проявившие интерес к науке, умение упорно трудиться, оригинально мыслить и самостоятельно работать с книгой.

Эти качества помогут вам справиться с поставленными вопросами. Известно, что выигрывают сильнейшие. Но ваше участие в этой олимпиаде позволяет надеяться, что она обогатит вас и приведет к осуществлению той цели, которую вы ставите перед собой.

Желаю вам больших успехов в овладении знаниями! Пусть никогда не ослабевает ваша увлеченность наукой, творческое отношение к делу!»

12 и 14 апреля состоялись I и II туры заключительного этапа олимпиады. Всего школьникам каждого класса было предложено по 7 задач. На решение задач каждого тура отводилось по 4 часа.

В этом году наряду с типичными «олимпиадными» задачами, одинаково доступными школьникам 8, 9 и 10 классов, для решения которых требуется только остроумие, умение логически рассуждать, давались также задачи, при решении которых нужно было преодолеть некоторые технические трудности.

<table>
<tr><td rowspan="2">8 класс</td><td>№№ задач</td><td>1а</td><td>1б</td><td>1в</td><td>2</td><td>3а</td><td>3б</td><td>4</td><td colspan="2">5</td><td>6а</td><td>6б</td><td>7</td></tr>
<tr><td>число решивших</td><td>96</td><td>11</td><td>7</td><td>32</td><td>3</td><td>1</td><td>23</td><td colspan="2">70</td><td>45</td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9 класс</td><td>№№ задач</td><td colspan="3">1</td><td>2</td><td colspan="2">3</td><td>4</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>число решивших</td><td colspan="3">49</td><td>41</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td colspan="2">92</td><td colspan="2">23</td><td>24</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10 класс</td><td>№№ задач</td><td colspan="3">1</td><td>2</td><td colspan="2">3</td><td>4</td><td>5а</td><td>5б</td><td colspan="2">6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>число решивших</td><td colspan="3">40</td><td>135</td><td colspan="2">35</td><td>2</td><td>92</td><td>46</td><td colspan="2">7</td><td>38</td></tr>
</table>

В целом участники олимпиады справились с предложенными задачами успешно. «Непосильных» задач не оказалось: каждую задачу решил хотя бы один школьник. Некоторые же школьники решили все предложенные задачи. Статистику решения каждой задачи по классам вы видите в таблице.

Приведем теперь тексты предлагавшихся задач и решения некоторых из них*).

8 класс

Первый день

1. На карточках написаны числа, каждое из которых равно +1 или —1. Разрешается, указав три карточки, спросить: «Чему равно произведение чисел на этих карточках?» (Сами числа нам не сообщают.) Какое наименьшее число таких вопросов надо задать, чтобы узнать произведение чисел на всех карточках, если число карточек равно: а) 30; б) 31; в) 32 ?

В каждом случае докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.

2. Среди чисел вида $36^k - 5^l$, где k и l — натуральные числа, найдите наименьшее по абсолютной величине. Докажите, что найденное число действительно наименьшее.

3. а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длины больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1?.

Второй день

4. Найдите все натуральные числа n и k такие, что n^n имеет k цифр, а k^k имеет n цифр.

5. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E так, что $CD = CE$. Продолжения перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямую AE, пересекают гипотенузу AB соответственно в точках K и L. Докажите, что $KL = LB$.

6. На шахматной доске 8×8 двое играют в игру «кошки — мышки». У первого одна фишка — мышка, у второго несколько фишек — кошек. Все фишки ходят одинаково: вправо, влево, вверх или вниз на одну клетку. Если мышка оказалась на краю доски, то очередным ходом она спрыгивает с доски; если кошка и мышка попадают на одну клетку, то кошка съедает мышку.

Играющие ходят по очереди, причем второй передвигает своим ходом всех своих кошек сразу (разных кошек можно при этом сдвигать в разных направлениях). Начинает мышка. Она старается спрыгнуть с доски, а кошки стараются до этого ее съесть.

а) Пусть кошек всего две. Мышка уже поставлена на какую-то клетку не на краю. Можно ли так поставить кошек на краю доски, чтобы они сумели съесть мышку?

б) Пусть кошек три, но зато мышка имеет лишний ход: в первый раз она делает два хода подряд. Докажите, что мышка сможет убежать от кошек, каково бы ни было начальное расположение фишек.

7. Докажите, что числа 1, 2, 3, . . ., 32 можно расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равня-

---

*) Мы даем полные тексты всех задач олимпиады. Часть из них была уже опубликована в «Задачнике «Кванта», см. «Квант», 1974, №№ 7, 8.

лась ни одному из чисел, поставленных между ними.

9 класс

Первый день

1. Найдите наименьшее число вида $|36^k - 5^l|$, где k и l — натуральные числа.

2. Даны две окружности радиусов R и r, касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB.

3. По окружности написано 50 чисел, каждое из которых равно $+1$ или -1. Требуется узнать произведение всех этих чисел. За один вопрос можно узнать произведение трех стоящих подряд чисел. Какое наименьшее число вопросов необходимо задать?

4. На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots n$ выполнялось следующее условие: сумма первых векторов имеет длину не более 2.

Второй день

5. Найдите все трехзначные числа A, обладающие следующим свойством: среднее арифметическое всех чисел, получающихся из числа A различными перестановками его цифр, равно A.

6. Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить никакой треугольник площади 1. Докажите, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

7. Можно ли 1, 2, 3, ..., 100 расставить в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

10 класс

Первый день

1. При каких действительных a, b, c равенство

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$$

верно для всех действительных x, y, z?

2. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ — прямой.

3. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

4. На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 2.

Второй день

5. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ задана функция f. Известно, что эта функция неотрицательна и $f(1) = 1$. Кроме того, для любых двух чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2).$$

а) Докажите, что, какова бы ни была функция f, удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех x будет выполнено неравенство $f(x) \leqslant 2x$.

б) Верно ли, что для всех x

$$f(x) \leqslant 1{,}9x?$$

6. Дан треугольник ABC площади 1. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольников $A_1B_1C_1$ и KLM, если точки K, L и M лежат соответственно на отрезках AB_1, CA_1 и BC_1?

7. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, ..., 100 в таком порядке, чтобы ни для каких чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

Решения

8 класс, задача 1. В случае а) нужно задать 10 вопросов, в случае б) — 11, а в случае в) — 12.

Покажем сначала, что в каждом из случаев можно обойтись указанным числом вопросов.

а) Разложим наши тридцать карточек на десять стопок по три карточки в каждой. Задав десять вопросов, выясним произведения чисел в каждой из стопок. Перемножив ответы, получим произведение чисел на всех тридцати карточках.

б) Разложим карточки на восемь стопок по три карточки и составим еще одну стопку из оставшихся семи карточек. Задав восемь вопросов, узнаем произведение чисел в первых восьми стопках. Произведение же чисел на оставшихся семи карточках можно узнать, задав три вопроса так, как это изображено на рисунке 1. Итого — одиннадцать вопросов.

в) Разложим карточки в девять стопок по три карточки и одну стопку из пяти карточек. Чтобы за три вопроса узнать произведение чисел, стоящих на пяти карточках, нужно поступить так, как показано на рисунке 2.

Теперь нужно доказать, и это наиболее трудная часть задачи, что в случае а) нельзя

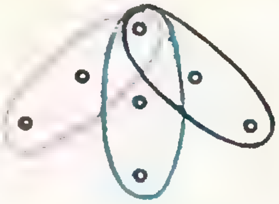


Рис. 1.

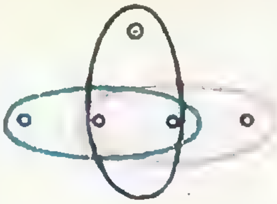


Рис. 2.

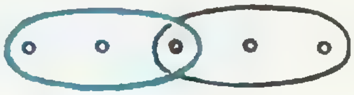


Рис. 3.

обойтись девятью вопросами, в случае б) — десятью, а в случае в) — одиннадцатью.

а) Если задать меньше десяти вопросов (например, девять), то наверняка найдется карточка, про которую мы не спросили ни разу. Поменяв знак написанного на ней числа, мы не изменим полученных ответов. Однако знак произведения при этом изменится. Значит, по полученным ответам произведение восстановить нельзя.

Случай б) аналогичен случаю а).

в) Соображений, приведенных выше, здесь уже недостаточно, поскольку можно задать одиннадцать вопросов так, чтобы каждая карточка вошла хотя бы в один вопрос. Однако сделать это можно единственным способом: про одну из карточек спросить два раза, а про каждую из оставшихся — ровно один. Два вопроса, в которые вошла одна общая карточка, показаны на рисунке 3. На нем же показаны замены знаков, не меняющие ни одного ответа, но меняющие знак всего произведения.

8 класс, задача 4. Докажем, что $n = k$.

Предположим, что $n > k$. Тогда

$$n^n > k^n > k^k;$$

но число n^n имеет k цифр, а потому должно быть меньше числа k^k, имеющего n цифр. Аналогично не может быть $n < k$, и поэтому $n = k$. Остается выяснить, когда у числа n^n будет n цифр. Заметим, что n не может быть больше десяти: если $n > 10$, то $n^n > 10^n$, а 10^n имеет $n + 1$ цифру; если же $n < 10$, то $n^n < 10^n$ и поэтому у n^n не больше чем n цифр. Убедимся в том, что подходят значения $n = 1$, $n = 8$ и $n = 9$.

$$9^9 > 8^4 \cdot 10^4 \cdot 9 > 6^2 \cdot 10^6 \cdot 9 >$$
$$> 3 \cdot 10^7 \cdot 9 = 27 \cdot 10^7 = 270\,000\,000.$$

Поэтому у 9^9 девять цифр.

$$8^8 > 6^4 \cdot 10^4 = 36^2 \cdot 10^4 >$$
$$> 108 \cdot 10^5 > 10^7.$$

Поэтому у числа 8^8 восемь цифр.

$$7^7 < 5^3 \cdot 7 \cdot 10^3 = 875 \cdot 10^3 < 10^6;$$
$$6^6 < 4^3 \cdot 10^3 = 64 \cdot 10^3 < 10^5;$$
$$5^5 = 3125;\ 4^4 = 256;\ 3^3 = 27; 2^2 = 4;\ 1^1 = 1.$$

8 класс, задача 5. Проведем через точку B прямую, параллельную CL (рис. 4). Обозначим через M точку пересечения этой прямой с продолжением катета AC. Прямоугольные треугольники ACE и BCM равны, поскольку $AC = CB$ и $\angle CAE = \angle CBM$. Следовательно, $CM = CE = CD$. Из равенства $CM = CD$ и параллельности прямых DK, CL и BM следует, что $KL = LB$.

8 класс, задача 6.

а) Проведем через клетку, на которой стоит мышка, диагональ и поставим кошек на концы этой диагонали. После хода мышки нужно пойти кошками так, чтобы все три фишки снова оказались на одной диагонали, причем выбрать такие ходы кошками, чтобы расстояние (по диагонали) между ними уменьшилось на единицу. Убедитесь самостоятельно, что такой ход у кошек всегда найдется, и докажите, что описанная стратегия позволит кошкам «съесть» мышку.

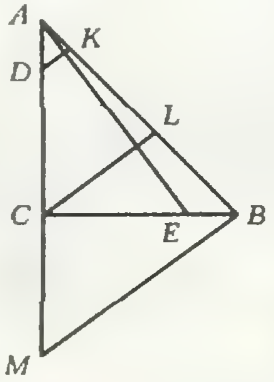


Рис. 4.

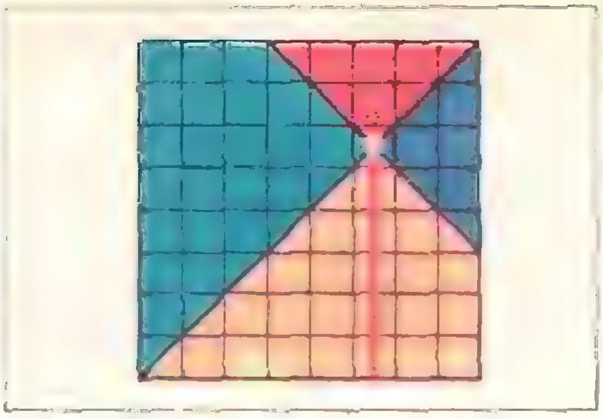


Рис. 5.

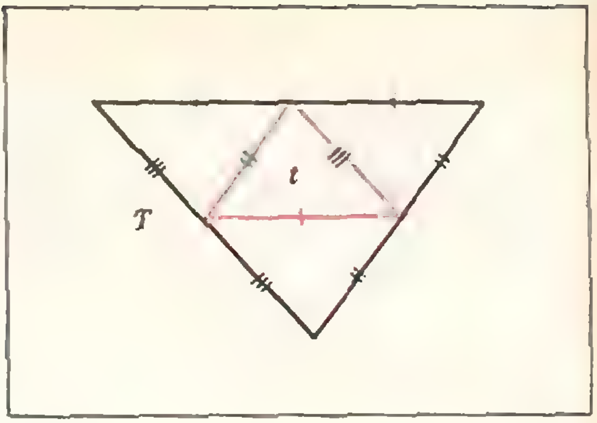


Рис. 6.

б) Проведем через клетку, на которой стоит мышка, обе диагонали. Эти диагонали разобьют доску на четыре сектора (рис. 5). Поскольку кошек три, внутри одного из этих четырех секторов кошек нет. Проведем (горизонтальный или вертикальный) отрезок, соединяющий мышку с краем доски внутри этого сектора (красный отрезок на рисунке 5). Докажите, что если мышка отправится по этому отрезку прямо к краю доски, то она убежит от кошек.

9 класс, задача 5.

$$A = 10^2 a + 10 b + c,$$

где a, b и c — цифры числа A. Нам нужно найти такие A, что
$3A = (10^2 + 10 + 1)(a + b + c)$.
Отсюда

$$37(a + b + c) = 10^2 a + 10b + c.$$

Следовательно,

$$63a = 27b + 36c,$$

или

$$7a = 3b + 4c.$$

Предположим, что $b \geqslant c$. Если $7a = 3b + 4c$, то $7(a - c) = 3(b - c)$. Отсюда

$$b - c = a - c = 0$$

или

$$b - c = 7,\ a - c = 3.$$

Если же $b < c$, то $7(a - b) = 4(c - b)$, откуда

$$c - b = 7, \quad a - b = 4.$$

(Напоминаем, что a, b и c — цифры). Окончательно получаем следующие решения: числа A, у которых все цифры одинаковы (таких чисел девять); числа 370, 481, 592 и числа 407, 518, 629 — всего пятнадцать чисел.

9 класс, задача 6. Среди треугольников с вершинами в вершинах данного многоугольника выберем треугольник t *максимальной* площади (поскольку таких треугольников конечное число, то треугольник t найти можно) и построим его.

Проведем через вершины треугольника t прямые, параллельные противолежащим сторонам (рис. 6). Получим треугольник T, площадь которого в четыре раза больше площади треугольника t. По условию задачи площадь треугольника T меньше четырех. Докажем теперь, что треугольник T содержит данный многоугольник. Действительно, внутри полуплоскостей *I*, *II* и *III* (рис. 7) не может быть вершин нашего многоугольника — иначе нашелся бы треугольник с площадью, большей площади треугольника t. Отсюда и из выпуклости данного многоугольника следует, что он лежит в треугольнике T.

10 класс, задача 1. Подставим в данное равенство последовательно $x = 1$, $y = z = 0$, $x = y = z = 1$ и $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. Получим, что

$$|a| + |b| + |c| = 1, \qquad (1)$$

$$|a + b + c| = 1, \qquad (2)$$

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (2) видно, что числа a, b и c либо все неотрицательны, либо все неположительны. Предположим, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Из (3) тогда следует, что $a - c = 1$. Из этого равенства и из (1) получаем, что $a = 1$, $b = c = 0$. Поскольку a, b и c входят в равенства (1), (2) и (3) симметрично, получаем окончательно следующий ответ:

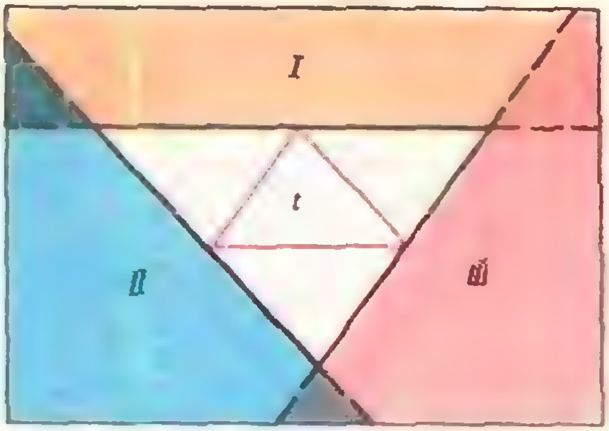


Рис. 7.

Восьмиклассники, награжденные дипломами I степени: А. Гончаров, Д. Литвиненко, О. Окунев, Б. Соломяк, С. Финашин, Т. Хованова

$a = \pm 1$, $b = c = 0$; $b = \pm 1$, $a = c = 0$; $c = \pm 1$, $a = b = 0$.

Дни олимпиады были чрезвычайно насыщенными. Школьники не только соревновались, но и слушали лекции ведущих ученых, участвовали в различных встречах и беседах, ездили на интересные экскурсии по Еревану и его окрестностям.

Редакция журнала «Квант» провела несколько, ставших уже традиционными, встреч со школьниками. Практически все «олимпийцы» являются активными читателями нашего журнала. На этих встречах, проходивших живо и интересно, школьники высказали пожелания, которые редакция постарается учесть.

К сожалению, приходится отметить, что проведение олимпиады было недостаточно четким. Участие местных математиков в работе олимпиады было незначительным. Не было налажено транспортное обслуживание участников олимпиады и членов жюри. Недостаточно хорошими были и бытовые условия участников олимпиады.

Закрытие олимпиады состоялось 16 апреля, где победителям вручались дипломы и специальные призы, учрежденные редакцией журнала «Квант», а также различными организациями Армении.

Дипломы I степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Ю. Буров* (Москва, с. ш. № 2), *А. Гончаров* (Никополь Днепропетровской обл., с. ш. № 13), *Д. Литвиненко* (Севастополь, с. ш. № 1), *О. Окунев* (Казань, с. ш. № 122), *Б. Соломяк* (Ленинград, школа-интернат № 45), *С. Финашин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Т. Хованова* (Москва, с. ш. № 444);

по 10 классам — *И. Ананьевский* (Ленинград, школа-интернат № 45), *И. Сивицкий* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Д. Тюкавкин* (Иркутск, с. ш. № 11), *Н. Чернов* (Кривой Рог, с. ш. № 95).

По 9 классам дипломы I степени никому присуждены не были.

Дипломы II степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Е. Глейзер* (Львов, с. ш. № 14), *В. Гусейнов*

Р. Александрян член жюри олимпиады, вручает диплом I степени Ю. Бурову

Зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский вручает премию журнала абсолютному победителю олимпиады Д. Тюкавкину

(Нахичевань, с. ш. № 3), *А. Дегтярев* (Камышин, с. ш. № 8), *А. Кленцын* (Ульяновск, с. ш. № 25), *И. Кормильченко* (Орджоникидзе, школа-интернат № 2), *С. Лукьяненко* (Москва, школа-интернат № 18), *А. Малышев* (Красноярский край, Курганский р-н, с. ш. № 1), *А. Мельник* (Новосибирск, с. ш. № 127), *И. Панин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Ю. Пасс* (Ленинград, с. ш. № 121), *В. Федоров* (Москва, школа-интернат № 18), *С. Хазанов* (Куйбышев, с. ш. № 41);

по 9 классам — *В. Гейзель* (Новороссийск, с. ш. № 40), *К. Гробдрук* (Ворошиловград, с. ш. № 26), *А. Карабеков* (Ереван, школа-интернат № 1), *А. Корнюшин* (Москва, школа-интернат № 18), *А. Музыкантов* (Новосибирск, с. ш. № 130), *А. Резников* (Киев, с. ш. № 145), *Б. Розенштейн* (Каменец-Подольский, с. ш. № 8), *К. Рыбасов* (Киев, школа-интернат при КГУ), *Б. Спокойный* (Новокузнецк, с. ш. № 11), *Г. Шмелев* (Ярославль, с. ш. № 20);

по 10 классам — *В. Бойко* (Киев, школа-интернат при КГУ), *А. Браилов* (Москва, с. ш. № 2), *А. Владиславский* (Красногорск Московской обл., с. ш. № 7), *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл., с. ш. № 1), *А. Григорян* (Баку, с. ш. № 211), *Гром-Мазничевский* (Киев, с. ш. № 145), *М. Гусаров* (Ленинград, с. ш. № 30), *Л. Данилов* (Москва, школа-интернат № 18), *В. Козырев* (Ленинград, школа-интернат № 45), *П. Корнилов* (Москва, школа-интернат № 18), *Н. Лукьянец* (Одесса, с. ш. № 116), *В. Перцель* (Москва, школа-интернат № 18), *А. Поносов* (Пермь, с. ш. № 9), *С. Фомин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Е. Шустин* (Ленинград, школа-интернат № 45).

Дипломы III степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *А. Белошапко* (пос. Вышков Новозыбковского района Брянской обл., Вышковская с. ш.), *Е. Белов* (Оренбург, с. ш. № 12), *З. Беркалиев* (Караганда, с. ш. № 1), *Р. Даян* (Ереван, с. ш. № 42), *Д. Иванов* (Калинин, с. ш. № 6), *А. Кашапова* (Уфа, с. ш. № 55), *Д. Кондаков* (Новосибирск, с. ш. № 22), *Е. Ландман* (Ленинград, с. ш. № 531), *В. Леднев* (Ижевск, с. ш. № 30), *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский, с. ш. № 5), *И. Морозов* (Горький, с. ш. № 184), *М. Мухамеджанов* (Ташкент, с. ш. № 110), *С. Тимашин* (Кировабад, с. ш. № 13), *Ю. Щербич* (Могилев, с. ш. № 3), *Б. Яцало* (Морочное Ровенской обл., с. ш. № 1);

по 9 классам — *Е. Байсалов* (Алма-Ата, школа-интернат РФМШ), *И. Бахмутский* (Львов, с. ш. № 52), *С. Белоглазов* (Пермская обл., Усть-

Самый юный победитель олимпиады, лауреат премии «Кванта» Д. Литвиненко

Члены жюри олимпиады

Кишертская с. ш.), *А. Блох* (Харьков, с. ш. № 27), *Д. Ботвич* (Курская обл., с. ш. № 7), *Л. Генкин* (Горький, с. ш. № 40), *О. Ефремов* (Ангарск, с. ш. № 10), *М. Кац* (Москва, школа-интернат № 18), *Ф. Кремзер* (Новосибирск, с. ш. № 165), *А. Осипов* (Москва, с. ш. № 91), *В. Продниекс* (Латвийская ССР, Лиелвардская с. ш.), *Е. Романовский* (Киев, с. ш. № 145), *А. Черебатов* (Омск, с. ш. № 80), *А. Черкун* (Тула, с. ш. № 61);

по 10 классам — *М. Баум* (Москва, школа-интернат № 18), *И. Белоголов* (Канев Черкасской обл., с. ш. № 4), *А. Берлин* (Бобруйск, с. ш. № 3), *А. Буяновский* (Гомель, с. ш. № 28), *В. Данилов* (Петушки Владимирской обл., с. ш. № 3), *В. Дубицкий* (Ленинград, с. ш. № 239), *С. Елисеев* (Москва, с. ш. № 179), *А. Заславский* (Калинин, с. ш. № 20), *В. Карапетян* (Ереван, школа-интернат № 1), *А. Колдоба* (Ворошиловград, с. ш. № 2), *А. Кристаль* (Ленинград, с. ш. № 30), *А. Макаричев* (Львов, с. ш. № 14), *М. Панченко* (Бровары, с. ш. № 5), *В. Паньков* (Минск, с. ш. № 93), *А. Рейтсакас* (Таллин, с. ш. № 19), *Г. Скляр* (Харьков, с. ш. № 27), *И. Старобинец* (Горький, с. ш. № 82), *Н. Щербина* (Днепропетровск, с. ш. № 80).

Похвальные отзывы I степени получили 92 и II степени — 123 участника олимпиады.

Призами журнала «Квант» за абсолютно лучший результат были награждены: ученик 10 класса с. ш. № 11 г. Иркутска *Д. Тюкавкин* и самый юный победитель олимпиады, ученик 8 класса с. ш. № 1 г. Севастополя *Д. Литвиненко*.

Кроме того, годовой подпиской на журнал «Квант» на 1975 год награждены победители олимпиады — учащиеся сельских школ:

1) *А. Белошапко* — 8 кл., п. Вышков Брянской обл.;

2) *А. Криворущенко* — 8 кл., п. Ушаты Витебской обл.;

3) *Б. Яцало* — 8 кл., с. Морочное Ровенской обл.;

4) *Д. Ботвич* — 9 кл., с. Камышино Курской обл.;

5) *В. Печенков* — 9 кл., с. Красный Кут Приморского края.

В заключение нам хочется сказать несколько слов о работе жюри. В работе жюри приняли участие ученые Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Киева, Тбилиси, Свердловска и других городов. В состав жюри входили не только ученые — доктора и кандидаты наук,— но и студенты, бывшие еще совсем недавно школьниками — участниками олимпиад, их победителями. Поэтому жюри в целом довольно «молодое», средний «возраст» членов жюри меньше 30 лет. Во время олимпиады жюри выполняет огромную работу. Начинается эта работа уже задолго до официального открытия олимпиады: ведь более чем из ста задач, подготовленных членами жюри, нужно отобрать двадцать одну наиболее интересную и оригинальную; каждая отобранная задача должна иметь привлекательную формулировку, выражать достаточно интересный математический факт, и если она предлагается для учащихся 8, 9 и 10 классов, то при ее решении дополнительные знания не должны сулить явных преимуществ. Того, чтобы каждая задача была сама по себе хорошей, мало. Важно, чтобы весь комплект задач, подобранных для каждого класса, был разумен.

Большая работа предстоит членам жюри и во время олимпиады. Они должны проверить тысячу работ участников олимпиады не менее двух-трех раз, а спорные работы просматриваются 10—12 членами жюри. Если добавить, что все члены жюри участвуют в разборах задач (как с руководителями команд, так и со школьниками), проводят собеседования и апелляции, читают лекции школьникам, то ясно, что рабочий день у членов жюри заполнен до предела. Не каждому под силу такая работа, — чтобы работать в жюри, нужно быть большим энтузиастом. Мы хотели бы отметить некоторых из таких энтузиастов, работающих в жюри, начиная с I Всесоюзной олимпиады:

кандидат физико-математических наук Н. Б. Васильев,— бессменный заместитель председателя жюри, начиная с I Всесоюзной олимпиады;

кандидат физико-математических наук Д. Б. Фукс и А. А. Егоров— одни из инициаторов проведения Всесоюзных олимпиад.

Постоянными членами жюри являются также: доктор физико-математических наук М. И. Башмаков, кандидат физико-математических наук А. Д. Бендукидзе, кандидат физико-математических наук И. Н. Бернштейн, В. Л. Гутенмахер, Ю. И. Ионин, кандидат физико-математических наук Н. Н. Константинов, Ю. П. Лысов, И. С. Петраков, кандидат физико-математических наук А. П. Савин, кандидат физико-математических наук М. И. Серов, кандидат физико-математических наук В. А. Скворцов.

Еще раз о часах-календаре

Лет 13 назад от учителя математики я узнал о часах-календаре, аналогичных тем, о которых рассказывалось в 12-м номере «Кванта» за 1973 год.

Но, оказывается, совсем не обязательно делать календарь, где указаны поправки каждого месяца. Поправки легко запоминаются по количеству букв каждого слова в следующем предложении, где надо учесть, что числа 7 и 0 равнозначны:

Скажите (7)	январь
мне (3)	февраль
дни (3)	март
месяцы (6)	апрель
и (1)	май
годы (4)	июнь
каждые (6)	июль
из (2)	август
чисел (5)	сентябрь
назвать (7)	октябрь
вам (3)	ноябрь
смогу (5)	декабрь

Следует помнить, что каждый год тоже имеет свою поправку. Например, 1973 год — 0, 1974 — 0, ..., впрочем, найдите закономерность сами. Особое внимание обратите на поправку високосного года.

Для нахождения порядкового номера дня недели также следует к дате прибавить поправку месяца и года. Если полученная сумма не больше 7, то она и будет порядковым номером дня недели. Если больше 7, то необходимо взять остаток от деления ее на 7, который и будет ответом.

В. В. Сластухин

ПР
УЧА
ОЛИМП

Т. С. Петрова,
Л. В. Чернова

Олимпиада по физике

Заключительный тур VIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 10 по 16 апреля в старинном русском городе Горьком, возникшем семь с половиной веков назад у слияния рек Оки и Волги.

На олимпиаду приехали школьники всех республик, в ней приняли участие 579 человек: 234 ученика 10 класса, 191 ученик 9 класса, 151 ученик 8 класса и 3 ученика 7 класса, выполнявшие работу, предложенную ученикам 8 класса. Участники VIII Всесоюзной олимпиады — это победители республиканских и областных олимпиад 1974 года, победители VII Всесоюзной олимпиады, проходившей в 1973 году в Ленинграде; были здесь и победители конкурса, который проводил журнал «Квант» *).

10 апреля во Дворце культуры Автозавода состоялось торжественное открытие олимпиады. Со словами приветствия и добрыми пожеланиями к участникам обратился председатель жюри олимпиады академик А. В. Гапонов-Грехов.

В тот же день представители делегаций союзных республик возложили венки к памятникам В. И. Ленину и А. М. Горькому.

Заключительный этап олимпиады, как и в прежние годы, состоял из двух туров: теоретического и экспериментального.

---

*) Условия конкурса опубликованы в первом номере «Кванта» за 1974 год. Победители этого конкурса допускаются на областные олимпиады.

11 апреля был проведен теоретический тур.

Восьмиклассникам было предложено по 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач.

Вечером того же дня были проведены вечера отдыха, на которых участники олимпиады посмотрели концерты художественной самодеятельности.

12 и 13 апреля участники олимпиады отдыхали. Для них были организованы экскурсии на предприятия и по историческим местам города Горького.

А для членов жюри эти дни были, пожалуй, самыми напряженными. Им нужно было проверить 579 работ.

К участию в экспериментальном туре были допущены 157 школьников.

14 апреля в 10 часов утра в лабораториях Горьковского университета состоялся экспериментальный тур.

На выполнение работ отводилось 4 часа.

Ребята, не прошедшие на экспериментальный тур, могли в это время прослушать лекцию, посмотреть научно-популярные кинофильмы или принять участие в физической викторине.

Ниже приводятся условия задач теоретического тура, решения некоторых задач и задания экспериментального тура*).

Теоретический тур

8 класс

1. По сторонам прямого угла скользит жесткая палочка длины $2l$, в центре которой закреплена бусинка массы m. Скорость точки B постоянна и равна v (рис. 1).

Определить, с какой силой действует бусинка на палочку в тот момент, когда $\alpha = 45°$.

2. В неотапливаемом помещении работает холодильник с терморегулятором. В момент подключения холодильника к сети температура на улице, в помещении и в холодильнике была одинакова. Считая температуру на улице постоянной, изобразите приближенно на графиках, как менялась температура в помещении после подключения холодильника. Рассмотрите три случая: а) холодильник пустой; б) заполнен продуктами; в) дверца холодильника открыта. Все три графика зависимости температуры от времени начертите на одном рисунке.

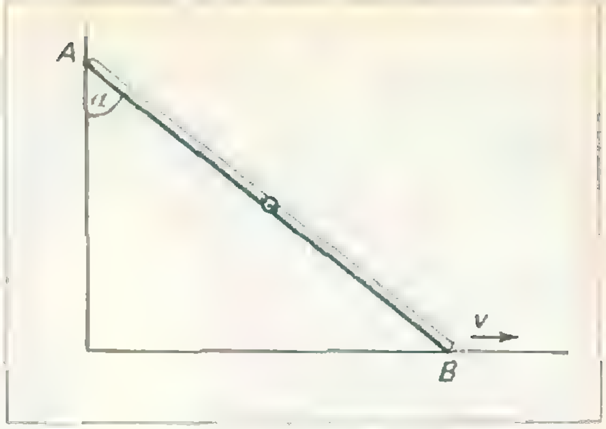


Рис. 1.

3. Канал проходит по мосту над шоссе. Изменяется ли давление на мост, если по каналу движется один раз пустая, а другой — нагруженная баржа?

4. Трубка, в которой находится пружинка с прикрепленным к ней шариком, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки. Свободный конец пружинки прикреплен к трубке (рис. 2, *а*). Нарисуйте примерный график зависимости смещения шарика вдоль трубки от угловой скорости при увеличении ее от

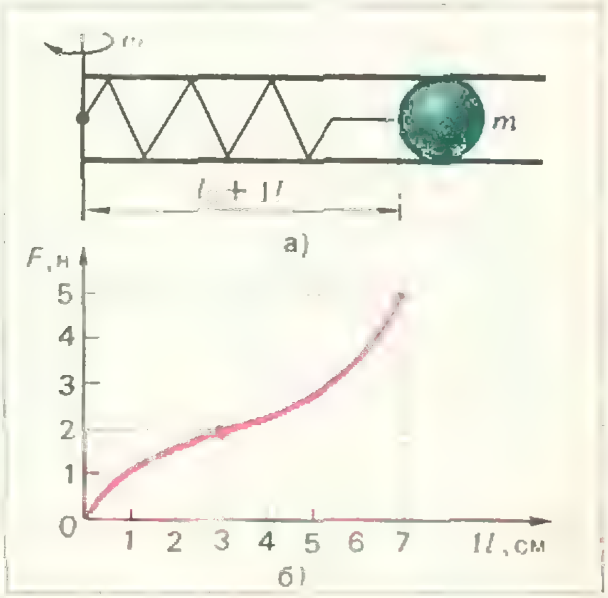


Рис 2.

---

*) Большая часть задач вошла в «Задачник «Кванта» (см. «Квант», 1974, №№ 7, 8).

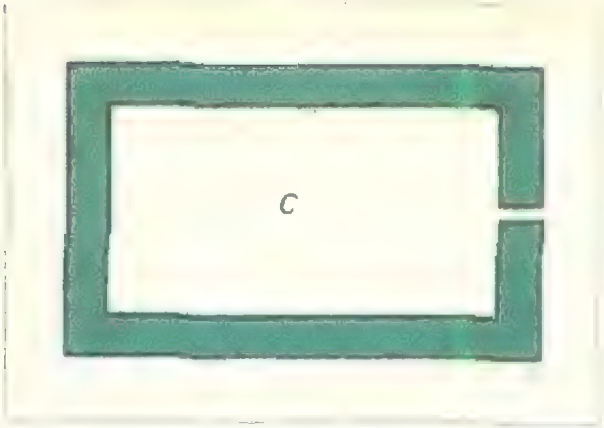


Рис. 3.

нуля до такой величины, когда $F = 5$ *н*. Как изменится эта зависимость при уменьшении угловой скорости? График зависимости силы упругости F от деформации представлен на рисунке 2, *б*. $l_0=2$ *см*.

9 класс

1. Сосуд C сообщается с окружающим пространством через малое отверстие (рис. 3). Температура газа в пространстве T, давление p. Газ настолько разрежен, что молекулы при пролете в сосуд и из сосуда на протяжении размеров отверстия не сталкиваются друг с другом. В сосуде поддерживается температура $4T$.

Каким будет давление в сосуде?

2. См. задачу 2 для 8 кл.

3. См. задачу 4 для 8 кл.

4. Заряженные шарики с одинаковой массой, расположенные на расстоянии l друг от друга, отпустили (без начальной скорости). Через t *с* расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между этими шариками, если их отпустить с начального расстояния $3l$?

5. При исследовании упругих свойств стальной проволоки длиной l установили, что если один конец ее закрепить, а другой повернуть на угол α вокруг оси, то возникает момент упругих сил $M = k\alpha$. После этого из проволоки навили пружину радиуса R с шагом много меньше R. Рассчитать коэффициент упругости пружины (считать, что упругие свойства стали после навивки пружины полностью восстанавливаются).

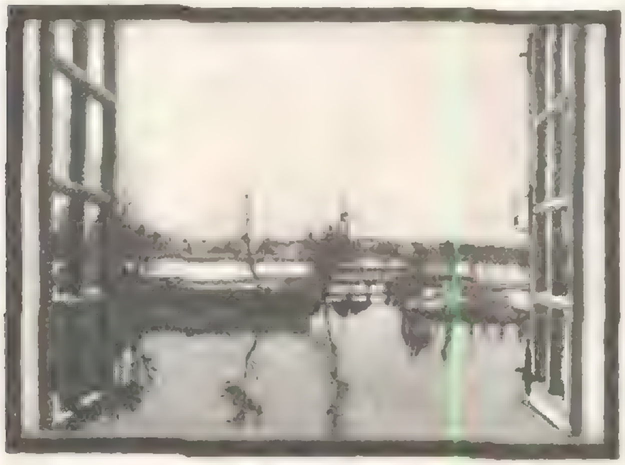


Рис. 4.

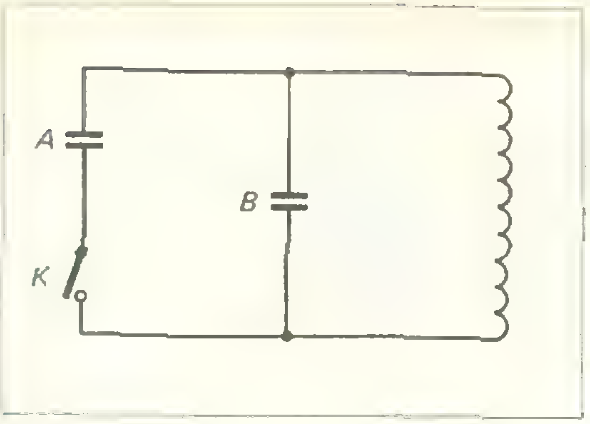


Рис. 5.

10 класс

1. Снимок сделан однолинзовым объективом с фокусным расстоянием $f = 4$ *см*. Фотография (рис. 4) увеличена в $n = 10$ раз. Определите приблизительно расстояния между предметами в натуре, например, расстояние от объектива до окна L_0, расстояние от окна до мостика $L_м$, высоту объектива над подоконником H.

2. Две машины A и B едут рядом по шоссе со скоростью v. Затем A увеличивает свою скорость до $2v$. Относительно наблюдателя, стоящего на шоссе, кинетическая энергия машины выросла на

$$\Delta E_1 = {}^3/_2\, mv^2,$$

а относительно шофера в машине B энергия увеличилась на

$$\Delta E_2 = {}^1/_2\, mv^2.$$

Объясните парадокс: количество сгоревшего топлива для обоих наблюдателей одно и то же, а изменение энергии разное.

Одинакова ли теплота сгорания топлива с точки зрения каждого наблюдателя?

3. Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка с индуктивностью L соединены, как показано на рисунке 5. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов U. Заряд конденсатора B и ток в катушке равны нулю.

Определить максимальное значение тока в катушке после замыкания ключа.

4. Найти ускорение a, с которым падает круглая металлическая пластинка в однородном магнитном поле, параллельном по-

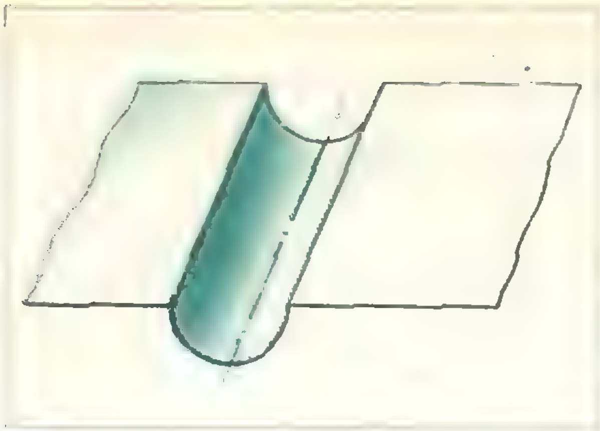


Рис. 6.

верхности Земли. Пластинка падает вертикально вниз и ориентирована своей плоскостью параллельно магнитному полю и перпендикулярно поверхности Земли. Толщина пластинки d много меньше ее радиуса r, масса m, индукция магнитного поля B, ускорение свободного падения g.

5. Из одной точки на дне горизонтального кругового желоба (рис. 6) разлетаются шарики под небольшими углами к образующей желоба с одинаковыми проекциями скорости вдоль этой образующей. Встретятся ли эти шарики?

В этой статье мы приведем решения только двух задач. Решения остальных задач будут опубликованы в «Задачнике «Кванта».

Задача 1 (10 кл)

Изображения предметов, удаленных от окна (а значит, и от объектива), на фотографии достаточно резкие. Следовательно, объектив был наведен на бесконечность и изображение получено в фокальной плоскости объектива.

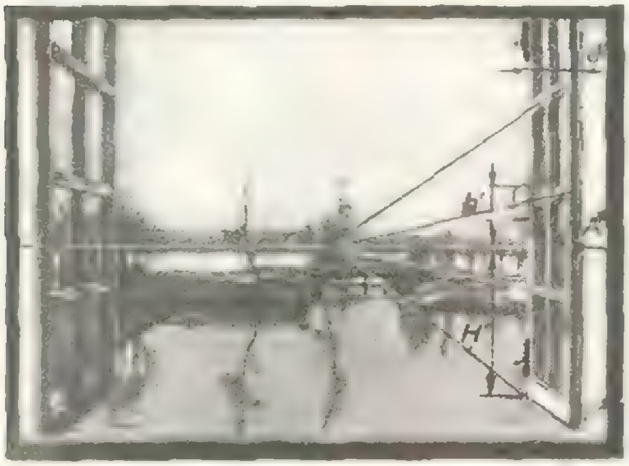


Рис. 7.

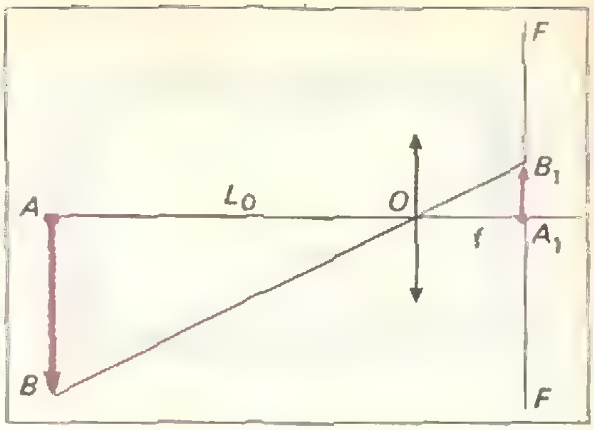


Рис. 8.

Судя по фотографии, главная оптическая ось объектива была горизонтальна. Если бы это было не так, ширина d оконной рамы на фото была бы различна в верхней и нижней частях окна (рис. 7). Определим, на какой высоте над подоконником был установлен объектив *).

Все линии, которые лежат в горизонтальной плоскости, проходящей через главную оптическую ось объектива, на фото должны быть горизонтальными. Продолжим линии горизонтальных переплетов оконной рамы до пересечения. (Поскольку в натуре эти линии параллельны, в плоскости изображения они пересекутся в одной точке.) Проведем через эту точку горизонтальную плоскость. Уровень, на котором эта плоскость пересечет раму окна, и указывает высоту H объектива над подоконником. Чтобы определить численное значение величины H, необходимо на фотографии иметь какой-нибудь «масштабный» размер. Выберем в качестве «мерной единицы» ручку оконной рамы. Будем считать, что в натуре ее размер $h \approx 10$ *см*. На фотографии размер ручки $h' \approx 1$ *см*. На фото высота $H' \approx 4{,}5$ *см* $= 4{,}5\,h'$. Следовательно, в натуре высота объектива над подоконником

$$H = 4{,}5h \approx 45 \text{ см}.$$

Определим теперь расстояние от окна до объектива. Из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 (рис. 8) следует:

$$\frac{AБ}{L_0} = \frac{A_1B_1}{f}.$$

Здесь $AB = H = 45$ *см*, $f = 4$ *см*, $A_1B_1 =$

---

*) Фотография в журнале уменьшена в 2,7 раза по сравнению с той, которая давалась участникам олимпиады. Мы будем приводить размеры по исходной фотографии, так как при измерении величин на уменьшенном снимке погрешность увеличивается.

$= \frac{1}{n} A'B'$ ($n = 10$). На фото $A'B' \approx 5{,}5$ *см*; значит, $A_1B_1 \approx 0{,}55$ *см*.

Таким образом, расстояние от окна до объектива

$$L_0 = \frac{AB \cdot f}{A_1B_1} \approx 3{,}27 \text{ м}.$$

Чтобы определить расстояние от окна до мостика, нужно иметь мерную единицу. (Пользоваться в качестве масштабного размера оконной ручкой уже нельзя. Новый размер надо выбирать в плоскости, «проходящей» через мостик к перпендикулярной главной оптической оси объектива.) Обычно высота перил мостика $r \approx 80$ *см*. На фото высота перил $r' \approx 0{,}3$ *см*.

Следовательно, на изображении $r_1 \approx 0{,}03$ *см*. Пользуясь приведенными выше рассуждениями и аналогичными вычислениями (из подобия треугольников), найдем расстояние от мостика до объектива:

$$L_{\text{м. п}} = \frac{r \cdot f}{r_1} \approx 107 \text{ м}.$$

Вычтем из этой величины расстояние от окна до объектива и найдем расстояние от окна до мостика:

$$L_{\text{м}} \approx 104 \text{ м}.$$

Задача 2 (10 кл)

Рассмотрим событие в двух системах отсчета — неподвижной и подвижной, которую свяжем с автомобилем B. Будем считать, что движение происходит без скольжения и силы трения отсутствуют.

В начальный период ($v_A = v_B = v$) суммарный импульс системы Земля — машины в неподвижной системе отсчета равен

$$P_1 = 2mv$$

(будем для удобства считать, что массы машин одинаковы). В течение этого периода суммарная механическая энергия системы равна

$$E_1 = 2m\frac{v^2}{2} = mv^2.$$

Полная энергия системы складывается из кинетической энергии машин A и B и внутренней энергии топлива:

$$W_1 = E_1 + U_1.$$

Поскольку энергия, «относящаяся» к машине B, с течением времени не изменяется, обозначим ее W_B ($W_B = \text{const}$), а энергию, «относящуюся» к машине A, представим в виде $W_{1A} = E_{1A} + U_{1A}$. Таким образом, на первом этапе движения ($v_A = v_B = v$) энергия системы равна

$$W_1 = W_B + E_{1A} + U_{1A}.$$

Будем считать, что вся энергия, выделившаяся при сгорании топлива, пошла на увеличение скорости автомобиля A.

Так как наша система замкнута, суммарный импульс должен сохраняться. Импульс машины B $P_{1B} = \text{const}$, а импульс машины A изменился на величину $m\,\Delta v_A = mv$ (мы пренебрегаем изменением массы машины в результате сгорания части топлива). Следовательно, на такую же величину изменился импульс Земли, то есть Земля приобрела скорость, которую можно определить из соотношения $|M\mathbf{v}_3| = |m\mathbf{v}|$:

$$|\mathbf{v}_3| = \frac{m}{M}|\mathbf{v}|.$$

(При этом $\mathbf{v}_3 = -\frac{m}{M}\mathbf{v}$; мы считаем, что колеса вращаются без проскальзывания.)

Механическая энергия системы стала равной

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} + \frac{M\left(\frac{m}{M}v\right)^2}{2}.$$

Увеличение механической энергии произошло за счет изменения внутренней энергии (в результате сгорания топлива). Запишем теперь суммарную энергию системы:

$$W_2 = W_B + E_{2A} + E_3 + (U_{1A} - \Delta U).$$

По закону сохранения энергии $W_2 = W_1$, то есть $E_{2A} - E_{1A} + E_3 - \Delta U = 0$, или

$$\frac{3}{2}mv^2 + \frac{m^2}{2M}v^2 - \Delta U = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta U = \Delta E = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{m^2}{2M}v^2.$$

Рассмотрим теперь событие в подвижной системе, связанной с машиной B. Проведем все изложенные выше рассуждения, сохраняя принятые допущения. Начальный импульс системы

$$\mathbf{P}_1' = -M\mathbf{v}$$

(так как Земля относительно машины B движется со скоростью $-\mathbf{v}$). Механическая энергия в начальный период равна кинетической энергии движения Земли относительно машины B *):

$$E_1' = \frac{Mv^2}{2}.$$

---

*) Будем считать, что движение Земли поступательное.

Суммарную энергию системы в этот период запишем в виде

$$W'_1 = W'_B + E'_{1A} + U'_{1A} + E'_{13}$$

(для аналогии мы записали слагаемое E_{1A}, хотя $E'_{1A} = 0$). Машина A изменила свою скорость в этой системе на величину v. При этом скорость Земли стала v'_3. Из закона сохранения импульса

$$M\mathbf{v}'_3 + m\mathbf{v} = -M\mathbf{v}$$

найдем

$$|\mathbf{v}'_3| = \left(1 + \frac{m}{M}\right)|\mathbf{v}|.$$

Полная энергия системы в этот период равна

$$W'_2 = W'_B + E'_{2A} + (U'_{1A} - \Delta U') + E'_{23}.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$W'_2 - W'_1 = E'_{2A} - E'_{1A} - \\ -\Delta U' + E'_{23} - E'_{13} = 0,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{M}{2}\left[\left(1 + \frac{m}{M}\right)v\right]^2 - \\ -\frac{Mv^2}{2} - \Delta U' = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta U' = \Delta E' = \frac{3m}{2}v^2 + \frac{m^2}{2M}v^2 = \Delta U.$$

Масса сгоревшего топлива в обеих системах одна и та же, изменение внутренней энергии, а следовательно, и количество теплоты, выделившейся при сгорании, тоже одно и то же. Значит, удельная теплота сгорания топлива одна и та же для наблюдателей, находящихся в двух рассмотренных нами системах.

Итак, никакого парадокса нет. Работа, совершаемая за счет энергии, выделяющейся при сгорании топлива, идет на увеличение механической энергии системы в целом. Таким образом, сделанный в условии задачи вывод об изменении энергии неверен.

Ошибка заключается в том, что в условии системы не замкнуты, а вывод сделан на основании закона сохранения энергии в той форме, в какой он применим для замкнутых систем.

Говоря об изменении скорости Земли, мы подходим к решению задачи «математически». Разумеется, изменение импульса Земли пренебрежимо мало. Часть энергии «уносится» в результате нагрева Земли под колесами, вылетающими из-под колес камешками, песком и т. п.

При проверке задач теоретического тура был проведен своеобразный «эксперимент». Прежде чем приступить к проверке, члены жюри по своему усмотрению «расценили» задачи, поставив каждой балл «за трудность». Оценки были расставлены следующим образом:

№№ задач	8 кл.	9 кл.	10 кл
1	8,5	5,5	6,3
2	7,1	4,5	6
3	2,9	7,7	5,6
4	11,1	6,3	7,2
5	—	7	4,8

Это «усредненные» баллы; мнения членов жюри не всегда совпадали.

После того, как все работы были проверены, по результатам проверки, по тому, сколько участников справилось с той или иной задачей, была проведена новая «расценка». И оказалось, что мнения жюри и ребят о трудности задач не совсем совпадают. Новая «таблица» выглядела следующим образом:

№№ задач	8 кл.	9 кл	10 кл.
1	10	4	6
2	8	4	8
3	4	6	5
4	8	8	7
5	—	10	4

(Разумеется, имеет смысл сравнивать не «абсолютные» баллы, а распределение их по задачам внутри каждого класса.) Члены жюри были удивлены тем, что с задачей № 1 для 8 класса и с задачей № 5 для 9 класса не справился ни один участник.

Мы думаем, что тем нашим читателям, которые самостоятельно решали задачи олимпиады, опубликованные в «Задачнике «Кванта», будет интересно сравнить свои заключения об их сложности с мнением жюри и «олимпийцев».

Экспериментальный тур

На экспериментальном туре все участники по классам выполняли одинаковые работы.

8 класс

Колебания грузов на пружине

1. Период колебаний T груза на пружине зависит от массы m груза (рис. 9). Изучите эту зависимость, используя пружину, секундомер и набор грузов с известными массами. По результатам опыта постройте график. Постарайтесь подобрать формулу, описывающую полученную зависимость T от m.

2. При некоторых массах груза легко заметить, что колебания вдоль пружин сопровождаются маятникообразными колебаниями. Изучите это явление и опишите его закономерности.

9 класс

«Черный ящик»

Изучите «черный ящик» (электрический четырехполюсник), о котором известно только то, что он состоит из четырех двухполюсников, соединенных звездой (рис. 10). Для экспериментов можно использовать батарейку, вольтметр и миллиамперметр.

На листке с заданием, который получил каждый экспериментатор, было сделано следующее предупреждение: «Внимание! Не закорачивайте батарейку через миллиамперметр! Прибор Вам этого не простит и лишит Вас всяких шансов на призовое место в олимпиаде!»

10 класс

Линза с заслонкой

Что произойдет с изображением предмета, полученным при помощи собирающей линзы, если закрыть половину линзы непрозрачным экраном?

Ответьте на этот вопрос, а затем проверьте свой ответ экспериментально, получив с помощью линзы изображение стрелки-предмета на белом экране при двух разных увеличениях u: 1) $u > 3$; 2) $u < 1/3$.

Опишите и объясните свои экспериментальные результаты. Для проверки этих объяснений придумайте и осуществите качественные и количественные контрольные опыты, используя по своему усмотрению любые детали установки: линзу, стрелку-предмет, фонарь, белый экран, черную бумагу, линейки, ножницы.

Проведите аналогичные исследования для действительного изображения, наблюдаемого без экрана, и для мнимого изображения. В качестве предмета в этих опытах удобно использовать нить лампочки.

При наблюдениях без экрана между источником света и глазом обязательно помещайте пленку — ослабитель света!

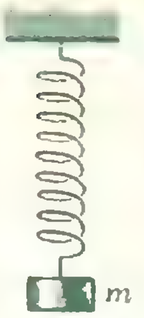


Рис. 9.

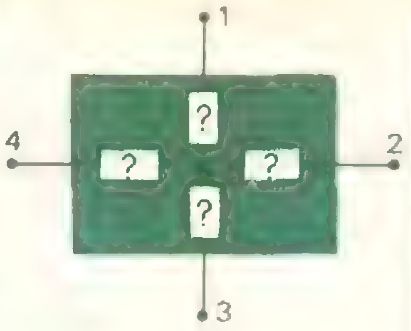


Рис. 10.

При оценке работ экспериментального тура учитывалось умение обращаться с приборами, четкое и последовательное выполнение этапов эксперимента, правильная теоретическая интерпретация полученных результатов, оценка их точности, четкость построения графиков, чертежей, форма и стиль отчета.

15 апреля в 16 часов все участники олимпиады вновь собрались во Дворце культуры Автозавода на торжественное закрытие олимпиады. Победителям были вручены дипломы, грамоты и награды.

Дипломы I степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *С. Костин* (Сумы, с. ш. № 3), *А. Половинкин* (Горький, с. ш. № 1), *Ю. Тетерин* (Ленинград, с. ш. № 239);

по 9 классам — *В. Каплуновский* (Ленинград, школа-интернат № 45), *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл., с. ш. № 1);

по 10 классам*) — *А. Кур-*

---

*) Десятиклассникам, получившим дипломы I, II и III степени, были вручены рекомендации в высшие учебные заведения физико-математического профиля.

чанов (Житомир, с. ш. № 21), *Д. Топтыгин* (Москва, с. ш. № 2), *А. Шень* (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Е. Губанов* (п. Востряково Московской обл., с. ш. № 3), *А. Калинин* (Великие Луки, с. ш. № 3), *В. Тарасов* (Ленинград, школа-интернат № 45); *И. Хамитов* (Ухта Коми АССР, с. ш. № 3), *А. Шведов* (Киев, школа-интернат при КГУ);

по 9 классам — *Л. Авдеев* (Новосибирск, школа-интернат № 165), *Ю. Македонов* (Калинин, с. ш. № 37), *А. Поблагуев* (Винница, с. ш. № 17), *В. Тимофеев* (Москва, с. ш. № 144);

по 10 классам — *С. Бурков* (Москва, с. ш. № 2), *Л. Глизман* (Харьков, с. ш. № 27), *И. Гринштейн* (Одесса, с. ш. № 116), *О. Наний* (Кишинев, с. ш. № 37), *А. Руднев* (Москва, с. ш. № 762).

Ученики 8 класса Е. Губанов и И. Хамитов были награждены также специальными призами Министерства просвещения СССР за успешное выступление в экспериментальном туре, а ученик 9 класса Ю. Македонов — специальным призом Научно-исследовательского радиофизического института за лучшую экспериментальную работу по электричеству.

Дипломы III степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *В. Булатов* (Вологда, с. ш. № 11), *В. Вичирко* (Ленинград, с. ш. № 239), *А. Голубенцев* (Саратов, с. ш. № 19), *В. Князик* (Одесса, с. ш. № 116), *В. Кривцун* (Харьков, с. ш. № 27), *Ю. Маляр* (Казань, с. ш. № 122), *С. Семиляк* (Бар Винницкой обл., с. ш. № 1), *В. Старшенко* (Запорожье, с. ш. № 28), *Н. Ткач* (Червоноград Львовской обл., с. ш. № 7), *А. Шемякин* (Караганда, с. ш. № 88);

по 9 классам — *В. Борю* (Запорожье, с. ш. № 28), *А. Железняк* (Житомир, с. ш. № 24), *И. Золотухин* (Ленинград, школа-интернат № 45), *А. Куцериб* (Ровно, с. ш. № 3), *А. Кязилюнис* (Вильнюс, с. ш. № 31), *Я. Сеглиньш* (Рига, с. ш. № 1). *Д. Усков* (Воронеж, с. ш. № 58), *Л. Цимринг* (Горький, с. ш. № 40);

по 10 классам — *В. Баженов* (Киев, с. ш. № 84), *В. Гаврилюк* (Минск, с. ш. № 5), *А. Гоэр* (Берегово Закарпатской обл., с. ш. № 2), *Г. Гурия* (Кировабад, с. ш. № 29), *В. Дмитриев* (Казань, с. ш. № 50), *Л. Егошин* (Усть-Каменогорск, с. ш. № 35), *А. Иванов* (Жуковский Московской обл., с. ш. № 1), *А. Кузнецов* (Саратов, с. ш. № 13), *С. Масич* (Новосибирск, школа-интернат № 165), *С. Мачерет* (Киев, с. ш. № 145), *А. Рожков* (Усолье-Сибирское Иркутской обл., с. ш. № 5), *В. Сомило* (Ленинград, школа-интернат № 45), *Е. Фалькин* (Новосибирск, школа-интернат № 165), *М. Черников* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82), *С. Черемшанцев* (Ленинград, с. ш. № 239), *В. Шендрик* (Алма-Ата, РФМШ).

Ученик 8 класса В. Вичирко награжден также специальным призом Министерства просвещения СССР за успешное участие в экспериментальном туре, ученик 9 класса А. Кязилюнис и ученик 10 класса Л. Егошин — специальными призами Министерства просвещения СССР за лучшую экспериментальную работу, а ученик 10 класса А. Гоэр — специальным призом Министерства просвещения СССР за высокую культуру проведения эксперимента.

105 участников были награждены похвальными грамотами и призами, учрежденными различными организациями. Вот некоторые из участников, награжденных специальными призами:

Х. Абдуллин (Алма-Ата, с. ш. № 28, 8 кл.) награжден подшивкой журнала «Квант» за 1973 год за успешное выступление в экспериментальном и теоретическом турах; *В. Сергин* (п. Хасын Магаданской обл., с. ш., 8 кл.) награжден призом завода «Красное Сормово», установленным для участника олимпиады, приехавшего из «самой далекой точки» Советского Союза; *Н. Синсер* (Лисаковск Кустанайской обл., с. ш. № 1, 8 кл.) награждена призом фабрики «Хохлома», установленным для девочки — победителя олимпиады; *А. Слюсарь* (Ижевск Удмуртской АССР, с. ш. № 30, 8 кл.) награжден призом Горьковского обкома ВЛКСМ как самый юный победитель олимпиады; *Г. Беспалова* (Горький, с. ш. № 40, 9 кл.) награждена призом Министерства просвещения СССР, установленным для девочки — победителя олимпиады; *В. Добрынин* (Хмельницкий с. ш. № 17, 9 кл.) награжден призом газеты «Ленинская смена» за оригинальное решение задач; *С. Качур* (с. Ивановцы Мукачевского района, с. ш., 9 кл.) награжден призом завода «Красное Сормово», установленным для победителя олимпиады из сельской местности; *А. Безлегкий* (Донецк, с. ш. № 10, 10 кл.) награжден подшивкой журнала «Квант» за 1973 год за успешное участие в теоретическом и экспериментальном турах.

На закрытии олимпиады выступил академик А. В. Гапонов-Грехов. Он поздравил победителей и пожелал им дальнейших успехов. Затем участники олимпиады посмотрели большой концерт коллективов детской художественной самодеятельности Дворца культуры Автозавода.

В заключение мы хотим пожелать больших успехов будущим «олимпийцам».

Читатели предлагают задачи

1. Доказать, что $(1+6\cdot 0)+[1+6(0+1)]+[1+6(0+1+2)]+\{1+6[0+1+2+\ldots+(n-1)]\}=n^3$.

Л. А. Максимова

2. Доказать, что уравнение

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=1$$

имеет только три целочисленных решения относительно неизвестных x, y, z.

Н. Ф. Максимов

3. Доказать неравенства:

а) $(1+x)^n+(1-x)^n\leqslant 2^n$ при $n>1$, $|x|\leqslant 1$;

б) $(1+x)^n+(1-x)^n\geqslant 2^n$ при $0<n<1$, $|x|\leqslant 1$.

4. A, B, C — углы остроугольного треугольника ABC. Что больше:

$$\sin A+\sin B+\sin C$$

или

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C?$$

С. Т. Берколайко

5. Доказать, что

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

А. С. Савин

6. Решить уравнение

$$\frac{x+y+z}{4}=\overline{x,yz}.$$

А. А. Безносюк

7. Решить уравнение

$$\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=3022.$$

Е. Ю. Гугель

РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ

Новый учебник по геометрии

В 1973 году появилось седьмое (исправленное и дополненное) издание известного учебника по геометрии П. П. Андреева и Э. З. Шуваловой *). В действительности это — новый учебник. Он адресован учащимся техникумов, но будет полезен и всем читателям «Кванта», изучающим геометрию в школе и готовящимся к школьным выпускным и вступительным экзаменам в вузы.

В новом издании вы не найдете теории геометрических преобразований, исключенной ныне из программы. Но зато в учебнике представлен в доступном и строгом изложении курс геометрии во всей его полноте. В разделе, посвященном планиметрии, есть обзор всех начальных сведений, теория подобия многоугольников, метрические соотношения в треугольнике и круге, методы решения треугольников. Изложение планиметрии в основном традиционное, однако оно иллюстрируется большим количеством разнообразных и интересных задач. А вот раздел об измерении площадей плоских фигур написан, вероятно, в новой для вас тональности. Отправляясь от аксиоматического определения площади плоской фигуры, авторы переходят к (эквивалентному ему) конструктивному определению, а затем — к формулам для определения площадей конкретных фигур.

Наиболее интересным представляется раздел стереометрии, посвященный рассмотрению многогранников, цилиндрических тел и конусов. Призма здесь рассматривается как частный случай цилиндра, а пирамида — как частный случай конуса. Такой подход ранее не встречался в популярной учебной литературе по геометрии. Как вы сами убедитесь, этот подход оказывается весьма выигрышным при изучении объемов и площадей поверхностей призм и пирамид вывод всех необходимых формул приобретает общность, удобную для понимания и запоминания. Сами формулы для объемов естественным образом объединяются в две группы, из которых каждая представляется одной универсальной формулой. Так, например, вы сумеете доказать, что объем любого цилиндрического тела равен произведению площади основания на высоту, а объем конического тела — трети указанного произведения. При этом основанием цилиндра может служить любая фигура с известной площадью. Тем самым класс тел, объемы которых могут вычисляться средствами элементарной математики, существенно расширяется. Опираясь на такую точку зрения, вы непосредственно подойдете к выводу формул для объемов методами интегрального исчисления, и этот вывод вы найдете в соответствующих дополнениях. Эти дополнения вполне естественны в учебнике для техникумов, где изучаются начала дифференциального и интегрального исчисления. Впрочем, и для учащихся школ с математической специализацией, а также вечерних и сменных школ, для участников школьных математических кружков эти дополнения весьма естественны.

В таком же четком стиле изложены главы о шаре и его частях, о приложениях тригонометрии к решению стереометрических задач и многое другое.

В новом учебнике по геометрии вы найдете ряд методических новшеств, разнообразный иллюстративный материал и с успехом используете его для совершенствования знаний по геометрии.

Л. Е. Садовский

---

*) П. П. Андреев, Э. З. Шувалова, Геометрия, изд. 7-е, исправленное и дополненное. Допущено МВ и ССО СССР в качестве учебника для средних специальных учебных заведений, М., «Наука», 1973, 304 с., цена 44 коп.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 коп. и 20 коп., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами.

Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

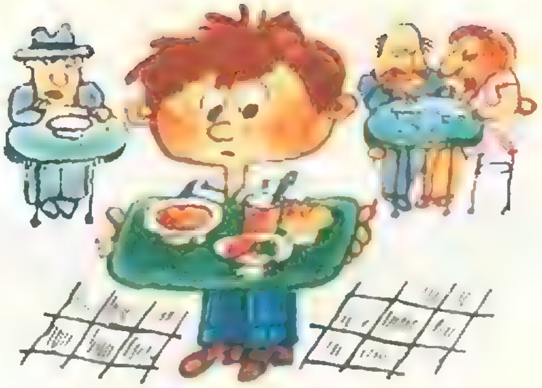
2. Расстояние Земля — Солнце приблизительно в 387 раз больше расстояния Земля — Луна. Можно ли, пользуясь этими данными, оценить, во сколько раз объем Солнца больше объема Луны?

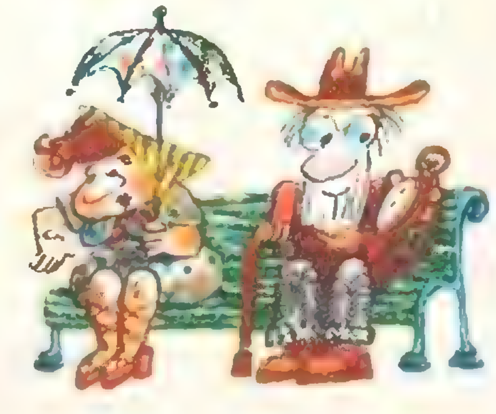
3. В ветреный день нам становится теплее, если мы «спрячемся» от ветра. А одинаковы ли показания термометра на ветру и «за углом»?

4. «Московское время — 19 часов», — услышали мы, сидя за ужином в один из последних дней пребывания в доме отдыха. А на моих часах было без пяти семь. Но часы бегут вперед, рассчитал я, и к моменту моего отъезда покажут точное время отхода поезда.

Часы моей соседки Тамары показывали без четырех минут семь. Но ее часы убегали вперед на 3 мин. в сутки больше, чем мои. Тамара должна была уехать тем же поездом, но ровно на сутки раньше меня. И ее часы к моменту отъезда тоже показали точное время.

На сколько минут в сутки спешат наши часы?





Рисунки Э. Назарова

МЕТОД БЕСКОНЕЧНОГО СПУСКА

В. В. УШАКОВ

Я нашел поистине удивительное доказательство...

Пьер Ферма

Доказательства бывают аналитические, синтетические, индуктивные, дедуктивные, доказательства от противного, доказательства приведением к абсурду (к нелепости, к противоречию). Цель настоящей статьи — познакомить вас с одной разновидностью метода доказательства приведением к абсурду — методом бесконечного (или безграничного) спуска. Этот термин был предложен Пьером Ферма (1601—1655). Впервые этот метод был применен математиком XIII века Кампано при доказательстве иррациональности «золотого сечения».

Метод бесконечного спуска заключается в построении процесса, доставляющего бесконечную последовательность убывающих целых положительных чисел. Поскольку убывающая последовательность целых положительных чисел имеет лишь конечное число членов, мы получаем противоречие. Разъясним этот метод, проведя им доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$.

Пример 1. *Доказать, что число $\sqrt{2}$ иррационально.*

Пусть $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, где r и s — натуральные числа. Тогда

$$2s^2 = r^2. \qquad (1)$$

Левая часть уравнения (1) — число четное, следовательно, r^2 четно. Это означает, что r четно (если бы r было нечетным, то и r^2 было бы нечетным). Подставив $r = 2r_1$ в уравнение (1), получим $2s^2 = 4r_1^2$, или

$$s^2 = 2r_1^2. \qquad (2)$$

Рассуждая аналогично, из уравнения (2) найдем, что $s = 2s_1$, после чего уравнение (2) дает

$$2s_1^2 = r_1^2. \qquad (1а)$$

Условия $r = 2r_1$, $s = 2s_1$ приводят к неравенству $r > r_1$. Уравнение (1а) аналогично уравнению (1); применяя к (1а) те же рассуждения, мы получаем бесконечную последовательность

$$r > r_1 > r_2 > \ldots > r_n > \ldots > 0. \qquad (3)$$

Условие (3) противоречиво: множество натуральных чисел, меньших r, конечно! Полученное противоречие показывает, что уравнение (1) в натуральных числах неразрешимо, и $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Вы, наверное, заметили, что термин «спуск» означает переход от большего натурального числа к меньшему и что в этой последовательности обязательно найдется последнее (наименьшее) число.

Упражнение 1 (обобщение примера 1). Доказать, что если натуральное число p не является точной n-й степенью натурального числа, то $\sqrt[n]{p}$ — число иррациональное.

Отметим, что метод бесконечного спуска позволяет лишь дать отрицательный ответ. Покажем это на примерах.

Пример 2. *Доказать, что уравнение*

$$6(x^2+y^2)=z^2+t^2 \qquad (4)$$

неразрешимо в натуральных числах.

Пусть уравнение (4) разрешимо в натуральных числах. Правая часть уравнения (4) делится на 3. Легко доказать, что это возможно лишь тогда, когда числа z и t делятся на 3:

$$z=3z_1, \qquad t=3t_1,$$

при этом $z>z_1$, $t>t_1$, и потому $z^2+t^2>z_1^2+t_1^2$. Подставляя найденные значения z и t в уравнение (4), получим

$$6(x^2+y^2)=9(z_1^2+t_1^2).$$

Правая часть этого уравнения делится на 9, следовательно, на 9 делится и его левая часть. Это возможно лишь тогда, когда x^2+y^2 делится на 3. Отсюда и из предыдущего немедленно вытекает, что

$$x=3x_1, \quad y=3y_1.$$

Теперь получим

$$6(9x_1^2+9y_1^2)=9(z_1^2+t_1^2)$$

и, сокращая на 9,

$$6(x_1^2+y_1^2)=z_1^2+t_1^2.$$

Последнее уравнение только индексами отличается от уравнения (4). Итак, построен процесс, который для каждого решения уравнения (4) дает еще одно решение с меньшими корнями: $x_1=x/3$, $y_1=y/3$, $z_1=z/3$, $t_1=t/3$. А это невозможно, поскольку последовательность, например $t_1>t_2>\ldots>0$, конечна.

Упражнение 2. Доказать, что уравнение

$$7(x^2+y^2)=z^2+t^2$$

не имеет решений в натуральных числах.

Упражнение 3. Можно ли методом решения примера 2 доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения $5(x^2+y^2)=z^2+t^2$?

Пример 3. *Доказать, что уравнение*

$$x^2+y^2+z^2=2xyz \qquad (5)$$

неразрешимо в натуральных числах.

Пусть уравнение (5) разрешимо в натуральных числах. Правая часть уравнения (5) делится на 2, следовательно, и его левая часть делится на 2. Это возможно лишь тогда, когда либо x, y, z — четные числа, либо одно из них — четное, а два других — нечетные. В последнем случае правая часть уравнения (5) делится на 4, а левая — только на 2. Итак, числа x, y, z — четные:

$$x=2x_1, \quad y=2y_1, \quad z=2z_1. \qquad (6)$$

Подставляя найденные значения x, y, z в уравнение (5), получим

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1. \qquad (7)$$

Применив к уравнению (7) те же рассуждения, что и для уравнения (5), найдем, что

$$x_1=2x_2, \quad y_1=2y_2, \quad z_1=2z_2,$$
$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2.$$

Соотношения $x_k=2x_{k+1}$ приводят к бесконечной последовательности

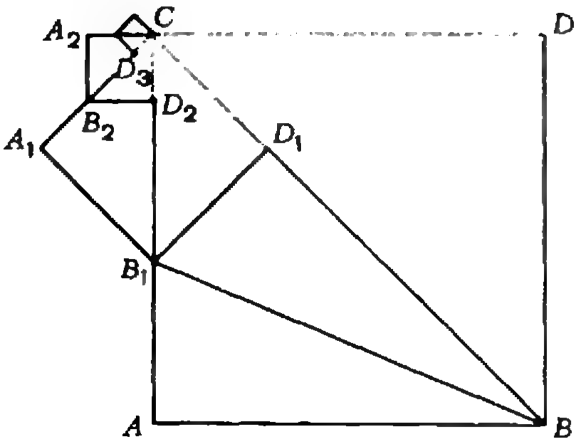
$$x>x_1>x_2>\ldots>x_k>x_{k+1}>\ldots>0.$$

Но эта последовательность натуральных чисел обязана быть конечной. Следовательно, уравнение (5) в натуральных числах неразрешимо.

Пример 4. *Доказать, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.*

Отложим на диагонали квадрата от точки B его сторону $AB=BD_1$ (см. рисунок), это удастся сделать только один раз. Из полученной точки D_1 восставим к диагонали квадрата перпендикуляр, который пересечет сторону квадрата в точке B_1, и соединим B_1 с B; треугольники AB_1B и BB_1D_1 равны, так как они прямоугольные, сторона BB_1 — общая и $BD_1=BA$ по построению. Следовательно, $AB_1=D_1B_1$.

В прямоугольном треугольнике B_1CD_1 имеем $\angle B_1CD_1=45^\circ$ (BC — диагональ квадрата), следовательно, и $\angle CB_1D_1=45^\circ$, и потому $B_1D_1=D_1C$. Мы доказали, что $AB_1=B_1D_1=D_1C$, откуда $D_1C<CD$. Восставим теперь перпендикуляр к диагонали CB в точке C, отложим на



нем отрезок $CA_1 = D_1B_1$ и соединим точку A_1 с точкой B_1. Четырехугольник $A_1B_1D_1C$ — квадрат с диагональю B_1C.

Процесс построения квадратов можно продолжить. При этом мы получим бесконечную последовательность отрезков

$$CD_1 > CD_2 > CD_3 > CD_4 > \ldots > 0;$$

каждый из них есть разность между диагональю и стороной одного и того же квадрата; легко найти выражения для их длин:

$$CD_1 = CB - AB, CD_2 = CB_1 - A_1B_1, \ldots$$

Пусть теперь диагональ и сторона исходного квадрата соизмеримы, то есть существует такой отрезок e — единица длины, — который укладывается целое число раз и в диагонали BC, и в стороне AB квадрата, то есть длины отрезков BC и AB выражаются целыми числами. В таком случае и длина отрезка $CD_1 = CB - AB$ выражается целым числом, и длина диагонали B_1C квадрата $A_1CD_1B_1$, равная разности $AC - AB_1 = AB - CD_1$, — целое число.

Итак, мы построили бесконечную последовательность убывающих целых положительных чисел

$$CD > CD_1 > CD_2 > \ldots > CD_k > \ldots > 0$$

(здесь CD_i — это длина отрезка CD_i), хотя бесконечной она быть не может. Полученное противоречие доказывает несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны.

Домино-пасьянс

28 косточек домино уложены в прямоугольник 7×8. Границы косточек не изображены. Требуется восстановить их.

3	2	6	5	1	2	0
2	1	5	4	5	4	5
0	0	1	3	6	4	6
0	5	5	3	4	4	0
5	3	0	0	2	5	6
4	0	3	2	6	6	6
2	4	6	4	1	3	3
2	2	1	1	1	1	3

а)

4	3	1	3	5	5	5
3	0	6	1	5	0	4
0	0	4	2	0	1	5
5	3	2	2	1	6	2
0	4	4	4	2	5	4
1	6	5	6	4	1	1
0	3	6	6	3	1	2
0	3	6	6	3	2	2

б)

Л. П. Мочалов

Признак делимости на 29

Пусть M — целое положительное число. Отбросим в числе M последнюю цифру и прибавим утроенную отброшенную цифру. Доказать, что полученное число делится на 29 тогда и только тогда, когда на 29 делится число M.

М. Левин, ученик 5 класса

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Чертеж в стереометрических задачах»

1. Ответ: $\frac{1}{3}(1+2\sqrt{2})^3\pi R^3$.

Указание. Нарисуйте сечение конуса плоскостью, проходящей через высоту конуса и центр одного из шаров, лежащих на основании.

2. Ответ:

$$\frac{1}{3}r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right).$$

Указание. Выразите через r сторону основания призмы и найдите радиус 4-го шара. Высота призмы есть сумма r, радиуса 4-го шара и высоты тетраэдра, вершинами которого являются центры шаров.

3. Ответ: $\frac{2}{5}r(8\sqrt{3}+\sqrt{37})$.

Указание. Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту и центры обоих шаров.

4. Ответ: $1:\mathrm{tg}^2\alpha:1$.

Указание. Пусть A_1 и B_1 — вторые точки касания шаров с гранями угла, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точек касания на ребро. Все элементы призмы AA_1MBB_1N определяются из условий. Для получения ответа воспользуйтесь теоремой о произведении отрезков секущей к шару.

5. Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{96}a^3$.

Указание. Докажите, что точка O лежит на AC.

6. Ответ: $\frac{a}{6}$.

Указание. Рассмотрите сечение плоскостью, проходящей через центр шара, вершину одной из пирамид и перпендикулярной плоскости данного треугольника.

7. Ответ: $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{6}$.

Указание. Если a — сторона основания пирамиды, R — радиус данного шара, φ — искомый угол, то $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{2R}{a}$. Задача сводится к определению R, если известно a, для чего следует рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной ее основанию и проходящей через центры данного и вписанного шаров.

8. Ответ: $r(\sqrt{2}-1)$.

Указание. Воспользуйтесь чертежом к задаче 5 (см. текст статьи). Решение аналогично решению задачи 5.

К статье «Метод бесконечного спуска»

1. Пусть $p=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\ \ldots\ p_m^{r_m}$ — разложение p на степени различных простых сомножителей. Найдется такое p_i, что r_i не кратно n, обозначим именно его через p_1. Тогда из равенства

$$\sqrt[n]{p}=k/l,\ l^np=k^n,$$

следует, что k, а затем и l, делится на p_1.

2. Квадрат целого числа, не делящегося на 7, дает при делении на 7 остаток 1, 2 или 4, поэтому z^2+t^2 делится на 7, лишь если и z, и t делятся на 7.

3. Нет, нельзя, поскольку, например, $1^2+2^2=5$. Данное уравнение разрешимо в натуральных числах, например: $5(1^2+2^2)=3^2+4^2$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант», 1974, № 9*)

1. Одна.
2. Надо уравновесить тело гирей, объем которой равен объему тела.
3. 5.
4. Восход Солнца наблюдался бы в то же время.
5. 7 ч. 54 *мин.*

К задачам

(*см. с. 57*)

2. Воспользоваться равенствами $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)$.

5. Воспользоваться методом математической индукции.

6. Автор приводит 4 решения: $x_1=y_1=z_1=0$; $x_2=y_2=2$, $z_2=5$; $x_3=1$, $y_3=5$, $z_3=0$; $x_4=3$, $y_4=7$, $z_4=5$.

7. Автор нашел 2 решения: $\overline{abcd}=1973$ и $\overline{abcd}=2473$.

К задачам

(*см. «Квант», 1974, № 9, с. 57*)

1. Воспользоваться сравнениями по модулю 3.
2. 1974.
3. 263 × 263 = 69169.
5. $17^3=4913$, $18^3=5832$, $26^3=17576$,— всего автор указывает 13 чисел, наибольшее из них 64^6.

К статье «Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И.А. Лихачева»

Математика

Вариант 1

1. $\sqrt{\frac{8S\cos\beta}{\sin\alpha}}$. Указание. Обозначить сторону ромба через x и выразить через нее площадь сечения S.

2. $x_1=\pi+2k\pi,\quad x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$. Указание. Преобразовать уравнение к виду $2\cos^2\frac{x}{2}(2\sin x-1)=0$.

3. $x=0$. Указание. Обозначить 5^x через y и привести уравнение к виду $2y^2-y-1=0$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{3}\pi\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\, ab(a+b)$. Указание. Тело вращения представляет собой усеченный конус с двумя вырезанными конусами; рассмотреть осевое сечение этих конусов.

2. $z=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}+(-1)^k\arcsin\frac{2}{5\sqrt{5}}+k\pi$. Указание. Разделить обе части уравнения на $\sqrt{5}$, после этого слева получится $\sin(z-t)$, где $\cos t=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin t=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. $x=10$. Указание. Обозначить $\lg x$ через y и привести уравнение к виду $\lg(3y^2-2y)=0$; не забудьте проверить ответы.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{3}H^3\sin^4\alpha\cos^2\alpha$. Указание. Рассмотрев осевое сечение конусов, найти высоту и радиус основания вписанного конуса.

2. $t_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ t_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$. Указание. Привести уравнение к виду $2\sin^2 t-3\sin t+1=0$.

3. $x_1=0{,}01;\ x_2=0{,}1;\ x_3=10;\ x_4=100$. Указание. Представить x в виде $10^{\lg x}$ и привести уравнение к виду $\lg^4x-5\lg^2x+4=0$.

Физика

1. $\alpha=0{,}005$ *рад.*

Указание. В силу малости угла α считать $\operatorname{tg}\alpha=\alpha$.

2. $v=2{,}8$ *м/с.*

Указание. Шарик вращается вокруг новой оси по окружности радиуса $R=l-h$. Воспользоваться законом сохранения энергии.

3. $P=\frac{E^2R'}{(R'+r)^2}\approx\frac{E^2}{R'}$, где R' — сопротивление нагрузки, разное при различных способах соединения. При параллельном подключении количество выделившейся за единицу времени энергии в 4 раза больше.

4. $v=\sqrt{10}\cdot10^3$ *м/с.*

Корректор *Л. С. Сомова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 16/VII 1974 г.
Подписано в печать 30/VIII 1974 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,60
Тир. 361 090 экз. Т-14591 Цена 30 коп. Заказ 1439

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

ИНДЕКС 70465

10

К нашим читателям

Продолжается подписка на 1975 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят принимать участие в олимпиадах.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще «не зажглись» физикой или математикой, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

Наш журнал полезен и учителям. Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. Он систематически печатает статьи по новым программам, разъясняет материал, еще не вошедший в учебник.

Большое внимание «Квант» уделяет десятиклассникам. Мы постоянно публикуем статьи для поступающих в вузы с разбором задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в ведущие вузы страны и варианты вступительных экзаменов.

«Квант» публикует заметки для младших школьников. В 1975 году этот раздел будет существенно расширен.

Расскажем о статьях, которые будут опубликованы «Квантом» в 1975 г.

В статье У. **Рамсея** «Как делаются открытия» на многих интересных примерах показан ход развития науки от первоначальных простых идей и гипотез до открытия важнейших закономерностей.

А. Г. **Мордкович** в цикле статей доступно и интересно рассказывает о производной — одном из основных понятий математического анализа.

Серия статей С. Г. **Гиндикина** посвящена теме, пограничной между математикой и механикой. Читатель узнает, как с помощью аппарата механики можно решать математические задачи.

В статье Г. В. **Строцкого** «Камера-обскура» будет рассказано о построении изображения в камере-обскуре и об условии получения наилучшего изображения.

Еще две статьи будут посвящены оптике. Это статья известного зарубежного ученого В. **Вайскопфа** «Как свет взаимодействует с веществом» и статья — о голографии

В статье Э. Г. **Белаги** «Узлы на столе математика» будет рассказано и что такое узел (разумеется, с точки зрения математика), и какие операции можно осуществлять над узлами.

В статье М. Б. **Балка** и Н. А. **Григорьева** будет рассказано о необычных — барицентрических координатах, оказывающихся весьма полезными при решении многих практических задач.

В статье И. Ф. **Шарыгина** в популярной форме рассказывается о мире геометрии с числом измерений, большем трех.

В серии статей В. **Нильме** рассказывается о том, какие задачи разрешимы «циркулем и линейкой» и приводятся задачи, которые с помощью этих инструментов не решаются.

Так, в статье О. Н. **Карпухина** «Физика химического взаимодействия» рассказывается о сложном процессе химического взаимодействия.

А. **Хацет** расскажет о моделировании с помощью электрических цепей так называемых «транспортных задач».

В 1975 году в разделе «Практикум абитуриента» будет опубликован ряд статей по математике и физике, помогающие школьникам готовиться в институт и приведены варианты вступительных экзаменов в вузы.

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник «Кванта» учит школьников решать трудные задачи по математике и физике. В конкурсе «Задачника «Кванта» участвуют школьники из городов, из деревень и сел. Победители конкурса получают право участия в областных олимпиадах.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Новости о работе физико-математических школ, о физико-математических соревнованиях школьников, о проведении олимпиад и о работе вузов со школьниками читатели смогут прочесть в разделе «Информация».

Журнал «Квант» выходит ежемесячно. Он распространяется только по подписке. Подписная цена на год 3 руб. 60 коп.

Подписка не ограничена. Наш индекс 70465.

VIII Всесоюзная олимпиада школьников по математике

VIII Всесоюзная олимпиада школьников по физике

НОМЕР
11

Основан в 1970 году.

Квант

1974

11

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

2 *Г. Я. Мякишев.* Вынужденные механические колебания
8 *А. Г. Мордкович.* Экстремумы многочлена третьей степени
12 **У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная»**
В. А. Бронштэн. Противостояния Марса
17 *Р. С. Гутер, М. В. Донской.* Машина играет в шахматы
23 *В. Н. Вагутен.* Задачи о графах или сказка «Иван-царевич и Серый Волк»

Лаборатория «Кванта»

30 *В. Драчев, А. Мазур.* Фотокамера «Рыбий глаз»

Математический кружок

32 *Н. Б. Васильев.* Семейство параллельных n-угольников

Задачник «Кванта»

40 Задачи М291-М295; Ф303-Ф307
42 Решения задач М251-М255; Ф260-Ф268

Практикум абитуриента

54 *Г. В. Дорофеев.* Пределы последовательностей
60 *Е. П. Кузнецов.* «Космические» задачи на вступительных экзаменах

Рецензии, библиография

64 *Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский.* Новые книги
66 *Е. П. Левитан.* Приглашение в дальний космический рейс.

Информация

67 Заочная олимпиада школьников Азиатской части СССР
71 *В. А. Лешковцев.* Ленинские премии 1974 года.
73 *С. Иванов, А. Вараксин.* День юного физика

«Квант» для младших школьников

74 Задачи
75 *А. И. Мостовой.* Нет ли другого решения?
78 **Ответы, указания, решения**
Уголок коллекционера (*3-я с. обложки*)
Смесь (*с. 11, 16*)

На первой странице обложки — фотография, сделанная в центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчики-космонавты СССР Герои Советского Союза Анатолий Филипченко и Николай Рукавишников после тренировки в корабле-тренажере «Союз». Фото А. Маклецова (АПН). Эта фотография сделана с помощью объектива «Рыбий глаз». О том, как можно самим делать подобные фотографии, рассказывается в этом номере журнала (см. с. 30).

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант» 1974 год*

ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Г. Я. МЯКИШЕВ

Основное уравнение движения в механике — это второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Чтобы найти положение тела и его скорость в любой момент времени, достаточно знать силу как функцию координат тела и проекций его скорости, а также начальные условия: координаты и проекции скорости тела в начальный момент времени.

Простейший случай — движение под действием постоянной силы $\mathbf{F} = \mathrm{const}$ (в частности, сила может равняться нулю). Тогда ускорение постоянно ($\mathbf{a} = \mathrm{const}$); координаты и скорость тела легко определяются с помощью известных кинематических уравнений.

При колебательном движении, весьма распространенном в природе и широко используемом в технике, ускорение не постоянно. Это сильно усложняет решение механических задач. Только свободные гармонические колебания тела под действием силы, пропорциональной смещению тела из положения равновесия, можно исследовать полностью, не прибегая к высшей математике. Но уже учет силы трения, пропорциональной скорости, требует умения решать дифференциальные уравнения. Еще сложнее (математически) задача о вынужденных колебаниях, когда на систему действует дополнительно внешняя периодическая сила. В этом случае в системе наблюдается любопытное и практически важное явление — резонанс. При совпадении частоты внешней силы с частотой собственных колебаний системы амплитуда колебаний резко возрастает.

Можно, однако, не прибегая к решению сложного уравнения движения, проанализировать процесс вынужденных колебаний с помощью наглядных физических соображений. В частности, можно понять, почему наблюдается резонанс. Этому и посвящена данная статья.

Но вначале напомним некоторые основные положения, касающиеся свободных гармонических колебаний.

Свободные гармонические колебания

Самой простой колебательной системой является система, в которой действует сила, пропорциональная смещению тела из положения равновесия, направленная противоположно смещению. Трение, конечно, есть всегда. Но если оно мало, то на протяжении не слишком большого интервала времени действием силы трения можно пренебречь. К подобным системам относятся: груз на пружине, математический маятник (при небольших углах отклонения), плавающее на поверхности воды тело с неизменным сечением и т. п. Для определенности будем говорить только о грузе на пружине. На груз действуют две силы: сила тяжести и сила упругости пружины. Постоянная сила тяжести $F_т = mg$ никак не влияет на процесс колебаний. Она лишь смещает положение равновесия груза. Ее легко исключить из уравнения движения, если начало системы отсчета совместить с концом деформированной грузом пружины, когда груз находится в покое (рис. 1). Координатную ось OX направим вертикально вниз. Тогда колебания будут происходить только под действием силы упругости $F_y = -kx$, где k — коэффициент упругости, а x — смещение груза из положения равновесия. Уравнение движения запишется так:

$$ma_x = -kx. \qquad (1)$$

Разделив это уравнение на m и введя обозначение $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, получим общепринятую форму уравнения, описывающего гармонические колебания с циклической частотой ω_0:

$$a_x = -\omega_0^2 x. \qquad (2)$$

Решение этого уравнения, то есть нахождение функции $x = x(t)$, можно получить элементарно, но довольно длинным путем. Результат таков:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (3)$$

Здесь x_0 — амплитуда колебаний, а φ_0 — начальная фаза. Эти величины находятся из начальных условий.

Обычно мы возбуждаем колебания груза на пружине, оттянув его вниз и отпустив. При этом в начальный момент (при $t = 0$) $x = x_0$, а $v_x = 0$. Это соответствует тому, что $\varphi_0 = 0$. Тогда

$$x = x_0 \cos \omega_0 t. \qquad (4)$$

Гармонические колебания можно описывать, используя равноправные тригонометрические функции косинус и синус. Вместо (3), конечно, можно записать:

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (5)$$

Но тогда при обычных начальных условиях $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, а не нулю. Поэтому запись через косинус несколько предпочтительнее, хотя, конечно, можно использовать и синус.

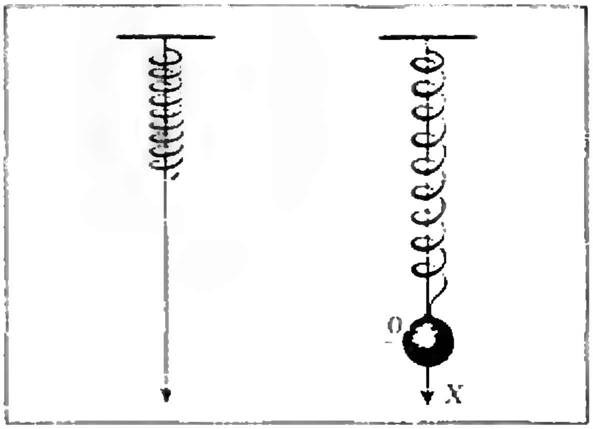


Рис. 1.

Скорость при гармонических колебаниях тоже меняется по гармоническому закону. Ее амплитуда равна $v_0 = \omega_0 x_0$, а сдвиг по фазе относительно координаты равен $\frac{\pi}{2}$:

$$v_x = \omega_0 x_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t. \qquad (6)$$

Ускорение колеблется в противофазе с координатой (смещено по фазе на π) и имеет амплитуду $a_0 = \omega_0^2 x_0$, то есть

$$a_x = \omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t + \pi) = -\omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t. \qquad (7)$$

Вот и все, что нужно знать для дальнейшего относительно свободных гармонических колебаний.

Уравнение движения для вынужденных колебаний

Пусть на колебательную систему (груз на пружине в нашем примере) действует внешняя периодическая сила $F_x = F_0 \cos \omega t$. Кроме того, на тело действуют сила упругости $F_y = -kx$ и сила трения, пропорциональная скорости $F_{тр} = -\mu v_x$*), где μ — коэффициент трения. Тогда уравнение движения запишется так:

$$ma_x = -kx - \mu v_x + F_0 \cos \omega t. \qquad (8)$$

Перенеся в левую часть уравнения все силы, кроме внешней, получим:

$$ma_x + \mu v_x + kx = F_0 \cos \omega t.$$

---

*) При малых скоростях движения тела действительно можно считать, что сила трения (или, по-другому, сила сопротивления) прямо пропорциональна скорости.

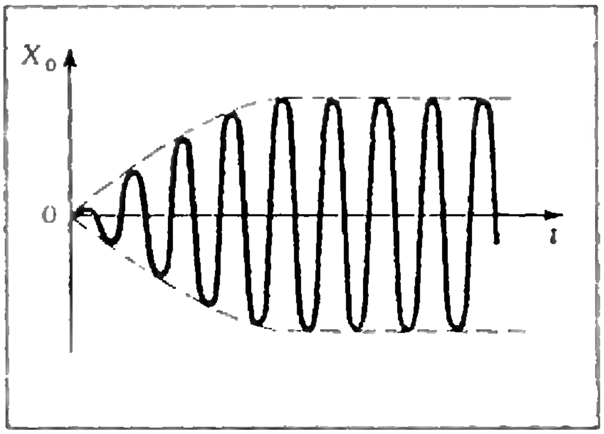


Рис. 2.

Удобнее записать это уравнение в несколько другом виде, разделив правую и левую его части на m и введя обозначение $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$a_x + \frac{\mu}{m} v_x + \omega_0 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \qquad (9)$$

Движение тела, подчиняющееся этому уравнению, достаточно сложно, особенно вначале, когда оно не является гармоническим.

Установление колебаний

Механизм установления вынужденных гармонических колебаний можно пояснить так. Под действием внешней силы система получает «толчок», в результате чего в ней возникают свободные колебания частоты ω_0. С течением времени свободные колебания будут затухать тем быстрее, чем больше коэффициент трения μ. Но одновременно с этим в системе действует внешняя периодическая сила, которая вызывает в ней колебания с частотой ω. Таким образом, в течение некоторого промежутка времени в системе происходят и свободные, и вынужденные колебания одновременно, то есть к колебательным движениям применим принцип суперпозиции.

Амплитуда вынужденных колебаний с течением времени нарастает (рис. 2), пока не установится некоторое стационарное значение. Это произойдет тогда, когда работа внешней силы станет равна работе сил трения, то есть когда энергия, поступающая в систему извне, станет равна потерям механической энергии внутри системы.

Таким образом, лишь спустя время установления колебаний в системе затухнут свободные колебания и останутся только вынужденные гармонические колебания с частотой ω и амплитудой x_0:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (10)$$

Внешне уравнения для свободных и вынужденных колебаний совпадают. Но если при свободных колебаниях x_0 и φ_0 определялись только начальными условиями, то при вынужденных колебаниях они определяются (как мы увидим в дальнейшем) параметрами как самой системы, так и внешней силы. Прежде всего, играет существенную роль соотношение частот собственных и вынужденных колебаний. Заметим, кстати, что величину φ_0 в случае вынужденных колебаний называют сдвигом по фазе между колебаниями смещения и внешней силы.

Скорость и ускорение тела, совершающего вынужденные колебания, определяются равенствами, аналогичными (6) и (7) для свободных колебаний:

$$v_x = \omega x_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (11)$$

$$a_x = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (12)$$

Поскольку скорость всегда характеризует быстроту изменения координаты со временем, а ускорение характеризует быстроту изменения скорости со временем, то, зная зависимость координаты от времени $x(t)$, можно однозначно определить функции $v_x(t)$ и $a_x(t)$.

Теперь приступим к решению нашей основной задачи. Выясним, от чего и как зависят амплитуда x_0 вынужденных колебаний и сдвиг по фазе φ_0. Для этого рассмотрим три предельных случая.

Первый случай: $\omega \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, то есть частота внешней периодической силы много меньше частоты собственных колебаний системы *).

Второй случай: $\omega \gg \omega_0$; выполняется противоположное условие.

И, наконец, самый важный случай: $\omega \approx \omega_0$. Это случай резонанса.

Вынужденные колебания малой частоты

Перепишем еще раз уравнение (9)— уравнение движения для вынужденных колебаний:

$$a_x + \frac{\mu}{m} v_x + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

Если $\omega \ll \omega_0$, то из трех членов левой части этого уравнения самым большим будет последний член $\omega_0^2 x$. Действительно, амплитуда первого слагаемого пропорциональна $\omega^2 x_0$, второго — ωx_0, а последнего — $\omega_0^2 x_0$. Поэтому приближенно (учитывая, что $\omega \to 0$)

$$\omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

откуда

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\cos\omega t = \frac{F_0}{k}\cos\omega t. \qquad (13)$$

Колебания координаты происходят с амплитудой $x_0 = \frac{F_0}{k}$, а фаза колебаний совпадает с фазой внешней силы.

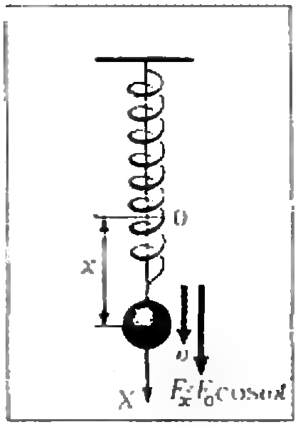


Рис. 3.

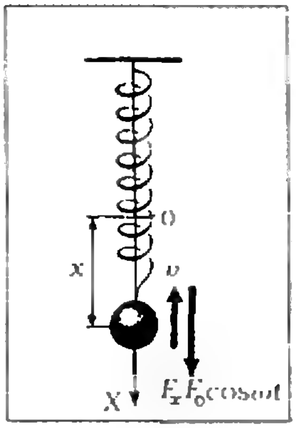


Рис. 4.

Заметим, что амплитуда колебаний тем меньше, чем больше жесткость пружины. Качественно этот случай можно описать так. При малой частоте внешней силы происходит почти то же самое, что и при действии на пружину постоянной силы. В соответствии с законом Гука смещение увеличивается пропорционально внешней силе, и в любой момент внешняя сила почти точно уравновешивается силой упругости пружины.

С энергетической точки зрения условия для перекачки энергии в колебательную систему от внешних тел, действующих на систему с периодической силой, очень неблагоприятны. В самом деле: четверть периода, когда тело смещается от положения равновесия, внешняя сила совершает положительную работу, так как сила и скорость тела, а значит, и перемещение направлены в одну сторону (рис. 3). Но в следующую четверть периода, когда тело возвращается к положению равновесия, сила и скорость (а значит, и перемещение) направлены в противоположные стороны (рис. 4). Работа внешней силы будет при этом отрицательной. Та же картина будет наблюдаться во вторую половину периода. В целом за период работа внешней силы почти точно равна нулю. Лишь малая часть работы внешней силы идет на компенсацию работы силы трения, так как скорость движения тела при $\omega \ll \omega_0$ очень мала, и поэтому мала величина силы трения.

---

*) Необходима для точности одна оговорка. При наличии трения собственная частота ω_c свободных колебаний не равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. На самом деле она несколько меньше: $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{4m^2}}$. Но при малом коэффициенте трения ($\mu \to 0$) $\omega_c \approx \omega_0$. Практически наиболее интересен случай именно малого трения. Поэтому мы с полным основанием можем считать собственную частоту колебаний системы равной $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Здесь имеется некоторая тонкость, иногда затрудняющая понимание сути дела. Если смещение от положения равновесия прямо пропорционально силе в любой момент времени, то, казалось бы на первый взгляд, работа должна быть все время положительна. Однако, надо иметь в виду, что знак работы зависит от совпадения направления силы и направления перемещения, то есть скорости, а не знака координаты. Для того чтобы работа была положительной, необходимо не совпадение знаков F_x и x, а необходимо, чтобы F_x и Δx (или $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x$) имели одинаковые знаки.

Вынужденные колебания большой частоты

В случае $\omega \gg \omega_0$ в левой части уравнения (9) в любой момент времени наибольшим будет первый член, амплитуда которого пропорциональна квадрату частоты. Он будет играть основную роль, поэтому можно записать:

$$a_x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t.$$

По фазе с силой совпадает теперь не координата, а ускорение, а колебания координаты происходят в противофазе с колебаниями внешней силы. Амплитуда координаты равна

$$x_0 = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Таким образом, колебания тела происходят по закону

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos \omega t. \qquad (14)$$

При $\omega \to \infty$ (это эквивалентно условию $\omega \gg \omega_0$) $x_0 \to 0$, то есть амплитуда колебаний мала. Этот результат вполне естествен. Сила столь быстро меняет направление, что тело, обладающее инертностью, не успевает заметно сдвигаться относительно положения равновесия.

Как и в предыдущем случае, когда $\omega \ll \omega_0$, половину периода внешняя сила совершает положительную работу, а другую половину — отрицательную. Половину периода сила и перемещение направлены одинаково, а другую половину периода они направлены в противоположные стороны. Энергия опять почти не поступает в систему.

Резонанс

Самый интересный частный случай вынужденных колебаний — это случай совпадения частоты внешней периодической силы с собственной частотой колебаний системы ($\omega \approx \omega_0$).

В этом случае первый член уравнения (9), который можно записать так:

$$a_x = -\omega_0^2 x,$$

взаимно уничтожается с третьим членом, равным $\omega_0^2 x$. Эти два члена в любой момент времени одинаковы по величине, но имеют противоположные знаки, так как ускорение и координата при любом гармоническом колебании сдвинуты по фазе на π.

В результате уравнение (9) принимает вид:

$$\mu v_x = F_0 \cos \omega_0 t. \qquad (15)$$

Это простое уравнение и содержит всю суть резонанса. При $\omega \approx \omega_0$ в любой момент времени (еще раз подчеркнем, что речь идет об установившихся вынужденных колебаниях) внешняя сила как бы выключает из игры силу трения. В результате ускорение телу сообщается только силой упругости пружины. В сущности реализуется очень необычная ситуация: гармонические колебания существуют в системе сколь угодно длительное время, несмотря на действие силы трения.

Из (15) видно, что при резонансе фаза колебаний скорости совпадает с фазой внешней силы. Работа внешней силы при этих условиях положительна на всем протяжении пе-

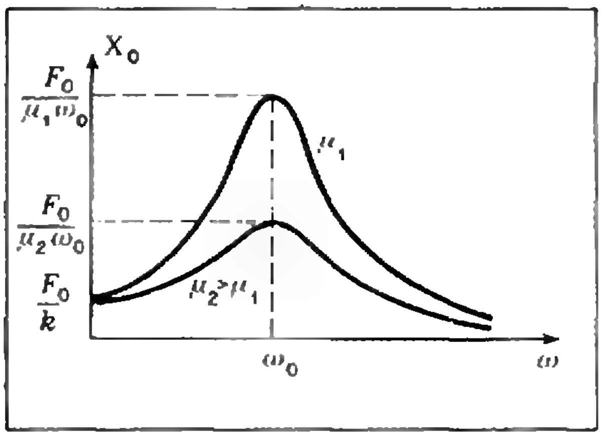


Рис. 5.

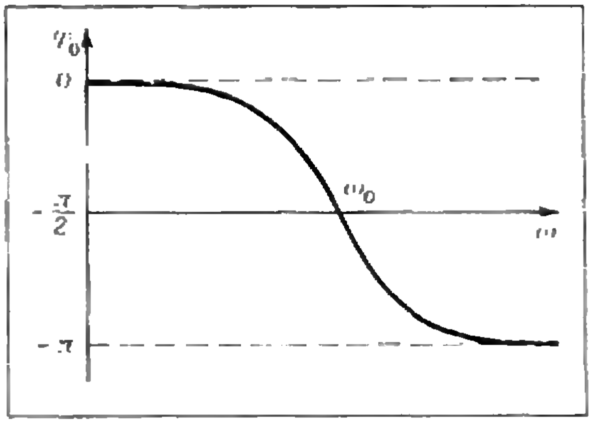


Рис. 6.

риода. Создаются оптимальные условия для перекачки энергии от внешних тел к колебательной системе.

Положительная работа внешней силы в точности равна по величине отрицательной работе силы трения. Из-за этого механическая энергия системы не меняется. Поступающая извне энергия за счет работы силы трения переходит в тепло (пружина с грузом и окружающий воздух нагреваются).

Амплитуда колебаний при резонансе равна

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{F_0}{\mu\omega_0}.$$

Она тем больше, чем меньше коэффициент трения. При $\mu \to 0$ $x_0 \to \infty$, то есть очевидно, что при $\omega \approx \omega_0$ амплитуда максимальна. Если μ имеет достаточно большое значение, то резонансная амплитуда колебаний невелика.

Уравнение колебаний при резонансе имеет вид

$$x = \frac{F_0}{\mu\omega_0}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

так как смещение отстает от скорости на четверть периода. Теперь можно изобразить примерный вид зависимости амплитуды x_0 и сдвига фаз φ_0 вынужденных колебаний от частоты. Мы знаем, что при малых частотах ($\omega = 0$) амплитуда колебаний равна $\frac{F_0}{k}$, а сдвиг по фазе равен нулю. При больших частотах $(\omega \to \infty)$ амплитуда колебаний стремится к нулю, а сдвиг по фазе стремится к $-\pi$. При резонансе амплитуда максимальна, а сдвиг по фазе равен $-\frac{\pi}{2}$.

На рисунке 5 показаны несколько резонансных кривых для разных значений коэффициента трения μ. Чем меньше μ, тем более узкий и высокий максимум, то есть кривая выглядит более выразительно.

На рисунке 6 представлен график зависимости сдвига фаз между колебаниями смещения и внешней силы от частоты вынужденных колебаний.

А. Г. МОРДКОВИЧ

ЭКСТРЕМУМЫ МНОГОЧЛЕНА ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Эта статья является четвертой в цикле статей, посвященных кубическим функциям и уравнениям *) В ней речь пойдет о нахождении точек максимума и минимума функции $y=ax^3+bx^2+cx+d$

Для начала обратимся к функции

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

($a \neq 0$). Пусть $x = \alpha$ — корень функции (1). Как выглядит график этой функции в достаточно малой окрестности точки $x = \alpha$?

Здесь возможны четыре случая — они представлены на рисунках 1—4. В первом и втором случаях говорят, что *функция монотонна в точке* $x=\alpha$ (в первом случае она возрастает, во втором — убывает). В третьем и четвертом случаях говорят, что *функция имеет экстремум в точке* $x = \alpha$ (в третьем случае — минимум, в четвертом — максимум)*).

В чем принципиальное отличие первого и второго случаев от третьего и четвертого? В том, что в первых двух случаях функция меняет знак при переходе через точку $x = \alpha$ (например, в первом случае $y < 0$ при $x < \alpha$ и $y > 0$ при $x > \alpha$;

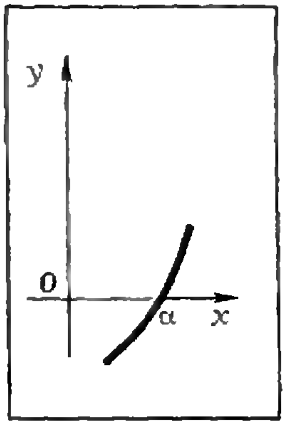


Рис. 1.

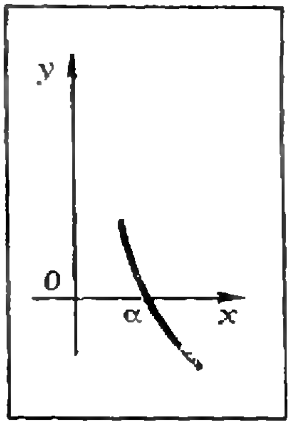


Рис. 2.

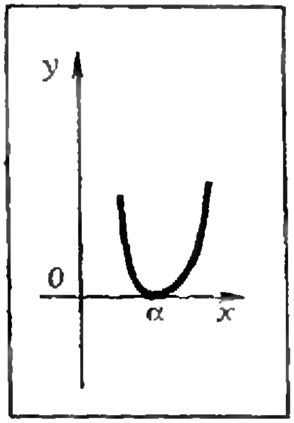


Рис. 3.

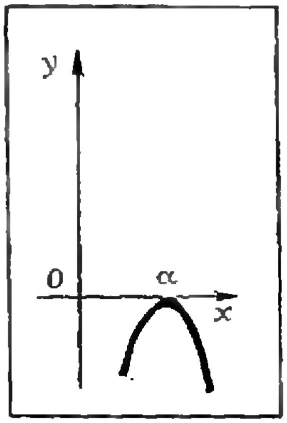


Рис. 4.

---

*) См. статьи: В. Г. Янкелевич, «Неприводимый» случай, «Квант», 1971, № 11; О. А. Жаутыков, График кубического четырехчлена, «Квант», 1972, № 6; О. А. Жаутыков, О границах корней кубического уравнения, «Квант», 1973, № 12.

*) Иногда говорят, что функция имеет *локальный* экстремум (максимум, минимум). «Локальный» означает «местный»: в некоторой окрестности точки $x = \alpha$ значения функции не превосходят $f(\alpha)$, хотя «далеко» от точки $x = \alpha$ значения $f(x)$ могут превосходить $f(\alpha)$. В принятой нами терминологии (см. также Б. Е. Вейц, И. Т. Демидов, Алгебра и начала анализа, 9 класс, пробный учебник под редакцией академика А. Н. Колмогорова, § 69) функция может иметь много максимумов и минимумов, которые определяются как локальные понятия.

здесь значения x выбираются достаточно близко от точки $x = \alpha$), а в последних двух случаях функция не меняет знака при переходе через точку $x = \alpha$.

Попробуем найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $x = \alpha$ — корень многочлена $y = ax^2 + bx + c$ — была точкой экстремума. Преобразуем функцию (1) к виду

$$y = a\,(x-\alpha)(x-\beta)$$

(α и β — корни квадратного трехчлена; попробуйте доказать, что если $x = \alpha$ — корень функции (1), то ее можно представить в таком виде, где β — действительное число).

Если $\alpha \neq \beta$, то в достаточно малой окрестности точки $x = \alpha$ (при $|x-\alpha| < |\alpha-\beta|$) выражение $a\,(x-\beta)$ сохраняет постоянный знак, а значит, функция $y = a\,(x-\alpha)\times\times(x-\beta)$ меняет знак при переходе через точку $x = \alpha$. В этом случае экстремума нет. Если же $\alpha = \beta$, то получаем $y = a\,(x-\alpha)^2$; эта функция не меняет знака при переходе через точку $x = \alpha$.

Итак, *корень квадратного трехчлена является его точкой экстремума тогда и только тогда, когда этот корень — двукратный.*

Обобщением полученного результата является следующая

Теорема 1. *Для того чтобы точка $x = \alpha$ была точкой экстремума функции $y = ax^2 + bx + c$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число m, при котором многочлен $ax^2 + bx + c - m$ имеет двукратный корень $x = \alpha$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что функция $y = f\,(x)$ имеет экстремум в точке $x = \alpha$ тогда и только тогда, когда в этой точке имеет экстремум функция $y = f\,(x) - m$, где $m = f\,(\alpha)$.

Этот результат используется на практике.

Пример 1. *Найти точки экстремума функции*

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Подберем числа α, m так, чтобы выполнялось тождество

$$ax^2 + bx + c - m = a\,(x-\alpha)^2.$$

Имеем

$$ax^2 + bx + c - m = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2.$$

Но два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях; поэтому мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2a\alpha = b, \\ a\alpha^2 = c - m, \end{cases}$$

из которой находим

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad m = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак, $x = -\frac{b}{2a}$ — точка экстремума функции $y = ax^2 + bx + c$ (причем точка локального максимума, если $a > 0$, и локального минимума, если $a < 0$).

Теперь обратимся к функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \qquad (2)$$

Ниже мы увидим, что для нее можно сформулировать и доказать теорему, аналогичную теореме 1. Но сначала мы докажем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма. *Пусть дан многочлен третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), и пусть $x = \alpha$ — его действительный корень. Тогда*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,(x-\alpha)(x^2 + px + q), \qquad (3)$$

где p и q — некоторые действительные числа.

Доказательство. По условию $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$. Тогда

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = a\,(x^3 - \alpha^3) + b\,(x^2 - \alpha^2) + c\,(x - \alpha) = (x - \alpha)\,[ax^2 + (a\alpha + b)\,x + (a\alpha^2 + b\alpha + c)] = a\,(x - \alpha)(x^2 + px + q),$$

где

$$p = \frac{a\alpha + b}{a}, \quad q = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a}.$$

Попробуем теперь найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка $x = \alpha$ — корень многочлена (2) — являлась точкой экстремума функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Воспользуемся формулой (3). Если $x = \alpha$ не является корнем квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, то в достаточно малой окрестности точки $x = \alpha$ этот трехчлен сохраняет постоянный знак, а потому функция $y = a(x-\alpha)(x^2 + px + q)$ меняет знак при переходе через точку $x = \alpha$. То же самое будет в случае, когда $x = \alpha$ — двукратный корень трехчлена, то есть $x^2 + px + q = (x-\alpha)^2$ и, следовательно, $y = a(x-\alpha)^3$. В рассмотренных случаях экстремума нет. И лишь в одном случае функция не меняет знака при переходе через точку $x = \alpha$ — когда $x = \alpha$ — однократный корень квадратного трехчлена, то есть $x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)$, или, что то же самое, $x = \alpha$ — двукратный корень многочлена (2), то есть

$$y = a(x-\alpha)^2(x-\beta),$$

где $\alpha \neq \beta$.

Итак, *корень многочлена третьей степени является его точкой экстремума тогда и только тогда, когда этот корень двукратный.*

Обобщением полученного результата является следующая

Теорема 2. *Для того чтобы точка $x = \alpha$ была точкой экстремума функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число m, при котором многочлен $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - m$ имеет двукратный корень $x = \alpha$, то есть*

$$P(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta), \qquad (4)$$

где $\alpha \neq \beta$.

Теорема 3 (достаточные условия максимума и минимума). *Пусть функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет экстремум в точке $x = \alpha$ и m — значение функции в точке $x = \alpha$. Представим многочлен $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - m$ в виде (4). Тогда, если $a(\beta-\alpha) > 0$, то $x = \alpha$ — точка максимума; если $a(\beta-\alpha) < 0$, то $x = \alpha$ — точка минимума.*

Доказательство. Если $a > 0$ и $\alpha < \beta$, то в окрестности точки $x = \alpha$, не содержащей внутри себя точку $x = \beta$ (рис. 5), имеем $P(x) \leqslant 0$, то есть $y \leqslant m$. Значит, $x = \alpha$ — точка максимума. Если $a < 0$ и $\alpha > \beta$, то также получается точка максимума. Объединяя эти два случая, получаем, что если $a(\beta-\alpha) > 0$, то в точке $x = \alpha$ функция y имеет максимум. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Пример 2. *Исследовать на экстремум функцию*

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \qquad (5)$$

и построить ее график.

Попробуем подобрать числа m, α, β так, чтобы выполнялось тождество $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 - m = (x-\alpha)^2 \times (x-\beta)$ (причем $\alpha \neq \beta$). Отсюда $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 - m = x^3 - (\beta + 2\alpha)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta$. Для отыскания значений m, α, β мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} -(\beta + 2\alpha) = -3, \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 = -9, \\ -\alpha^2\beta = 5 - m. \end{cases}$$

Эта система имеет следующие решения:

$$\alpha_1 = -1, \quad \beta_1 = 5, \quad m_1 = 10;$$
$$\alpha_2 = 3, \quad \beta_2 = -3, \quad m_2 = -22.$$

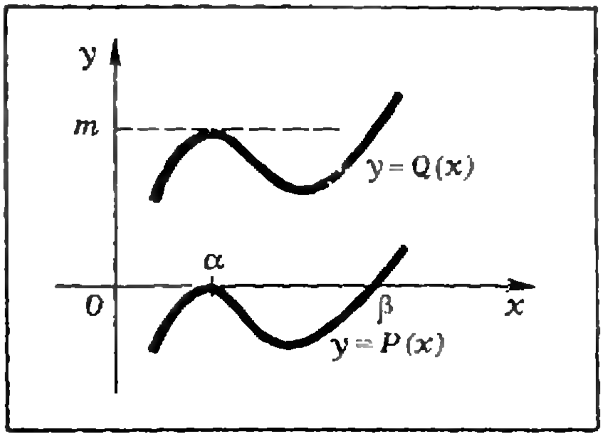


Рис. 5.

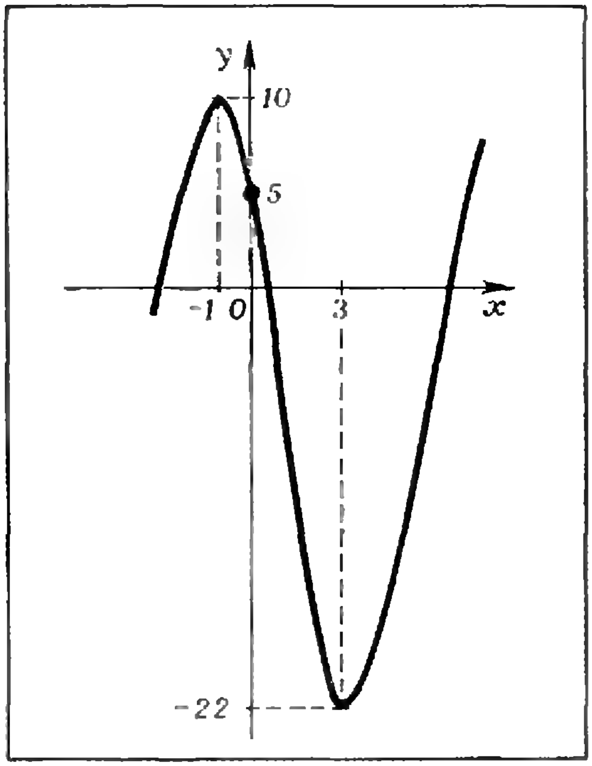


Рис. 6.

Таким образом, функция (5) имеет экстремумы в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Теорема 3 позволяет установить и характер экстремумов: $x_1 = -1$ — точка максимума, $x_2 = 3$ — точка минимума.

Точки $x_1 = -1$, $y_1 = 10$ и $x_2 = 3$, $y_2 = -22$ являются важными контрольными точками для построения графика функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (он изображен на рисунке 6).

Заметим, что не всякий многочлен третьей степени имеет точки экстремума. В этом вас убедит упражнение 3 или 4 (в них получается система уравнений, не имеющая действительных решений).

Упражнения

Исследуйте на экстремум следующие функции:

1. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 6$.
2. $y = -3x^3 + 9x^2 + 135x + 405$.
3. $y = x^3 - 2x^2 + 19x - 4$.
4. $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 5$.

Ребусы

В этих примерах некоторые цифры заменены звездочками или буквами (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры). Восстановите примеры.

1.

```
     × ребус
       *****
  -----------
      *****с
      ****у
    *****б
    ****е
   ****р
 ------------
  **********
```

2.

```
× ***
  ***
  ---
  ***
 **1
*0*
------
******
```

3.

```
***  |**
 **   *,***
---
 ***
  **
  --
   **
   **
   --
    **
    **
    --
```

4.

```
× **
  **
  --
  **
 *7
----
****
```

Найти результат.

5.

```
× **
  **
  --
  **
 *1
----
****
```

Л. П. Мочалов

У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная»

С 1965 года издательство «Наука» выпускает научно-популярный журнал Академии наук СССР «Земля и Вселенная». Он рассчитан на широкие круги читателей, интересующихся проблемами астрономии и физики Земли, исследования космоса. Так как многие из наших читателей интересуются указанными проблемами, мы пригласили этот журнал на наши страницы. Ниже мы публикуем статью, подготовленную для «Кванта» редакцией журнала «Земля и Вселенная».

В. А. БРОНШТЭН

ПРОТИВОСТОЯНИЯ МАРСА

Кружок юных любителей астрономии успешно провел наблюдения очередного противостояния Марса и решил подготовиться к следующему. Для планирования наблюдений надо знать, когда оно наступит. Примерно через два года, но в каком месяце? «Астрономический календарь» на 1975 год еще не вышел. Как же быть?

— Да очень просто, — заявляет один из членов кружка. — Посмотрите хотя бы в «Справочнике любителя астрономии» П. Г. Куликовского или в любом учебнике астрономии. Интервал между противостояниями Марса (его синодический период) составляет 780 суток, то есть два года и 50 суток. Последнее противостояние было 25 октября 1973 года, значит, следующее будет 15 декабря 1975 года.

Для проверки возьмем толстый том «Астрономического ежегодника СССР» на 1975 год (он уже вышел) и найдем дату — 15 декабря 1975 года, точно как по нашему расчету.

Но радоваться рано. Попробуем таким же образом рассчитать, когда было противостояние Марса в 1969 году, исходя из даты великого противостояния 10 августа 1971 года. Вычитая 780 суток, получим 21 июня 1969 года. Обратившись же к «Астрономическому календарю» за 1969 год, найдем там совсем другую дату — 31 мая. Интервал оказывается не 780, а 802 суток.

Возьмем другой пример. Противостояние Марса в 1954 году наступило 24 июня, а следующее за ним великое противостояние — 10 сентября 1956 года, через 809 суток. А вот между противостояниями Марса 14 января 1946 года и 17 февраля 1948 года прошло только 764 суток.

Кажется, вопрос ясен. Приводимое во всех учебниках и справочниках число 780 суток — это *средняя* длительность синодического периода Марса. Реальные интервалы между его противостояниями могут колебаться в пределах от 764 до 811 суток. Причиной этого является эллиптичность марсианской орбиты.

На рисунке 1 показаны орбиты Земли и Марса. Пусть в исходное противостояние Марс и Земля были в точках M_1 и $З_1$ соответственно. Чтобы наступило новое противостояние, Земля должна сделать два полных оборота по своей орбите (затратив на это 365,25·2=730,5 суток *) и еще пройти дугу $З_1З_2$, а Марс — сделать один полный оборот (на что уйдет 687 земных суток) и пройти дугу M_1M_2. Дуги $З_1З_2$ и M_1M_2 в градусной мере почти равны друг другу (некоторую поправку здесь вносит опять же эллиптичность орбиты), но марсианская дуга длиннее земной в r_2/r_1 раз, где r_1 и r_2 — расстояния Земли и Марса от Солнца. Кроме того, как следует из III закона Кеплера, Марс движется по своей орбите медленнее Земли в $(r_2/r_1)^{1/2}$ раз. Поэтому, чтобы пройти «свою» дугу, Марсу требуется времени больше, чем Земле, в $(r_2/r_1)^{3/2}$ раз. Но Земля дает Марсу 43,5 суток «форы» (она ведь позже приходит в точку $З_1$, чем Марс в M_1). Если обозначить интервал времени, за который Земля пройдет дугу $З_1З_2$, через t, мы получим следующее уравнение:

$$t\,[(r_2/r_1)^{3/2}-1] = 43{,}5 \text{ суток.}$$

Поскольку орбиты не круговые, расстояния Земли и Марса от Солнца изменяются, то есть отклонение r_2/r_1 нельзя считать постоянным. Из полученного уравнения для любого отношения r_2/r_1 можно определить t. Время прохождения Марсом дуги M_1M_2 будет тогда $(t+43{,}5)$ суток, а интервал между противостояниями будет равен $(t+730{,}5)$ суток.

Найдем теперь интервалы между противостояниями, подставив r_1 и r_2 для перигелия, среднего расстояния и афелия орбиты Марса.

Результаты расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1

	r_2/r_1	$(r_2/r_1)^{3/2}$	t, сут.	$(t+730{,}5)$, сут.
Перигелий	1,38	1,55	79	810
Среднее расстояние	1,52	1,87	50	780
Афелий	1,66	2,22	35,5	766

На рисунке 1 более толстыми линиями выделены дуги, проходимые Марсом и Землей близ перигелия, афелия и в среднем положении на орбитах. Противостояния, происходящие вблизи перигелия, когда расстояние между Землей и Марсом не превышает 60 млн. *км*, называются великими противостояниями.

Поскольку ориентировка орбит Земли и Марса в пространстве почти не меняется даже за столетия, каждой дате года, на которую пришлось противостояние, соответствует вполне определенный интервал до следующего противостояния. Эта зависимость показана на графике (рис. 2). С помощью графика, зная дату прошедшего противостояния, можно без труда определить дату следующего.

Самые интересные для наблюдателей Марса — его великие противостояния. Данные, относящиеся к великим противостояниям, происхо-

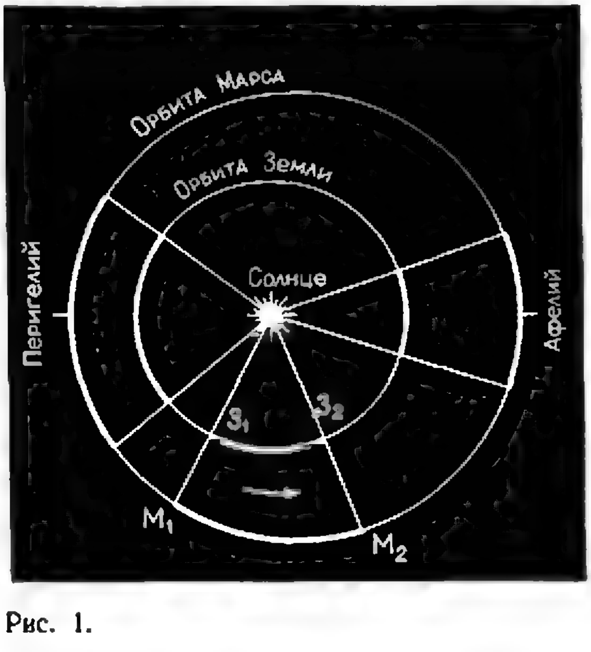


Рис. 1.

---

*) Здесь приведен звездный, или сидерический, период обращения Земли вокруг Солнца. Он на 20 минут длиннее тропического года.

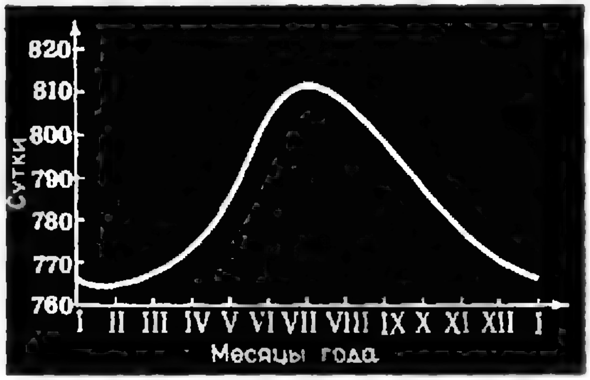


Рис. 2.

дившим за последнее столетие, представлены в таблице 2.

Таблица 2

Дата великого противостояния	Расстояние от Земли до Марса, а. е.	млн. км	Интервал, сут.
1877 IX 5	0,3767	56,35	5447
1892 VIII 4	0,3773	56,45	6259
1909 IX 24	0,3890	58,20	5447
1924 VIII 23	0,3728	55,77	5447
1939 VII 23	0,3880	58,05	6259
1956 IX 10	0,3781	56,56	5447
1971 VIII 10	0,3760	56,25	

За последнее столетие даты великих противостояний Марса были заключены между 23 июля и 24 сентября, охватывая двухмесячный период с датой перигелийного противостояния — 23 августа — посередине. Именно такое, очень редкое, противостояние было в 1924 году.

Интервалы между двумя последовательными великими противостояниями принимают только два значения: 5447 суток (15 лет без одного месяца) или 6259 суток (17 лет и 50 суток). 15-летние интервалы встречаются почти вдвое чаще. Может показаться, что имеет место четкая закономерность: после двух 15-летних интервалов следует один 17-летний, затем снова два 15-летних и т. д. Но не всегда бывает так. Как видно из таблицы, после такого 47-летнего цикла дата великого противостояния Марса сдвигается почти на две недели назад (сравните, например, 1909 и 1956 годы) и может выйти из «разрешенного» периода (см. рис. 1). Тогда великим будет уже не то противостояние, которое наступит через 47 лет после данного, а следующее. Так, казалось бы, очередное великое противостояние после 1971 года должно наступить спустя 15 лет, в 1986 году (через 47 лет после противостояния 1939 года). Но противостояние 1986 года придется на 10 июля и уже не будет великим (хотя и довольно благоприятным для наблюдателей южного полушария и тропического пояса). Следующее великое противостояние Марса наступит только 29 сентября 1988 года.

Таким образом, границы дат великих противостояний несколько шире, чем было в прошедшем столетии. Они заключены между 15 июля и 2 октября. Обычно, если великое противостояние наступает в конце июля или начале августа, за ним следует (через 2 года и 75—80 суток) тоже очень благоприятное противостояние, когда Марс ненамного дальше от Земли, чем во время великого. Пример такого «послевеликого» противостояния — противостояние 25 октября 1973 года. Напротив, если великое противостояние приходится на сентябрь, ему предшествует весьма благоприятное «предвеликое» противостояние в конце июня или начале июля. Примером могут служить «предвеликие» противостояния Марса 24 июня 1954 года или 6 июля 1907 года.

Возможен, вообще говоря, и такой редкий случай, как наступление двух последовательных противостояний 15 июля и 2 октября на равных расстояниях от перигелия. Тогда их оба можно считать великими.

Вернемся к циклам повторяемости великих противостояний Марса. Чтобы их рассчитать, возьмем отношение периодов обращения Марса и Земли:

$$\frac{T_М}{T_З} = \frac{686,979702}{365,256366}.$$

Если мы сможем с достаточной точностью представить это отношение в виде

$$\frac{T_М}{T_З} \approx \frac{p}{q}, \qquad (*)$$

где p и q — целые числа, то можно утверждать, что через p земных лет после великого противостояния Марс совершит q оборотов и снова наступит противостояние. Задача о представлении $T_М/T_З$ в виде (*) решается методом разложения в непрерывную (цепную) дробь*):

$$\frac{686,979702}{365,256366} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}}}}}$$

Обрывая дробь на одном из знаков «+», будем представлять ее в виде (*). Тогда мы получим следующие значения отношения $T_М/T_З$ (см. табл. 3).

Таблица 3

N знака «+»	1	2	3	4	5	6
$\frac{T_М}{T_З}$	2	$\frac{15}{8}$	$\frac{32}{17}$	$\frac{47}{25}$	$\frac{79}{42}$	$\frac{284}{151}$

Вначале здесь идут уже известные нам периоды: 2 года (между обычными противостояниями), 15 лет, 32 года (15+17), 47 лет. Следующий цикл, 79-летний, значительно устойчивее 47-летнего: даты великих (и всех остальных) противостояний сдвигаются вперед на 5—6 суток (сравните годы 1877 и 1956, 1892 и 1971). 79-летний цикл включает три 15-летних и два 17-летних периода, чередующихся в таком порядке: 15, 17, 15, 15, 17.

Следующий цикл длится уже 284 года. Он равен сумме трех 79-летних циклов и одного 47-летнего. За этот срок Марс совершает 151 оборот вокруг Солнца, происходит 133 противостояния. Поскольку период одного обращения Марса вокруг Солнца равен 1,88088 земных года, длительность 151 обращения составляет 284,014 года, или 284 года 5 суток. Отсюда следует, что через 284 года дата противостояния сдвигается примерно на 3 суток назад.

Все это очень интересно, скажет читатель, но зачем могут понадобиться такие большие циклы? Приведем пример, иллюстрирующий это.

Недавно к автору этих строк обратилась историк-литературовед Я. В. Станюкович с просьбой рассчитать условия видимости Марса в Польше и Западной Руси в 1604—1605 годах. Дело в том, что поэма польского поэта начала XVII века Яна Жабчица, посвященная походу на Русь в 1604—1605 годах Дмитрия Самозванца, озаглавлена «Кровавый Марс Московский». Откуда взялось это название? Требовалось выяснить, в каких условиях видимости находился Марс в 1604 году.

Но как это сделать? Астрономических ежегодников в ту пору не издавали. Единственным наблюдателем Марса в то время был Кеплер: противостояние 1604 года было последним, которое он наблюдал и включил в обработку для вывода своих законов планетных движений вместе с наблюдениями Тихо Браге. Искать нужные данные в сочинениях Кеплера? Автор решил пойти по более простому пути.

---

*) О методах разложения см. статью: Н. М. Бескин, Бесконечные цепные дроби («Квант», 1970, № 8) или книгу: Н. Я. Виленкин и др., Алгебра, учебное пособие для 9 классов средних школ с математической специализацией (М., «Просвещение», 1968).

Возьмем 284-летний цикл. Как мы уже говорили, через такой период противостояние наступает с отставанием на трое суток. В 1604 году условия видимости Марса должны были быть близки к условиям 1888 года, когда уже издавался английский астрономический ежегодник «Морской альманах». В нем сказано, что в 1888 году противостояние Марса наступило 9 апреля. Значит, в 1604 году оно должно было наступить 6 апреля. Самозванец выступил в поход в августе 1604 года. Следовательно, во время похода на широтах Кракова (50°), Чернигова (51°,5) и других городов, через которые проходил путь армии Самозванца, Марс был еще виден по вечерам низко над горизонтом (его склонение составляло около — 20°) и мог дать основание для заглавия поэмы Жабчица.

Таковы особенности наступлений и чередований противостояний Марса — явлений, не менее популярных среди любителей астрономии, чем солнечные и лунные затмения.

Лабиринт-алфавит

В 64 клеточки квадрата вписаны буквы алфавита. Начиная с буквы А в верхнем левом углу, проведите ломаную несамопересекающуюся линию, которая проходила бы ровно через 33 буквы алфавита и заканчивалась в нижнем правом углу буквой Я. Ломаная может пересекать стороны маленьких квадратиков, но не должна проходить через их вершины.

А	Б	Н	Ю	Р	Д	Е	Ю
Ж	Ш	М	Д	К	Ш	Ж	Р
Ъ	У	Ы	Л	М	Б	Ъ	Л
О	Ы	В	Ф	Э	У	Е	Х
Ч	Й	Щ	С	Ь	Г	Л	Н
Ц	Ф	З	Щ	С	Т	Й	К
П	Ё	Т	Ь	П	Э	Ц	Ч
И	В	Ё	Г	З	О	И	Я

А	Х	Е	Ы	Б	Ж	К	Щ
Н	С	П	Р	Щ	О	Ш	О
З	Ё	У	Ъ	Е	М	Й	Ь
В	Х	В	И	П	Ф	Ч	Н
Ш	У	Г	Л	Ц	Ю	Д	Ё
А	М	Ы	Э	Ц	Л	И	З
Т	Ж	Ч	Б	Э	Ю	Ъ	Р
Й	Ь	К	С	Г	Д	Ф	Я

Л. П. Мочалов

Р. С. ГУТЕР, М. В. ДОНСКОЙ

МАШИНА ИГРАЕТ В ШАХМАТЫ

Попытки составить программу для игры в шахматы начались почти сразу же после создания программно-управляемых машин. В 1967 году состоялся первый шахматный матч машин СССР — США. За СССР выступала программа, составленная группой математиков Института теоретической и экспериментальной физики, за США — программа группы математиков Стенфордского университета. Матч из четырех партий выиграла программа ИТЭФ со счетом 3:1. В 1972 году та же программа, усовершенствованная в Институте проблем управления (автоматики и телемеханики) АН СССР, под именем «Каисса-72» играла матч с читателями «Комсомольской правды». На этот раз противники оказались сильнее, и матч закончился со счетом 1,5:0,5 в пользу читателей. И, наконец, 5 августа 1974 года начался первый чемпионат мира по шахматам среди ЭВМ — двенадцать ЭВМ из восьми стран вступили в борьбу за звание сильнейшего электронного шахматиста нашей планеты. Чемпионат проводился по швейцарской системе в 4 тура. Выиграв последовательно у машин «Франц» (Австрия), «Теч-2», «Хаос» и «Остринч» (все США), «Каисса» стала первым чемпионом мира по шахматам среди ЭВМ. Статья об этом турнире будет опубликована в «Кванте» № 12, 1974.

В этой статье рассказано, как ЭВМ играют в шахматы.

Составление программы шахматной игры для электронной вычислительной машины требует решения следующих трех сложных проблем:

1) *создание способа записи и хранения в машине информации о позиции на доске и о ходе;*

2) *создание алгоритма, с помощью которого машина должна выбирать очередной ход;*

3) *реализация этого алгоритма в виде программы при известном способе записи и хранения информации.*

Запись позиции

Занумеруем клетки шахматной доски двузначными числами, первая цифра которых означает номер вертикали (в обычной шахматной нотации он обозначается буквой), и вторая — номер горизонтали (обе нумерации начинаем с цифры 0). Так как горизонталей и вертикалей по восемь, то можно воспользоваться удобной для машины восьмеричной системой счисления, в которой применяются цифры 0, 1, 2, ..., 7*). Таким образом, поле a1 будет иметь номер 00, поле a8 — номер 07, поле d5 — номер 34, а поле h8 — номер 77.

Занумеруем также и шахматные фигуры, присвоив пешке номер 1, коню — 2, слону — 3, ладье — 4, ферзю — 5 и королю — 6, причем белым фигурам — положительные номера, а черным — отрицательные. Каждому полю доски в позиции сопоставим число — номер стоящей на этом поле фигуры или 0, если поле свободно.

В предложенной нумерации номером фигуры является восьмеричная цифра, для изображения которой достаточно трех двоичных разрядов, и знак (цвет фигуры), для записи которого нужен еще один разряд. Поэтому для записи позиции нужно отводить четыре разряда на каждое поле. Первый разряд отведем для записи знака (0 — «плюс», 1 — «минус»), а следующие три — для записи номера фигуры. В одной ячейке памяти поместится информация об одной горизонтали, при этом в ячейке памяти будет занято 32 разряда. Вся информация о позиции на доске займет 8 ячеек (по 1 на каждую горизонталь).

---

*) Читателю будет полезно вспомнить или прочитать статьи: Р. С. Гутер, Вычислительные машины и системы счисления, «Квант», 1971, № 9, Язык человека и язык машины, «Квант», 1971, № 10.

На рисунке 1 показана запись первой горизонтали начальной позиции. Читатель легко разберется в ней, вспомнив представление восьмеричных цифр в виде *триад* двоичных:

$$0_8 = 000_2,\ 1_8 = 001_2,\ 2_8 = 010_2,$$
$$3_8 = 011_2,\ 4_8 = 100_2,\ 5_8 = 101_2,$$
$$6_8 = 110_2,\ 7_8 = 111_2$$

(здесь индекс у числа означает систему счисления, в которой оно записано).

Запись хода

Ход можно представить в виде пары чисел: номера поля, на котором фигура была, и номера поля, на которое фигура пошла. Удобнее, однако, как это делается в шахматной нотации, сообщить оба поля, а также наименование и цвет (то есть номер и знак) ходившей фигуры. Тогда потребуется уже три числа, причем первое из них будет однозначным (но со знаком), а два других — двузначными.

Так, запись

+1 41 43

означает *ход белой* (+) *пешкой* (1) *с поля* e2 (41) *на поле* e4 (43), то есть в обычной шахматной нотации весьма популярный ход e2 — e4, известный даже О. Бендеру. Запись

—5 37 64

соответствует ходу черных, обычно записываемому как Фd8 — g5.

Выбор хода

Довольно просто «научить машину» делать ход, то есть проверить его возможность и внести соответствующие изменения в записи позиции. Неизмеримо сложнее научить ее *выбирать ход*, предпочтя из нескольких возможных в данной позиции один «наилучший». Для этого нужно уметь *сравнивать различные ходы.*

Одним из способов может служить перебор вариантов. Но перебор «до конца», то есть до позиции, в которой известен результат, невозможен из-за необозримых размеров требуемого числа вариантов. Приходится ограничиться рассмотрением некоторого определенного количества ходов. Но тогда нужно уметь *сравнивать позиции* и отвечать на вопрос, какая из них лучше. После этого мы можем считать, что лучшим ходом является тот, который ведет к лучшей позиции.

Наиболее простой оценкой может служить разница материальных ресурсов белых и черных. При этом каждая фигура оценивается определенным числом очков (баллов). Для оценки позиции достаточно подсчитать сумму баллов, соответствующих находящимся на доске белым и черным фигурам, и найти их разность. Конечно, такая оценка является слишком грубой: известно, что часто приходится жертвовать материалом ради

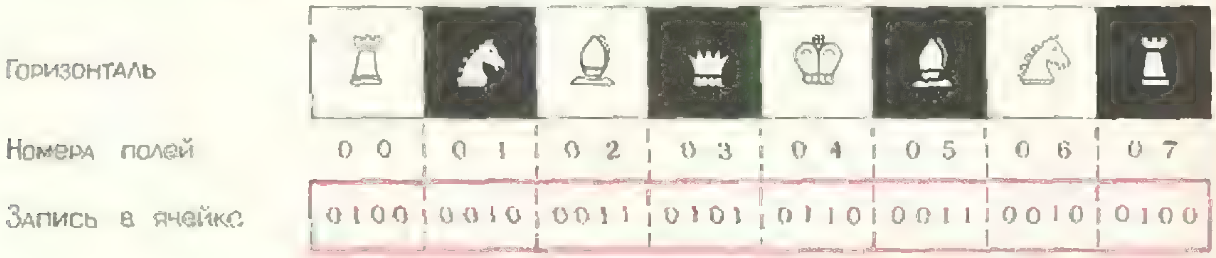


Рис. 1.

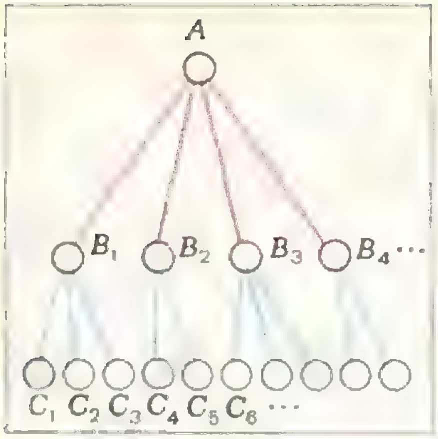


Рис. 2.

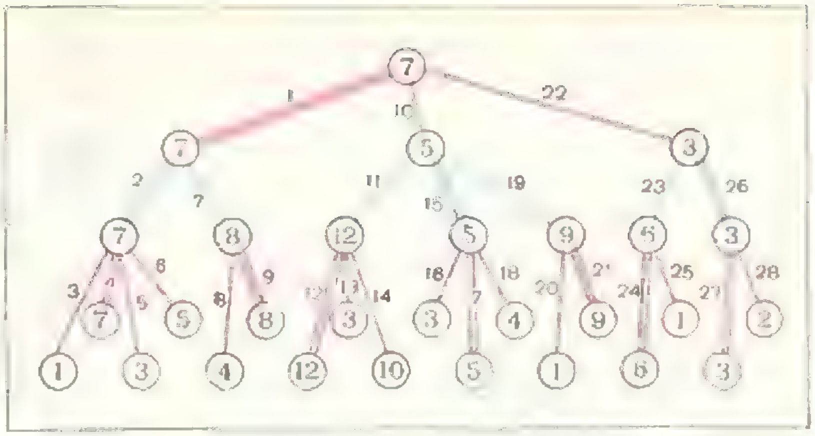


Рис. 3.

приобретения позиционных или тактических преимуществ. Поэтому более тонкие оценки включают также и *тактические факторы: возможность* форсированного выигрыша материала, наличие сдвоенных пешек у себя или у противника, возможность рокировки, занятие ладьей или ферзем открытой линии и т. п.

Каким же образом воспользоваться *умением оценивать позиции* с помощью той или иной выбранной оценочной функции? Ясно, что недостаточно оценивать позиции, получающиеся после одного сделанного хода, а необходимо рассматривать все возможные позиции на несколько ходов вперед. Естественно, что чем больше «глубина перебора», то есть число ходов, после которых позиция оценивается, тем лучше выбор хода. Однако необходимо считаться с тем, что увеличение глубины на 1 ход увеличивает время выбора хода приблизительно в 40 раз.

Выбор хода осуществляется при помощи *минимаксной процедуры*, которую мы проиллюстрируем на примере перебора на 1 ход. Пусть из позиции A (ход наш) возможны ходы, приводящие к позициям B_1, B_2, B_3 ... (рис. 2). Из полученных позиций возможны ходы противника, приводящие к позициям C_1, C_2, C_3, C_4, ..., оценки которых нам известны. Поскольку в позиции, скажем, B_1, противник выберет скорее всего самый сильный возможный ход, то за оценку B_1 следует принять минимальную из оценок позиций C_1, C_2, C_3. Так же определяются оценки остальных позиций B_2, B_3, ..., получающихся после различных наших ходов.

Зная оценки позиций B_1, B_2, B_3, ..., мы можем выбрать из них наибольшую. Ход, ведущий в позицию с этой максимальной оценкой, и будет лучшим при выбранной глубине перебора.

Аналогичная стратегия выбора хода применяется и при любой другой глубине перебора: из данной позиции делается заданное число ходов, и полученная позиция оценивается с помощью выбранной оценочной функции. Затем изменяется последний ход и оценивается новая полученная позиция. После того как проверены все возможные последние ходы, изменяется предпоследний и так далее, чтобы в конечном счете были оценены все позиции, которые могут получиться из исходной после заданного числа ходов. Полученные «на нижнем уровне» оценки переносятся «вверх», причем для позиций с ходом противника выбирается минимальная, а для позиций с нашим ходом — максимальная из оценок «ниже расположенных» позиций.

Таким образом, свой ход и ход противника следует рассматривать по-разному. В дальнейшем мы будем называть их *полуходами*. Пример схемы выбора хода при переборе на три полухода приведен на рисунке 3. Здесь кружки означают позиции, красные отрезки — свои ходы, синие — ходы противника.

Цифры в кружках означают оценки позиций, полученные описанным выше путем (для «нижних» позиций — с помощью оценочной функции, для «вышестоящих» — по минимаксной процедуре). Цифры возле отрезков показывают последовательность рассмотрения соответствующих ходов при переборе. Двойными линиями отмечены лучшие ходы из каждой позиции.

Отметим только, что для большей наглядности рисунка мы ограничились небольшим числом возможных ходов из каждой позиции. В реальной игре «веток», идущих из каждой позиции, обычно гораздо больше.

Реализация алгоритма на машине

Итак, мы выбрали способ записи и хранения информации о позиции и ходе и алгоритм выбора хода. Остается перевести этот алгоритм на язык машины, превратив его в программу игры. Это тяжелая работа, требующая программистского искусства, так как от качества программного осуществления алгоритмов в заметной степени зависит время работы программы, то есть время выбора хода. Мы не в состоянии, естественно, воспроизвести устройство такой программы сколько-нибудь подробно, опишем его лишь в самых общих чертах.

Существуют шесть подпрограмм P_1—P_6 (по одной на каждый тип фигуры). Каждая из них составляет список ходов, возможных из данной позиции фигурой данного типа. Подпрограмма P_7 координирует эти шесть подпрограмм и выписывает все ходы, возможные в данной позиции.

Кроме перечисленных подпрограмм, имеется подпрограмма P_8, которая выполняет очередной ход, получая новую позицию, подпрограмма P_9, вычисляющая оценку полученной позиции, подпрограмма P_{10}, реализующая минимаксную процедуру, и, наконец, управляющая программа P_0. Последняя решает, к какой из подпрограмм обратиться, назначает, какая позиция рассматривается и какой ход из нее делается, и собственно реализует алгоритм выбора хода.

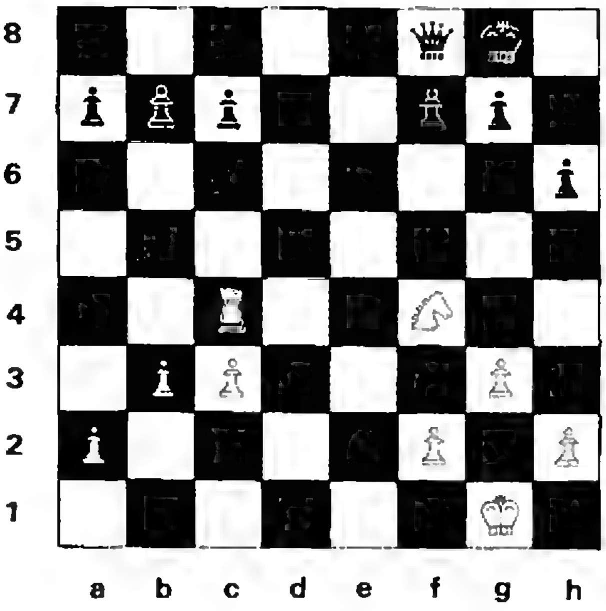


Рис. 4.

Подпрограммы P_1 — P_7 могут использовать вспомогательную информацию относительно позиции. Так, при построении возможных ходов удобно использовать «растр возможностей», который для каждой фигуры записывается следующим образом. Для каждой клетки шахматной доски отводится один разряд; для всей доски достаточно занять две ячейки памяти, по 32 разряда в каждой. В разрядах, соответствующих полям, на которые может пойти данная фигура, ставится 1, остальные разряды содержат 0.

Например, для позиции, приведенной на рисунке 4, растр возможностей для ладьи Лс4 показан на рисунке 5. Нижняя ячейка соответствует здесь нижней половине доски (горизонтали 4—1 по шахматной терминологии).

Работу подпрограммы P_4, строящей этот растр, можно представить себе так. В записи позиции подпрограмма выделяет тетраду (четыре двоичных знака), соответствующую соседнему полю в той же горизонтали, и анализирует ее.

Если эта тетрада нулевая, то поле свободно, ладья может на него пойти — в растре ставится 1 в разряд, соответствующий данному полю. После этого проверяется, является ли данное поле крайним полем доски. Если не является, то рассматривается сле-

8	7	6	5
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0

4	3	2	1
1 1 0 1 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0

Рис. 5.

дующее соседнее поле; если же поле было крайним, то подпрограмма переходит к рассмотрению другого направления.

Если выделенная тетрада не является нулевой, то подпрограмма P_4 анализирует ее первую цифру, определяющую цвет занимающей это поле фигуры. Если эта цифра — 0 (знак +, фигура белая), то поле занято своей фигурой. Подпрограмма P_4 ставит в соответствующий разряд растра 0 и переходит к рассмотрению нового направления. При цифре 1 (знак —, фигура черная) подпрограмма также переходит к рассмотрению нового направления, но в разряд, соответствующий данному полю, ставит 1: ладья может пойти на данное поле, побив стоящую здесь черную фигуру.

При рассмотрении возможных ходов ладьи по горизонтали нужно выделять тетрады из одной и той же ячейки. Для вертикали нужно выделять тетрады, занимающие одно и то же положение в соседних ячейках, соответствующих различным горизонталям.

На таких же принципах основана работа остальных подпрограмм. Так, подпрограмма P_3, определяющая ходы слона, для выделения тетрады соседнего поля производит и сдвиг на 4 разряда, и переход к соседней ячейке. Подпрограмма P_5 для ферзя строит все возможные ходы для ладьи с помощью подпрограммы P_4 и все возможные ходы для слона с помощью подпрограммы P_3, а затем объединяет их.

Обычно работа программы «выбора хода» заканчивается тем, что она выбирает ход, который следует сделать в данной позиции, печатает его и останавливается. Ход можно печатать в описанной выше форме, например:

+2 10 22,

а можно воспользоваться алфавитно-цифровым печатающим устройством и напечатать тот же ход в привычном для шахматиста виде

К b1 — c3.

Теперь нетрудно организовать «полную игру». Для этого в дополнение к программе «выбора хода» нужна программа, связывающая шахматную программу «с внешним миром». Эта программа должна уметь вводить в машину позицию, в которой требуется выбрать ход, условия выбора хода (например, глубину перебора), и обеспечивать контроль корректности введенной информации.

У этой программы есть «главная доска», позиция на которой остается неизменной в процессе выбора хода, она изменяется лишь после того, как ход выбран и напечатан.

* *
*

Не нужно думать, что описанные нами способы решения основных проблем программирования шахматной игры являются единственными. Это совсем не так, возможны и другие. Рассматривая каждую из этих проблем изолированно, можно найти способы упростить или улучшить те или иные детали решения одной из них, однако нередко оказывается, что это отрицательно сказывается в других частях программы. Например, можно выбрать иной способ записи позиции, отличающийся значительно большей компактностью, то есть экономящий объем машинной памяти. Но оценка позиции при таком способе записи может потребовать гораздо большего числа действий. Достигнуть же улучшения «по всем параметрам» хотя и возможно, но весьма затруднительно.

Сформулированные три основные проблемы программирования шахматной игры отнюдь не равноправны, и их решение весьма по-разному влияет на качество программы. Если раньше способы решения первой и третьей проблем могли как-то влиять на время работы программы, то сейчас здесь резервов почти не осталось. Совсем иначе обстоит дело с алгоритмом выбора хода: его влияние на качество и силу игры является решающим.

В «Каиссе-72» эта проблема решена так: перебираются все варианты до глубины 7 полуходов, после этой глубины перебираются только так называемые «форсированные ходы» — взятия, шахи и ответы на них. Общая глубина перебора колеблется от 7 до 30 полуходов.

Читатель может заметить, что при полном переборе на 7 полуходов (при среднем числе в 40 ходов из каждой позиции) придется рассматривать 40^7 позиций, даже не считая форсированных ходов. Это слишком много. Однако авторы «Каиссы-72» провели огромную работу по выработке правил, позволяющих отбрасывать некоторые позиции или ходы, что позволило существенно сократить перебор. Фактически при переборе на 7 полуходов (вместе с форсированными вариантами) рассматривалось около 750 000 позиций, что занимало меньше часа работы машины.

В лучшей американской шахматной программе, созданной в Массачусетском технологическом институте Гринблаттом, в каждой позиции рассматриваются 10 ходов, «лучших» по некоторой оценке, отличной от оценки позиции, возникающей после соответствующего хода, и производится перебор, глубина которого колеблется от 6 до 16 полуходов. Есть и другие способы решения этой проблемы.

Однако, несмотря на имеющиеся успехи, пока все еще нет алгоритма выбора хода, позволяющего выбирать достаточно сильные ходы при естественном ограничении на время выбора. Для нахождения такого алгоритма необходимы принципиально новые идеи. Поиск этих идей требует детального изучения «поведения» программы при выборе хода, причин, влияющих как на выбранный ход, так и на время выбора. Это можно проследить при большом числе экспериментов с шахматной программой.

Итак, к трем проблемам создания шахматной программы прибавляется еще одна проблема — ее исследование; решение этой проблемы необходимо для усовершенствования программы — создания «электронного гроссмейстера» или хотя бы «электронного мастера». Здесь придется решать большое число вопросов, о каждом из которых сейчас даже нельзя сказать, что его решение приведет к лучшему пониманию «поведения» машины и усилению игры программы.

Для иллюстрации уровня шахматной игры машины приводим одну из партий матча СССР — США, сыгранного в 1967 году. После каждого хода в скобках указано число позиций, рассматривавшихся машиной при выборе данного хода. Глубина перебора ходов советской программой составляла в этой партии 5 полуходов (без форсированных ходов).

	Белые (СССР)	**Черные (США)**	
1.	e2 — e4	e7 — e5	
2.	Kg1 — f3	Kb8 — c6	
3.	Kb1 — c3	Cf8 — c5	
4.	Kf3 : e5	Kc6 : e5	(86916)
5.	d2 — d4	Cc5 — d6	(105617)
6.	d4 : e5	Cd6 : e5	(66133)
7.	f2 — f4	Ce5 : c3×	(160224)
8.	b2 : c3	Kg8 — f6	(15883)
9.	e4 — e5	Kf6 — e4	(69094)
10.	Фd1 — d3	Ke4 — c5	(58735)
11.	Фd3 — d5	Kc5 — e6	(64744)
12.	f4 — f5	Ke6 — g5	(85895)
13.	h2 — h4	f7 — f6	(184994)
14.	h4 : g5	f6 : g5	(110868)
15.	Лh1 — h7	Лh8 — f8	(117441)
16.	Лh7 : g7	c7 — c6	(372309)
17.	Фd5 — d6	Лf8 : f5	(242350)
18.	Лg7 — g8+	Лf5 — f8	(1331)
19.	Фd6 : f8×		(857)

В. Н. Вагутен

Задачи о графах или сказка «Иван-царевич и Серый Волк»

Посвящается учительнице школы № 7
г. Батуми Медее Илларионовне Жгенти

Похвальное слово Серому Волку

Читая сказку «Иван-царевич и серый волк» *), невольно удивляешься: Иван-царевич практически ничего не делает, а ему достаются все сокровища — Жар-птица, конь златогривый и даже Елена Прекрасная. Все Ивану-царевичу добывает Серый Волк. Однако дело обстоит не совсем так, как кажется на первый взгляд.

Иван-царевич выдерживает вступительный экзамен — он не спит ночью, как его братья, и благодаря этому видит Жар-птицу. Ему удается даже схватить Жар-птицу за хвост. Правда, в руке у него остается только одно перо.

Поэтому нам кажется, что Серый Волк не случайно обратил внимание на Ивана-царевича и съел его коня.

---

*) Имеется в виду русская народная сказка в пересказе А. Толстого (М., «Детская литература», 1973).

Серый Волк — блестящий педагог. Он исподволь берется за обучение Ивана-царевича. Сначала он заставляет самого Ивана-царевича попробовать решить все задачи: заполучить Жар-птицу у царя Афрона, потом коня златогривого у царя Кусмана и, наконец, Елену Прекрасную у царя Далмата. Всякая задача становится по-настоящему привлекательной только после того, как попробуешь ее решить. Когда Иван-царевич под руководством Серого Волка по достоинству оценил все сокровища, Серый Волк сам решает для него все задачи.

В результате Иван-царевич получает все, что пожелал. Однако приходится ему выдержать еще одно испытание — быть убитым своими же братьями, завистливыми конкурентами, не сдавшими вступительного экзамена. Тут надо еще раз отдать должное Серому Волку, который в этот трудный час спасает Ивана-царевича. Можно только пожелать каждому трудолюбивому ученику такого руководителя.

Метод обучения, принадлежащий Серому Волку, понравился нам, и мы хотим изложить несколько задач как продолжение этой сказки.

О том, как Серый Волк показывает, что не всякое желание выполнить можно

Итак, собрался Иван-царевич жениться на Елене Прекрасной. Да не тут-то было. Съехалось на свадьбу много гостей, и вдруг царь Афрон, царь Кусман да царь Далмат пожаловали. Говорят они:

— Обманул ты нас, Иван-царевич, все забрал. Ну, да ладно. Загадаем тебе загадки. А не разгадаешь — все назад возьмем.

Первым царь Афрон речь держал, и сказал он так:

— Соберется у меня завтра несколько гостей, да не все они друзья. Скажу только, что у каждого из них число друзей четное. Докажи, что смогу их посадить за круглыми столами так, чтобы каждый гость рядом с друзьями сидел.

Тут Иван-царевич еще раз Серого Волка позвал, хотя и простился было с ним навечно. Спрашивает Серый Волк:

— Что, Иван-царевич, сидишь — пригорюнился, голову повесил?

— Как же мне не печалиться, Серый Волк? Как мне гостей за круглыми столами усадить?

Серый Волк отвечает:

— Много я задач решал, да и много из них решил. Но эту задачу не всегда можно решить. Позови, Иван-царевич, семь гостей твоих, покажу тебе контрпример.

Позвал Иван-царевич семь гостей. Тут Серый Волк превратил каждого из них в точку, а эти точки дугами соединил. И увидел тут Иван-царевич рисунок 1. А Серый Волк этот рисунок так пояснил:

— Если две точки дугой соединены, то, значит, гости, которые в эти точки превратились, друзьями будут. Так вот, знай, что всех этих гостей за круглыми столами никак рассадить нельзя.

Побежал Иван-царевич к царю Афрону и контрпример Волка показал. Царь, как только контрпример увидел, с испугу где стоял, там и упал. А как пришел в себя, говорит:

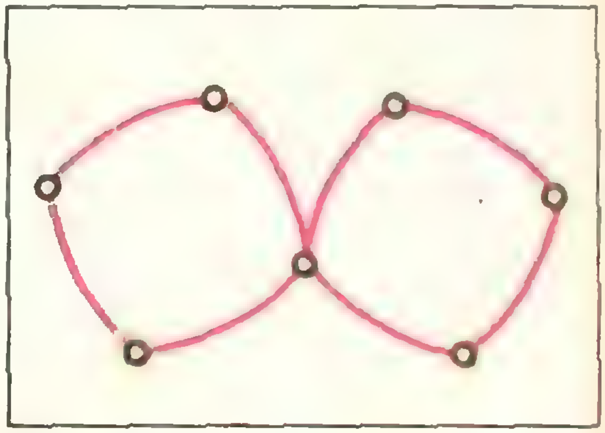


Рис. 1.

— Забыл я сказать, что у всех моих гостей одно и то же число друзей.

С тем Иван-царевич к Волку и отправился.

— Лиходей твой царь Афрон, — сказал Серый Волк и зубами щелкнул. — Да ладно уж, рассадим его гостей за круглыми столами. Только ты пойди, узнай сначала, что царь Кусман и царь Далмат хотят. Может, это нам и поможет.

О том, как Иван-царевич про «перешеек» забыл

Говорит царь Кусман:

— Сослужи мне, Иван-царевич, службу. Всего в царстве у меня десять городов есть, некоторые из них дорогами соединены. От каждого города четное число дорог отходит. Ты, Иван-царевич, из града стольного выезжай, все дороги по одному разу объезди и назад в столицу воротись.

Пуще прежнего пригорюнился Иван-царевич. Пошел он снова к Серому Волку. А Серый Волк ему:

— Не тужи, Иван-царевич, а послушай мои советы. Выезжай из столицы по одной дороге и дальше езжай, как хочешь, но только так, чтобы по одной и той же дороге два раза не проехать. Гляди, раньше времени в столицу не поворачивай, да еще гляди, чтобы никакая дорога для тебя *перешейком* не стала.

Обрадовался Иван-царевич и не заметил, как в столице царя Кусмана очутился. Вскочил он на коня златогривого и поскакал по дорогам. Понравился ему совет Волка: езжай, как хочешь, — так и помчался, смотрел только, чтобы по своему следу не ехать!

Долго ли, коротко ли, а приезжает он снова в столицу. Смотрит, на всех дорогах из столицы он след оставил, значит, дальше ему ехать нельзя, а еще несколько дорог не пройдено. Вспомнил он тут последний совет Волка, да ведь забыл спросить, что тот «перешейком» называет! Так и вернулся ни с чем.

Стал ему Серый Волк выговаривать:

— Э, брат, с разумом поехал, да без разума приехал.

Превратил тут Волк города в точки, дугами их соединил так, как дороги идут, и неудачный путь Ивана-царевича нарисовал. Увидел тут Иван-царевич рисунок 2.

— Ну, прости же меня, прости, Серый Волк.

— То-то прости... Да уж ладно... Давай лучше послушаем, что царь Далмат скажет.

Про чередующиеся цепи

Говорит царь Далмат:

— Живут у меня в замке десять добрых молодцев и десять красных девиц. Знаю я, что каждый добрый молодец с двумя красными девицами знаком и каждая девица двух молодцев знает. Ты, Иван-царевич, их всех посватай, да так, чтобы незнакомые сосватаны не оказались.

Пришел Иван-царевич к Серому Волку и рассказывает:

— Дал мне царь Далмат задачу легче легкого.

Усмехнулся Серый Волк:

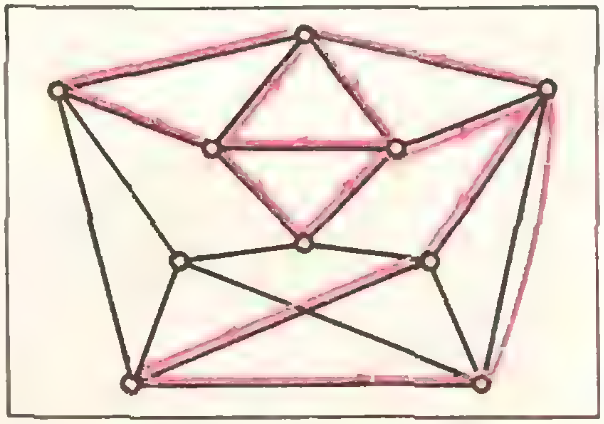


Рис. 2.

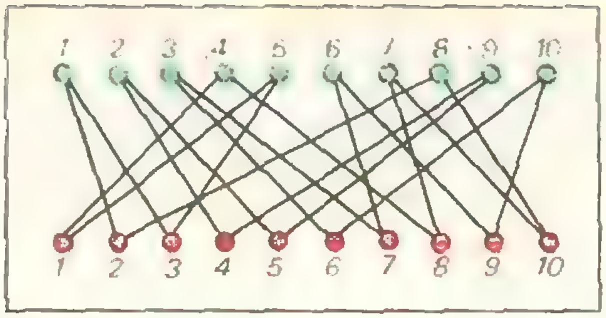


Рис. 3.

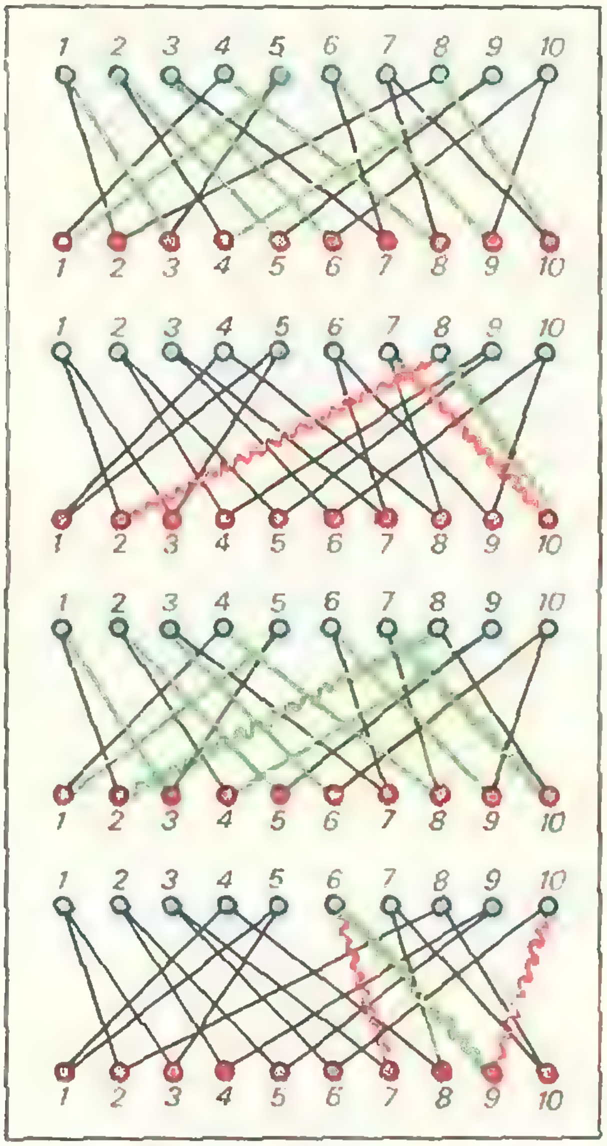


Рис. 4 *а, б, в, г.*

— Не спеши радоваться, сначала задачу реши, а потом уж говори.

Превратил Серый Волк добрых молодцев в синие точки, а красных девиц — в красные точки, да еще перенумеровал, чтобы не запутаться. Потом эти точки отрезками соединил так, что видно стало, кто с кем дружит. И увидел Иван-царевич рисунок 3. Начал он молодцев и девиц, как придется, зелеными линиями на пары разбивать, и получилось у него вот что (см. рис. 4): два молодца (7 и 10) одинокими остались и двух девиц (2 и 7) он обидел.

Схватился Иван-царевич за голову и заплакал. Утешил его Серый Волк:

— Ничего, Иван-царевич, я твое решение исправлю. Откуда же знать тебе *метод чередующихся цепей*? Смотри лучше, что я делать буду. Сейчас я еще 7-го молодца посватаю.

Посмотрел Серый Волк рисунки 3 и 4 и начал новый рисунок рисовать. Взял 7-го молодца и со знакомой ему 10-й красной девицей красным отрезком соединил, снова взглянул на рисунок 3, и ее с 8-м женихом зеленой линией связал. Потом от 8-го молодца красную линию провел. Привела эта линия ко 2-й девице, которая еще не посватана (см. рис. 4, б).

Получилась у Серого Волка такая цепь: красный отрезок, зеленый отрезок, красный отрезок, ... Говорит Волк:

— Вот это чередующейся цепью и называется. Сейчас мы красные отрезки на зеленые поменяем, а зеленый уберем. Остальных, как ты хотел, так и будем сватать. —И превратил волк рисунок 4, *а* в 4, *в*.

— Теперь уж 7-й молодец и 2-я девица обижены не будут. Ну скажи сам, что нам с 10-м молодцем делать, как его посватать?

Взял тогда Иван-царевич и рисунок 4, *г* нарисовал, а потом сватовство еще раз исправил. Получился у него рисунок 5.

Так Иван-царевич всех и посватал.

Вдруг слышат они с Волком, как кто-то им с дуба человечьим голосом говорит. Посмотрели, а там Вороненок сидит, сын того Ворона, который живую воду раньше приносил.

— Карр, карр. Можно и проще эту задачу решить — сразу на рисунке 3 обводить отрезки, чтобы цвета чередовались: красный, зеленый, красный, зеленый...

Подумал Серый Волк и говорит:

— Правильное замечание Вороненок сделал. Но мой метод тем и хорош, что годится для любых случаев, даже для такого, когда много молодцев и столько же девиц, каждый из них с *m* девицами знаком, а каждая девица *m* молодцев знает. Суть его в том, что сватай, как хочешь, а потом чередующимися цепями исправляй.

Потрепал ласково Волк Вороненка.

— Оставайся с нами и слушай, что дальше будет.

Пошел Иван-царевич к царю Далмату и рисунок 5 показал. Нечего делать, уехал царь Далмат восвояси.

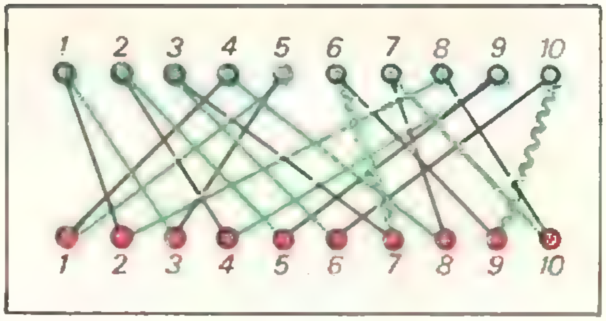


Рис. 5.

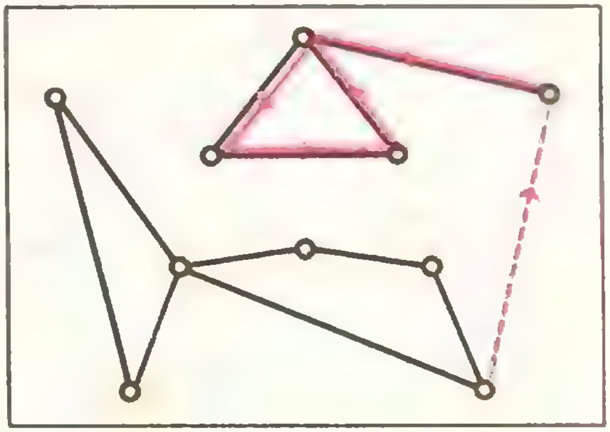


Рис. 6.

О том, как Иван-царевич сам догадался, что «перешейком» называется

— Дай-ка, Серый Волк, я сам подумаю, как мне кусманову задачу решить, — и снова Иван-царевич на рисунок 2 посмотрел.

Долго думал Иван-царевич и понял, наконец, какая дорога для него роковой стала. Если дороги, по которым он проехал, одну за другой с земли стирать (рис. 6), то плохой та дорога оказывается, после «стирания» которой все царство на такие две части разбивается, что из одной в другую никак не проедешь. Значит, на дорогу-перешеек (ее Волк пунктиром нарисовал) сворачивать не надо было.

Стал Иван-царевич на карте другой путь искать, такой, чтобы ни одна дорога перешейком не была, и нашел. «Эх, — подумал Иван-царевич, — спасибо Волку, что карту нарисовал и советы хорошие дал». Пошел к царю Кусману, путь показал. Тот и уехал прочь.

Сказочное решение

Осталось Ивану-царевичу первую задачу решить — ту, что царь Афрон загадал. Пошел он в чистое поле и додумался. Похвалил его Серый Волк, к царю Афрону отправил.

Говорит Иван-царевич:

— Будут у тебя, царь Афрон, *n* гостей, у каждого из них 2*m* друзей. Объясню я тебе, как этих гостей за круглыми столами усадить.

— Построй каждому гостю город, а если два гостя дружат, то ты дорогу между этими городами проложи. Потом объезжай эти дороги так, как я царство Кусмана объехал. А где ехать будешь, там на дороге стрелку ставь (рис. 7).

Получится у тебя, что у каждого города по *m* дорогам стрелки к нему ведут, а по другим *m* дорогам стрелки из него выходят. Это потому, что сколько раз ты из города выедешь, столько раз и въедешь.

Рассердился царь Афрон:

— Не пойму тебя, Иван-царевич. Мне гостей нужно за круглые столы усадить, а ты про какие-то города рассказываешь.

Отвечает ему Иван-царевич:

— Потерпи, до конца дослушай. Пусть у каждого твоего гостя сестра есть, так что сколько гостей-добрых молодцев, столько и красных девиц будет. Теперь смотри; если от какого-нибудь города-гостя в другой город-гость стрелка идет, то ты этого гостя с сестрой второго познакомь.

Поскольку из каждого города m стрелок выходит, и в каждый город m стрелок входит, то окажется, что каждый гость с m девицами знаком, а каждая девица m молодцев знает.

Теперь посватай их всех так, как я у царя Далмата сватал.

После этого можно и гостей рассаживать. Возьми любого гостя и за круглый стол посади. Справа рядом с ним того посади, с чьей сестрой первый гость посватан. Получится, что первый гость со своим шурином сидит. Справа от второго гостя тоже его шурина посади. Так дальше и рассаживай. Вот у тебя круглый стол и получится.

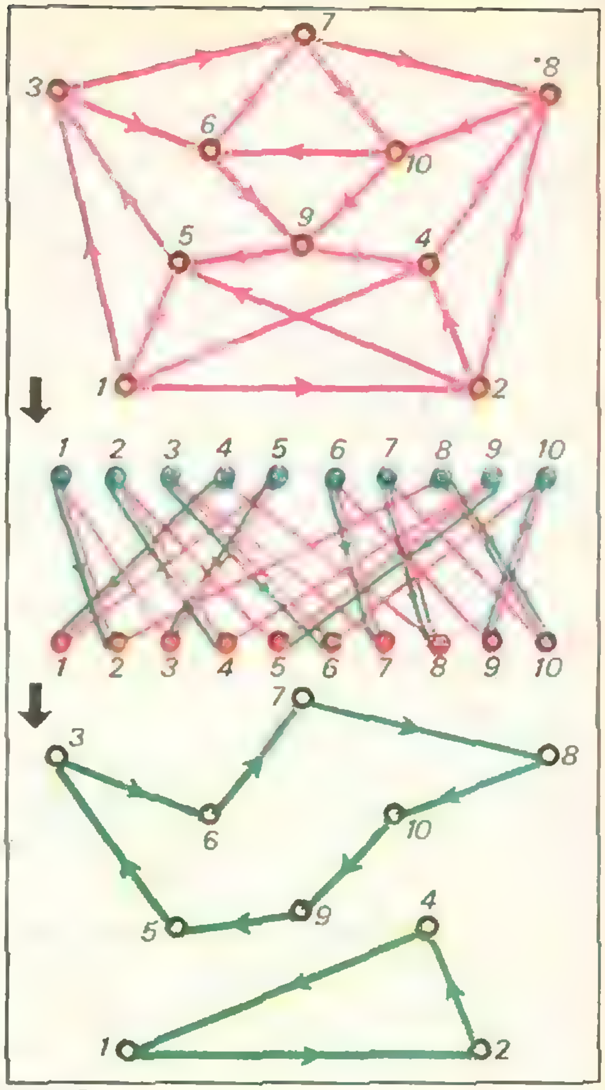


Рис. 7.

Если же так не всех гостей усадил, то еще один стол поставить придется. Снова какого-нибудь гостя бери, который за первый стол не попал, а рядом его шурина усаживай. А дальше все делай, как в первый раз.

И Иван-царевич для наглядности три рисунка 7 показал.

Смотрел, смотрел царь Афрон, премудрости этой не понял, но на слово поверил. С тем к себе и уехал.

А Иван-царевич поклонился Серому Волку и простился с ним навечно. Женился на Елене Прекрасной, и стали они жить-поживать, да горя не знать.

Послесловие

Задачи, встречающиеся в сказке, относятся к важной области математики — теории графов. *Графом* обычно называется множество точек и соединяющих их дуг. Поводом для написания этой сказки послужила задача М250 из «Задачника «Кванта», представленная здесь как исправленная «задача царя Афрона». Тот факт, что эта задача всегда решается, известен в теории графов как *теорема Петерсена* (Petersen Y., 1891). Путь доказательства этой теоремы представляется нам настолько изящным, что мы назвали его «сказочным решением». Доказательство состоит в последовательном сведении задачи к «задаче царя Кусмана», а затем к «задаче царя Далмата». Утвердительные ответы для этих задач называются соответственно *теоремой Эйлера* и *теоремой «о паросочетании»*; эти теоремы являются основополагающими в теории графов.

В сказке от лица Серого Волка формулируются алгоритмы для решения «задач Кусмана и Далмата». Серый Волк указывает правила, по которым можно решать эти задачи. Однако в сказке нет доказательства того, что эти алгоритмы обязательно приводят к цели. Чтобы получилось полноценное решение задачи М250, нам необходимо иметь эти доказательства.

Докажем сначала *теорему «о паросочетании»* в том виде, в котором Серый Волк сформулировал ее в ответ Вороненку (с. 27). При доказательстве мы будем пользоваться терминологией, принятой в сказке.

Допустим, что часть отрезков, соединяющих синие и красные точки, покрашена в зеленый цвет, однако несколько точек остались «свободными» (то есть соответствующие им девицы и молодцы — непосватанными), причем все отрезки, выходящие из свободных точек, имеют общие концы с зелеными отрезками. Такую ситуацию можно исправить посредством чередующихся цепей. Поэтому нам нужно показать, что обязательно существуют чередующиеся цепи, ведущие от свободных синих точек к свободным красным точкам. Сейчас мы опишем алгоритм, позволяющий находить эти чередующиеся цепи.

I шаг. Отметим знаком «+» тех молодцев, которые остались непосватанными (то есть свободные синие точки).

II шаг. Отметим знаком «—» всех знакомых девиц молодцев, помеченных знаком «+».

III шаг. Отметим знаком «+» всех женихов тех девиц, которые отмечены знаком «—».

Затем, не стирая уже поставленных пометок, будем чередовать II и III шаги до тех пор, пока это возможно.

Если в результате этих операций найдется непосватанная девица, помеченная знаком «—», то очевидно, что найдется чередующаяся цепь, ведущая от свободной синей точки к соответствующей свободной красной точке. Изменяя цвет вдоль этой цепи, мы увеличим число пар «жених — невеста» на единицу. Очевидно, что таким образом мы постепенно посватаем всех девиц и всех молодцев.

Осталось доказать, что *всегда по крайней мере одна из непосватанных девиц окажется помеченной знаком «—»*. (Напомним, что у каждой девицы m знакомых молодцев и у каждого молодца m знакомых девиц.) Допустим противное, то есть что все свободные красные точки оказались непомеченными. Обозначим через k число плюсов, а через l — число минусов. Ясно, что $l<k$: все помеченные красные девицы имеют женихов, эти женихи помечены знаком плюс, но кроме них есть еще непосватанные молодцы, также помеченные плюсом.

С другой стороны, должно быть $l \geq k$. В самом деле, число отрезков, отходящих от «плюсов», равно $k \cdot m$. Поскольку все красные концы этих отрезков помечены, то отрезков, отходящих от «плюсов», должно быть не больше, чем число $l \cdot m$ отрезков, подходящих к «минусам», то есть $l \geq k$. Итак, мы получили противоречие, и, значит, хотя бы одна помеченная минусом красная точка найдется.

Отметим еще, что эта на первый взгляд искусственная математическая задача является отправной точкой в теории транспортных сетей (см. статью Башмакова М. И. «Паросочетания и транспортные сети», «Квант», 1970, № 4).

Теперь докажем *теорему Эйлера* в том, что *все царство Кусмана можно объехать так, как нужно* (см. с. 25). (Отметим, что в задаче Кусмана молчаливо предполагалось, что города царства соединены дорогами так, чтобы из каждого города в любой другой можно было по ним проехать (*связный граф*).)

Представим себе граф-карту царства: города — точки, дороги — дуги. Выйдем из столицы и пойдем по дорогам. Условимся стирать каждую дорогу, а также город, если мы прошли все его дороги.

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем два замечания.

а) *Если выйти из столицы и идти по дорогам, пока это возможно, то остановиться можно только в столице.*

В самом деле, *придя* в любой город, мы можем *выйти* из него, так как по условию из каждого города исходит четное число дорог.

б) *На всякой карте городов, из которых выходит нечетное число дорог, — четное число.*

Правила Волка заключались в следующем:

1. *Если из города есть дорога, ведущая прямо в столицу, и есть еще дороги, то нужно идти не в столицу.*

(Окончание см. на с. 59).

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Фотокамера «Рыбий глаз»

В. Драчев,
А. Мазур

В 9-м номере нашего журнала за 1974 год мы рассказывали о научной конференции учащихся физико-математических школ-интернатов, которая проходила в марте этого года в г. Тбилиси. На этой конференции было заслушано сообщение В. Драчева об устройстве и работе прибора для получения фотографий с углом обзора, близким к 180°. Этот прибор был сконструирован группой учащихся школы-интерната № 165 г. Новосибирска. О том, как сделать самим подобную фотокамеру, рассказывается в этой статье.

Представим себе пловца, который без маски нырнул под воду. Какая картина откроется ему, если он будет смотреть вверх через спокойную поверхность водоема?

При условии, что водоем сравнительно небольшой, пловец увидит следующее. На темном потолке (поверхность воды) — яркое круглое окно, в которое «зажато» все небо от горизонта до горизонта. Все предметы, окружающие водоем, стоят по краям этого окна, устремленные своими «верхушками» к его центру. Более того, можно будет увидеть даже часть прибрежного дна.

Все это можно легко объяснить на основе явления полного внутреннего отражения света. Известно, что при переходе света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду существует предельный угол падения (угол α_0 на рисунке 1), начиная с которого свет не будет выходить из первой среды во вторую. Говорят, что в этом случае свет испытывает полное внутреннее отражение. Например, для перехода вода — воздух $\alpha_0 = 49°$.

А теперь представим себе, что все лучи идут в обратном порядке, то есть из воздуха в воду. Тогда, если поле обзора в воде заключено в конусе с углом раствора около 98° (то есть два предельных угла α_0), то угол обзора в воздухе будет 180°. Поле обзора становится гораздо шире.

Именно так видят, например, рыбы (рис. 2). Правда, предметы, размещенные по краям воздушной полусферы, оказываются сильно искаженными и, конечно, смещенными из своего положения.

Рыба может также видеть предметы, находящиеся в воде и не попада-

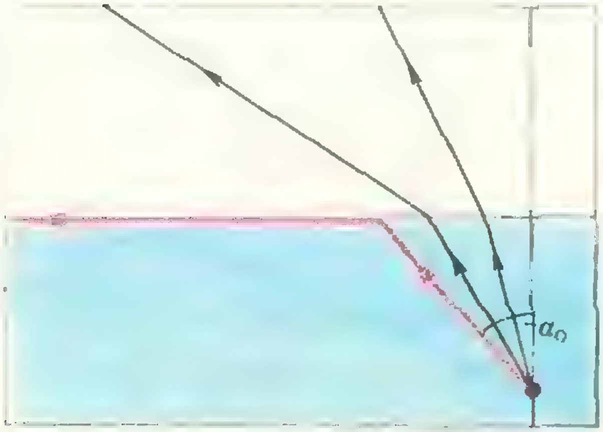


Рис. 1.

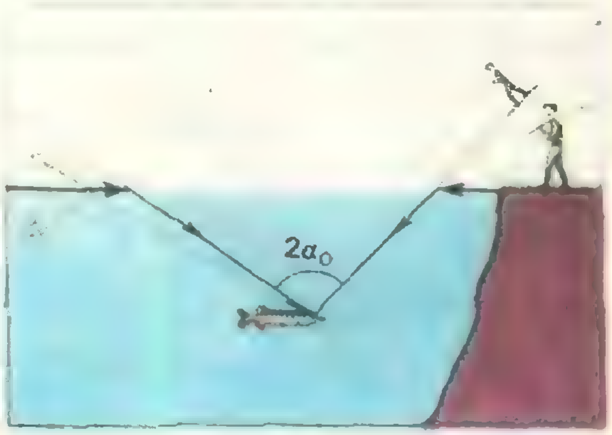


Рис. 2.

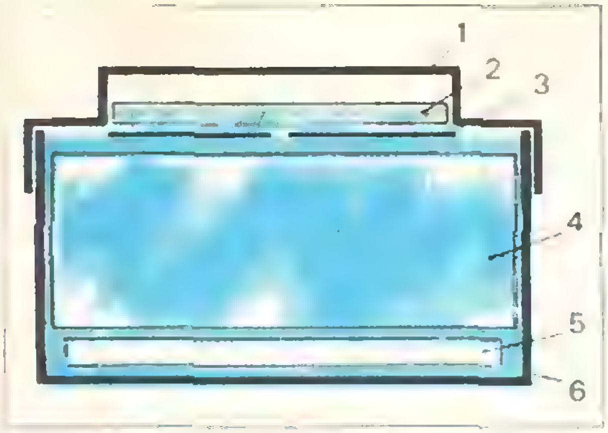


Рис. 3. Камера «Рыбий глаз». 1 — крышка; *2 — стекло; 3 — диафрагма; 4 — оргстекло; 5 — фотопластинка; 6 — корпус.*

ющие, казалось бы, в поле зрения рыбы (например, маленькая рыбка на рисунке 2). Все дело в том, что при полном внутреннем отражении поверхность воды становится хорошим зеркалом, так как резко увеличивается коэффициент отражения света. Для углов падения, близких к нулю, коэффициент отражения у воды примерно 2 %, а для углов, больших предельного, он почти 100 %. На рисунке показано, что зеркальное отражение рыбки видно под меньшим углом зрения, чем сама рыбка. Конечно, изображение будет хорошим, если поверхность водоема гладкая.

Для моделирования этого явления мы сделали фотокамеру, которая называется «Рыбий глаз». Камера (рис. 3) состоит из жестяной круглой коробки (диаметром 18 *см*, высотой 4 *см*) — корпуса, оргстекла, фольги с дырочкой — диафрагмы, кружочка обыкновенного плоского стекла *) *и фотопластинки.*

Преломление света происходит на верхней поверхности оргстекла, то есть оргстекло здесь играет ту же роль, что и вода в описанных выше экспериментах.

Стекло, которое является прозрачной крышкой, закрывающей сверху диафрагму, представляет собой тонкую плоскопараллельную пластинку, поэтому оно никаких существенных дополнительных эффектов не дает.

Коробка обязательно должна быть заполнена жидкостью с показателем преломления примерно таким же, как у оргстекла (мы использовали смесь воды и глицерина), иначе свет по выходе из стекла примет направление, параллельное исходному, и ожидаемого изображения на фотопластинке не получится. (Аналогично: не увидит вышеописанной картины пловец, нырнувший в маске.)

При расчете диафрагмы надо учитывать следующий фактор. Изображение на фотопластинке получается с помощью дырочной камеры, поэтому диаметр отверстия должен быть малым по сравнению с расстоянием до фотопластинки. Но с уменьшением диаметра диафрагмы все заметнее проявляет себя дифракция света. Это приводит к ухудшению качества изображения. Теоретический расчет дает, что оптимальное значение диаметра отверстия должно быть порядка $d = \sqrt{\lambda h}$, где λ — длина волны света, h — расстояние от отверстия до фотопластинки.

У нас лучшие по качеству снимки получались в солнечный день при диаметре диафрагмы 0,3 *мм*; чувствительность фотопластинки была 180 ед.

На рисунке 4 приведена одна из таких фотографий.

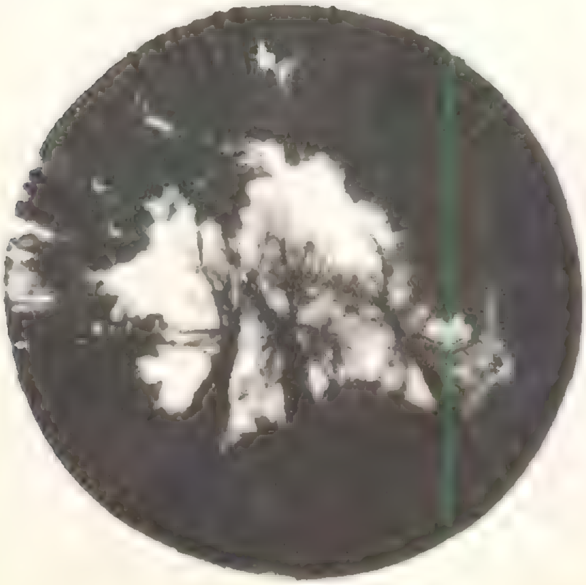


Рис. 4.

---

*) Тонкое стекло можно резать ножницами, если погрузить и то и другое в воду.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Семейство параллельных n-угольников

Н. Б. Васильев

Иногда размышления над искусственной частной задачей неожиданно приводят к любопытной и естественной теореме. Об одном таком случае, происшедшем с задачей М248 из «Задачника «Кванта», рассказывается ниже. Хотя задача эта — геометрическая, основными инструментами нам будут служить линейная и квадратная функции — главные орудия школьной алгебры.

> *«...держитесь к задаче возможно ближе но будьте готовы отойти от задачи настолько далеко, насколько вас вынуждают обстоятельства».*
>
> Д. Пойа. Математическое открытие

Формулировка задачи

Вокруг выпуклого n-угольника описан другой выпуклый n-угольник — так, что на каждой стороне второго лежит по одной вершине первого, а затем вокруг второго многоугольника описывается третий — так, что его стороны соответственно параллельны сторонам первого. (Для краткости мы будем говорить, что первый и третий многоугольники *параллельны*.) Пример такой ситуации изображен на рисунке 1. Требуется выяснить, *какие значения может принимать площадь S промежуточного многоугольника, если площади внутреннего и внешнего многоугольников равны Q и P.*

Разумеется, сразу можно утверждать, что $Q < S < P$. Но любые ли три положительных числа P, Q и S, связанные такими неравенствами, могут стать площадями трех многоугольников, описанных в условии?

Попробуем посчитать

Возьмем сразу довольно общий пример тройки четырехугольников, изображенный на рисунке 2. Симметрия рисунка позволяет сравнительно легко выразить все площади через стороны, высоты и другие удобные параметры. При различных значениях параметров можно надеяться получить всевозможные наборы P, Q, S.

(Мы начинаем с четырехугольников, а не с треугольников, поскольку случай $n = 3$ особый; в этом случае S однозначно определяется по Q и P; мы еще вернемся к нему ниже *).)

В нашем примере внешний четырехугольник — равнобочная трапеция с основаниями $2a$ и $2b$ (пусть $a < b$) и высотой $k + h$, так что

$$P = (a + b)\,(k + h). \qquad (1)$$

Диагонали среднего четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны $k + h$ и

$$2c = 2a\,\frac{h}{k + h} + 2b\,\frac{k}{k + h},$$

поэтому

$$S = ah + bk. \qquad (2)$$

Если эти два четырехугольника уже зафиксированы, то внутреннюю трапецию можно еще менять так, что она будет оставаться параллельной внешней трапеции. Можно представить себе, что вершины трапеции равномерно передвигаются по красным отрезкам в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем, в момент времени $t=0$ трапеция вырождается в отрезок $2c$, в момент времени $t=1$ — в равнобедренный треугольник с основанием $2b' = 2c\,\frac{b-a}{b}$ и высотой $k+h'$, где $h' = h\,\frac{a}{b}$, а каждому значению t между 0 и 1 соответствует настоящая трапеция с основаниями $2c(1-t)$, $2c(1-t)+2b't$ и высотой $tk+th'$. Тогда ее площадь равна

---

*) Этот случай был разобран в «Кванте» № 10, с. 24 при решении М248.

$$Q(t) = c\left(2(1-t)+\frac{b-a}{b}\,t\right)\times$$

$$\times\left(k+\frac{ha}{b}\right)t = \frac{(ah+bk)^2}{b^2(k+h)}\times$$

$$\times\, t[2b-(a+b)t]. \qquad (3)$$

Последнее выражение — квадратный трехчлен от t — достигает максимума при $t=\frac{b}{a+b}$, и, очевидно, при $0<t<1$ принимает всевозможные значения в таком промежутке:

$$0 < Q \leqslant \frac{(ah+bk)^2}{(a+b)(k+h)} = \frac{S^2}{P}. \qquad (4)$$

Упражнения

1. Вода, налитая в аквариум, постепенно испаряется.

а) Каков уровень воды сейчас, если h часов назад он равнялся b *см* (от дна), а через k часов будет a *см*?

б) Каков уровень воды в момент времени t, если при $t=0$ он равен c *см*, а при $t=1$ он равен d *см*?

Ответы. а) $a\,\frac{h}{h+k}+b\,\frac{k}{h+k}$,

б) $c(1-t)+dt$.

2. Купец знает, что продать $t\cdot 100\%$ своего товара он сможет только в том случае, если назначит цену не больше $2b-(a+b)t$ рублей за пуд (a и b — известные положительные числа). Как он может выручить побольше денег?

Ответ. Продать $\frac{b}{a+b}$ 100% товара по цене b рублей за пуд.

Итак, в нашем первом примере Q, P и S могут принимать любые значения, для которых выполнены неравенства $S<P$ и $QP \leqslant S^2$, или, что то же самое, $\sqrt{QP} \leqslant S < P$. Действительно, по заданным P и S $(S<P)$ мы можем подобрать a, b, k, h так, чтобы выполнялись равенства (1) и (2), например, решив систему уравнений

$$a+b = k+h = \sqrt{P},$$

$$(b-a)\times(k-h) = 2S-P,$$

а затем (если только выполнено (4)!) выбрать t так, чтобы $Q = Q(t)$ приняло нужное значение.

Упражнения

3. Докажите, что если $QP = S^2$, то трапеции на рисунке 2 подобны.

4. Докажите, что если наши параллельные многоугольники — прямоугольники (рис. 3), то тоже $Q \leqslant S^2/P$.

Неужели всегда будет выполняться это странное неравенство:

$$S^2 \geqslant QP? \qquad (5)$$

Попытка опровержения

Рассмотрим еще один, менее симметричный пример, когда многоуголь-

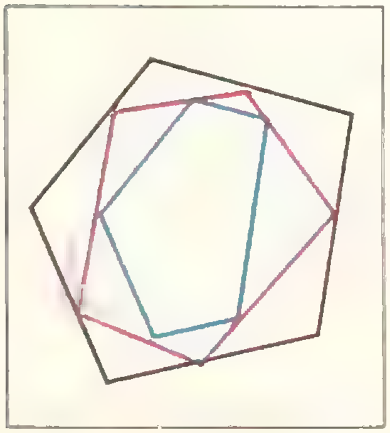


Рис. 1.

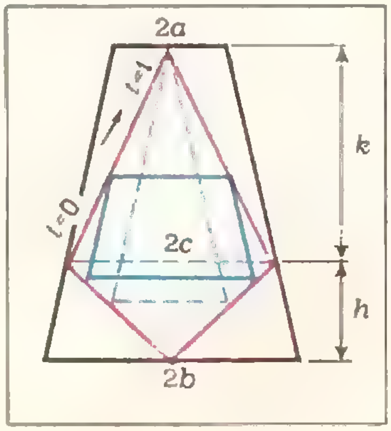


Рис. 2.

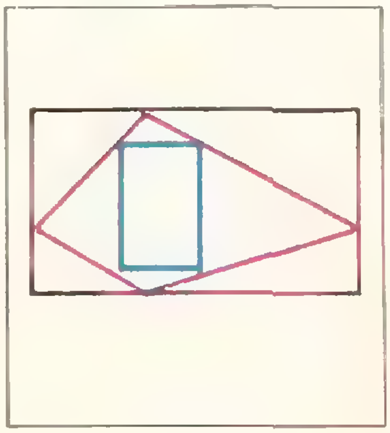


Рис. 3.

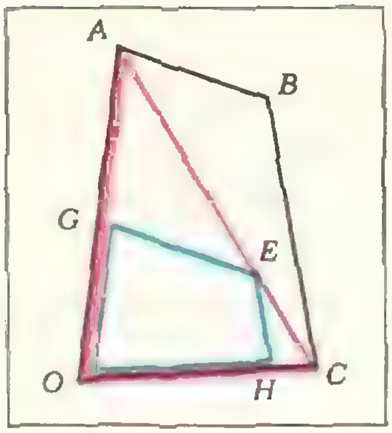


Рис. 4.

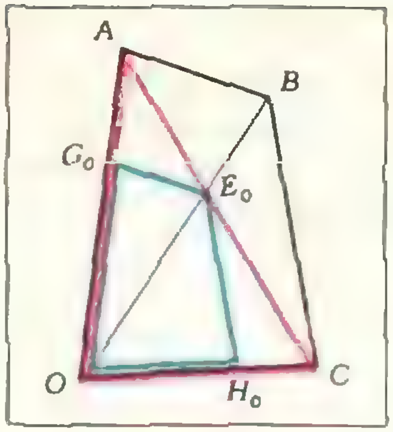


Рис. 5.

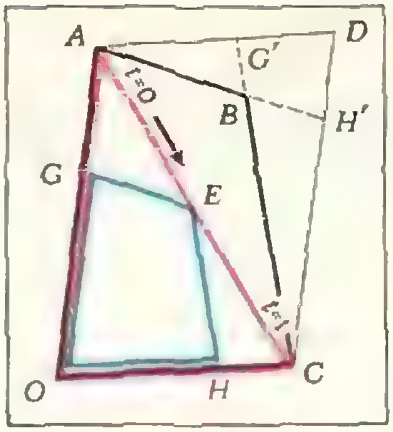


Рис. 6.

ник S вырождается в треугольник OAC, а многоугольники P и Q — в параллельные четырехугольники $OABC$ и $OGEH$ (рис. 4). Условимся обозначать сами многоугольники теми же буквами, что и их площади: S, P и Q. (Можно представить себе, что на рисунке 4 изображены три n-угольника (n — произвольное, $n \geqslant 4$), у которых все вершины, кроме двух у S и трех у P и Q, расположены чрезвычайно близко к точке O. Ясно, что если нам удастся построить вырожденный пример, в котором $S^2 < PQ$, то, слегка его «пошевелив», мы сможем получить пример с настоящими, невырожденными n-угольниками).

Будем считать, что вершины O, A, B, C зафиксированы, и E может передвигаться по отрезку AC (при этом точки G и H передвигаются по отрезкам OA и OC).

Заметим, что если E попадает в точку E_0 пересечения OB и AC, то четырехугольники подобны и $S^2 = PQ$. Действительно, в этом случае отношения площадей P/S, S/Q и соответствующие отношения площадей треугольников, на которые делятся P, S и Q прямой OB, все равны отношениям $\frac{|OA|}{|OG_0|} = \frac{|OB|}{|OE_0|} = \frac{|OC|}{|OH_0|}$ (рис. 5).

Теперь найдем, при каком положении точки E на отрезке AC сумма площадей двух треугольников AGE и HEC минимальна. Пусть H' — точка пересечения прямых AB и CD, G' — прямых CB и AD (D — четвертая вершина параллелограмма $OADC$, рис. 6), M_1 и M_2 — площади треугольников $AH'C$ и $AG'C$. Если точка E делит отрезок AC в отношении $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{t}{1-t}$ $(0 < t < 1)$, то сумма площадей треугольников AGE и HEC равна

$$M_1 t^2 + M_2 (1-t)^2 = (M_1 + M_2) t^2 - 2M_2 t + M_2 \qquad (6)$$

и минимальна при $t = t^* = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$, то есть для такой точки E^*, которая делит отрезок AC в отношении $\frac{t^*}{1-t^*} = \frac{M_2}{M_1}$. А площадь Q четырехугольника $OGEH$ (при фиксированных точках O, A, B, C) при этом положении $E = E^*$ максимальна.

Упражнение 5°. Через точку E на диагонали AC трапеции $ABCD$ проводится прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая боковые стороны AB и CD в точках G и H. При каком положении точки E сумма площадей треугольников AGE и EHC минимальна?

Ответ. Когда $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$, то есть когда точка E совпадает с точкой пересечения диагоналей (и $|GE| = |EH|$).

Итак, мы знаем, что для $E = E_0$ выполнено равенство $Q = S^2/P$, а для $E = E^*$ площадь больше!

Неудача в попытке построить пример, опровергающий неравенство (5), может постигнуть нас только в том случае, если всегда, при любом выборе точки B внутри треугольника ADC, точка E^* совпадает с E_0, то есть выполняется равенство

$$\frac{|AE_0|}{|E_0C|} = \frac{M_2}{M_1} \qquad (7)$$

(где $M_1 = S_{\triangle AH'C}$, $M_2 = S_{\triangle AG'C}$).

Казалось бы, почему эти отношения должны быть связаны друг с другом?

на части Q_i' так, что Q_i' лежит между продолжениями боковых сторон трапеции T_i. б) Докажите, что при таком разбиении для площадей Q_i', $P_i' = Q_i' \cup T_i$ и $S_i' = (S \cap T_i) \cup Q_i'$ выполняется неравенство $(S_i')^2 \geqslant Q_i' P_i'$.

9. Пусть $S_i^2 \geqslant P_i Q_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Следует ли отсюда, что $(\Sigma S_i)^2 \geqslant (\Sigma P_i)(\Sigma Q_i)$? *)

Ответ. Нет, не следует.

Попробуем перевести задачу на язык алгебры и доказать полученное неравенство.

Средний — лишний

В одном отношении эта попытка оказывается успешной: она позволяет упростить нашу задачу, выбросив из нее упоминание о «промежуточном» многоугольнике S и оставив только P и Q. Вот как это получается.

Обозначим стороны внутреннего многоугольника Q через a_i, параллельные им стороны P — через b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$; теми же буквами мы будем обозначать и длины сторон); расстояния между прямыми, на которых лежат a_i и b_i, — через h_i. Тогда

$$S = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i,$$
$$P = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) h_i. \qquad (8)$$

Уже отсюда видно, что n-угольник S особенно не нужен: если его вершины двигать по сторонам b_i (от этого он превратится в $2n$-угольник, рис. 9), то площадь S не меняется. Введем такие обозначения:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i,$$
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) h_i. \qquad (9)$$

Тогда гипотетическое неравенство (5) запишется так:

$$(Q + R)^2 \geqslant Q (Q + T),$$

или, после упрощений:

$$R^2 \geqslant Q (T - 2R).$$

Введем еще одно обозначение:

$$K = T - 2R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) h_i; \qquad (10)$$

и тогда наше неравенство примет тот же вид, что и (5):

$$R^2 \geqslant QK, \qquad (11)$$

— но с той приятной разницей, что теперь все величины относятся только к двум параллельным многоугольникам и их взаимному расположению.

Упражнение 10. Верно ли, что $T > 2R$, то есть $K > 0$?

Ответ. Не всегда. (Впрочем, если $K < 0$, неравенства (11), а следовательно, и (5) очевидны.)

Попытаемся теперь доказать, что *для любых параллельных выпуклых n-угольников*, один из которых лежит внутри другого, *неравенство* (11) *выполняется.*

Сразу же отметим, что это утверждение, по крайней мере на первый взгляд, значительно более сильное, чем (5): ведь не всегда между двумя параллельными многоугольниками можно вставить третий: «щель» между ними может оказаться слишком большой (рис. 9). Правдоподобно ли предположение (11) во всех случаях?

Из пары — семейство

Мы сейчас увидим, что наше обобщение довольно удачно: неравенство (11) выражает некоторое естественное свойство целого *семейства* параллельных многоугольников.

Получается это семейство из данных двух многоугольников Q и P очень просто. Представим себе, что n точек, совпадавших в момент времени $t = 0$ с вершинами многоугольника Q, начали двигаться — каждая со своей постоянной скоростью — так, чтобы

---

*) Здесь Σx_i обозначает сумму $x_1 + \ldots + x_n$.

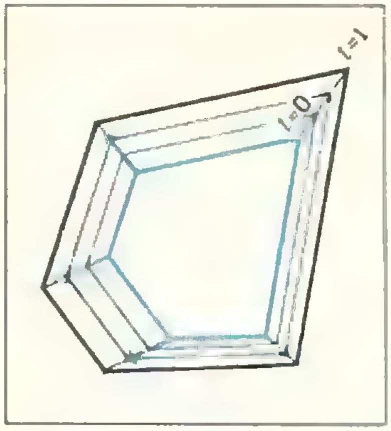


Рис. 10.

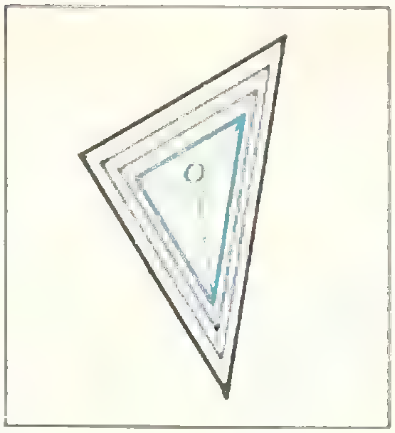


Рис. 11.

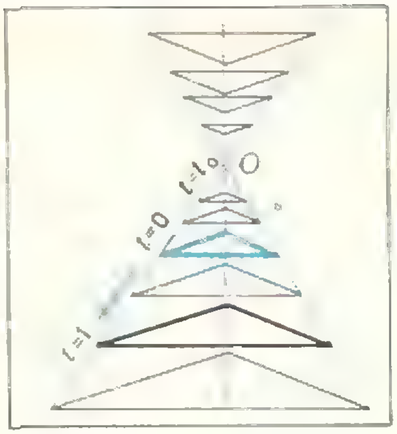


Рис. 12.

в момент времени $t=1$ попасть в соответствующие вершины многоугольника P (рис. 10). В любой момент времени t (по крайней мере между 0 и 1) эти n точек будут, очевидно, вершинами выпуклого многоугольника, параллельного Q и P. Обозначим этот многоугольник (а также его площадь) через $F(t)$. Поскольку длины сторон n-угольника $F(t)$ и их расстояния от параллельных сторон Q изменяются со временем равномерно, имеем

$$F(t)=Q+\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i(2-t)+b_it)h_it}{2}=$$
$$=Q+2Rt+Kt^2. \quad (12)$$

Мы видим, что $F(t)$ выражается, как функция времени t, квадратным трехчленом; неравенство же (11) означает, что дискриминант этого трехчлена R^2-QK должен быть больше или равен нулю. Неотрицательность дискриминанта эквивалентна утверждению, что трехчлен $F(t)$ имеет вещественный корень (но, конечно, этот корень никак не может оказаться на отрезке [0, 1], где $F(t)>0$ по самому определению).

Упражнения

11. Докажите, что дискриминант квадратного трехчлена

$$F^*(t)=F(\alpha+\beta t)=(Q+2R\alpha+K\alpha)^2+$$
$$+2(R+K\alpha)\beta t+K\beta^2t^2$$

имеет тот же знак, что и дискриминант $F(t)$ (здесь α и β — любые числа, $\alpha\neq0$).

Замечание. Замена t на $\alpha+\beta t$ означает просто выбор другого начала отсчета и другой единицы масштаба на оси t. Отсюда следует, что неотрицательность дискриминанта — это свойство всего семейства $F(t)$ параллельных многоугольников, не зависящее от того, какие именно два из них $Q=F(0)$ и $P=F(1)$ соответствуют $t=0$ и $t=1$.

12°. Со дна колодца глубиной h рабочий бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью v. Вылетит ли камень из колодца?

Ответ. Да, если дискриминант трехчлена $y(t)=-h+vt-(gt^2)/2$ положителен (g — ускорение свободного падения камня): $v^2>2gh$.

Итак, мы облекли нашу гипотезу (5) в форму следующей теоремы:

Пусть прямые, на которых лежали стороны выпуклого n-угольника, в момент времени $t=0$ начинают равномерно двигаться — так, что каждая перемещается со своей скоростью, оставаясь параллельной первоначальному положению, и все они до момента $t=1$ по-прежнему являются сторонами выпуклого n-угольника $F(t)$. Тогда:

1) *Площадь $F(t)$ как функция t выражается квадратным трехчленом:*

$$F(t)=Q+2Rt+Kt^2 \ (0\leqslant t\leqslant1).$$

2) *Дискриминант этого трехчлена неотрицателен:*

$$R^2-QK\geqslant0.$$

3) *Дискриминант равен нулю в том и только том случае, если n-угольник не меняет со временем своей формы (остается подобным первоначальному).*

Теорему-то мы сформулировали... Но вот, верна ли она — хотя бы для треугольников?

Семейство треугольников

Два треугольника с параллельными сторонами обязательно подобны, а три прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке (рис. 11).

Последнее утверждение становится очевидным, если представить себе, что один из треугольников приподнят над плоскостью чертежа — перенесен в параллельную плоскость: тогда три плоскости, проходящие через пары параллельных сторон треугольников, — плоскости граней усеченной пирамиды, основаниями которой служат наши треугольники, — пересекаются в одной точке. В этой точке будут пересекаться и прямые, соединяющие вершины треугольников, — продолжения боковых ребер усеченной пирамиды. Спроектировав всю картину вновь на плоскость чертежа, получим, что упомянутые три прямые действительно пересекаются в одной точке O.

Семейство параллельных треугольников, заданное для моментов времени t от 0 до 1, можно естественным образом продолжить на всю ось t «от минус бесконечности до плюс бесконечности»: в некоторый момент $t=t_0$ треугольник обратится в точку O, а затем будет вновь расти; при этом его положения до момента t_0 и после t_0 соответственно симметричны относительно точки O. (На рисунке 12 изображен случай, когда точка O лежит вне треугольников; наши рассуждения применимы и к этому случаю: в формулировке теоремы мы предусмотрительно не оговорили того, в какую сторону — вне или внутрь многоугольника — должны двигаться прямые; позже мы увидим, что это несущественно.) Площадь треугольника в момент времени $t = t_0$ обращается в нуль, а при любом t пропорциональна квадрату линейных размеров, то есть пропорциональна квадрату разности $(t-t_0)$:

$$F(t)=c\,(t-t_0)^2,$$

где c — постоянное положительное число.

Дискриминант такого квадратного трехчлена равен нулю, и, значит, все три пункта нашей теоремы в случае $n=3$ выполняются безоговорочно.

Упражнения

13. Докажите, что прямые, соединяющие соответствующие вершины двух параллельных многоугольников, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда многоугольники подобны.

14°. Четыре точки движутся по плоскости равномерно и прямолинейно (каждая — по своей прямой и со своей скоростью). Известно, что первая и вторая точки встречаются с каждой из остальных. Докажите, что третья и четвертая точки встречаются между собой.

15. Проверьте справедливость теоремы для случая, когда исходный многоугольник — параллелограмм.

16°. Проверьте, что нашу теорему можно сформулировать так: если в аквариуме с плоскими наклонными стенками (каждая из $n \geqslant 3$ стенок имеет свой наклон) вода равномерно испаряется, то скорость испарения воды $S(t)$ в момент времени t выражается квадратным трехчленом от t; его дискриминант неотрицателен, причем равен 0 в том и только в том случае, если плоскости стенок пересекаются в одной точке.

Осталось самое главное (и трудное): доказать теорему для произвольного $n \geqslant 4$.

Было бы очень соблазнительно и в общем случае — для любого n — продолжить нашу положительную функцию $F(t)$, определенную первоначально для $t \in [0, 1]$, на всю ось t и доказать, что при некотором $t=t'$ ее значение будет отрицательным или равным нулю — отсюда следовало бы, что дискриминант трехчлена $F(t)$ неотрицателен. Но сделать это сразу для произвольного n трудно. Поэтому воспользуемся индукцией.

Приклеим уголок

Предположим, что при некотором $n \geqslant 3$ наша теорема доказана, и докажем ее справедливость для семейства параллельных $(n+1)$-угольников, представив $(n+1)$-угольник как n-угольник с отрезанным углом.

Лемма. *У любого m-угольника ($m \geqslant 4$), за исключением параллелограмма, найдутся два соседних угла, сумма которых больше 180°.*

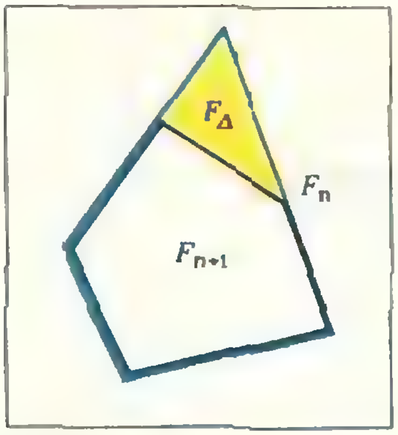


Рис. 13.

Действительно, выписав все m сумм двух соседних углов многоугольника и сложив эти m слагаемых, мы получим удвоенную сумму всех m углов: $2\cdot 180^\circ\cdot(m-2)$; поэтому хотя бы одно из m слагаемых не меньше

$$2\cdot 180^\circ\left(1-\frac{2}{m}\right)=180^\circ\left(2-\frac{4}{m}\right)\geqslant 180^\circ.$$

Равенство возможно только если $m=4$ и каждое из (четырех) слагаемых равно 180°.

Возьмем теперь любой $(n+1)$-угольник из данного семейства.

Можно считать, что наш $(n+1)$-угольник — не параллелограмм (этот простой случай разобран в упражнении 15). Пользуясь леммой, продолжим две стороны $(n+1)$-угольника так, чтобы снаружи образовался треугольник, составляющий вместе с $(n+1)$-угольником выпуклый n-угольник (рис. 13). Обозначим площади $(n+1)$-угольника, треугольника и их объединения в момент времени t $(0\leqslant t\leqslant 1)$ через $F_{n+1}(t)$, $F_\Delta(t)$ и $F_n(t)$ соответственно. Тогда

$$F_{n+1}(t)=F_n(t)-F_\Delta(t). \tag{14}$$

По доказанному $F_\Delta(t)$ — квадратный трехчлен, неотрицательный при всех вещественных t. По предположению индукции $F_n(t)$ — квадратный трехчлен с неотрицательным дискриминантом, то есть существует t', при котором $F_n(t')\leqslant 0$. Значит, $F_{n+1}(t)$ — тоже квадратный трехчлен от t (причем равенство (14) позволяет определить его для всех значений t!) и $F_{n+1}(t')\leqslant 0$, то есть дискриминант его неотрицателен.

Этот дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда все три трехчлена имеют один и тот же кратный корень $t=t_0$ (см. (13)). При этом, по предположению индукции, n-угольник $F_n(t)$ остается подобным самому себе, стало быть, величина $\sqrt{F_n(t)}$ и длины всех сторон n-угольника $F_n(t)$ пропорциональны $|t-t_0|$. То же самое верно и для $F_\Delta(t)$, а следовательно, и для $F_{n+1}(t)$. Обратное очевидно: если сохраняет форму $F_{n+1}(t)$, то ее сохраняет каждый из многоугольников $F_n(t)$ и $F_\Delta(t)$. Теорема доказана.

Упражнения

17. Постройте пример семейства невыпуклых пятиугольников, для которых дискриминант трехчлена $F(t)$ будет неположительным.

18°. Докажите, что:

а) для любых вещественных $p_1, \dots p_n$, $q_1, \dots, q_n$

$$(p_1q_1+p_2q_2+\dots+p_nq_n)^2\leqslant$$
$$\leqslant(p_1^2+p_2^2+\dots+p_n^2)\times$$
$$\times(q_1^2+q_2^2+\dots+q_n^2);$$

б) $$(p_1q_1-p_2q_2-\dots-p_nq_n)^2\geqslant$$
$$\geqslant(p_1^2-p_2^2-\dots-p_n^2)\times$$
$$\times(q_1^2-q_2^2-\dots-q_n^2),$$

если обе скобки справа неотрицательны.

В каких случаях достигаются равенства?

19. Каков ответ в задаче, сформулированной в начале статьи?

20. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника $P^2>4\pi S$, где P — периметр, S — площадь многоугольника («изопериметрическое неравенство»).

В заключение отметим, что теорема, к которой мы пришли, имеет целый ряд интересных обобщений и следствий. Многие из них, относящиеся к пространству любой размерности (теорема Бруна, 1887 г.; неравенства Бруна — Минковского), обсуждаются в книге Г. Хадвигера «Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии» («Наука», 1966 г.), где наши семейства параллельных многоугольников называются *линейными семействами* или *линейными пучками* множеств.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 31 декабря 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М291, М292» или «...Ф303». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем своим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», «новая задача по математике» или «...новая задача по физике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М291—М295, Ф303—Ф307

М291. На сторонах A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ построены квадраты с центрами O_1, O_2, O_3, лежащие вне треугольника. Докажите, что:

а) отрезки O_1O_2 и A_3O_3 равны по длине и взаимно перпендикулярны;

б) середины отрезков A_3A_1, O_1O_2, A_3A_2 и A_3O_3 являются вершинами квадрата;

в) площадь этого квадрата в 8 раз меньше площади квадрата с центром O_3.

В. М. Фишман

М292. На доске выписаны числа от 1 до 50. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать одно число — модуль их разности. После повторения указанной процедуры несколько раз на доске остается одно число. Какое это может быть число?

Ф. Г. Шлейфер

М293. Дан треугольник C_1C_2O. В нем проводится биссектриса C_2C_3, затем в треугольнике C_2C_3O — биссектриса C_3C_4 и так далее. Докажите, что последовательность величин углов $\gamma_n = \sphericalangle C_{n+1}C_nO$ стремится к пределу, и найдите этот предел, если $\sphericalangle C_1OC_2 = \alpha$.

А. Бернард, М. Фельштын и И. Ткачев, ученики 10 класса

М294. Докажите, что если a, b c, d, x, y, u, v — вещественные числа и $abcd>0$, то

$$(ax+bu)(av+by)(cx+dv)(cu+dy)\geqslant$$
$$\geqslant(acuvx+bcuxy+advxy+bduvy)\times$$
$$\times(acx+bcu+adv+bdy).$$

В. П. Федотов

М295*. Сечения выпуклого многогранника тремя параллельными плоскостями p_0, p_1 и p_2 (p_1 расположена между p_0 и p_2 на одинаковом расстоянии h от той и другой) имеют площади S_0, S_1 и S_2 соответственно. Между p_0 и p_2 нет ни одной вершины многогранника.

а) Докажите, что $2\sqrt{S_1} \geqslant \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2}$.

б) В каком случае неравенство обращается в равенство?

в) Найдите площадь S_t сечения многогранника плоскостью, параллельной p_0 и расположенной на расстоянии th от p_0 и $(2-t)h$ от p_1 $(0<t<2)$.

г) Найдите объем части многогранника, заключенной между плоскостями p_0 и p_2.

Н. Б. Васильев

Ф303. Точечный источник света находится на некотором расстоянии под тонкой собирающей линзой (рис. 1). Где и как нужно установить плоское зеркало для того, чтобы из линзы выходил параллельный пучок света по направлению, показанному стрелкой? Построить ход лучей.

В. А. Алешкевич

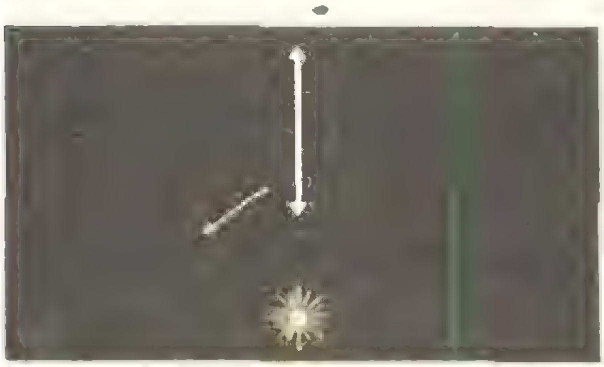


Рис. 1.

Ф304. Насос подает массу m воды в час на высоту H по трубе диаметром d. Какова должна быть мощность насоса N? Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать массу m воды в час на высоту H?

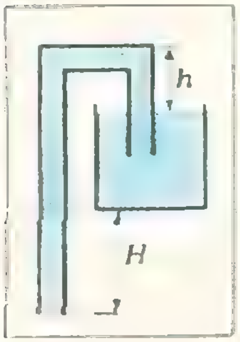


Рис. 2.

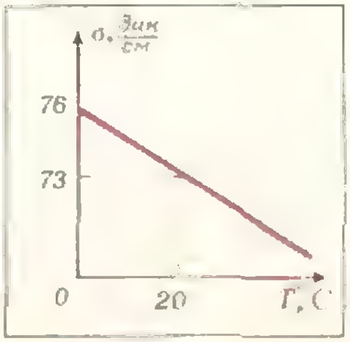


Рис. 3.

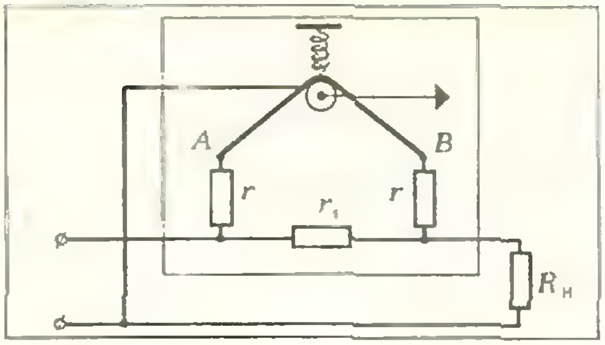


Рис. 4.

Ф305. В сосуд с водой опускают Г-образный стеклянный капилляр радиуса r, полностью смачиваемый водой (рис. 2). Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры показана на рисунке 3. В каком диапазоне температур вся вода вытечет из сосуда, если $r=0{,}1$ *мм*, $h=14{,}1$ *см* и $H=15$ *см*? Толщиной стенок капилляра пренебречь.

Ф306.* На рисунке 4 изображена схема теплового ваттметра ($r_1 \ll r$, $r_1 \ll R_н$). Тонкая проволока AB, накаливаемая током, перекинута через блок, оттягиваемый кверху пружинкой. К блоку прикреплена стрелка, которая поворачивается при повороте блока. Показать, что поворот стрелки прямо пропорционален мощности тока P, потребляемой нагрузкой ($R_н$).

Считать, что: 1) количество тепла, которое отдает нагретая проволока окружающей среде, пропорционально разности температур проволоки и среды; 2) изменение сопротивления участков проволоки AB из-за удлинения и изменения их температуры пренебрежимо мало.

Ф307. Самолет пролетает с постоянной скоростью v по горизонтальной прямой, проходящей над головой наблюдателя. Какой угол α с вертикалью составляет направление, по которому к наблюдателю доносится звук мотора в тот момент, когда наблюдатель видит самолет в направлении, составляющем угол φ с вертикалью? Скорость звука c. Рассмотреть случаи $v>c$ и $v<c$.

Г. Л. Коткин

Решения задач

M251—M255; Ф260—Ф268

M251. *Дано n фишек нескольких цветов, причем фишек каждого цвета не более n/2. Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.*

Первое решение. Будем считать, что если рядом стоят две фишки одинакового цвета, то они соединены *дугой*. Тогда нам нужно доказать, что существует такая расстановка фишек на окружности, в которой нет дуг.

Пусть имеется *какая-то* расстановка фишек по кругу; докажем, что фишки можно переставить таким образом, что в новой расстановке число дуг уменьшится.

В самом деле, пусть, например, в расстановке две черные фишки соединены дугой. Тогда на окружности обязательно найдутся две нечерные фишки, стоящие рядом. Действительно, если бы рядом с каждой нечерной фишкой стояли черные, да еще две черные стояли рядом, то черных фишек было бы больше половины, а это противоречит условию.

Возьмем теперь одну из упомянутых нечерных фишек и поставим ее между двумя черными. При этом число дуг в новой расстановке, очевидно, уменьшится. Так как число дуг в расстановке не может оказаться меньше нуля, то в конце концов мы получим расстановку фишек на окружности без дуг.

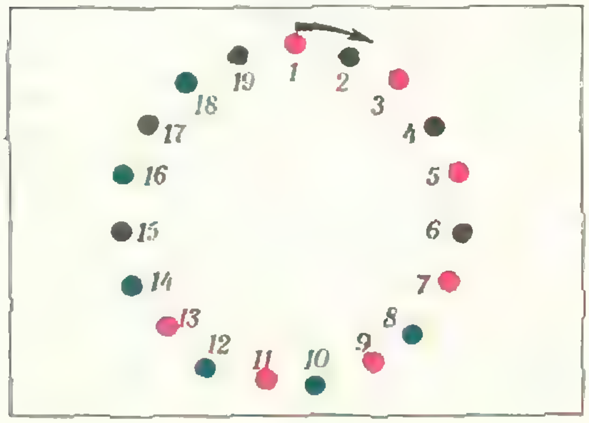


Рис. 1.

Второе решение. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по числу k различных цветов. Когда $k=2$, утверждение очевидно: в этом случае фишек каждого цвета должно быть $\frac{n}{2}$, и их можно расставить в чередующемся порядке. Если у нас имеются фишки $k=3$ цветов, скажем, красного, черного и зеленого, будем действовать так. Начнем расставлять те фишки, которых больше всего, например красные,— через одну на нечетные места. Когда красные фишки кончатся, будем продолжать расставлять на нечетные места черные фишки. Ясно, что фишками двух цветов мы исчерпаем все нечетные места, остаток черных фишек сможем поставить между красными, а на свободные (четные) места сможем поставить зеленые фишки (рис. 1).

Если число фишек $k\geq 4$, то найдутся два цвета таких, что фишек этих обоих цветов будет не больше $n/2$. Перекрасив эти фишки в один цвет, получим набор фишек $(k-1)$ цветов, для которого предположение индукции выполнено. Расставив их по окружности так, чтобы выполнялось условие, и вернувшись к первоначальной окраске, получим нужную расстановку фишек k цветов.

Третье решение. Возьмем n рыцарей, дадим каждому по фишке и объявим двух рыцарей врагами, если им достались фишки одного цвета, и друзьями — если разного. Тогда выполнены условия задачи M250, *а*; поэтому рыцарей с фишками можно рассадить за круглым столом.

В. Л. Гутенмахер

Решение задачи M252 см. в статье А. А. Егорова «Решетки и правильные многоугольники», которую мы поместим в «Кванте» № 12 за 1974 г.

M253. *На плоскости заданы три точки, являющиеся соответственно центрами вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей треугольника. Как по этим данным восстановить треугольник?*

(Напомним, что вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон.)

Обозначим вершины искомого треугольника буквами A, B и C, центры описанной, вписанной и вневписанной окружностей — буквами O, O_1 и O_2 соответственно (рис. 2).

Заметим, что прямая O_1O_2, проходящая через центры вписанной и вневписанной окружностей, является биссектрисой угла A треугольника ABC, то есть прямая O_1O_2 должна проходить через вершину A. Легко

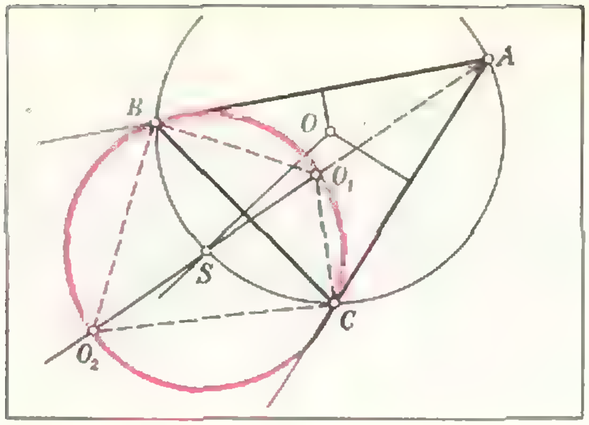


Рис. 2.

сообразить, что $\angle O_1BO_2 = \angle O_1CO_2 = \pi/2$. Следовательно, точки B и C лежат на окружности s с диаметром O_1O_2; обозначим центр этой окружности (то есть, середину отрезка O_1O_2) буквой S. Так как точка O — центр описанной окружности, то она находится на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка BC. Но отрезок BC — хорда окружности s, поэтому этот перпендикуляр должен проходить через центр окружности s, то есть через точку S.

Итак, если точки O и S не совпадают, то прямая OS перпендикулярна к стороне BC искомого треугольника и проходит через ее середину.

Осталось воспользоваться тем, что точка пересечения перпендикуляра, проходящего через середину стороны BC, и биссектрисы угла A (то есть точка S) находится на окружности, описанной вокруг треугольника ABC (см. рис. 2). Поэтому описанную окружность (с центром O) мы можем построить (ее радиус равен отрезку SO). Вторая точка пересечения этой окружности с прямой O_1O_2 — это вершина A искомого треугольника. Точки, в которых окружность пересекается с окружностью s, — это две другие вершины нашего треугольника (B и C).

Из указанного построения видно, что точки O_1, O_2 и O не могут быть заданы произвольно: очевидно, что точка O_1 должна лежать внутри окружности с центром в точке O, проходящей через середину O_1O_2. *Докажите, что это ограничение на расположение точек O, O_1, O_2 — единственное.*

Л. Г. Лиманов

M254. *Вычислите значение* $\sqrt{0{,}\underbrace{11111\ldots11111}_{100}}$ *с точностью: а) 100 знаков после запятой; б) 101 знака после запятой; в) 200 знаков после запятой.*

Приведем решение, позволяющее вычислить этот корень с точностью 301 знак после запятой.

Преобразуем данное число следующим образом:

$$\frac{1}{3}\sqrt{0{,}\underbrace{999\ldots999}_{100}} = \frac{1}{3}\sqrt{1-10^{-100}}.$$

Тогда

$$\sqrt{1-10^{-100}} < 1-0{,}5\cdot10^{-100}. \qquad (1)$$

Уточним эту оценку: найдем такое положительное число a, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{1-10^{-100}} < 1-0{,}5\cdot10^{-100}-a\cdot10^{-200}. \qquad (2)$$

Для этого возведем обе части неравенства (2) в квадрат:

$$1-10^{-100} < 1+0{,}25\cdot10^{-200}+a^2\cdot10^{-400}-\\ -10^{-100}-2a\cdot10^{-200}+a\cdot10^{-300};$$

упрощая, получим

$$0 < (0{,}25-2a)+a\cdot10^{-100}+a^2\cdot10^{-200}.$$

Чтобы выполнялось неравенство (2), достаточно взять $a=0{,}125+10^{-102}$. Действительно, при этом значении a выражение $0{,}25-2a+a\cdot10^{-100}$ положительно.

Таким образом, приходим к оценке:

$$\sqrt{1-10^{-100}} < 1-0{,}5\cdot10^{-100}-\\ -0{,}125\cdot10^{-200}-10^{-302}. \qquad (3)$$

Чтобы оценить число $\sqrt{1-10^{-100}}$ снизу, выберем число b так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{1-10^{-100}} > 1-0{,}5\cdot10^{-100}-b\cdot10^{-200},$$

эквивалентное

$$0 > (0{,}25-2b)+b\cdot10^{-100}+b^2\cdot10^{-200}. \qquad (4)$$

Чтобы выполнялось неравенство (4), достаточно положить $b=0{,}125+10^{-101}$.

Получаем такую оценку:

$$\sqrt{1-10^{-100}} > 1-0{,}5\cdot10^{-100}-\\ -0{,}125\cdot10^{-200}-10^{-301}. \qquad (5)$$

Из оценок (3) и (5) следует, что

$$0{,}\underbrace{9\ldots}_{100}949\underbrace{\ldots9}_{99}\,8749\underbrace{\ldots9}_{98} < \sqrt{1-10^{-100}} <\\ < 0{,}\underbrace{9\ldots}_{100}949\underbrace{\ldots9}_{99}\,8749\underbrace{\ldots9}_{99}.$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{0{,}\underbrace{11\ldots11}_{100}} =\\ =0{,}\underbrace{33\ldots}_{100}3\,\underbrace{166\ldots6}_{100}\quad \underbrace{2499\ldots}_{98}9\ldots,$$

причем все 301 знак после запятой верны.

Аналогичное решение этой задачи прислал наш читатель *С. Доморяд*.

С. Т. Берколайко

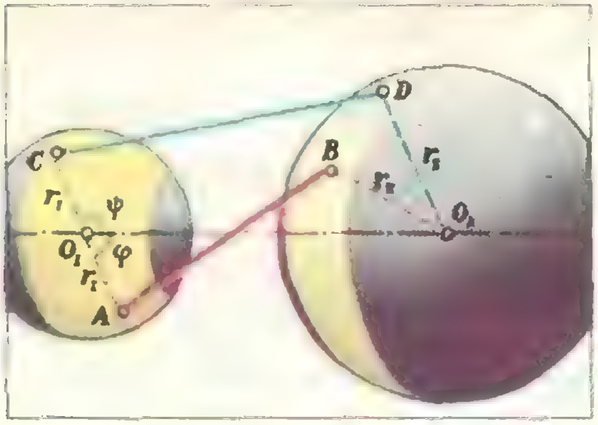


Рис. 3. Залитые светом области сфер — те, из которых можно провести касательную к другой сфере.

М255. *AB и CD — различные касательные к двум данным шарам (A и C принадлежат поверхности одного шара, B и D — другого). Докажите, что проекции отрезков AC и BD на прямую, проходящую через центры шаров, равны.*

Пусть O_1 и O_2 — центры шаров, $|O_1A| = |O_1C| = r_1$ и $|O_2B| = |O_2D| = r_2$ — их радиусы, $|O_1O_2| = d$, $|AB| = l$, $|CD| = m$, $\angle AO_1O_2 = \varphi$, $\angle CO_1O_2 = \psi$.
Тогда длина проекции отрезка AC на прямую O_1O_2 равна

$$||AO_1|\cos\varphi - |CO_1|\cos\psi| = |r_1\cos\varphi - r_1\cos\psi|. \quad (1)$$

По теореме косинусов для $\triangle AO_1O_2$ (рис. 3)

$$|AO_2|^2 = r_1^2 + d^2 - 2r_1d\cos\varphi. \quad (2)$$

Поскольку угол ABO_2 (между касательной и радиусом) прямой,

$$|AO_2|^2 = |AB|^2 + |BO_2|^2 = l^2 + r_2^2. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем

$$2dr_1\cos\varphi = r_1^2 + d^2 - r_2^2 - l^2. \quad (4)$$

Аналогично найдем

$$2dr_1\cos\psi = r_1^2 + d^2 - r_2^2 - m^2. \quad (5)$$

Из (1), (4) и (5) следует, что проекция отрезка AC на O_1O_2 имеет длину

$$\frac{|l^2 - m^2|}{2d}.$$

Ясно, что такую же длину имеет и проекция отрезка BD.

Приведем еще одно решение этой задачи, яснее раскрывающее ее геометрическую подоплеку. Плоский аналог задачи М255 (рис. 4) подсказывает, что касательные должны быть расположены так, чтобы их середины проектировались в одну и ту же точку на прямой O_1O_2, то есть что *все середины касательных к двум данным шарам должны лежать в одной плоскости, перпендикулярной линии центров.* Мы докажем более общее утверждение.

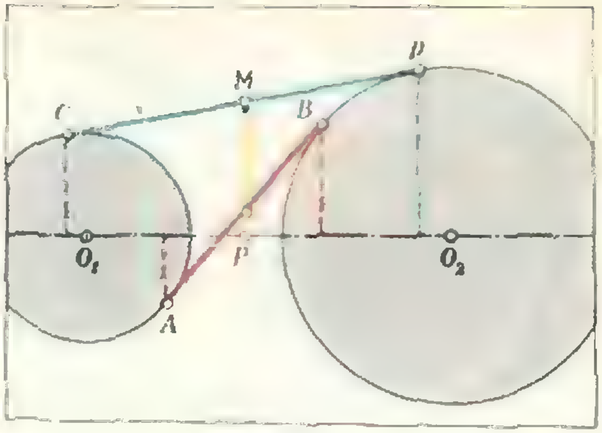


Рис. 4. Проекции отрезков AC и BD на линию центров одинаковы, если середины AB и CD проектируются в одну точку P.

Теорема. *Все точки M, касательные из которых к двум данным шарам имеют одинаковую длину, лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров O_1O_2 и пересекающей O_1O_2 в такой точке P, для которой*

$$|PO_1|^2 - |PO_2|^2 = r_1^2 - r_2^2. \quad (6)$$

Заметим, что последним равенством положение точки P на прямой O_1O_2 определяется однозначно: если на прямой O_1O_2 выбрать систему координат так, чтобы точки O_1 и O_2 получили координаты 0 и d, то координата x точки P однозначно определяется из уравнения $x^2 - (x-d)^2 = r_1^2 - r_2^2$:

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Теперь докажем теорему. Тут самое замечательное, что можно сразу перейти к плоской задаче: ведь из точки M к каждому шару можно провести много — целый «конус» — касательных, очевидно, равных по длине, и мы можем выбрать всегда те из них, которые лежат в плоскости MO_1O_2 (рис. 5). В этой

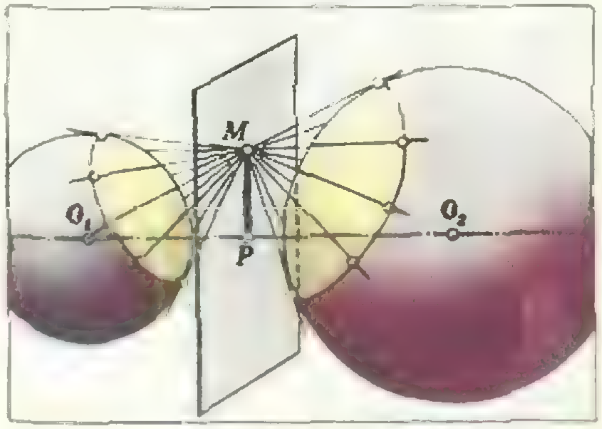


Рис. 5. Длины всех касательных, проведенных из точки M к каждому шару, одинаковы.

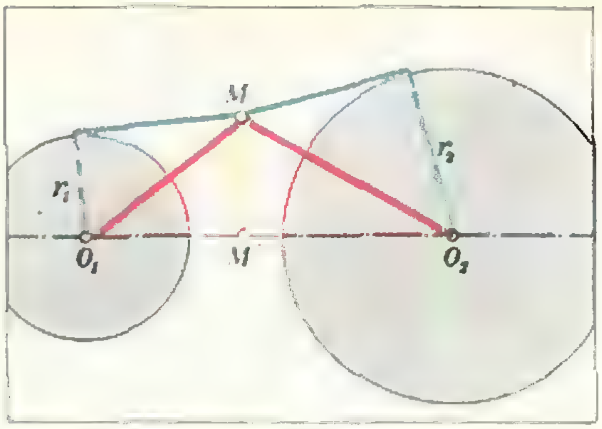


Рис. 6. Разность квадратов расстояний от M до центров кругов постоянна. Поэтому точка M принадлежит определенной прямой, перпендикулярной линии центров (*радикальной оси* двух окружностей).

плоскости (рис. 6) лежит и проекция M' точки M на прямую O_1O_2.

Из равенства длин касательных

$$\sqrt{|MO_1|^2 - r_1^2} = \sqrt{|MO_2|^2 - r_2^2}$$

вытекает, что

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Пользуясь тем, что треугольники $MM'O_1$ и $MM'O_2$ — прямоугольные, получаем

$$|M'O_1|^2 - |M'O_2|^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

то есть для точки M' выполняется то же равенство (6), что и для точки P; как мы уже говорили, в этом случае M' должна совпадать с P. Таким образом, точка M лежит в плоскости, перпендикулярной линии центров и проходящей через точку P, определяемую равенством (6) (эта плоскость называется *радикальной плоскостью* двух данных сфер). Теорема доказана.

И. Ф. Шарыгин, И. Б. Васильев

К решению задачи М 218. В «Кванте» № 4 за этот год мы предложили читателям обобщение задачи М218. Редакция получила несколько писем. Наиболее полное решение прислал В. Л. Рабинович.

Напомним формулировку задачи, приведем ответ и укажем основную идею решения.

Задача. При каком наибольшем c_n для любых положительных $x_1, \ldots, x_n$ верно неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geq$$
$$\geq c_n (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1)? \quad (1)$$

Ответ: $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_n = 4$ при $n \geq 4$, при этом в случаях $n = 2, 3, 4$ неравенство верно при любых $x_1, \ldots, x_n$.

Докажем, что неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geq 4 (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \quad (2)$$

верно для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при всех $n \geq 4$.

Для $n = 4$ неравенство (2) верно при любых x_1, x_2, x_3, x_4. В самом деле,

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 -$$
$$- 4 (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1) =$$
$$= ((x_1 + x_3) + (x_2 + x_4))^2 - 4 (x_1 + x_3) \times$$
$$\times (x_2 + x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0.$$

Докажем, что если неравенство (2) верно для n положительных чисел, то оно верно и для $(n + 1)$ положительных чисел.

Мы можем считать, что x_{n+1} — наименьшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Тогда

$$(2x_1 - x_{n+1})(2x_n - x_{n+1}) \geq 0.$$

Сложив это неравенство с (2), получим

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + x_{n+1}^2 +$$
$$+ 4x_1x_n - 2x_1x_{n+1} - 2x_{n+1}x_n \geq$$
$$\geq 4 (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1),$$

откуда

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + 2x_{n+1} (x_1 + x_n) +$$
$$+ x_{n+1}^2 \geq$$
$$\geq 4 (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) - 4x_1x_n +$$
$$+ 4x_nx_{n+1} + 4x_{n+1}x_1 =$$
$$= 4 (x_1x_2 + \ldots + x_nx_{n+1} - x_{n+1}x_1),$$

тем более

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})^2 =$$
$$= (x_1 + \ldots + x_n)^2 + 2x_{n+1} (x_1 + x_2 + \ldots$$
$$\ldots + x_n) + x_{n+1}^2 >$$
$$> 4 (x_1x_2 + \ldots + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1).$$

В. Л. Гутенмахер

Ф260. *На вход схемы (рис. 7, а) подаются прямоугольные импульсы напряжения величиной U_0 и длительностью τ. Период повторения импульсов T (рис. 7, б). Найти установившееся через очень много периодов напряжение на конденсаторе, если в течение периода напряжение на конденсаторе изменяется очень мало.*

Когда в цепи установится равновесие, напряжение, а значит, и заряд на конденсаторе меняться не будут. То есть увеличение

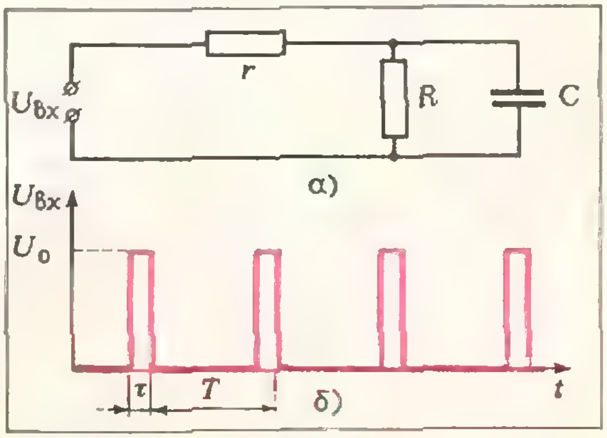


Рис. 7.

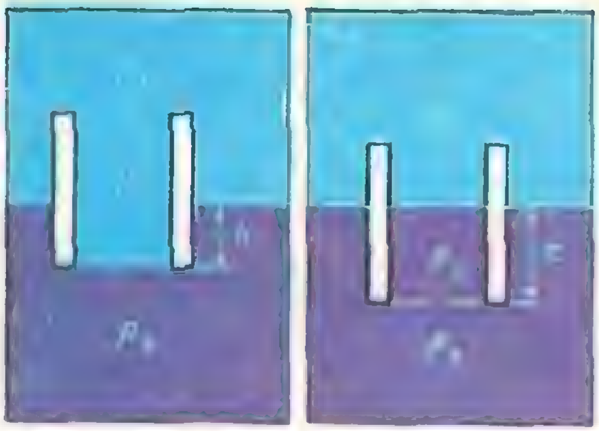


Рис. 8.

заряда при зарядке будет равно уменьшению заряда при разрядке.

При зарядке конденсатора в течение времени τ напряжение на нем равно

$$U_C=U_0-I_з r.$$

Так как за период заряд на конденсаторе меняется очень мало, то можно считать зарядный ток постоянным и равным

$$I_з=\frac{\Delta q}{\tau},$$

где Δq — изменение заряда. Таким образом,

$$U_C=U_0-\frac{\Delta q}{\tau}r. \qquad (1)$$

При разрядке конденсатор разряжается через сопротивление R в течение времени $T-\tau$, поэтому $U_C=I_pR$, где разрядный ток

$$I_p=\frac{\Delta q}{T-\tau}.$$

Следовательно, во время разрядки

$$U_C=\frac{\Delta q}{T-\tau}R. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получим

$$U_C=U_0\frac{R\tau}{(R-r)\tau+rT}.$$

Ф261. *На границе раздела двух жидкостей с разными плотностями плавает, погрузившись в нижнюю жидкость на глубину h, толстостенный стакан с тонким дном. Стакан заполнен доверху верхней жидкостью. Внешний радиус стакана R, внутренний r. В дне стакана появилась дыра. Насколько изменится глубина погружения стакана после того как жидкость перестанет втекать в него?*

Запишем условие равновесия стакана в первом случае (рис. 8, *а*):

$$mg+m_1g=F_{в1}.$$

Здесь m — масса стакана, $m_1=\rho_1\pi r^2 l$ — масса жидкости внутри стакана (l — высота стакана), $F_{в1}$ — выталкивающая сила.

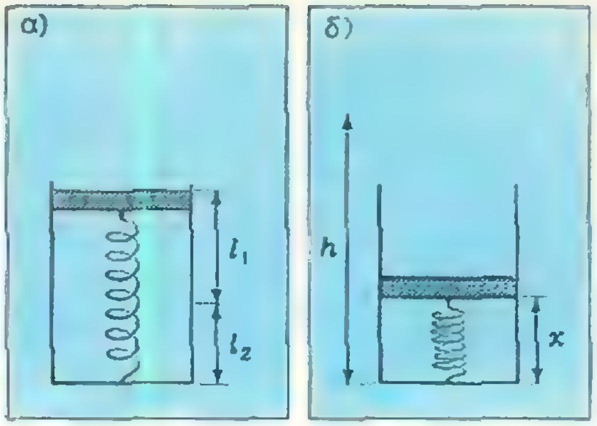


Рис. 9.

Если тело плавает на границе раздела двух жидкостей так, что в первой жидкости находится часть тела объемом V_1, а во второй — V_2, то на тело действует выталкивающая сила, равная

$$F_в=\rho_1gV_1+\rho_2gV_2.$$

Действительно, можно мысленно разделить тело на две части по границе раздела жидкостей и рассматривать каждую часть в отдельности. От этого ни положение тела, ни действующие на него силы, конечно, не изменяться. Таким образом,

$$F_{в1}=\rho_1g\pi R^2(l-h)+\rho_2g\pi R^2h.$$

Тогда условие равновесия запишется так:

$$mg+\rho_1g\pi r^2l=\rho_1g\pi R^2(l-h)+\rho_2g\pi R^2h. \qquad (1)$$

Когда в дне стакана появится дыра, нижняя жидкость будет втекать в стакан, вытесняя оттуда верхнюю жидкость. Это будет происходить до тех пор, пока уровень границы жидкостей внутри стакана не совпадет с уровнем границы жидкостей вне стакана (рис. 8, *б*). И в этом случае тоже стакан будет находиться в равновесии, поэтому можно записать равенство, аналогичное равенству (1):

$$mg+\rho_1g\pi r^2(l-x)+\rho_2g\pi r^2x=$$
$$=\rho_1g\pi R^2(l-x)+\rho_2g\pi R^2x. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$x=h\frac{R^2}{R^2-r^2}.$$

Мы получили, что ответ не зависит ни от массы стакана, ни от плотностей жидкостей. Это может вызвать удивление. Ведь если стакан тяжелый, а верхняя среда, например,— воздух, то ясно, что после появления дыры стакан потонет. Однако ответ задачи правильный. Дело в том, что при решении мы заведомо считали, что $h<l$ и $x<l$ (при $h\geq l$ или $x\geq l$ стакан будет тонуть). Эти условия вместе с равенствами (1) и (2) позволяют найти соотношения между плотностью материала стакана и плотностями жидкостей, при которых возможно равновесие стакана как в первом, так и во втором случаях.

Ф262. *Тонкостенный цилиндрический стакан, имеющий тонкое дно, закрыт невесомым*

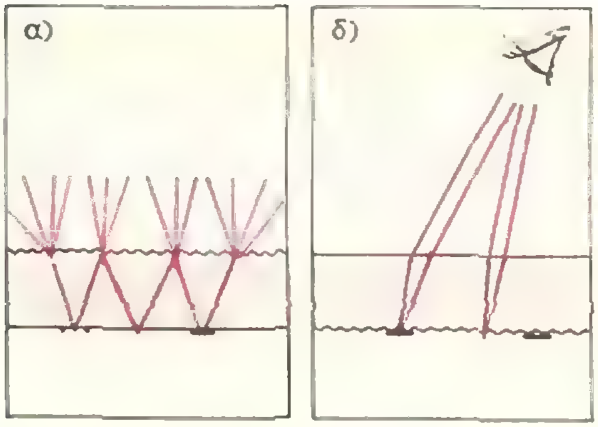


Рис. 10.

тонким поршнем. Между поршнем и дном в стакане вставлена пружина. Внутри стакана находится воздух при атмосферном давлении p_0. Стакан плавает в воде, как показано на рисунке 9, а, расстояние от поверхности воды до поршня равно l_1, глубина погружения стакана равна l_2. Площадь поршня S, жесткость пружины k, плотность воды ρ. На какую максимальную глубину можно погрузить стакан под воду, чтобы он еще мог всплыть? Объемом пружины пренебречь.

В начальный момент стакан плавает на поверхности воды. Это означает, что действующая на него сила тяжести уравновешивается выталкивающей архимедовой силой:

$$mg = \rho g l_2 S.$$

При погружении стакана сначала выталкивающая сила будет увеличиваться. Но когда поршень достигнет уровня воды, сила давления воды начнет перемещать поршень вниз, к дну стакана. При этом объем стакана, а значит, и выталкивающая сила будут уменьшаться. Очевидно, что максимальная глубина погружения стакана — это такая глубина, на которой выталкивающая сила, как и в начальный момент, равна силе тяжести, действующей на стакан:

$$mg = \rho g x S.$$

Здесь x — высота поршня от дна стакана (рис. 9, *б*). Причем, из (1) и (2)

$$x = l_2.$$

С другой стороны, величина x связана с глубиной погружения стакана h. Запишем условие равновесия поршня. На него сверху действуют сила атмосферного давления p_0S и сила гидростатического давления $\rho g(h-x)S$, а снизу — сила упругости пружины $k\Delta x = k(l_1 + l_2 - x)$ и сила давления воздуха в стакане pS. Естественно считать, что температура воздуха под поршнем не меняется (она равна температуре воды), поэтому из закона Бойля — Мариотта

$$p_0(l_1 + l_2) = px,$$

откуда

$$p = p_0 \frac{l_1 + l_2}{x}.$$

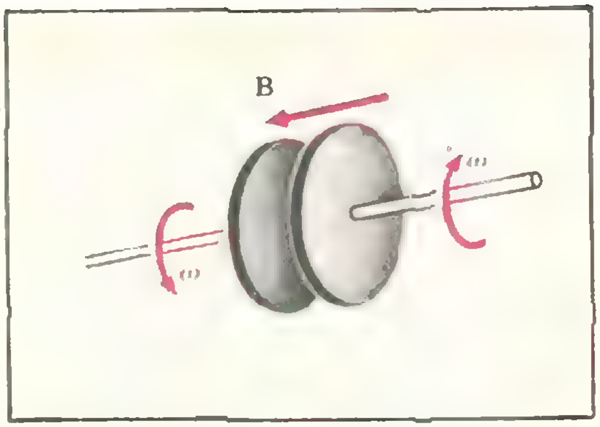


Рис. 11.

Таким образом, можно записать

$$p_0S + \rho g(h-x)S = k(l_1 + l_2 - x) + \frac{p_0(l_1 + l_2)S}{x}.$$

Подставляя сюда $x = l_2$, получим:

$$p_0S + \rho g(h - l_2)S = kl_1 + p_0S\left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right),$$

откуда

$$h = \frac{p_0Sl_1 + kl_1l_2 + \rho g l_2^2 S}{\rho g S l_2}.$$

Ф263. *Матированное стекло (одна из поверхностей стекла гладкая, другая шероховатая) прикладывают к чертежу: один раз гладкой поверхностью кверху, другой раз — книзу. В одном случае чертеж виден хорошо, а другом — разобрать его невозможно. Почему?*

Шероховатая поверхность стекла рассеивает падающий на нее свет равномерно во все стороны. Если стекло лежит на чертеже гладкой поверхностью (рис. 10, *а*), то в каждую точку шероховатой поверхности стекла попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Световые потоки, идущие из таких разных участков чертежа, затем рассеиваются во все стороны одинаково, и от каждого участка чертежа в глаз попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Разные участки стекла поэтому кажутся одинаково яркими, и разобрать чертеж нельзя.

Если же стекло обращено к чертежу матовой поверхностью (рис. 10, *б*), то матовая поверхность оказывается освещенной неравномерно. Лучи, идущие из разных точек этой поверхности, попадают в глаз, не пересекаясь, и чертеж легко разобрать.

Ф264. *Две одинаковые круглые плоские металлические пластины, расположенные так, как показано на рисунке 11, вращают с угло-*

вой скоростью ω в противоположные стороны в магнитном поле, перпендикулярном плоскостям пластин. Индукция магнитного поля равна B, расстояние между пластинами a. Оси пластин соединяют проводником. Найти установившееся распределение плотности зарядов на пластинах.

Вращающиеся пластины образуют плоский конденсатор с неравномерным распределением зарядов вдоль пластин. Если выделить одинаковые находящиеся друг против друга участки пластин с площадью S, то нетрудно найти емкость конденсатора, который образуют эти участки. Она равна $C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{a}$. Так как заряд такого конденсатора равен $Q=CU$, где U — разность потенциалов участков, то ясно, что мы легко определим плотность зарядов на участке $\sigma=\frac{Q}{S}=\frac{CU}{S}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 U}{a}$, если сможем вычислить U. Попробуем это сделать.

На заряд q, который находится на расстоянии x от центра пластины, действуют две силы: сила Лоренца $F_л=qvB=q\omega xB$ и сила $F_э=qE$ со стороны электрического поля, которое возникает в пластине благодаря неравномерности распределения зарядов по диску. Равнодействующая сил $\mathbf{F}_л$ и $\mathbf{F}_э$ сообщает заряду центростремительное ускорение $a=\omega^2 x$. Поэтому согласно II закону Ньютона

$$\mathbf{F}_л+\mathbf{F}_э=m\mathbf{a}. \qquad (1)$$

Так как диски вращаются в разные стороны, то сила Лоренца, действующая на заряды, которые находятся на одинаковом расстоянии от центров дисков, направлена в разных дисках в разные стороны. Поэтому, если для первого диска

$$qE-q\omega xB=m\omega^2 x, \qquad (2)$$

то для второго диска

$$qE+q\omega xB=m\omega^2 x\ ^{*}). \qquad (3)$$

Из этих условий равновесия найдем напряженности поля на расстояниях x от центров дисков. Они равны $\left(\omega B+\frac{m}{q}\omega^2\right)x$ в первом диске и $\left(\omega^2\frac{m}{q}-\omega B\right)x$ во втором. В обоих случаях абсолютная величина напряженности поля пропорциональна x. Это позволяет легко вычислить разность потенциалов между центром диска и точкой, которая находится на расстоянии r от центра. Так как эта разность потенциалов равна произведению среднего значения напряженности поля на r, а в силу того, что $E\sim x$, $E_{ср}=\frac{E_ц+E_x}{2}$ и $E_ц=0$, то

$$U_1=\frac{1}{2}\left(\omega B+\frac{m}{q}\omega^2\right)r\cdot r=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\omega B+\frac{m}{q}\omega^2\right)r^2 \qquad (4)$$

для первого диска и

$$U_2=\frac{1}{2}\left(-\omega B+\frac{m}{q}\omega^2\right)r^2 \qquad (5)$$

для второго диска.

Разность потенциалов точек дисков, которые находятся напротив друг друга, равна (так как потенциалы центров дисков одинаковы)

$$U=U_1-U_2=\omega Br^2. \qquad (6)$$

Это означает, что

$$\sigma=\frac{\varepsilon\varepsilon_0\omega Br^2}{a}. \qquad (7)$$

Ф265. *Мальчик, сидящий на санках, хочет подтянуть себя к стене с помощью веревки, прикрепленной к санкам и перекинутой через блоки (рис. 12). Каким должен быть для этого коэффициент трения мальчика о санки, если масса санок m, масса мальчика M, коэффициент трения полозьев санок о снег равен k?*

Силы, действующие на мальчика, показаны на рисунке 13, *а*. Это — сила тяжести $M\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$, сила натяжения веревки $\mathbf{T}$ и сила трения мальчика о санки $\mathbf{F}_{тр}$. Так как в отсутствие трения мальчика о санки мальчик скользил бы по санкам по направлению к стене, то сила трения будет

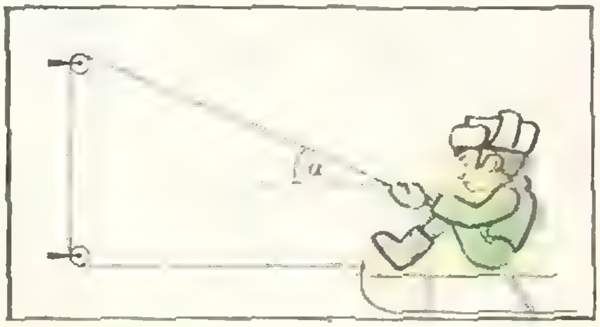


Рис. 12.

---

*) Направления сил $\mathbf{F}_э$ в дисках зависят от величины ω. Если ω мало, так что $m\omega^2 x < q\omega xB$, то направления сил $\mathbf{F}_э$ в дисках противоположны, если $m\omega^2 x > q\omega xB$, то силы $\mathbf{F}_э$ в разных дисках направлены в одну сторону. Это видно из уравнений (2) и (3).

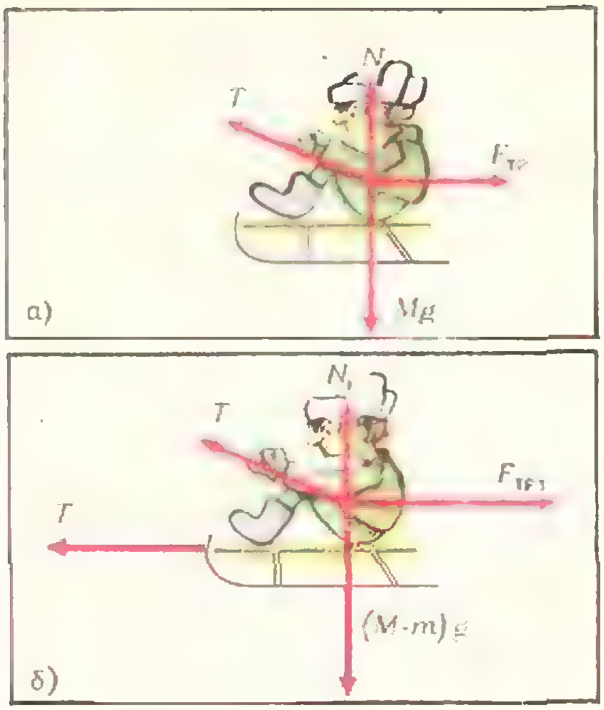


Рис. 13.

направлена вправо, то есть в сторону, противоположную возможному перемещению мальчика относительно санок.

По вертикали мальчик не перемещается, а его движение по горизонтали вместе с санками будем считать равномерным. Тогда можно записать такие равенства:

$$T\sin\alpha + N - Mg = 0,$$
$$T\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0,$$

где $F_{\text{тр}} = k_1 N$ (k_1 — коэффициент трения мальчика о санки).

Отсюда

$$k_1 = \frac{T\cos\alpha}{Mg - T\sin\alpha}.$$

Силу натяжения веревки T найдем, рассматривая движение всей системы мальчик — санки в целом (рис. 13, *б*). Для вертикального и горизонтального направлений можно записать:

$$T\sin\alpha + N_1 - (M+m)g = 0,$$
$$T + T\cos\alpha - F_{\text{тр}_1} = 0.$$

Здесь N_1 — сила реакции опоры, $F_{\text{тр}_1} = kN_1$ — сила трения санок о снег. Из этих равенств

$$T = \frac{k(M+m)g}{1+\cos\alpha + k\sin\alpha}.$$

Тогда окончательно

$$k_1 = \frac{T\cos\alpha}{Mg - T\sin\alpha} = \frac{k(M+m)\cos\alpha}{M(1+\cos\alpha) - km\sin\alpha}.$$

Ф266. *U-образная трубка движется с постоянной скоростью v параллельно поверхности жидкости (рис. 14). Сечение нижней части трубки, опущенной в воду, равно S_1, а верхней, находящейся над водой, — S_2. Какая сила приложена к трубке? Плотность жидкости ρ. Трением и образованием волн на поверхности жидкости пренебречь.*

Задачу удобно решать в системе координат, связанной с трубкой. В этой системе жидкость в нижней части трубки движется со скоростью v.

За время Δt в трубку попадает объем воды $V = S_1 v \Delta t$ с массой $m = \rho S_1 v \Delta t$. Импульс этой воды равен

$$mv = \rho S_1 v^2 \Delta t.$$

Так как жидкость не накапливается в трубке, то за время Δt такая же масса жидкости вытекает их верхней трубки. Но скорость u вытекающей жидкости уже другая. Так как объем жидкости, попадающей в трубку, равен объему жидкости, вытекающей из трубки, то

$$S_1 v = S_2 u.$$

Отсюда

$$u = v\frac{S_1}{S_2},$$

и импульс воды, вытекающей из трубки, равен по абсолютной величине

$$mu = \rho S_2 u^2 \Delta t = \rho v^2 \frac{S_1^2}{S_2}\Delta t,$$

и направлен в сторону, противоположную направлению импульса втекающей воды.

Таким образом, за время Δt импульс воды в трубке меняется на величину

$$\Delta(mv) = mv - (-mu) = \rho S_1\left(\frac{S_1}{S_2} + 1\right)v^2\Delta t.$$

Согласно второму закону Ньютона, на воду в трубке действует сила

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \rho S_1\left(\frac{S_1}{S_2} + 1\right)v^2.$$

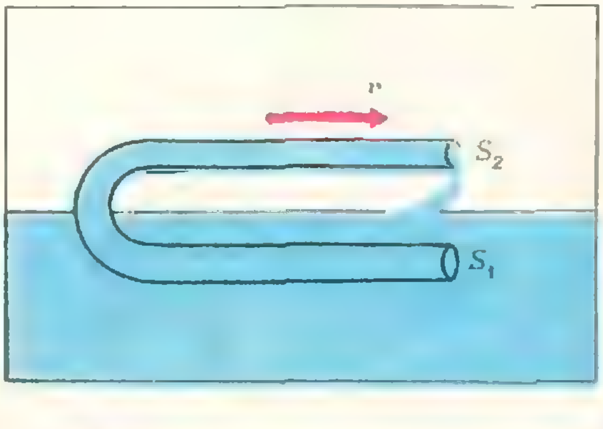


Рис. 14.

Такая же по абсолютной величине сила, но направленная в другую сторону (по третьему закону Ньютона), действует на трубку со стороны жидкости.

Ф267. *Космический корабль сферической формы движется вокруг Солнца по круговой орбите. Какова температура корабля, если энергия, излучаемая единицей площади поверхности Солнца и корабля, пропорциональна четвертой степени их абсолютных температур? Космонавты, которые находятся на корабле, видят Солнце в угле 30′. Температуру поверхности Солнца принять равной* 6000° K.

При тепловом равновесии, когда температура корабля не меняется, энергия, получаемая кораблем в единицу времени от Солнца, равна энергии, излучаемой в ту же единицу времени самим кораблем в окружающее пространство:

$$W_{\text{изл}} = W_{\text{пол}}.$$

Энергия, излучаемая кораблем, пропорциональна площади поверхности корабля $S_{\text{к}} = 4\pi R_{\text{к}}^2$ ($R_{\text{к}}$ — радиус корабля) и четвертой степени температуры $T_{\text{к}}$ и равна

$$W_{\text{изл}} = kS_{\text{к}}T_{\text{к}}^4 = 4k\pi R_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}^4,$$

где k — коэффициент пропорциональности, одинаковый и для корабля и для Солнца.

Теперь определим энергию, получаемую кораблем от Солнца. С единицы поверхности Солнца излучается энергия, равная kT_{c}^4; все Солнце излучает энергию

$$W_{\text{c}} = 4k\pi R_{\text{c}}^2 T_{\text{c}}^4,$$

распространяющуюся равномерно по всем направлениям.

На расстоянии l от Солнца, где находится космический корабль, эта энергия проходит через сферу с площадью поверхности

$$S = 4\pi l^2.$$

Через единицу площади поверхности этой сферы проходит энергия, равная $\frac{W_{\text{c}}}{S}$. Площадь сечения корабля равна $\pi R_{\text{к}}^2$, поэтому на корабль попадает энергия

$$W_{\text{пол}} = \frac{W_{\text{c}}}{S}\pi R_{\text{к}}^2 =$$

$$= \frac{W_{\text{c}}}{4\pi l^2}\pi R_{\text{к}}^2 = k\,\frac{\pi R_{\text{c}}^2 R_{\text{к}}^2}{l^2}T_{\text{c}}^4.$$

Так как космонавты видят Солнце в угле $\alpha = 30'$ и этот угол мал, то

$$\alpha = \frac{R_{\text{c}}}{l}$$

и

$$W_{\text{пол}} = \frac{k\pi R_{\text{к}}^2 \alpha^2 T_{\text{c}}^4}{4}.$$

Итак, равенство излучаемой и поглощаемой кораблем энергии запишется так:

$$4k\pi R_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}^4 = \frac{k\pi R_{\text{к}}^2 \alpha^2 T_{\text{c}}^4}{4}.$$

Отсюда

$$T_{\text{к}} = \frac{T_{\text{c}}}{2}\sqrt{\alpha} \approx 270\,^\circ\text{K}.$$

Мы получили, что температура корабля не зависит от его радиуса и определяется только углом α, в котором видно Солнце. Этот угол равен углу, в котором видно Солнце с Земли. Поэтому и температура космического корабля оказалась по порядку величины совпадающей с температурой гигантского «космического корабля» — Земли.

Ф268. *Для определения отношения теплоемкостей газа при постоянном объеме и при постоянном давлении иногда применяется следующий метод. Определенное количество газа, начальная температура, объем и давление которого равны соответственно* T_0, V_0 *и* p_0, *нагревается платиновой проволокой, через которую в течение определенного времени проходит электрический ток, один раз при постоянном объеме* V_0, *причем газ достигает давления* p_1, *другой раз при постоянном давлении* p_0, *причем объем газа становится равным* V_1. *Показать, что* $\frac{c_p}{c_V} = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{(V_1 - V_0)p_0}$.

Так как проволока нагревается одним и тем же током в течение одного и того же времени, то газ в обоих случаях получает одно и то же количество тепла.

Если газ нагревается при постоянном объеме, то количество тепла, получаемого газом, равно

$$Q = c_V m(T - T_0).$$

Запишем уравнения состояния газа:

$$p_0V_0 = nRT_0$$

и

$$p_1V_0 = nRT.$$

Здесь n — число молей газа, T — температура газа при давлении p_1.

Отсюда

$$T - T_0 = \frac{V_0(p_1 - p_0)}{n},$$

и

$$Q = c_V m\,\frac{V_0(p_1 - p_0)}{n}. \qquad (1)$$

При нагревании при постоянном давлении газ получает количество тепла

$$Q = c_p m (T' - T_0).$$

Из уравнений состояния идеального газа

$$p_0 V_0 = nRT_0 \text{ и } p_0 V_1 = nRT'$$

имеем:

$$T' - T_0 = \frac{p_0 (V_1 - V_0)}{n},$$

и

$$Q = c_p m \, \frac{p_0 (V_1 - V_0)}{n}. \qquad (2)$$

Разделив равенство (1) на равенство (2), получим

$$1 = \frac{c_V}{c_p} \, \frac{V_0 (p_1 - p_0)}{p_0 (V_1 - V_0)}.$$

Отсюда

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{V_0 (p_1 - p_0)}{p_0 (V_1 - V_0)}.$$

И. Ш. Слободецкий

В этом номере мы приводим список читателей, приславших в редакцию верные решения задач **М246—М255**. В большинстве писем содержалось верное решение задачи **М251**. Остальные задачи решили (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи): *А. Аветисян* (с. Ачашен Арм. ССР) **54**; *Д. Азов* (Челябинск) **46, 47, 50**; *М. Амирбаев* (с. Кенес КАССР) **54**; *Р. Аракелян* (Степанакерт) **46**; *М. Аронов* (Володарск Горьковской обл.) **54**; *И. Арсамиков* (Грозный) **54**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **53**; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) **54**; *В. Басманов* (Воронеж) **46, 49, 54, 55**; *В. Бегларян* (Калинин) **54**; *С. Белоглазов* (ст. Кишерть Пермской обл.) **53, 54**; *М. Бирман* (Саратов) **53**; *А. Богорад* (Ленинград) **54**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **47**; *В. Булавкин* (Елец) **53**; *Р. Вальшин* (М. Джалиль ТАССР) **53, 55**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **46**; *Н. Ванышева* (Богородск Горьковской обл.) **47**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **46**; *В. Виноградов* (Владивосток) **55**; *Л. Воробьев* (Витебск) **46, 53**; *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл.) **46, 47, 49, 52—55**; *О. Глушко* (Москва) **54**; *А. Гончаров* (Никополь) **47, 50**; *Е. Горбатый* (Одесса) **54**; *А. Гордин* (Урень Горьковской обл.) **54**; *А. Григорян* (Баку), **49, 50, 52, 54, 55**; *Л. Грушина* (Москва) **53**; *Е. Гугель* (Днепропетровск) **47**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **53, 54**; *М. Даниелян* (Баку), **46, 47**; *П. Дедик* (Москва) **54, 55**; *В. Демин* (Золотое Ворошиловградской обл.) **46**; *А. Диденко* (Краснодар) **46**; *В. Дорохов* (Донецк) **54**; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) **46, 47, 49, 52—54**; *Г. Зайцев* (Хабаровск) **46**; *Ю. Закс* (Москва) **53**; *А. Заргарян* (Тбилиси) **54**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **54**; *О. Захарченко* (Киев) **52**; *А. Зеленский* (Шахтерск Донецкой обл.) **46, 54**; *С. Золотарев* (Москва) **53, 54**; *Е. Калошин* (Москва) **46**; *П. Кацыло* (Москва) **46, 47, 49, 53, 55**; *В. Кислюк* (Монино Московской обл.) **54**; *Е. Колошин* (Москва) **53, 54**; *С. Коляда* (Киев) **46, 47, 53**; *В. Конев* (Ангарск) **54**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **46**; *С. Кузнецов* (Москва) **46**; *В. Куликовский* (Москва) **53**; *А. Курляндчик* (Вильнюс) **46, 47, 54**; *А. Кутыркин* (Пенза **46**; *С. Латышев* (Грозный) **49**; *В. Лашин* (Гагарин) **55**; *А. Лебедев* (Бийск Алтайского края) **53**; *Д. Леднев* (Ижевск) **46, 52**; *М. Липовский* (Волгоград) **53**; *М. Ловская* (Москва) **53**; *В. Мигунов* (Обнинск Калужской обл.) **46**; *В. Мильман* (Минск) **49**; *А. Минаров* (Харьков) **46**; *И. Морозов* (Горький) **53**; *Н. Мощук* (Душанбе) **53**; *С. Мусаелян* (Степанакерт) **47**; *С. Насыров* (Казань) **46**; *Ю. Неретин* (Москва) **46, 47, 53, 54**; *Н. Нецветаев* (Ленинград) **52, 55**; *Л. Ободовский* (Жданов) **53—55**; *С. Охитин* (Оренбург) **53**; *В. Охотников* (Баку) **55**; *Б. Певзнер* (Москва) **54**; *Ю. Перлов* (Фрунзе) **46, 53**; *Н. Пивторак* (с. Соколовка Винницкой обл.) **46**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **46, 49, 50**; *А. Плахов* (Москва) **54, 55**; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) **54, 55**; *П. Портной* (Черновцы) **46**; *С. Путинцев* (Невинномысск) **54**; *Т. Райков* (Болгария) **50**; *П. Рогачев* (Гомель) **46**; *Е. Романовский* (Киев) **50, 53**; *Л. Рубинштейн* (Калининград) **53, 54**; *И. Рудой* (Харьков) **53**; *А. Ряхин* (Калинин) **54**; *Р. Салихов* (Петровское БАССР) **53, 54**; *М. Ситников* (Москва) **47**; *А. Слинкин* (Москва) **53, 54**; *В. Смирнов* (Уфа) **47**; *Е. Сокова* (Калинин) **54**; *С. Солнцев* (Киев) **46, 47, 54**; *А. Спирин* (Москва) **46**; *А. Султанов* (д. Старо-Куручево БАССР) **54**; *В. Тарасов* (Ленинград) **47, 54**; *К. Тевосян* (Абавян Арм. ССР) **46, 47**; *С. Трегуб* (Ташкент) **54**; *И. Тураева* (Кемь) **53**; *В. Филоненко* (Днепропетровск) **49**; *С. Финашин* (Ленинград) **46, 47, 50, 52, 54**; *В. Фомин* (Орск Оренбургской обл.) **54**; *И. Фомина* (Харьков) **53, 54**; *А. Фрумкин* (Москва) **52**; *В. Хацимовский* (Красноярск) **54**; **55**; *Т. Хованова* (Москва) **54**; *В. Хонин* (Первоуральск) **50**; *Г. Храпунович* (Ленинград) **54**; *Д. Хухунайшвили* (Тбилиси) **54**; *И. Цукерман* (Ленинград) **46, 47**; *А. Черебатов* (Омск) **54**; *Т. Чилачава* (Тбилиси) **53**; *Ф. Шакурова* (Казань) **53**; *М. Шалухин* (п. Чемишлия; МССР) **46**; *С. Шаташвили* (Тбилиси) **53**; *А. Шевкин* (Москва) **53**; *Е. Шефтель* (Чернигов) **53**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **46, 49, 52, 54**; *Н. Шмырин* (Реж Свердловской обл.) **54**; *В. Шпаковский* (Пинск Брестской обл.) **54**; *А. Эстерлис* (Тбилиси) **54**; *С. Югай* (Фрунзе) **46**; *И. Юнус* (Харьков) **54**; *Б. Юсин* (Москва) **52—55**; *М. Яникова* (Москва) **46**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **46**.

Ю. П. Лысов

Правильные решения задач **Ф253—Ф266** прислали следующие читатели (жирные цифры — последние две цифры номера задачи): *Д. Азэв* (Челябинск) **56**; *Г. Айзин* (Брест) **56, 59, 65, 66**; *Р. Акбаров* (Андижан) **54, 59, 62**; *Ю. Алекна* (Алитус) **54, 56, 61, 62**; *А. Александрин* (Валуйки Белгородской обл.) **61, 62**; *Я. Аннамурадов* (Байрам-Али) **61**; *А. Ангелуц* (Баку) **54, 62**; *Н. Антонов* (Чебоксары) **54, 56—59, 62**; *А. Арабян* (Ахалидзе) **61**; *Р. Бабчанник* (п. Мэнома-65 км Хабаровского кр.) **63**; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) **56**; *В. Бакуров* (Новосибирск) **53, 54, 56, 59, 60, 62, 63**; *С. Балашов* (Москва) **65, 66**; *Г. Бареладзе* (Тбилиси) **58, 61, 62**; *Г. Бежиашвили* (Рустави) **65**; *Н. Бейгельман* (Калининград) **58**; *А. Белоусов* (Сумгаит) **63, 65**; *В. Белоусов* (Москва) **63**; *Ю. Бельский* (Брест) **65**; *З. Бендукидзе* (Тбилиси) **65**; *В. Бенхан* (Калинин) **56**; *А. Берлин* (Бобруйск) **56**; *А. Бертенев* (Фергана) **54**; *У. Биджиев* (Карачаевск) **65**; *М. Биктимиров* (Ленинск) **54, 61**; *Л. Богомолов* (Одесса) **59, 61, 62**; *Ю. Богомолов* (Казань) **63**; *В. Борисов* (с. Верхневилюйск Якут АССР) **61, 65**; *В. Борисов* (Воронеж) **56, 62**; *В. Борю* (Запорожье) **58, 59, 61, 62**; *С. Бостанова* (Карачаевск) **65, 66**; *А. Брагинский* (Москва) **59**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **63**; *З. Бутосов* (Кировская обл.) **54, 56**; *Ю. Бучинскас* (Шилальский р-н Лит ССР) **63**; *М. Ваксман* (Семипалатинск) **59, 61, 62**; *А. Вакуленко* (Москва) **58, 59, 61, 62**; *И. Винсковский* (с. Гаи Нижние Львовской обл.) **62**; *А. Волков* (Челябинск) **54, 61, 66**; *Д. Воловик* (Москва) **56**; *В. Волчков* (Залегощь Орловской обл.) **54, 62**; *И. Галинников* (Волгоград) **54, 56, 59, 61, 62**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **59, 61, 62**; *И. Герко* (Кременчуг) **63**; *С. Герц* (Хуст) **54, 58, 59, 61, 62, 65**; *И. Гиндлер* (Хмельницкий) **54**; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) **65, 66**; *А. Говяда* (Киев) **66**; *И. Голдовский* (Брянск) **66**; *Э. Голод* (Пинск Брестской обл.) **65,66**; *Е. Горбатый* (Одесса) **57, 65, 66**; *А. Гордин* (Урень Горьковской обл.) **63**; *С. Горишный* (Таганрог) **63, 65**; *Г. Горлачев* (Белорецк) **66**; *А. Григорьев* (Грозный) **62, 65, 66**; *О. Гридовский* (Орша) **54**; *С. Гришин* (Вязьма Смоленской обл.) **63**; *М. Давлатханов* (Наманган) **57**; *Е. Демихов* (Усмань Липецкой обл.) **61**; *Р. Динисламов* (с. Н. Белокатай БАССР); **59**; *П. Джавакидзе* (Тбилиси) **65**; *А. Добрынин* (Губаха Пермской обл.) **54, 55, 57**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **58, 59, 61—63, 65, 66**; *В. Дорохов* (Донецк) **63, 66**; *А. Дробинин* (Евпатория) **59, 61, 63, 66**; *Н. Дубровский* (Омск) **59, 61,62**; *Э. Дяченко* (с. Андрушевка Житомирской обл.) **57**; *Р. Егорян* (Раздан) **58, 59, 61**; *С. Епишин* (Москва) **54**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **55, 56**; *В. Железнов* (п. Октябрьский Амурской обл.) **56, 57**; *В. Жук* (Грозный) **54, 56, 58, 59**; *И. Заверткин* (Орск) **58, 62, 66**; *С. Загидулин* (Феодосия) **61**; *С. Зазовский* (Новомосковск Тульской обл.) **54, 56**; *А. Зеленский* (Шахтерск Донецкой обл.) **57, 63**; *Ю. Зельдин* (Орша) **57**; *П. Золотарев* (Ташкент) **65**; *И. Зорин* (Курск) **59**; *А. Иванов* (Фергана) **54**; *В. Иванов* (Железнодорожный) **54**; *В. Иванов* (Комсомольск-на-Амуре) **62**; *Т. Иванова* (Москва) **57**; *В. Иващук* (Киев) **53, 54, 56—59, 61, 62**; *А. Измайлов* (Баку) **58, 59, 61, 62**; *А. Илькун* (Зеленодольск) **54, 56, 57**; *Н. Имранов* (Баку) **61, 62**; *Л. Исьянин* (Москва) **54**; *Е. Кармановский* (Колпино) **54, 61**; *А. Карнаух* (Белгород) **59, 61, 62**; *В. Карпов* (Москва) **54,62**; *В. Карпухов* (Челябинск) **51, 58, 62**; *А. Карякин* (Сарань Карагандинской обл.) **62, 65**; *В. Катицин* (Белые Столбы) **59**; *А. Кацман* (Сумгаит) **54**; *Б. Кацман* (Мытищи) **59, 61—63**; *Н. Кириллова* (Ворема Горьковской обл.) **62**; *А. Клименко* (Конотоп) **62**; *Л. Клименко* (Москва) **61**; *А. Клочко* (Жуковский) **54, 59, 62, 65, 66**; *И. Ключиков* (Запорожье) **59, 63, 65, 66**; *А. Коган* (Воронеж) **58**; *Я. Коган* (Глазов) **53, 54, 61, 66**; *Р. Козак* (Винница) **54, 59**; *Р. Колошин* (Дрогобыч) **54, 62**; *С. Коляда* (Киев) **54, 62, 66**; *М. Кондратьев* (Уфа) **61, 62, 65**; *В. Контарин* (Таллин) **65, 66**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **54, 56, 57, 66**; *И. Коратный* (Львов) **59**; *Г. Коренчук* (с. Мельники-Мостинские Волынской обл.) **65**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **53, 54, 56—59, 61, 62**; *М. Котловский* (Дрогобыч) **54, 62**; *Л. Кофман* (Таллин) **54, 55, 57**; *С. Крекин* (Магадан) **54, 56, 59, 62**; *М. Кроль* (Павлово-Посад Московской обл.) **61, 62**; *А. Кудряшев* (Саратов) **54**, *В. Кузьмин* (Грозный) **54, 56**; *В. Куликов* (Иваново) **59**; *В. Куликовский* (Москва) **63, 65, 66**; *В. Курдин* (Москва) **53**; *А. Курдятов* (Саратов) **58, 62**; *М. Куркин* (Москва) **54**; *Р. Кучкаров* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **54, 59, 62, 65, 66**; *Н. Лапина* (Белгород) **58, 61, 62**; *Н. Лебедев* (Казань) **58, 62**; *Д. Леднев* (Ижевск) **62**; *В. Леконцев* (Уфа) **62**; *В. Лизунов* (Щекино) **54—57**; *В. Лозинский* (Львов) **65**; *Л. Лопатенко* (Днепропетровск) **59, 61, 62**; *А. Лычак* (Магнитогорск) **59, 61, 62**; *С. Ляпин* (Петриков Гомельской обл.) **57, 59, 61, 62, 65, 66**; *И. Майхрук* (с. Белобожница Тернопольской обл.) **58, 62, 66**; *А. Макаров* (Харьков) **54, 59, 60, 62**; *В. Малышев* (п/п 75254 «А») **58, 61**; *В. Малов* (Ташкент) **59**; *В. Мамед-Заде* (Баку) **66**; *Г. Мамедов* (Баку) **56**; *М. Мамлян* (Ереван) **54**; *Е. Мартынова* (Нежин) **65**; *А. Мелкумян* (Физули) **54, 59, 62**; *С. Мельник* (Харьков) **55, 56, 61, 62, 65**; *В. Мизунов* (Щекино Тульской обл.) **59, 61, 62**; *Л. Миродашвили* (Тбилиси) **58, 59, 61, 62**; *В. Миропольский* (Днепропетровск) **59**; *В. Мирский* (Москва) **54**; *А. Молотков* (п/о Кубинка Московской обл.) **66**; *В. Морозов* (Клинцы Брянской обл.) **61, 62**; *А. Морозовский* (Киев) **65**; *В. Мотовилов* (Шастополь) **62**; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) **63**; *Р. Назаргулов* (Стерлитамак) **62**; *М. Насартдинов* (п. Азнахиево ТАССР) **62**; *А. Немыкин* (Кировабад) **57**; *А. Оксак* (Ворошиловград) **62**; *Ю. Онищенко* (Люберцы) **63, 65, 66**; *С. Орехов* (Минск) **62**; *А. Осин* (Камышин) **59, 61, 62**; *В. Осипенко* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **65**;

С. Островская (Харьков) **58, 62**; *М. Паневин* (Балашиха) **66**; *С. Пантелеймонов* (Хуст) **56, 59, 66**; *А. Паровичников* (Обнинск) **54**; *В. Пахомов* (Днепропетровск) **59, 61, 62, 66**; *Ю. Перфильев* (Саратов) **61**; *В. Пестунов* (Кировоград) **63**; *А. Петяенко* (Ленинград) **58**; *А. Печеник* (Волгоград) **63**; *Н. Пивторак* (с. Соколовка Винницкой обл.) **54, 62**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **54, 56—58, 60—62**; *А. Поблагуев* (Винница) **53, 54, 56—62, 64, 65**; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) **61**; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **54, 59, 62, 66**; *П. Полуян* (Красноярск) **61—63**; *Н. Поляков* (п/о Сизый Бугор Астраханской обл.) **62**; *С. Пономарев* (ст. Брюховецкая Краснодарского кр.) **54**; *Р. Портной* (Черновцы) **62**; *А. Пресман* (Москва) **63, 66**; *В. Прокопенко* (Н. Роздол Львовской обл.) **58, 59, 61, 62**; *А. Рахубовский* (с. Куколовка Кировоградской обл.) **53**; *Б. Рева* (Таллин) **54**; *А. Ремеев* (Ташкент) **59, 61, 62**; *С. Решетников* (Калининград) **63**; *В. Решетняк* (Киев) **58, 61, 62**; *А. Решетов* (Грозный) **58, 59**; *В. Решетов* (Куйбышев) **63**; *В. Решецкий* (Гвардейск Калининградской обл.) **58**; *С. Розенблит* (Рига) **60, 62**; *Н. Ростовский* (Москва) **58, 59**; *А. Рыбалченко* (п. Усть-Омчуг Магаданской обл.) **57**; *М. Рывкин* (Бобруйск) **63**; *В. Рыжиков* (Ахтубинск Астраханской обл.) **54, 56—59, 61—63, 66**; *Е. Ряписов* (Ломоносов Ленинградской обл.) **54, 58—62**; *Ю. Савельев* (Сланцы Ленинградской обл.) **54**; *А. Савин* (Москва) **58, 59**; *Р. Салихов* (с. Петровское Ишимбайского р-на БАССР) **66**; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) **59**; *И. Сафаргалиев* (с. Янги-Курган Ферганской обл.) **58, 60, 62**; *В. Свешников* (Чебоксары) **62**; *В. Свиридов* (ВНИИСС, Рамонский р-н Воронежской обл.) **66**; *Р. Сергеев* (д. Перебродье Витебской обл.) **61, 62**; *В. Сержанов* (д. Средне-Белая Амурской обл.) **58**; *С. Скотников* (Сосновка Кировской обл.) **62**; *А. Смирнов* (с. И.-Заборское Семеновского р-на) **55**; *В. Смоленков* (Ленинград) **54, 59, 62, 63, 66**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **58—62, 64—66**; *А. Смык* (Красноярск) **62**; *С. Сорокин* (Грозный) **58, 62, 65, 66**; *О. Стехин* (Васильков Киевской обл.) **54**; *Р. Таривердиев* (Сиазань АзССР) **54**; *Ч. Таривердиев* (Сиазань Аз ССР) **54**; *Л. Требулева* (Ташкент) **54, 56—63**; *О. Трифонов* (Киев) **66**; *М. Тульчинский* (Киев) **54**; *Ф. Тюрин* (Свердловск) **61—63, 66**; *М. Тяпин* (п/о Мякса Вологодской обл.) **63**; *И. Удин* (Дубна) **54, 61, 62**; *С. Улитин* (Целиноград) **61, 62**; *И. Усвят* (Ташкент) **54, 56, 57**; *Р. Усманов* (Уфа) **61, 62**; *С. Утнасупов* (Элиста КалмАССР) **54, 61, 62**; *И. Ухватов* (п. Дзержинского Московской обл.) **54, 55**; *Н. Федин* (Омск) **54—58, 62—66**; *В. Филиппов* (Балашиха Московской обл.) **59, 61, 63, 66**; *Л. Флейшман* (Москва) **59**; *П. Фоменко* (Днепропетровск) **58, 60, 61, 63—66**; *Л. Хигер* (Ташкент) **66**; *А. Хизанишвили* (Тбилиси) **59**; *П. Химич* (Валуйки Белгородской обл.) **58**; *А. Хомич* (Брест) **62**; *Е. Хохулин* (Львов) **58, 61, 62**; *Л. Цимринг* (Горький) **63, 65, 66**; *И. Цифра* (с. Велятино Закарпатской обл.) **59**; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) **54—59**; *С. Чавушян* (Ереван) **65**; *Ю. Черныш* (Минск) **56—59, 61, 64—66**; *Н. Чернявский* (с. Мединичи Львовской обл.) **58, 62**; *Ю. Чистяков* (Москва) **56**; *М. Шаймухамбетов* (Алма-Ата) **56, 57**; *В. Шендрик* (Алма-Ата) **53—55, 57**; *А. Шень* (Москва) **60,61**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **59, 61, 62**; *В. Шоев* (Фрунзе) **54, 56**; *С. Шульга* (Ельск Гомельской обл.) **59**; *О. Щербаков* (Лвда Гродненской обл.) **59, 62, 64, 66**; *А. Юдин* (Сызрань Куйбышевской обл.) **54**; *Е. Юдин* (Ессентуки) **59**; *В. Якименко* (п/о Анастасьевка Хабаровского кр.) **58**.

С. Г. Семенчинский

Поправка

В «Кванте» № 9 за этот год по вине редакции была допущена опечатка. Текст в левом столбце 31-й страницы начиная с 11 строки снизу, следует читать: «... жизненные процессы настолько сложны, что даже сверхупрощенная модель поддается математическому изучению с трудом».

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Пределы последовательностей

Г. В. Дорофеев

В отличие от большинства статей, опубликованных в разделе «Практикум абитуриента», в этой статье нет указаний, в каком вузе и в каком году предлагалась та или иная задача.

Это нетрудно объяснить: понятие предела в школьном курсе используется исключительно в теоретических целях, и каких-либо вычислительных задач, связанных с пределами, в школе не решают. Естественно поэтому, что и в вариантах письменных экзаменов, предлагаемых поступающим, подобного рода задачи отсутствуют. Однако в билетах на устном экзамене понятие предела встречается весьма часто и — что особенно важно — во всех вузах. Более подготовленным читателям мы рекомендуем также познакомиться со статьей М. Л. Гервера «20 задач на пределы» («Квант», 1974, № 3).

Если мы обратимся к программе для поступающих в вузы, то слово «предел» мы встретим в ней всего лишь один раз — в пункте 5 раздела 1 «Арифметика, алгебра и элементарные функции». Однако можно насчитать больше десятка вопросов, входящих в программу, в самой основе которых лежит именно понятие предела. Это, прежде всего, геометрические вопросы, связанные с длиной окружности, площадью круга, площадью поверхности и объемом цилиндра, конуса, шара и его частей. Кроме того, понятие предела используется при определении степени положительного числа с иррациональным показателем и суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

В действительности список вопросов, в которых используется понятие предела, значительно шире, мы привели только те из них, где применение пределов совершенно стандартно и привычно для школьников. Понятие предела используется, например, при доказательстве основной леммы о подобии треугольников, формул площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда, при доказательстве существования корней натуральной степени из положительных чисел, существования логарифмов положительных чисел и т. п. На одном из этих вопросов мы остановимся в конце статьи.

У абитуриентов часто возникает вопрос: в каком объеме требуются от них знания о пределах последовательностей. При этом многие считают, что никаких теорем о пределах вообще знать не нужно — ведь в разделе программы «Основные формулы и теоремы» понятие предела не упоминается!

Однако дело обстоит не совсем так — при доказательстве некоторых формул и теорем, входящих в программу, различные теоремы о пределах явно используются, и поэтому знать по крайней мере формулировки этих теорем необходимо, а о доказательствах речь пойдет позже.

Рассмотрим для примера вычисление суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Как известно, *суммой такой прогрессии называется предел S последовательно-*

сти (S_n), где S_n — сумма n первых членов прогрессии: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Это — определение суммы. А для доказательства того, что сумма такой прогрессии всегда существует (ведь не всякая последовательность имеет предел!), и для вычисления этой суммы проводится следующая выкладка:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}q^n\right) =$$

$$= \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a_1}{1-q}.$$

В этой выкладке использованы следующие теоремы:

(1) *если последовательность (a_n) имеет предел, то для любого числа c*

$$\lim_{n\to\infty}(c-a_n) = c - \lim_{n\to\infty} a_n;$$

(2) *если последовательность (a_n) имеет предел, то для любого числа c*

$$\lim_{n\to\infty} c\,a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n;$$

(3) *для любого числа q такого, что* $|q|<1$,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Отметим, кроме того, что вместо утверждения (1) при проведении первого преобразования можно использовать две теоремы более «универсального» характера: *предел разности двух последовательностей равен разности их пределов и предел постоянной последовательности* (c) (то есть последовательности, у которой все члены равны одному и тому же числу c) *равен* c:

(4) если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c.$

Отметим, что при ответе на вопрос о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии проверяется, насколько отчетливо абитуриент понимает, какие именно теоремы и в каком именно месте доказательства он использует, — без таких разъяснений проделанная выкладка выглядит как «фотография» с учебника и, конечно, не может удовлетворить экзаменаторов.

Однако и этого может оказаться мало, особенно при поступлении в вуз с повышенной математической программой. В самом деле, если внимательно прочитать все ту же программу для поступающих, то мы обнаружим в ней, что абитуриент должен владеть математическими понятиями, упомянутыми в разделе 1. А владеть — это значит уметь не только сформулировать определение, но и применить его в простейших случаях. А доказательства утверждений (1)—(5), кроме, пожалуй, утверждения (4), вполне могут быть отнесены к таким простейшим случаям: они не требуют никаких искусственных рассуждений, никакой изобретательности и доступны каждому, кто знает и понимает определение предела. Остановимся на этих доказательствах.

Напомним прежде всего, что *число a называется пределом последовательности (a_n), если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что все члены последовательности, начиная с a_{N+1}, находятся в интервале между числами* $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$; другими словами, для всех $n>N$ выполняется неравенство $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, или, что то же самое, $|a_n-a|<\varepsilon$.

Из этого определения немедленно вытекает и схема непосредственного доказательства утверждения $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$: надо показать, как для произвольного положительного числа ε отыскать число N, обладающее требуемым свойством. При этом надо рассматривать не какое-то конкретное числовое значение ε (как иногда приходится слышать, «возьмем произвольное число ε, например $\varepsilon=1/2$), а именно *произвольное* значение, то есть рассматривать ε как параметр.

Разумеется, в подавляющем большинстве случаев искомый номер N будет зависеть от ε.

Докажем сначала самое простое утверждение (5).

Пусть дана последовательность с общим членом $a_n=c$. Возьмем произвольное положительное число ε и начнем искать такое число N, чтобы для всех $n>N$ выполнялось неравенство $c-\varepsilon<a_n<c+\varepsilon$, то есть $c-\varepsilon<c<c+\varepsilon$. Искать долго не придется — это двойное неравенство справедливо всегда (поскольку $\varepsilon>0$), так что в качестве N можно взять любое число, в частности 1.

Теперь докажем утверждение (3).

Пусть $|q|<1$; возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и начнем искать такое число N, чтобы для всех $n>N$ выполнялось неравенство $-\varepsilon<q^n<\varepsilon$ или, что то же самое, $|q^n|<\varepsilon$ или $|q|^n<\varepsilon$. Последнее неравенство легко решается: оно выполняется для всех $n>\log_{|q|}\varepsilon$ (учтите, что $|q|<1$). Следовательно, в качестве N можно взять любое натуральное число, большее чем $[\log_{|q|}\varepsilon]$, например, $1+[\log_{|q|}\varepsilon]$.

При доказательстве рассмотренного утверждения на экзамене нет необходимости воспроизводить все проведенные выше разъяснения методического характера; лучше провести доказательство более лаконично: «*Пусть ε — произвольное положительное число; положим $N=1+[\log_{|q|}\varepsilon]$, тогда, если $n>N$, то $n>\log_{|q|}\varepsilon$, то есть $|q|^n<\varepsilon$, или $-\varepsilon<q^n<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$*». Можно не опасаться, что экзаменаторы не поймут, откуда взялось такое значение N, или упрекнут вас в том, что вы взяли его «с потолка».

В рассмотренных примерах мы смогли фактически явно указать искомое число N. Иногда приходится ограничиться доказательством существования такого числа — этого тоже вполне достаточно!

Докажем утверждение (2).

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$; возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и будем искать такое число N, чтобы для любого числа $n>N$ выполнялось неравенство $|ca_n-ca|<\varepsilon$, или $|c|\cdot|a_n-a|<\varepsilon$

Так как для $c=0$ доказываемое утверждение, очевидно, справедливо (в силу утверждения (5)), то будем считать, что $c\neq0$, и полученное выше неравенство перепишем в виде

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{|c|}. \qquad (*)$$

Поскольку $\varepsilon/|c|$ есть некоторое положительное число и $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, то, по определению предела, существует такое число N', что при $n>N'$ неравенство (*) выполняется. Положим $N=N'$, тогда при $n>N$ справедливо неравенство (*), следовательно, и равносильное ему неравенство $|ca_n-ca|<\varepsilon$.

Итак, мы доказали, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такое число N, что при $n>N$ выполняется неравенство $|ca_n-ca|<\varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=ca$, что и требовалось доказать.

Несколько сложнее доказательство утверждения (4). Мы докажем аналогичное утверждение для суммы последовательностей, оставив доказательство утверждения (4) в качестве упражнения.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда найдется такое число N_1, что при $n>N_1$ справедливо неравенство

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<a+\frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, найдется такое число N_2, что при $n>N_2$ справедливо неравенство

$$b-\frac{\varepsilon}{2}<b_n<b+\frac{\varepsilon}{2}.$$

При n, больших и N_1, и N_2, выполняются оба полученных двойных неравенства, а следовательно, выполняется и неравенство

$$(a+b)-\varepsilon<a_n+b_n<(a+b)+\varepsilon, \qquad (**)$$

полученное их почленным сложением.

Положим N равным большему из чисел N_1 и N_2, $N=\max(N_1, N_2)$, тогда при $n>N$ будет выполняться неравенство $(**)$. Таким образом, по заданному ε мы нашли требуемое определением значение N и доказали тем самым, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

Обратим внимание на то, что в формулировках утверждений о пределах часто стоит ограничение, что фигурирующие в них последовательности имеют предел; без этого ограничения утверждения (1), (2), (4) просто бессмысленны. Чтобы эти ограничения не «висели в воздухе», полезно знать, что не всякая последовательность имеет предел.

Примером последовательности, не имеющей предела, является последовательность

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

В самом деле, предположим противное, пусть эта последовательность имеет предел a. Положим $\varepsilon=1/3$, тогда должно найтись такое N, что все члены последовательности с номерами, большими N, лежат в интервале $(a-1/3,\ a+1/3)$. Поэтому расстояние между такими членами (на числовой оси) не превосходит $2/3$. Однако в нашей последовательности сколь угодно далеко встречаются члены 0 и 1, расстояние между которыми равно 1, то есть больше $2/3$.

Найдем теперь предел последовательности с общим членом

$$c_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{6n^3},$$

которая используется при вычислении объема пирамиды с помощью ступенчатых тел. Для вычисления этого предела преобразуем выражение для c_n:

$$c_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}.$$

Теперь вычисление данного предела сводится к вычислению предела произведения $d_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$, а для этого проще всего воспользоваться следующим утверждением:

(6) *если последовательности* (a_n) *и* (b_n) *имеют пределы, то*

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Однако доказательство этого утверждения значительно сложнее, чем все предыдущие: оно требует предварительного доказательства еще нескольких теорем о пределах. В то же время вычисление нашего предела можно провести непосредственно, без использования этой общей теоремы. Докажем, что этот предел равен 2 («догадаться», что это так, можно из интуитивных соображений или на основании все той же общей теоремы 6—ведь для этого не обязательно ее доказывать!). Надо показать, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$-\varepsilon<d_n-2<\varepsilon$$

или

$$-\varepsilon<\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}<\varepsilon.$$

Ясно, что левое неравенство выполняется при любых n, а неравенство $\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ нетрудно решить, но мы поступим иначе. Из неравенства $\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}$ следует, что $\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{4}{n}$, а неравенство $\frac{4}{n}<\varepsilon$ выполняется при всяком $n>\frac{4}{\varepsilon}$.

Поэтому, если мы возьмем в качестве N любое натуральное число, большее $\frac{4}{\varepsilon}$, то при $n>N$ будет $n>\frac{4}{\varepsilon}$, то есть $\frac{4}{n}<\varepsilon$, а следовательно, и

$$\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{4}{n}<\varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon>0$ мы указали требуемое число N, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=2$, а $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=1/3$.

В заключение обратим внимание на иной круг вопросов, связанных с понятием предела, а именно — на применения так называемой теоремы Вейерштрасса. Напомним ее формулировку: *всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.* Аналогичное утверждение справедливо и для монотонно убывающих последовательностей.

Мы не будем останавливаться на стандартных применениях этой теоремы (например, при определении длины окружности), укажем некоторые другие ее приложения.

Все знают, что из отрицательного числа нельзя извлечь квадратный корень, и легко могут это доказать. Все знают также, что из всякого положительного числа можно извлечь квадратный корень, но как доказать, что он существует? Это устанавливается с помощью теоремы Вейерштрасса.

Действительно, пусть дано положительное число c; тогда существует такое неотрицательное целое число a_0, что

$$a_0^2\leqslant c<(a_0+1)^2$$

(a_0 — целое приближение корня квадратного из c с недостатком, a_0+1 — с избытком). Далее можно найти такое целое число a_1 от 0 до 9, что

$$\left(a_0+\frac{a_1}{10}\right)^2\leqslant c<\left(a_0+\frac{a_1+1}{10}\right)^2$$

(то есть получить приближения корня квадратного из c с точностью до 1/10). Продолжая этот процесс, получим две последовательности:

$$(a_n)=\left(a_0,\ a_0+\frac{a_1}{10},\ a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100},\ \ldots\right)$$

и

$$(b_n)=\left(a_0+1,\quad a_0+\frac{a_1+1}{10},\quad a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{100},\ \ldots\right).$$

Первая из этих последовательностей возрастает и ограничена — все ее члены меньше чем, например, a_0+1; по теореме Вейерштрасса она имеет некоторый предел a. Вторая последовательность аналогично имеет некоторый предел b. В силу утверждения (6)

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2=a^2,\quad \lim_{n\to\infty} b_n^2=b^2.$$

С другой стороны, по самому построению этих последовательностей имеют место неравенства

$$a_n^2\leqslant c<b_n^2,$$

откуда следует (см. упр. 9), что

$$a^2\leqslant c\leqslant b^2.$$

Наконец, пользуясь утверждениями (4) и (3), получаем

$$a-b=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(1/10)^{n-1}=0.$$

Таким образом, $a=b$, и следовательно, $a^2=c$. Другими словами, a — это и есть корень квадратный из c, и требуемое утверждение доказано.

Мы видим, что доказательство такого «очевидного» утверждения, как существование корня квадратного из положительного числа, в действительности требует применения большого числа теорем о пределах. Поэтому его строгое доказательство (и доказательство подобных ему утверждений: существования логарифмов положительных чисел, существования степени положительного числа с иррациональным показателем, существования значения арксинуса для любых чисел от —1 до 1 и т. п.) не входит ни в школьную программу, ни в программу для поступающих в вузы. Мы рассмотрели этот вопрос только для того, чтобы показать истинную сложность доказательства таких утверждений и дать элементарное представление о способе их доказательства.

Упражнения

1. Доказать, что предел последовательности $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$ равен 0.

2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$.

3. Пусть последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, и при любом n справедливо неравенство $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Пусть последовательность (a_n) имеет предел a, а последовательность (b_n) получена из нее:

а) выбрасыванием конечного числа членов;

б) выбрасыванием бесконечного числа членов (например, всех членов с четными номерами);

в) добавлением в некоторых местах конечного числа новых членов;

г) добавлением в некоторых местах бесконечного числа новых членов.

Что можно сказать в каждом из этих случаев о пределе последовательности (b_n)?

5. Вычислить предел последовательности с общим членом:

а) $a_n = \frac{1}{n^2+2}$;

б) $a_n = \frac{4n}{3n^3 - 5n - 4}$.

6. Доказать, что последовательности

$1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$ и $1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, \ldots$

не имеют пределов.

7. Доказать, что если последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

8. Что можно сказать о пределе последовательности $(a_n + b_n)$, если последовательности (a_n) и (b_n):

а) обе имеют пределы;

б) обе не имеют пределов;

в) одна имеет предел, а другая — нет?

9. Доказать, что если все члены последовательности (a_n) меньше числа c, то и предел этой последовательности не больше c. Можно ли утверждать, что этот предел строго меньше c?

Задачи о графах и сказка «Иван-царевич и серый волк»

(Окончание. Начало см. с. 23)

2. *Нельзя идти по такой дороге, стерев которую, мы получим, что из какого-то города уже нельзя попасть в столицу.* (Такая дорога называется *перешейком*).

Если следовать правилу 2, то в любой момент не стертые еще дороги и города образуют связный граф. Покажем, что всегда можно следовать правилу 2, то есть, что, придя в любой город N, мы будем иметь в своем распоряжении дорогу, которая не является перешейком.

Заметим сначала, что если дорога из N оказалась перешейком, то есть еще дороги, выходящие из N. Допустим самое плохое — все эти дороги оказались в данный момент перешейками. Предположим, что мы стерли две из них; одна соединяла город N с городом N_1, другая — с городом N_2. Очевидно, что в таком случае из города N_1 нельзя попасть в город N_2, и из каждого из них в данный момент исходит нечетное число дорог. Рассмотрим две части царства: города, в которые можно пройти из N_1, и города, в которые можно пройти из N_2. В силу замечания б) в каждой из этих частей должен найтись еще один город с нечетным числом дорог. Но этого не может быть, так как к этому времени на карте с нечетным числом дорог, кроме городов N_1 и N_2, остается только столица.

Докажем, наконец, что, следуя правилам 1 и 2, мы обязательно обойдем все дороги по одному разу. Допустим, что мы вернулись в столицу, не обойдя всех дорог. Это значит, что на карте остались нестертые города. Рассмотрим тот нестертый город M, который мы прошли последним. Очевидно, что дорога, по которой мы из него вышли, была перешейком: она не вела в столицу (иначе мы попали бы в столицу прямо из M, и город M был бы стерт на карте — см. правило 1), и, стерев эту дорогу, мы отрезали все пути из M в столицу. А в силу правила 2 мы по таким дорогам идти не можем. Получили противоречие.

Тем самым теорема Эйлера доказана полностью.

«Космические» задачи на вступительных экзаменах

Е. П. Кузнецов

В этой статье мы поговорим о закономерностях движения тел в поле тяготения и проиллюстрируем их задачами, предлагавшимися на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Так же, как вся электростатика описывается, по существу, законом Кулона, вся сложность, красота и пугающая таинственность движения небесных тел заключена в простом и изящном законе всемирного тяготения Ньютона. В чем состоит этот закон? Каждый объект Вселенной притягивается к любому другому объекту с силой, пропорциональной массам объектов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Кроме того, нужно помнить, что сила, приложенная к телу, вызывает ускорение в направлении этой силы, по величине обратно пропорциональное массе тела.

Сила взаимного притяжения двух тел описывается формулой, совершенно аналогичной закону Кулона. Поэтому выражение для потенциальной энергии будет иметь тот же вид, что и в электростатике:

$$W = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R}.$$

Мы поставили перед формулой знак минус. Посмотрим, что это означает.

Для разведения двух тел на некоторое расстояние (например, для подъема какого-либо предмета над поверхностью Земли) требуется преодолеть силу их взаимного притяжения (силу тяжести), то есть совершить работу. Следовательно, потенциальная энергия тела увеличивается. С другой стороны, если развести тела на бесконечно большое расстояние, сила их взаимодействия будет равна нулю. Разумно положить, что будет равна нулю и потенциальная энергия. Но увеличиваться, стремясь в пределе к нулю, может только отрицательная величина.

Теперь мы исследуем движение планет по круговым орбитам вокруг Солнца, движение искусственных спутников Земли и вообще движение под действием сил взаимного притяжения двух тел, масса M одного из которых значительно больше массы m другого. В этом случае можно считать большее тело неподвижным.

Движение таких тел описывается законами Кеплера. Приведем формулировки законов Кеплера без вывода.

I. *Все тела в Солнечной системе движутся по кривым, являющимся коническими сечениями (эллипсом, параболой, гиперболой), в одном из фокусов которых расположено Солнце.*

II. *Радиус-вектор от Солнца до планеты заметает равные площади в равные интервалы времени* (рис. 1).

III. *Квадраты времен обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

Частным случаем эллипса является окружность. Для нее третий закон

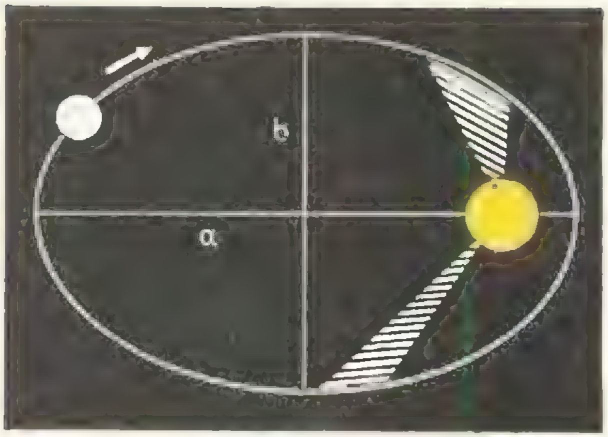


Рис. 1.

Кеплера выглядит так:

$$T^2=\frac{4\pi^2}{\gamma M}R^3,$$

где T — период обращения. Эту формулу можно получить, использовав выражение для скорости спутника при движении по круговой орбите:

$$v=\sqrt{\gamma\frac{M}{R}}.$$

Первый и второй законы Кеплера для движения по окружности очевидны.

Рассмотрим решение конкретных задач.

Задача 1. *Искусственный спутник, используемый в системе телесвязи, запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус орбиты спутника больше радиуса Земли $R_0=6370$ км? Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g=9{,}8$ м/с^2.*

Ускорение, вызываемое притяжением спутника к Земле, это — центростремительное ускорение:

$$\frac{\gamma M}{R^2}=\omega^2R=\frac{4\pi^2}{T^2}R.$$

В нашем случае спутник постоянно «висит» над одной и той же точкой Земли (так называемый стационарный спутник), и следовательно, период его обращения равен периоду обращения Земли вокруг своей оси, то есть одним суткам. Преобразуем левую часть нашего равенства:

$$\frac{\gamma M}{R^2}=\frac{\gamma M}{R_0^2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2=g\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\frac{4\pi^2}{T^2}R=g\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Умножим обе части на R_0/R; тогда:

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^3=\frac{gT^2}{4\pi^2R_0}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\frac{R}{R_0}=\sqrt[3]{\frac{9{,}8\,(24\cdot3600)^2}{4\pi^2 6370\cdot10^3}}=\sqrt[3]{290}=6{,}6.$$

Задачу можно решить другим путем, используя третий закон Кеплера:

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^3=\left(\frac{T}{T_0}\right)^2.$$

Величина T нам известна, а T_0 — период обращения спутника в непосредственной близости от поверхности Земли. Он, очевидно, равен

$$T_0=\frac{2\pi R_0}{v_1}=\frac{2\pi R_0}{\sqrt{gR_0}}=2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g}},$$

где v_1 — первая космическая скорость. Тогда

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^3=\frac{T^2g}{4\pi^2R_0}.$$

Задача 2. *Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиуса R. В результате кратковременного действия тормозного устройства скорость спутника уменьшилась так, что он начинает двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли (рис. 2). Через какое время после этого спутник приземлится? Радиус Земли R_0. Трением в атмосфере пренебречь.*

Орбита изменяется из-за мгновенного действия тормозной установки, и дальнейшее движение спутника снова происходит по законам небесной механики. После торможения спутник начинает двигаться по

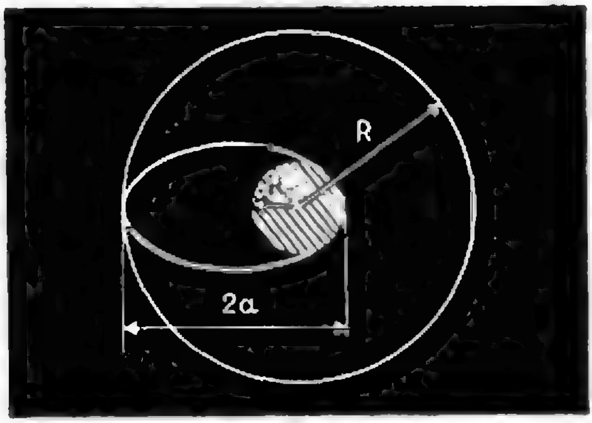


Рис. 2.

эллиптической орбите, большая полуось которой $a = (R + R_0)/2$. По третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T_э}{T_к}\right)^2 = \left(\frac{a}{R}\right)^3,$$

где $T_э$ — период обращения спутника на эллиптической орбите, а $T_к$ — на круговой. Период обращения спутника на круговой орбите равен

$$T_к = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\gamma M}{R}}} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M}}.$$

Тогда период обращения его на эллиптической орбите равен

$$T_э = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M}} \left(\frac{R + R_0}{2R}\right)^{3/2}.$$

С момента торможения до посадки спутник пройдет как раз половину орбиты (см. рис. 2). Поэтому

$$t = \frac{T_э}{2} = \pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M}} \left(\frac{R + R_0}{2R}\right)^{3/2} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma M}} \left(\frac{R + R_0}{2}\right)^{3/2}.$$

Если расстояние от спутника до поверхности Земли невелико, то есть $R \approx R_0$, формулу можно упростить:

$$t = \frac{\pi}{R_0 \sqrt{g}} \left(\frac{R_0 + R}{2}\right)^{3/2}.$$

До сих пор мы пренебрегали трением в атмосфере. Рассмотрим теперь торможение спутника в верхних слоях атмосферы. Будем считать первоначальную орбиту спутника круговой, а торможение столь небольшим, что любой конкретный виток с достаточной степенью точности можно считать окружностью.

Полная энергия спутника равна сумме его кинетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия спутника равна $-Mm\gamma/R$, а кинетическая $mv^2/2$. Но скорость движения спутника по орбите $v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}}$. Тогда кинетическая энергия спутника

$$W_{кин} = \gamma \frac{mM}{2R},$$

то есть определяется только радиусом орбиты и всегда вдвое меньше (по абсолютной величине) энергии потенциальной. Полная энергия спутника отрицательна:

$$W_{полн} = -\frac{\gamma}{2} \frac{mM}{R}. \qquad (1)$$

Пусть до торможения спутник летел по орбите радиуса R_1 и имел скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_1}}. \qquad (2)$$

После торможения в верхних слоях атмосферы спутник перешел на орбиту с радиусом R_2, меньшим чем R_1 (не лететь же ему в результате торможения выше), и его кинетическая энергия стала равна $W_2 = \gamma mM/2R_2$; следовательно, его скорость определяется выражением

$$v_2 = \sqrt{\frac{2W_2}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_2}}. \qquad (3)$$

Если сравнить выражения (3) и (2), то видно, что в результате торможения скорость спутника увеличилась ($R_2 < R_1$)! Но уж такова закономерность орбитального движения, обусловленная указанным выше пропорциональным распределением полной энергии между кинетической и потенциальной. Полная энергия, как это следует из формулы (1), при уменьшении радиуса орбиты уменьшается (она ведь отрицательна), так что закон сохранения энергии ни в коей мере не нарушается. Справедливо и обратное: если мы хотим перевести спутник на более высокую орбиту, нужно его разогнать; в результате разгона спутник будет двигаться выше, но медленнее. Попробуйте показать это самостоятельно.

Задача 3. *Спутник, запущенный на круговую орбиту высоты $H = 500$ км над поверхностью Земли, тормозится в верхних слоях атмосферы. Угловое ускорение спутника $\beta = 3\cdot 10^{-13}$ рад/с². На какой высоте окажется спутник через месяц?*

Величина углового ускорения ничтожна, и поэтому можно считать каждый виток спутника окружностью. Тогда на каждой конкретной орбите мы можем пренебречь трением и применять к спутнику законы небесной механики. Если обозначить радиус и период обращения для первоначальной орбиты через R_1 и T_1, а для орбиты, на которой спутник окажется через месяц, через R_2 и T_2, то, согласно третьему закону Кеплера, мы можем написать

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{(T_1 + \Delta T)^2}{(R_1 + \Delta R)^3} = \frac{T_1^2 + 2T_1\Delta T + (\Delta T)^2}{R_1^3 + 3R_1^2(\Delta R) + 3R_1(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3}.$$

Очевидно, что $\Delta R \ll R$ и $\Delta T \ll T$ (ΔR в принципе не может быть больше высоты орбиты, тогда как радиус Земли 6370 *км*, а максимальное значение ΔT вы теперь уже можете оценить самостоятельно, пользуясь третьим законом Кеплера). Но тогда без всякого ущерба для точности можно пренебречь членами $(\Delta R)^2$, $(\Delta R)^3$, $(\Delta T)^2$:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_1^2 + 2T_1\Delta T}{R_1^3 + 3R_1^2\Delta R}.$$

Отсюда

$$\frac{R_1^3 + 3R_1^2\Delta R}{R_1^3} = \frac{T_1^2 + 2T_1\Delta T}{T_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \frac{2}{3}\frac{\Delta T}{T_1}.$$

Но $\Delta T/T_1 = \Delta\omega/\omega_1$, где ω_1 — угловая скорость спутника. По аналогии с прямолинейным равноускоренным движением определим угловое ускорение равенством

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{t},$$

где t — время (в нашем случае — один месяц). Таким образом, мы получаем

$$\Delta R = \frac{2}{3} R_1 \frac{\beta t}{\omega_1} = \frac{\frac{2}{3}(R_0 + H)\beta t}{v(R_0 + H)} = \frac{2}{3}(R_0 + H)^2 \frac{\beta t}{v}.$$

Здесь, как обычно,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{(R_0 + H)}}.$$

Но, поскольку $H \ll R_0$, можно положить скорость v равной первой космической. Подставив численные значения, получим

$$\Delta R = \frac{2}{3}(6370 + 500)^2 \times \frac{3\cdot 10^{13}\cdot 30\cdot 24\cdot 3600}{8} = 3\ (км),$$

$$H' = H - \Delta R = 497\ км.$$

Как видим, приобретенных в школе знаний достаточно для рассмотрения разнообразных задач прикладной астрономии и космонавтики.

Упражнения

1. С поверхности планеты радиуса R вертикально вверх стартует ракета с первой космической скоростью. Планета не имеет атмосферы. На какую высоту поднимется ракета?

2. В 1986 году ожидается появление кометы Галлея. Последний раз она появлялась в 1910 году, и минимальное расстояние ее от Солнца составляло тогда 0,6 расстояния от Земли до Солнца (0,6 астрономической единицы — а. е.). Как далеко уходит она от Солнца?

3. Известно, что в настоящее время Луна удаляется от Земли со скоростью $v = 3{,}3$ *см/год*. Найти угловое ускорение Луны. Среднее расстояние Луны от Земли $R = 3{,}84\cdot 10^5$ *км*, угловая скорость вращения Луны вокруг Земли $\omega = 2{,}56\cdot 10^{-6}$ *рад/с*.

РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в IV квартале 1974 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Соминский И. Я. *Метод математической индукции.* Издание 8-е. Объем 3 л., тираж 100 000 экз., цена 10 коп.

Эта книга посвящена изложению одного из самых важных методов математики — метода математической индукции. Ясность изложения, хорошо подобранные примеры завоевали этой книге широкую популярность.

Книга доступна учащимся старших классов. Она с успехом может быть использована на занятиях математического кружка.

2. Савельев Л. Я. *Комбинаторика и вероятность.* Объем 25 л., тираж 10 000 экз., цена 2 руб. 42 коп.

Книга посвящена изложению элементарной теории вероятностей и ее приложениям. В первых главах автор на большом количестве примеров разбирает вопросы комбинаторики. Книга написана хорошим живым языком. Большое количество разнообразных примеров и задач увеличивает ценность книги. Книга рассчитана на учащихся старших классов, преподавателей математики, физики. Она с успехом может быть использована для факультативных занятий и занятий математического кружка.

Издательство «Мир»

3. Веннинджер М. *Модели многогранников.* Объем 20 л., тираж 75 000 экз., цена 1 руб. 40 коп.

Эта книга знакомит читателей с такими симметричными фигурами, как многогранники. Помимо теоретических положений, в книге подробно изложены способы изготовления многогранников правильных и полуправильных, выпуклых и звездчатых. Большое количество фотографий и чертежей придает наглядность излагаемому материалу.

Книга доступна самому широкому кругу читателей. Она с успехом может быть использована на занятиях математических кружков.

4. Голомб С. У. *Полимино.* Объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 56 коп.

В этой книге излагается ряд задач, связанных с покрытием шахматных и сходных с ними досок наборами специальных фигурок, названных автором «полимино»*) по аналогии с домино, являющимся простейшим частным случаем таких фигур. Задачи Голомба соединяют простоту условий и занимательность с большой математической содержательностью. Решение задач не предполагает специальных знаний, но требует определенной изобретательности.

Книгу с интересом прочитают и школьники, и студенты, и преподаватели.

5. Штейнгауз Г. *Задачи по-польски.* Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 36 коп.

Автор этой книги завоевал себе прочную репутацию у нашего читателя. Его книги «Математический калейдоскоп» и «Сто задач» уже давно стали библиографической редкостью.

Новая книга Штейнгауза написана ярким увлекательным языком, является одной из лучших книг популярной литературы и, несомненно, доставит много радостей своим читателям. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Физика

Издательство «Наука»

1. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д. и др. *Сборник задач по элементарной физике.* Издание 4-е. Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 коп.

В сборнике приведены задачи по всем разделам элементарного курса физики. Большинство задач приведено с решениями. Наряду со сравнительно легкими задачами приведено большое количество задач «олимпиадного» типа.

Книга рассчитана на учащихся старших классов. Она может быть с успехом использована для самообразования.

2. *Физика* (часть IV), под редакцией А. С. Ахматова. Объем 35 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 47 коп.

Эта книга является завершающей частью американского учебника для средней школы по общему курсу физики. Весь курс состоит из четырех частей: «Вселенная», «Оптика и волны», «Механика», «Электричество и строение атома». Каждая часть содержит соответствующий материал, взятый из книги «Методическое руководство для преподавателей». В части IV изложены начала волновой механики, ядерной физики и физики твердого тела.

---

*) См. «Квант», 1972, № 11, с. 2; 1973, № 8, 4-я с. обл.

Книга рассчитана на учащихся 8—10-х классов и преподавателей физики.

3. *Над чем думают физики.* Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 70 коп.

Этот выпуск сборника переводных работ из американского научно-популярного журнала «Scientific American» посвящен проблемам физики атомного ядра. В нем обсуждаются современные представления о свойствах ядер, радиоактивного излучения и их применение, проблемы ядерной энергетики и термоядерный синтез.

4. Шкловский И. С. *Звезды: их рождение, жизнь и смерть.* Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 1 руб. 20 коп.

Книга посвящена центральной проблеме астрономии — физике звезд. Автор стремится с возможной полнотой осветить фактическое состояние вопроса, давая лишь самое общее представление о существующих теориях и гипотезах. Книга доступна школьникам старших классов.

Атомиздат

Мы приводим список книг, вышедших в разные годы. Заказы на эти книги можно направлять по адресу: Москва, К-50, ул. Медведева, д. 1, отдел «Книга — почтой» магазина № 8.

Арцимович Л. А. *Элементарная физика плазмы.* Цена 45 коп.

Головин И. Н. *И. В. Курчатов.* Цена 34 коп.

Губарев В. С. *Рождение атомного реактора.* Цена 14 коп.

Клайн Б. В. *В поисках. Физика и квантовая теория.* Цена 90 коп.

Мухин К. Н. *Занимательная ядерная физика.* Цена 77 коп.

Парнов Е. И. *На перекрестке бесконечностей.* Цена 91 коп.

Издательство «Молодая гвардия»

5. *Кем быть.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 35 коп.

Сборник рассказывает о том, как выбрать профессию, о различных типах учебных заведений. В сборник включены рассказы крупных ученых об их профессиях.

Научно-фантастическая литература

Издательство «Мир»

1. *Практические изобретения.* Объем 13 л., тираж 100 000 экз., цена 77 коп.

Эта книга представляет собой сборник переводных научно-фантастических произведений. В него включены как рассказы широко известных фантастов А. Кларка, А. Азимова, так и произведения авторов, еще не известных советскому читателю: Л. Ташкета, Д. Рекоме и др. Сборник с интересом прочтут все любители фантастики.

Издательство «Молодая гвардия»

2. Журавлев В. *Золотые копи дерзаний.* Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 70 коп.

Книга состоит из отдельных научно-фантастических рассказов о великих открытиях в психологии, раскрывающих тайны творчества.

3. Колупаев В. *Качели отшельника.* Объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 60 коп.

В книгу включены две научно-фантастические повести и ряд рассказов.

4. Саймак К. *Город.* Объем 13 л., тираж 100 000 экз., цена 65 коп.

Этот роман известного американского писателя охватывает 10 000 лет будущего человечества, его надежд, исканий и свершений. Роман получил международную премию.

5. *Приключения, 1974.* Объем 26 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 50 коп.

Традиционный ежегодник приключенческих повестей и рассказов советских авторов.

6. Нежин В. *Эксперт, на выезд!* Объем 6 л., тираж 100 000 экз. цена 18 коп.

Остросюжетная повесть посвящена работникам милиции — экспертам. Автор знакомит читателей с новыми методами и техникой, способствующей раскрытию преступления.

Издательство «Детская литература»

7. Ферсман А. *Занимательная минералогия.* Объем 19 л., тираж 75 000 экз., цена 84 коп.

Книга принадлежит перу крупнейшего советского геолога А. И. Ферсмана. Автор с блеском рассказывает о красоте и удивительных свойствах камня и об использовании камня в промышленности.

8. Комар В. *Вопреки здравому смыслу.* Объем 12 л., тираж 75 000 экз., цена 41 коп.

Эта книга об осмыслении научных открытий, о том, что представляет собой современная наука.

9. Томилин А. *Небо земли.* Объем 25 л., тираж 75 000 экз., цена 1 руб. 50 коп.

Эта книга представляет собой очерки об истории астрономии, о великих ученых и сделанных ими открытиях.

10. Брагин В. *Искатель утраченных тысячелетий.* Объем 17 л., тираж 100 000 экз., цена 72 коп. Научно-фантастическая повесть о «секрете долголетия».

11. *Мир приключений.* Объем 46 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 61 коп.

Ежегодный сборник приключенческих и научно-фантастических повестей советских и зарубежных авторов.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

Приглашение в дальний космический рейс

Книга Ю. Н. Ефремова «В глубинах Вселенной» *), приглашая нас в самые отдаленные области беспредельного космоса, заставляет задуматься о том, для чего нужны людям такие необычные путешествия. Помните спор между героями фильма «Девять дней одного года»? Часть из них утверждала, что человеку и не нужно мечтать о полете за пределы Солнечной системы, а тем более, — за пределы Галактики. Другая — скандировала: «Мы за Галактику!». Прочитав книгу Ю. Н. Ефремова, вы почувствуете себя участниками этого спора и найдете немало убедительных доводов, свидетельствующих, в частности, о том, что сторонники первой точки зрения вполне могли бы быть не только «за Галактику», но и «за Метагалактику».

Не бывает легких космических путешествий. Хорошая книга, которую мы советуем вам прочитать, тоже не из легких. Автор задумал написать ее так, чтобы она была «еще доступна неспециалисту и чтобы некоторые ее страницы были уже интересны и астроному». И с этой задачей он успешно справился.

Книга Ю. Н. Ефремова любопытна, прежде всего, тем, что ее автору удалось в рамках двух самых главных идей своего произведения обрисовать во многих деталях и подробностях грандиозную картину познания мира звезд и галактик. Что же это за идеи?

Идея первая: вся история познания Вселенной была неразрывно связана с проблемой определения расстояний до небесных тел и их систем. Доказывая это, автор чуть ли не абсолютизирует понятие «расстояние до небесного тела», превращая его в своего рода физическую характеристику небесных тел. Привычно звучит: «масса Солнца», «температура звезды», «диаметр Галактики» и т. д. А вот в книге Ефремова вы встретите «расстояние Солнца», «расстояния ближайших звезд», «расстояния звездных скоплений», «расстояния галактик». Физики вправе потребовать, чтобы им точно указали систему отсчета, ибо нет «расстояния Солнца», а есть «расстояние Солнца от Земли», «расстояние ближайших звезд от Солнца» и т. д. Но не торопитесь возмущаться, ибо в книге Ефремова используется совершенно определенная система отсчета: во всех случаях речь идет о расстояниях от Земли (или Солнца) до всех других небесных тел. Такой «геоцентризм» (или гелиоцентризм»), конечно, совершенно оправдан: не зная расстояний до небесных тел, мы не можем получить правильного представления о картине мира, уяснить свое место в мире, познать природу небесных тел.

«Дайте мне точные расстояния до небесных тел, и я вам скажу, где вы находитесь и что это за небесные тела» — таков смысл сюжета книги Ефремова. Но точные расстояния были получены не вдруг и не сразу. Известно много примеров ошибочных оценок расстояний и связанных с этим неверных представлений. Многие из «точных расстояний» и сегодня еще являются предметом острых споров и тягостных сомнений. Поэтому рассказ о расстояниях превращается в увлекательную драму идей, породившую наши сегодняшние представления о Вселенной.

Идея вторая: накопление количественных данных о Вселенной и, прежде всего, данных, относящихся к расстояниям до галактик, привело в начале XX века к важнейшему качественному результату. Автор книги оценивает этот результат как революцию, соизмеримую с коперниковой. Коперник указал место Земли в Солнечной системе. Успехи внегалактической астрономии указали «место» нашей Галактики во Вселенной. Насколько справедлива такая оценка, покажет будущее, но сам факт рождения внегалактической астрономии, безусловно, имеет исключительное научное и мировоззренческое значение. История становления внегалактической астрономии представляет интерес, далеко выходящий за рамки «чистой» астрономии. Основным вехам этой истории посвящены десятки страниц книги Ю. Н. Ефремова.

Прочитав эту книгу, вы познакомитесь с остроумнейшими методами решения многих астрономических задач, почерпнете разнообразные сведения о нашей и других галактиках, различных типах звезд, пульсарах и квазарах, сумеете по-новому осмыслить многое из того, о чем раньше неоднократно слышали.

Книга Ю. Н. Ефремова написана увлекательно. Увлекает и содержание книги, и форма повествования. Описание леденящих просторов космоса согрето теплотой человеческого юмора (который не чужд и астрономам!), насыщено образными сравнениями, дополнено удачными эпиграфами и, что особенно важно, проникнуто собственной увлеченностью автора — соучастника ряда важнейших астрономических исследований и открытий. Такая увлеченность должна передаться читателям. Ведь увлеченность всегда рождается встречей. Это может быть встреча с загадкой природы, человеком, книгой...

Е. П. Левитан

---

*) Ефремов Ю. Н. В глубинах Вселенной. М., «Наука», 1973. Тираж 50 000 экз., 200 с., цена 31 коп.

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная олимпиада школьников Азиатской части СССР

В этом номере мы публикуем тексты задач заочного тура физико-математической и химической олимпиад для учащихся школ и других средних учебных заведений Сибири, Казахстана, Дальнего Востока и Средней Азии.

Олимпиаду проводит Сибирское отделение Академии наук СССР совместно с органами народного образования.

Те, кто успешно справятся с задачами заочной олимпиады, будут приглашены на областные, краевые, республиканские олимпиады на равных правах с победителями районных олимпиад. Приглашения будут рассылаться Комитетом по проведению олимпиад по домашним адресам.

После каждой задачи в скобках указаны классы, для учеников которых она предлагается. Чтобы стать победителем олимпиады, не обязательно решить много задач. Иногда достаточно остроумного решения одной. Но решить задачу — это не значит только дать правильный ответ; нужно обязательно обосновать его, дать точное доказательство. Задачи не требуют никаких знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Решения задач по каждому предмету должны высылаться в отдельном конверте стандартного формата. На конверте укажите, по какому предмету решены задачи (математике, физике или химии). В письмо нужно вложить согнутый вдвое конверт с обратным домашним адресом и маркой; в этом конверте вам пришлют извещение о результатах работы. Решения надо писать очень разборчиво. Условия задач переписывать не надо, но обязательно укажите номера задач.

В начале письма разборчиво напишите:

1. Свою фамилию, имя и отчество.
2. Почтовый домашний адрес (подробный).
3. Класс, школу, училище, техникум и т. д., адрес.
4. Фамилию, имя и отчество своего учителя по данному предмету.

Последний день, когда вы еще можете послать решение,— 1 февраля 1975 года по почтовому штемпелю. Письма, отправленные позже, рассматриваться не будут.

Участники олимпиады направляют решения по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Олимпиада.

Математика

1. Найти такое число p, чтобы уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 - px + q = 0$$

($q \neq 0$) имели общий корень. (8 кл.)

2. Сколькими способами можно расставить все целые числа от 1 до 9 в таблицу

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

так, чтобы выполнялись условия

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{11}+a_{23}+a_{32}=$$
$$=a_{21}+a_{12}+a_{33}=a_{31}+a_{22}+a_{13}=$$
$$=a_{21}+a_{32}+a_{13}=a_{12}+a_{23}+a_{31}?$$

(8—9 кл.)

3. Найти целое число, которое становится полным квадратом, если к нему прибавить любое из чисел 100, 168. (8—9 кл.)

4. На диаметре AA_1 окружности лежит точка C. Рассмотрим такую точку B на окружности, что $AB=CA_1$. Доказать, что биссектриса, медиана и высота треугольника ABC, проведенные соответственно из вершин A, B и C, пересекаются в одной точке. (8—10 кл.)

5. Найти углы треугольника со сторонами a, b, c, если длина стороны a не превосходит высоты, опущенной на a, а длина стороны b не превосходит высоты, опущенной на b. (8—9 кл.)

6. Доказать, что N^p, где p, N — натуральные числа, $p>1$, можно представить в виде суммы N последовательных нечетных чисел. (9 кл.)

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y=1, \\ y^2+xy+x=5. \end{cases} \quad (9-10 \text{ кл.})$$

8. Доказать, что если все точки выпуклого шестиугольника лежат внутри окружности O, то некоторая его сторона не больше радиуса этой окружности. (9—10 кл.)

9. Доказать, что

$$\sqrt{2ka_1+1}+\sqrt{2ka_2+1}+$$
$$+\sqrt{2ka_3+1}<k+3,$$

если $k>0$, $a_1+a_2+a_3=1$ и подкоренные выражения неотрицательны. (10 кл.)

10. Решить систему уравнений

$$\frac{x+y}{8}=\frac{x+z}{6}=\frac{z+y}{4}=\frac{1}{x+y+z}. \quad (10 \text{ кл.})$$

11. Можно ли построить треугольник, стороны которого соответственно равны и параллельны отрезкам, соединяющим середины скрещивающихся ребер треугольной пирамиды? (10 кл.)

12. Построить треугольник, зная радиус описанной окружности и биссектрису и медиану, проведенные из одной и той же вершины треугольника. (10 кл.)

Физика

1. Начальное распределение температуры вдоль однородного стержня длины l показано на рисунке 1. Найти качественную картину распределения температуры в последующие моменты времени. Какая температура установится в стержне, если подождать достаточно долго? Тепло от стержня в окружающее пространство не передается. (8 кл.)

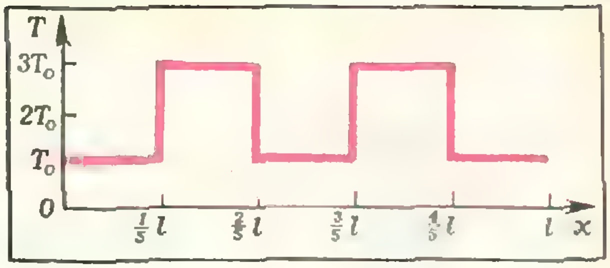


Рис. 1.

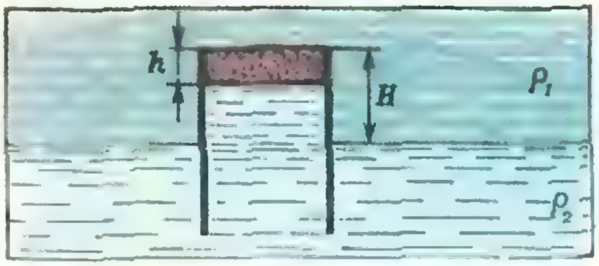


Рис. 2.

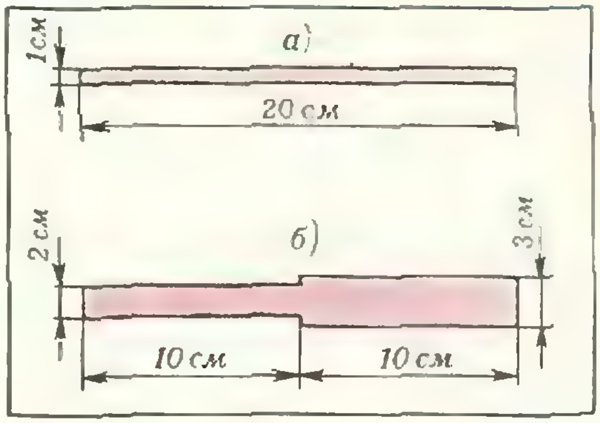


Рис. 3.

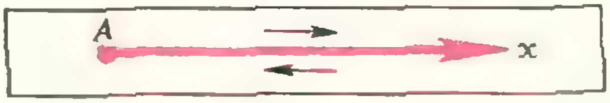


Рис. 4.

2. Перевернутый тонкостенный стакан с дном толщины h плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 2). Основание стакана находится на высоте H над границей раздела; внутри стакан заполнен жидкостью с плотностью ρ_2. Сечение стакана равно S. Определите вес стакана. (8 кл.)

3. Сопротивление металлической полоски длины 20 *см* и ширины 1 *см* (рис. 3, *а*) равно 1 *ом*. Чему равно сопротивление фигуры, изображенной на рисунке 3, *б*, если она вырезана из того же материала, что и полоска? (8 кл.)

4. Двигаясь из точки A без начальной скорости в направлении оси x в течение времени τ_0 равномерноускоренно, а затем в течение времени τ_0 равномернозамедленно, тело оказалось опять в точке A, но уже со скоростью v (рис. 4). На какое максимальное расстояние удалялось тело от точки A? (8 кл.)

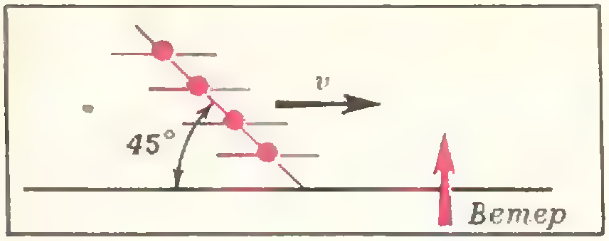


Рис. 5.

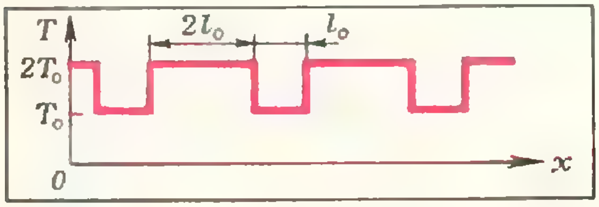


Рис. 6

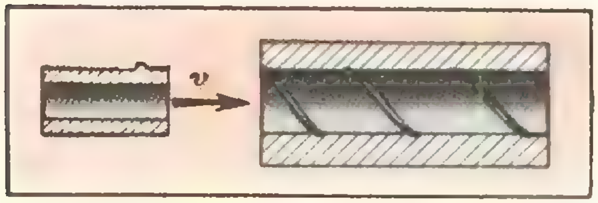


Рис. 7.

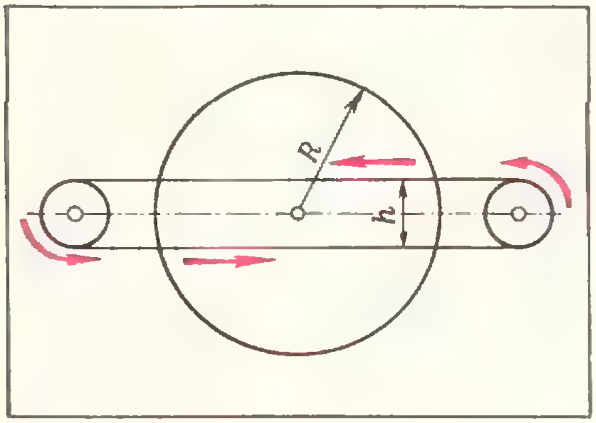


Рис. 8.

5. Длина нарезного ствола ружья 0,5 *м*. За время движения в стволе пуля делает один оборот. Скорость пули на выходе из ствола 600 *м/с*. Сколько оборотов за 1 *с* сделает пуля в полете? (8 кл.)

6. Чтобы уменьшить сопротивление воздуха при боковом ветре, велосипедисты выстроились по прямой, которая составляет 45° с направлением движения велосипедистов (рис. 5). Их скорость равна $v=20$ *км/ч*. Чему равна скорость ветра? (8 кл.)

7. Начальное распределение температуры вдоль длинного однородного стержня показано на рисунке 6.

Протяженность участков с температурой T_0 равна l_0, с температурой $2T_0$ — $2l_0$. Нарисуйте качественную картину распределения температуры в последующие моменты времени. Какая температура установится в стержне, если подождать достаточно долго? Длина стержня много больше l_0. Тепло от стержня в окружающее пространство не передается. (9 кл.)

8. Тонкостенный цилиндр длины l и радиуса R, имеющий на внешней поверхности выступ, влетает со скоростью v в закрепленную трубу длины L, в которой имеется спиральный паз по форме выступа (рис. 7). Двигаясь по трубе, цилиндр совершает n оборотов. Определить поступательную скорость после трубы. Трением пренебречь. При входе цилиндра в трубу переход к движению по спирали происходит плавно. (9 кл.)

9. На поверхности жидкости плотности ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. Насколько изменится глубина погружения этого же стакана в жидкость, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана h, давление воздуха p_0. (9 кл.)

10. В кубе, сделанном из проволоки, в одном из ребер течет ток i. Определить токи в остальных ребрах куба. Напряжение прикладывается к противоположным вершинам куба. (9 кл.)

11. Длинная тонкая проволока помещена внутрь сосуда, наполненного сильно разреженным водородом с плотностью n_1. Температура стенок сосуда поддерживается равной T_1. Проволока подогревается электрическим током, а охлаждается только окружающим газом. Установившаяся температура проволоки равна T_2. Чему будет равна установившаяся температура проволоки с тем же током, если водород заменить разреженным азотом с плотностью n_2? (9—10 кл.)

12. Колесо радиуса R может свободно вращаться вокруг своей оси. К его ободу так, как это показано на рисунке 8, прижимается в четырех точках приводной ремень. Определить установившуюся скорость u точек обода колеса, если скорость ремня равна v. (9—10 кл.)

13. Тело массы M скользит без трения по цилиндрическому желобу радиуса R, ось которого направлена под углом α к горизонту, а длина равна l (рис. 9). Сколько раз тело

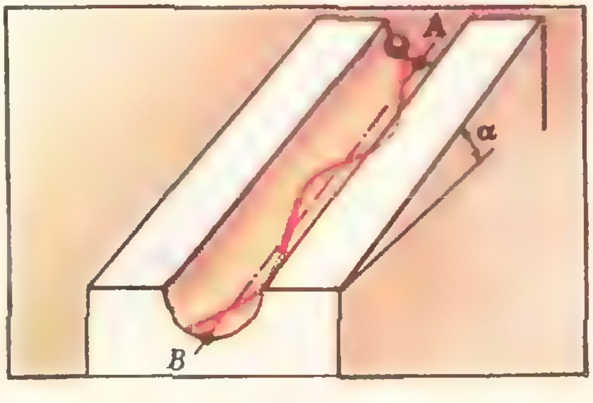


Рис. 9

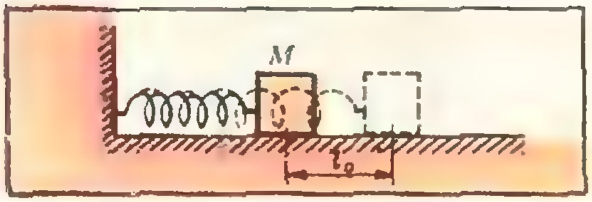


Рис. 10.

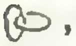
пересечет линию AB, если оно начало свое движение, находясь вблизи от точки A — нижней точки верхнего сечения желоба? (10 кл.)

14. В сосуде объема V_0 находится твердое тело объемом $V_т$ при температуре плавления $T_п$. Какой объем насыщенных паров вещества этого тела при температуре T_1 нужно впустить в сосуд, чтобы расплавить это тело и довести температуру образовавшейся жидкости до температуры, очень близкой к температуре T_1? Удельная теплота плавления равна $\lambda_п$, удельная теплота конденсации при температуре T_1 равна λ_1, удельная теплоемкость жидкости равна c. Плотности твердого тела, жидкости и пара равны $\rho_т$, $\rho_ж$ и $\rho_п$. Сосуд теплоизолирован. (10 кл.)

15. На горизонтальной плоскости лежит тело массы M, имеющее заряд q. К нему со скоростью v_0 из бесконечности начинает двигаться второе тело той же массы и заряда. Коэффициент трения между телами и плоскостью равен k. Определить минимальное расстояние, на которое сблизятся эти тела. (10 кл.)

16. Тело массы M, лежащее на горизонтальной плоскости, прикреплено к нерастянутой пружине жесткости k. Другой конец пружины прикреплен к неподвижной стенке (рис. 10). Тело оттянули на l_0 от начального положения равновесия и отпустили. Через N колебаний тело остановилось в начальном положении равновесия. Чему равен коэффициент трения между плоскостью и телом? (10 кл.)

Химия

1. В последнее время теоретически и экспериментально доказано существование соединений с «механической» связью типа , называемых катенанами, где ○ — макроцикл с большим числом атомов углерода. Предложите метод синтеза этих соединений (при решении вам может помочь представление о ленте Мёбиуса). (10 кл.)

2. Сколько процентов гексена-1 содержится в смеси с гексаном, если к 10 *г* такой смеси присоединяют 8 *г* брома? (10 кл.)

3. Равные объемы двумолярных растворов азотной кислоты и едкого натра смешали в чистом реакционном сосуде. В каких пределах должна лежать величина pH конечного раствора, если учесть, что из-за неизбежных экспериментальных погрешностей количество любого из исходных реагентов может отличаться от номинального значения, но не более чем на ±0,5%? (10 кл.)

4. Некоторый элемент образует три соединения с серой. При сжигании 6,00 *г* каждого из них в токе кислорода образуется соответственно 4,00; 4,62; 5,45 *г* окисла элемента. Установить, что это за элемент. (10 кл.)

5. 10 *г* гематита полностью восстановили водородом и на порошок образовавшегося металла адсорбировали X молей азота природного изотопного состава при стандартной температуре и давлении 15 *мм рт. ст.* Затем весь порошок быстро (то есть без заметной десорбции) перенесли в замкнутый сосуд объемом 0,5 *л* с азотом при тех же условиях (T, p), но обогащенным по тяжелому изотопу. Определить содержание азота на поверхности адсорбента (*молекул/см²*), если известно, что поверхность 1 *г* порошка металла составляла 5 $м^2$, и концентрация тяжелого изотопа в газовой фазе в ходе реакции изотопного обмена изменилась с 90% до 60% атомов N^{15}. Написать уравнения реакций. (9 кл.)

6. При пропускании тока силой 16,1 *а* в течение часа через раствор электролита убыль веса анода составила 5,2 *г*. Известно также, что материал анода в электрохимическом процессе подвергается окислению до степени окисления +6, а действие на полученный раствор в нейтральной среде избытка азотнокислого серебра даст 33,2 *г* осадка труднорастворимого продукта. Из чего изготовлен анод и какой стехиометрический состав осадка? (9 кл.)

7. Кристаллы алюмокалиевых квасцов подвергли в одном случае умеренному, в другом случае сильному нагреванию. На сухие остатки в обоих случаях подействовали сначала водой, а затем раствором аммиака. Какова реакция водных растворов на лакмус? Что будет наблюдаться при добавлении аммиака? Дайте объяснение. (9 кл.)

8. Сколько процентов (по объему) сернистого газа могут содержать газы, полученные при прокаливании в воздухе (объемное содержание кислорода в воздухе 21%) цинковой обманки ZnS (с полным использованием кислорода)? (8 кл.)

9. Из 45 гранов вещества, образовавшегося при прокаливании ртути, Лавуазье получил 41,5 грана жидкой ртути и 7—8 кубических дюймов «упругой жидкости». «Упругая жидкость» оказалась кислородом. Определить (по данным Лавуазье) эквивалентный вес ртути и сравнить его с современным значением эквивалента ртути. 1 гран = 65 *мг*. (8 кл.)

10. Колба произвольного объема была заполнена газообразным HCl при нормальных условиях. Затем, не допуская утечки хлористого водорода, в эту колбу залили дистиллированную воду до полного заполнения. Какова концентрация образовавшейся соляной кислоты? (8 кл.)

Ленинские премии 1974 года

Среди восьми Ленинских премий, присужденных в 1974 году советским ученым за выдающиеся достижения в науке, две премии присуждены за работы в области физики. Первой из них удостоен член-корреспондент Академии наук СССР заведующий сектором Физического института имени П. Н. Лебедева Академии наук СССР профессор Московского университета Леонид Вениаминович Келдыш. Премия присуждена ему за цикл теоретических работ по физике полупроводников. Эти работы опубликованы в 1957—64 гг. в четырех статьях, помещенных в «Журнале экспериментальной и теоретической физики».

В первых двух статьях Л. В. Келдыш исследовал явление, которое называют «туннельным эффектом» в полупроводниках. Кратко суть этого явления состоит в следующем. Если полупроводниковый кристалл поместить в сильное внешнее электрическое поле напряженностью порядка 10^7 *в/м*, то его электропроводность начнет быстро увеличиваться. Оказывается, что под влиянием внешнего электрического поля часть электронов полупроводникового кристалла, ранее прочно связанных со своими атомами, отрывается от них и становится свободными. При этом возрастает концентрация носителей тока — электронов и дырок, что и приводит к увеличению электропроводности полупроводников. Внешнее электрическое поле как бы создает своеобразный «туннель» в энергетическом спектре полупроводников, по которому связанные в атомах электроны переходят в свободное состояние.

Л. В. Келдыш дал строгую теорию этого эффекта и предсказал новый механизм возникновения дополнительных носителей тока в полупроводниках под влиянием внешнего электрического поля — так называемый непрямой туннельный эффект. При прямом туннельном эффекте энергия, необходимая для отрыва электрона, целиком заимствуется у внешнего электрического поля. А при непрямом туннельном эффекте часть энергии, необходимой для отрыва электрона, заимствуется из энергии тепловых колебаний атомов кристалла.

Вскоре после опубликования этих работ Л. В. Келдыша японский физик Исаки впервые экспериментально подтвердил наличие туннельного эффекта в полупроводниках. Он же предложил использовать этот эффект для создания нового важного типа полупроводниковых приборов — так называемых «туннельных диодов», широко применяемых теперь в сверхвысокочастотной технике. За создание этих диодов, принцип работы которых основан на теории Л. В. Келдыша, Исаки был удостоен Нобелевской премии.

Третья работа Л. В. Келдыша относится к исследованию действия электромагнитного излучения на полупроводники. Полупроводники прозрачны для всех электромагнитных волн, у которых энергия квантов недостаточна для отрыва электронов и создания новых носителей тока. Волны же, у которых энергия квантов достаточна для отрыва электронов или превосходит эту величину, интенсивно поглощаются полупроводниками. За счет энергии поглощенного кванта электрон получает возможность «вырваться» из атома. Таким образом, каждый полупроводник имеет резко определенную границу спектра поглощения со стороны длинных волн. Л. В. Келдыш первым теоретически показал, что внешнее электрическое поле смещает эту границу в область более длинных волн. Полупроводник, помещенный во внешнее электрическое поле, начинает поглощать кванты с энергией, недостаточной для высвобождения электронов. Дело в том, что недостающую для отрыва долю энергии электроны получают от внешнего электрического поля. Этот эффект был вскоре подтвержден в многочисленных опытах и назван «эффектом Келдыша — Франца» (немецкий физик из ФРГ В. Франц пришел к аналогичным выводам на несколько месяцев позднее Л. В. Келдыша). Использование этого эффекта лежит в основе наиболее распространенного теперь метода спектроскопических исследований полупроводников.

В последней работе, выполненной вскоре после создания первых лазеров, Л. В. Келдыш исследовал туннельный эффект под влиянием мощных электромагнитных полей высокой частоты, включая инфракрасное излучение и видимый свет. При этом он предсказал новое и неожиданное явление, которое назвали многоквантовым фотоэффектом. Из теории Л. В. Келдыша следовало, что в мощном лазерном пучке электромагнитного излучения фотоэффект, то есть отрыв электронов у атомов под воздействием излучения, должен наблюдаться даже тогда, когда энергия квантов излучения в несколько раз меньше, чем энергия, необходимая для отрыва электронов. В этом случае никакого внешнего постоянного электрического поля, от которого электрон мог бы приобрести недостающую для освобождения из атома энергию, уже нет. Электроны становятся свободными, поглотив одновременно несколько квантов электромагнитного излучения. Вскоре после опубликования работы Л. В. Келдыша этот эффект был обнаружен в экспериментах.

Работы Л. В. Келдыша, о которых мы здесь кратко рассказали, внесли огромный вклад в развитие физики и техники полупроводников. Все они пользуются широким международным признанием.

Вторая Ленинская премия была присуждена сотрудникам Института теоретической и экспериментальной физики докторам физико-математических наук Юрию Георгиевичу Абову и Петру Александровичу Крупчицкому и сотрудникам Ленинградского института ядерной физики имени Б. П. Константинова Академии наук СССР члену-корреспонденту Академии наук СССР Владимиру Михайловичу Лобашеву и кандидату физико-математических наук Владимиру Андреевичу Назаренко. Они были удостоены премии «за цикл работ по экспериментальному обнаружению и исследованию несохранения пространственной четности в ядерных электромагнитных переходах». Попробуем разобраться в том, что же скрывается за этой сложной научной формулировкой.

Физика утверждает, что все изучаемые ею явления и процессы вызываются четырьмя различными типами сил — гравитационными, электромагнитными, ядерными и так называемыми силами слабого взаимодействия. Последние ответственны за процессы, протекающие с участием протонов или нейтронов с одной стороны и электронов или позитронов с другой. Действие этих сил проявляется, например, при радиоактивном распаде. Еще сравнительно недавно физики полагали, что любое из этих четырех типов взаимодействий осуществляется с сохранением пространственной симметрии. В самом деле, электростатическое поле, создаваемое точечным электрическим зарядом, одинаково по всем направлениям. Симметрично и поле тяготения, создаваемое точечной массой. Однако недавно было показано, что в явлениях, где проявляются слабые взаимодействия, эта пространственная симметрия нарушается. Причина нарушения физикам еще не ясна, но факт этот установлен в бесспорных экспериментах.

Вскоре после этого открытия некоторые физики-теоретики выдвинули идею о том, что слабые взаимодействия носят более общий, чем прежде думали, характер и участвуют во взаимодействии ядерных частиц (протонов и нейтронов). До недавних пор считалось, что такие частицы взаимодействуют друг с другом только при помощи ядерных сил. Если бы выдвинутое предположение о наличии слабого взаимодействия между ядерными частицами подтвердилось, это означало бы существенное углубление наших представлений о природе таких частиц. Однако экспериментальная проверка выдвинутой гипотезы казалась практически неосуществимой. Ведь в таком эксперименте надо было обнаружить проявление слабых взаимодействий на фоне в миллиарды раз более мощных ядерных взаимодействий. Вся надежда была на то, что слабые взаимодействия, в отличие от сильных, происходят с незначительным нарушением пространственной симметрии. Эту асимметрию и надо было обнаружить на опыте.

Абов и Крупчицкий первыми взялись за столь необычный эксперимент. После нескольких лет упорного труда они получили обнадеживающие результаты. Однако все попытки обнаружить наличие слабого взаимодействия между ядерными частицами, предпринятые за рубежом, оказались безуспешными. Только семь лет спустя результаты Абова и Крупчицкого были подтверждены американскими физиками в аналогичных экспериментах.

Лобашев и Назаренко осуществили поиски слабых взаимодействий элементарных частиц по принципиально иной методике, точность которой оказалась примерно в тысячу раз выше точности прежних методов. Им удалось получить неопровержимые подтверждения существования слабого взаимодействия между ядерными частицами и тем самым существенно углубить современные представления о природе атомных ядер.

Наш рассказ о Ленинских премиях в области физики за 1974 год был бы неполным, если бы мы не упомянули еще об одной весьма близкой к физике работе, удостоенной этой высокой премии. Академик Николай Васильевич Белов, заведующий лабораторией Института кристаллографии имени А. В. Шубникова Академии наук СССР был удостоен Ленинской премии за выдающиеся исследования по структуре кристаллов силикатов, из которых состоит более 80% горных пород, слагающих земную кору. Долгое время структура этих минералов оставалась загадкой для кристаллографов. Наконец, развитая Н. В. Беловым оригинальная теория кристаллического строения силикатов позволила найти ключ к решению этой загадки. К настоящему времени Н. В. Белов со своими учениками расшифровал более 100 кристаллических структур этих важных для практики минералов.

В. А. Лешковцев

День юного физика

Каждый год тысячи школьников, интересующихся физикой, собираются на районные, городские, областные олимпиады, и каждый год их ждут интересные задачи, но, к сожалению, для многих этим дело и кончается; мало кто из них может поговорить с победителями, узнать поглубже — что же такое физика, потрогать руками современную научно-исследовательскую аппаратуру, послушать рассказы известных ученых. Учтя все это, физический факультет Ленинградского государственного университета в этом году впервые провел «День юного физика» — день подведения итогов всех туров физической олимпиады. Участниками этого праздника были победители районных олимпиад города Ленинграда. Всего в этот день под сводами нового здания физического факультета ЛГУ в Петергофе собралось около 600 школьников восьмых, девятых и десятых классов. Торжественное открытие «Дня юного физика» состоялось в конференц-зале главного корпуса физического факультета. Первым перед участниками праздника выступил заместитель декана физического факультета В. П. Вальков.

От имени Городского отдела народного образования с приветствием к ним обратилась заместитель директора Ленинградского Дворца пионеров Л. П. Буланкова.

В торжественной обстановке был зачитан приказ Ленинградского ГОРОНО о награждении победителей, и состоялось вручение дипломов.

Затем заместитель директора физико-математической школы-интерната при ЛГУ А. А. Быков рассказал о выступлении ленинградской команды на последней Всесоюзной олимпиаде по физике, о достигнутых ею успехах. От имени райкома ВЛКСМ победителям ленинградской городской и участникам Всесоюзной олимпиады руководитель шефского отдела комитета ВЛКСМ физического факультета Анатолий Вараксин вручил грамоты.

После торжественной части профессор Г. С. Кватер для учащихся 8—9-х классов и профессор Н. И. Калитеевский для учащихся 10-х классов в занимательной форме рассказали о проблемах современной физики, сопровождая свои выступления опытами, которые на базе средней школы просто невозможны.

Большой интерес у школьников вызвала демонстрация кинофильма, снятого американскими космонавтами на Луне, который был подарен Ленинградскому университету.

По окончании фильма участникам праздника была предложена физическая викторина. Перед аудиторией экспериментатор ставил опыты, и участникам викторины предлагалось дать объяснения наблюдаемым физическим явлениям. Некоторые школы выставили на викторину свои команды. Среди них была команда Юношеской физической школы, четвертый год существующей при физическом факультете ЛГУ. В ней занимаются около двухсот школьников-ленинградцев, желающих изучить школьную физику на более глубоком современном уровне.

Ответы участников викторины были очень интересны, а иногда смешны и наивны. Победители викторины получили в качестве призов книги по физике с автографами авторов или небольшие физические приборы.

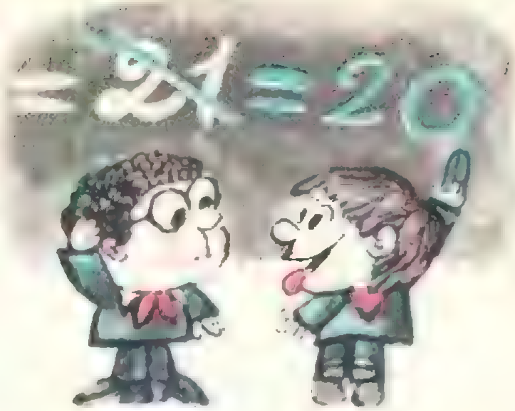
Наверное, каждый любознательный школьник, а тем более интересующийся физикой, хотел бы побывать в настоящей научной лаборатории. Такая возможность была предоставлена всем участникам праздника: в их распоряжении были студенческие и научные лаборатории, где научные работники рассказали о современных методах физических исследований.

В заключение праздника выступил университетский театр со студенческой программой. Она была очень горячо принята участниками праздника. По словам «артистов», они не ожидали такого взаимопонимания и успеха у столь юной аудитории. Этот день всем очень понравился.

С. Иванов,
А. Вараксин

«Квант» для младших школьников

Задачи



1. Володя написал на доске:

$$1*2*3*4*5*6*7*8*9 \quad 21,$$

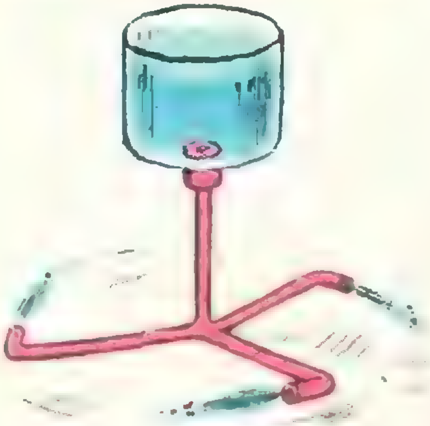
причем вместо звездочек он поставил либо плюс, либо минус. Саша переправил несколько знаков на противоположные, и в результате вместо числа 21 получил число 20.

Можно ли утверждать, что по крайней мере один из мальчиков допустил ошибку при подсчете результата?

2. Температура пламени свечи ~1600 С. Температура плавления железа 1400° С. Почему же гвоздь не плавится на свечке? (А если внести в пламя на жаростойкой ручке железную кнопку, то она расплавится.)

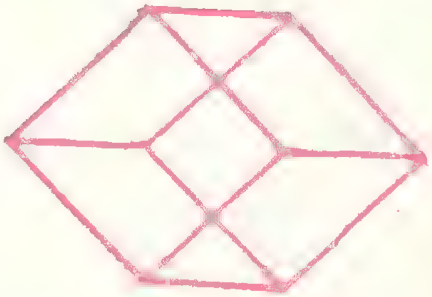
3. Восстановить запись умножения:

$$\begin{array}{ccccc} & & О & Д & А \\ & & Р & И & С \\ \hline & & П & А & Т \\ & И & Н & Д & \\ С & О & Р & & \\ \hline С & П & О & Р & Т \end{array}$$



4. Будет ли вращаться в пустоте сегнерово колесо? (Похожая на паука вертушка, которую вы видите здесь на картинке, и есть сегнерово колесо.)

5. Найти пять чисел, зная, что их суммы по три соответственно равны 3, 5, 6, 9, 10, 10, 12, 14, 16 и 17.



6. Перед вами изображение куба на плоскости. Проведите, не отрывая карандаша от бумаги, одну непрерывную линию, которая пересекла бы по одному разу все 16 отрезков, из которых составлена фигура.

Где должна начинаться эта линия, и где кончаться?

Рисунки Э. Назарова

НЕТ ЛИ ДРУГОГО РЕШЕНИЯ?

А. И. МОСТОВОЙ

**Многие школьные задачи допускают различные способы решения. Поиски таких решений — занятие интересное и полезное. В этом может убедиться каждый.
В данной заметке говорится о том, как можно находить различные способы решения задач.**

> *. . . полезнее одну задачу решить несколькими способами, чем несколько задач одним способом.*
>
> В. К. Беллюстин

Мы обсудим разные способы решения следующей задачи.

Задача 1. *Построить треугольник по двум его углам и периметру* $2p$.

Обычное решение этой задачи выглядит так. Предположим, что задача решена, треугольник ABC — искомый (рис. 1). На продолжении AC от точек A и C отложим отрезки $[AA_1]\cong[AB]$, $[CC_1]\cong[BC]$ и соединим точку B с точками A_1 и C_1. Полученный треугольник A_1BC_1 можно построить по стороне A_1C_1, равной периметру $2p$ искомого треугольника, и двум прилежащим углам $\hat{A}_1$ и $\hat{C}_1$, равным соответственно половинам углов $\hat{A}$ и $\hat{C}$. Остается построить вспомогательный треугольник A_1BC_1 и серединные перпендикуляры к сторонам A_1B и BC_1 (или равные углы $\widehat{ABA_1} = \hat{A}_1$ и $\widehat{CBC_1} = \hat{C}_1$). В результате получим искомый треугольник ABC.

Но вот, решив задачу таким способом, вновь подумаем над нею. Построим по двум заданным углам некоторый треугольник A_1BC_1 (рис. 2). Затем, как и в первом решении, спрямим периметр построенного треугольника: $[A_1D_1]\cong[A_1B]$, $[C_1E_1]\cong[C_1B]$. После этого проведем лучи $[BD_1)$, $[BA_1)$, $[BC_1)$, $[BE_1)$ и отложим $|D_1F| = 2p$. Далее проведем $[FE) \parallel [BD_1)$ и $(DE) \parallel [D_1F)$. Образовавшийся таким образом треугольник ABC (рис. 2) — искомый. Это легко доказать (здесь и в дальней-

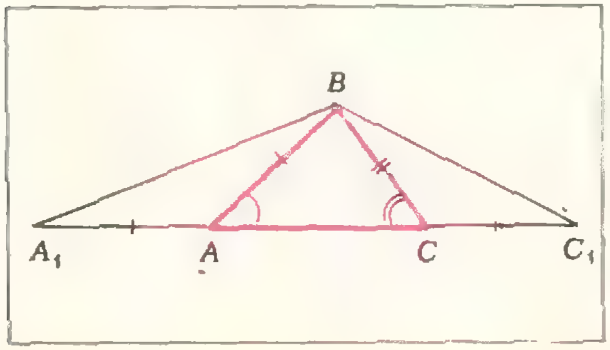


Рис. 1.

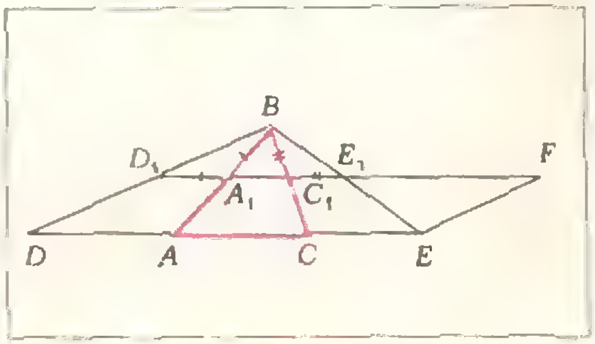


Рис. 2.

щем мы не будем приводить доказательства, оставляя их читателю).

Вдумаемся в каждый из этих способов решения. При решении задачи первым способом поиск начинался с неизвестного (предположения, что искомый треугольник ABC построен), и по ходу рассуждений мы пришли к известному — треугольнику A_1BC_1. Это так называемый *аналитический* путь рассуждения.

Во втором способе мы исходили из известного — построенного определенным образом треугольника A_1BC_1 (рис. 2). После серии вспомогательных рассуждений мы пришли к неизвестному — искомому треугольнику ABC. Это так называемый *синтетический* путь рассуждения. В творческом отношении он нередко уступает первому. Вместе с тем и этот путь рассуждения часто приводит к хорошим результатам, особенно в тех случаях, когда в памяти всплывает способ решения другой задачи, который помогает нам решить поставленную задачу.

Известна ли нам еще какая-нибудь задача, которая помогла бы найти третий способ решения задачи 1? Перебирая в памяти разные задачи, останавливаемся на решении одной из них.

Задача 2. *Через точку в плоскости данного угла провести прямую так, чтобы она отсекла от этого угла треугольник заданного периметра.*

Вспомнив решение этой задачи, отыскиваем третий способ решения задачи 1. Построим по двум заданным углам произвольный треугольник AMN (рис. 3) и отложим от вершины A отрезки, равные полупериметру p искомого треугольника: $|AF| = |AE| = p$. Далее построим окружность, касающуюся сторон угла A в точках F и E и проведем касательную BC, параллельную прямой MN. Треугольник ABC — искомый.

Второй способ решения задачи 1 и рассуждения над задачей 2 помогают нам составить новые задачи.

Задача 3. *Данный угол пересечь прямой, параллельной данной, так, чтобы она отсекала от него треугольник заданного периметра.*

Задача 4. *Построить треугольник по двум его углам и сумме двух сторон.*

Задача 5. *Провести прямую, параллельную основанию треугольника так, чтобы отрезок ее между боковыми сторонами равнялся сумме прилежащих к основанию отрезков, отсекаемых этой прямой.*

Объединив решения задач 4 и 5, получим чертвертый способ решения задачи 1. Этот способ сводится к последовательности следующих построений: $\triangle A_1B_1C_1$ $\left(|A_1B_1| = 2p,\ \hat{A}_1 = \hat{A} \text{ и } \hat{B}_1 = \frac{1}{2}\hat{B}\right)$, серединного перпендикуляра BD ($[C_1D] \cong [DB_1]$), биссектрис A_1O и C_1O (углов BA_1C_1 и BC_1A_1) и $(AC) \parallel [A_1C_1]$. Треугольник ABC — искомый.

В задаче 5 говорится о прямой, проведенной параллельно основанию

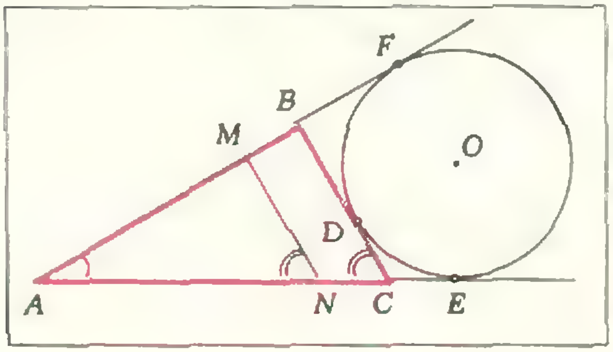


Рис. 3.

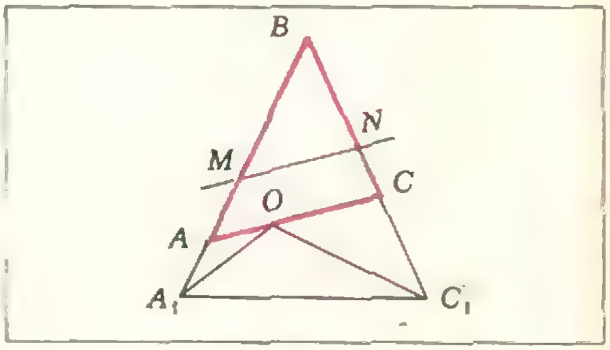


Рис. 4.

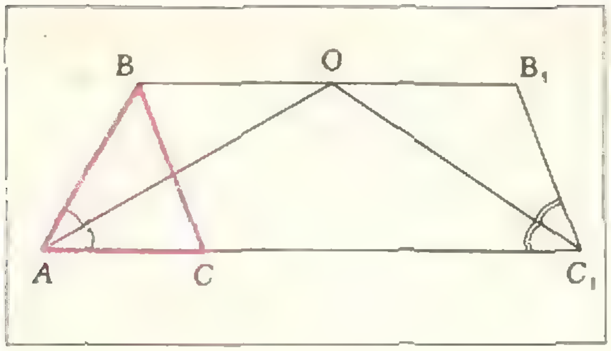


Рис. 5.

треугольника. А нельзя ли провести другую прямую, не параллельную основанию, но обладающую тем же свойством?

Появилась новая задача.

Задача 6. *Пересечь боковые стороны равнобедренного треугольника прямой, параллельной данной, так, чтобы отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами, равнялся сумме прилежащих к основанию отрезков, отсекаемых этой же прямой.*

Решив эту задачу, мы обнаружим, что тем самым найден пятый способ решения задачи 1. Этот способ сводится к следующему. Строим равнобедренный треугольник A_1BC_1 (рис. 4), у которого угол B — данный, а $|A_1B| = |BC_1| = p$. Проводим прямую MN так, чтобы $\widehat{BMN} = \hat{A}$ (второму заданному углу искомого треугольника). Далее строим $\widehat{BA_1O} = \frac{1}{2}\widehat{BMN}$ и $\widehat{BC_1O} = \frac{1}{2}\widehat{BNM}$ и через точку O проводим $(AC) \parallel (MN)$. Треугольник ABC — искомый.

Для нахождения шестого способа предположим, что задача решена, треугольник ABC — искомый (рис. 5). Отложим $|AC_1| = 2p$ и проведем $(B_1C_1) \parallel [BC]$ и $(BB_1) \parallel (AC_1)$. Легко убедиться в том, что $|BB_1| = |CC_1| = 2p - |AC| = |AB| + |BC|$. Затем отметим точку O такую, что $[BO] \cong [AB]$, тогда $[OB_1] \cong [B_1C_1]$ и, следовательно, $\widehat{BAO} = \widehat{AOB}$, а $\widehat{B_1OC_1} = \widehat{B_1C_1O}$. Учитывая, что $(BB_1) \parallel (AC_1)$, приходим к выводу: $[AO)$ и $[C_1O)$ — биссектрисы углов BAC_1 и B_1C_1A.

Все эти рассуждения приводят к следующим построениям: $|AC_1| = 2p$, $\widehat{BAC_1} = \hat{A}$ и $\widehat{B_1C_1A} = \hat{C}$ (A и C — данные углы искомого треугольника). Далее проводим биссектрисы AO и C_1O углов $\widehat{BAC_1}$ и $\widehat{B_1C_1A}$ и через точку их пересечения (O) проводим $(BB_1) \parallel (AC_1)$ и, наконец, $[BC] \parallel (B_1C_1)$. Образовавшийся таким образом треугольник ABC — искомый.

Упражнения

1. Угол, вершина которого недоступна, *разделить пополам.*
2. Через точку и недоступную вершину данного угла провести прямую.
3. Данный отрезок разделить на три равные части.
4. Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный. Доказать.
5. Доказать, что во всяком треугольнике основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности, центр которой является серединой отрезка, соединяющего центр описанного круга с ортоцентром треугольника. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек* или *окружностью Эйлера.*)

Литература

1. С. И. Зетель, Новая геометрия *треугольника,* М., *Учпедгиз,* 1962.
2. Д. Пойа, Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1961.
3. А. И. Мостовой, Различные способы доказательства в курсе геометрии восьмилетней школы, М., «Просвещение», 1965.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Экстремумы многочлена третьей степени»

1. $x = 2$, $y_{\max} = 34$; $x = 3$, $y_{\min} = 33$.

2. $x = -3$, $y_{\min} = 162$; $x = 5$, $y_{\max} = 930$.

3. Экстремумов нет, функция возрастающая.

4. Экстремумов нет, функция убывающая.

К статье «Семейство параллельных n-угольников»

5. Указание. См. равенство (6), с. 34, где $M_1 = S_{ABC}$, $M_2 = S_{ADC}$.

6. Указание. Поместите в вершины A, B, D массы так, чтобы их центр тяжести оказался в точке E $\left(m_B = m_D = 1,\ m_A = \frac{|GB|}{|GA|} + \frac{|HD|}{|HA|}\right)$, и затем перебросьте массы m_B и m_D в вершины A и C.

8. Указание. Для каждой точки $M \in Q$ найдите номер i, для которого отношение расстояний от M до i-х сторон многоугольников Q и P — наименьшее.

9. Ответ. Нет, не следует. По существу, дело сводится к вопросу о том, для любых ли положительных $p_i = \sqrt{P_i}$, $q_i = \sqrt{Q_i}$ справедливо неравенство

$$\Sigma p_i q_i \geqslant (\Sigma p_i^2)(\Sigma q_i^2).$$

Но легко убедиться на примерах, что это неверно — см. упражнение 18.

10. Указание. Возьмите в примере, изображенном на рисунке 2, $a = h = 1$, $b = k = 100$, $t = 0{,}001$.

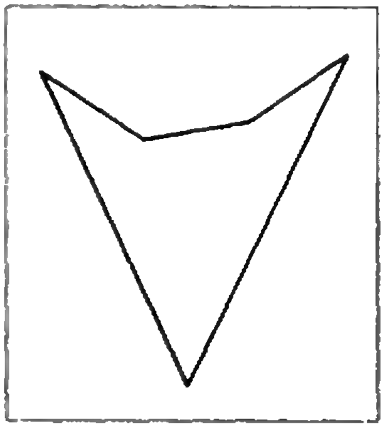
14. Указание. «Поднимитесь» в пространство, введя ось времени, перпендикулярную данной плоскости.

15. Указание. Представьте себе, что движение каждой прямой продолжено на все значения $t \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть совпадение одной пары параллельных сторон происходит в момент времени $t = t_1$, а «схлопывание» другой пары происходит при $t = t_2$. Тогда график площади $F(t) = |c(t - t_1)(t - t_2)|$ состоит из трех кусков парабол, каждая из которых имеет корни $t = t_1$ и $t = t_2$, то есть неотрицательный дискриминант. Точки $t = 0$ и $t = 1$ лежат на одном из интервалов $(-\infty, t_1[$, $]t_1, t_2[$, $]t, +\infty)$ — ведь между ними не происходит «схлопываний».

Правда, может случиться так, что параллельные стороны параллелограмма остаются с течением времени на одном и том же расстоянии друг от друга. Тогда квадратный трехчлен $F(t) = Q + 2Rt + Kt^2$ «вырождается»: коэффициенты K и даже R могут обращаться в нуль. Но неравенство $R^2 - QK \geqslant 0$ и в этом случае остается верным!

17. Указание. Постройте семейство, содержащее пятиугольник, приведенный на рисунке.



18. Указание. Рассмотрите дискриминанты трехчленов:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} (p_i t - q_i)^2$;

б) $(p_1 t - q_1)^2 - \sum\limits_{i=2}^{n} (p_i t - q_i)^2$.

19. Ответ. Для $n = 3$ всегда $S = \sqrt{PQ}$. Для $n \geqslant 4$ S может принимать любые значения в интервале $\sqrt{PQ} \leqslant S < P$.

20. Если стороны многоугольника отодвигать во внешнюю сторону с одинаковой единичной скоростью, то его площадь будет равна $Kt^2 + Pt + S$, где $K > \pi$; согласно теореме $P^2 \geqslant 4KS$, откуда $P^2 \geqslant 4\pi S$.

К статье «Пределы последовательностей»

1. Так как $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, то неравенство $|a_n| < \varepsilon$ выполняется при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, так что в качестве N можно взять $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

2. Пользуясь тождеством $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, получаем

$$\sqrt[n]{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt[n]{2} + (\sqrt[n]{2})^2 + \ldots + (\sqrt[n]{2})^{n-1}},$$

и поскольку каждое слагаемое знаменателя больше 1, то

$$\sqrt[n]{2}-1<\frac{1}{n}.$$

Поэтому при $n>\frac{1}{\varepsilon}$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{2}-1<\varepsilon$, так что в качестве N достаточно взять $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Неравенство $-\varepsilon<\sqrt[n]{2}-1$ выполняется автоматически, так как $\sqrt[n]{2}-1>0$.

3. *Так как* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, *то для любого* заданного $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $b_n<\varepsilon$; тогда так как $a_n\geqslant 0$, при $n>N$ выполняется и неравенство $-\varepsilon<a_n\leqslant b_n<\varepsilon$. Доказанное и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

4. а), б) Удобно пользоваться следующей равносильной формой определения предела: *число a является пределом последовательности (a_n), если для любого $\varepsilon>0$ вне интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ лежит лишь конечное число членов последовательности.* Тогда по условию при заданном $\varepsilon>0$ вне интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ лежит лишь конечное число членов последовательностей (a_n), (b_n), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$.

в) При любом заданном $\varepsilon>0$ вне интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ лежит лишь конечное число членов последовательности (a_n), и следовательно, лишь конечное число членов последовательности (b_n).

г) В этом случае утверждать, что предел (b_n) равен a, нельзя: если, например, в последовательность 1, 1, 1 ..., имеющую предел 1, мы вставим «через один» нули, то получим последовательность 1, 0, 1, 0 ..., которая предела не имеет. Однако в случае, когда последовательность (b_n) все-таки имеет предел, этот предел обязательно равен a — это следует из утверждения пункта б).

5. а) Так как при $n\geqslant 2$ справедливо неравенство $a_n<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то в силу упражнения 3 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ (мы отбросили первый член данной последовательности, что возможно в силу упражнения 4; подумайте, какой из пунктов упражнения 4 здесь используется).

б) Докажите, что при достаточно большом n справедливы неравенства $0<a_n<\frac{2}{n^2}$.

6. Воспользуйтесь упражнением 4.

7. Это утверждение можно доказать непосредственно — так же, как в тексте доказана теорема о пределе суммы. Можно также свести доказательство к уже полученным теоремам:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n+(-b_n))=$$
$$=\lim_{n\to\infty}a_n+(-1)\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n.$$

8. Предел последовательности (a_n+b_n):

а) равен сумме пределов;

б) в некоторых случаях существует, в некоторых — нет;

в) не существует — доказать это можно от противного.

9. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=d>c$, то в интервале $(c,\ 2d-c)$ лежит бесконечное число членов последовательности (a_n), и все эти члены больше c, что противоречит условию; утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n<c$, нельзя, как показывает пример последовательности с общим членом $a_n=1-\frac{1}{n}$.

К статье «Космические» задачи на вступительных экзаменах»

1. $H=R$.
2. 35,4 *а. е.*
3. $1{,}05\cdot 10^{-23}$ *рад/с*^{2}.

К ребусам

(см. с. 11)

1. 24 068 × 43 526 = ...
2. 901 × 111 = 100 011.
3. 106 : 16 = 6,625.
4. 97 × 11 = 1067.
5. 1001.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. Квант», 1974, № 10)

1. 6 монет по 20 коп., 2 монеты по 15 коп.

2. Во время солнечного затмения диск Луны почти точно покрывает диск Солнца. Приближенно можно считать, что $\frac{R_С}{R_Л}=\frac{l_{С-З}}{l_{Л-З}}=387$, следовательно, $V_С=(387)^3\,V_Л$.

3. 51.

4. Показания термометров будут одинаковыми.

5. 3 *мин.*, 6 *мин.*

К статье «Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам»

(см. «Квант», 1974, № 10)

1. Предположим, что города соединены между собой так, как указано в условии задачи. Тогда из каждого города выходят четыре дороги, и общее число дорог равно $5\cdot 4/2=10$. С другой стороны, в силу теоремы Эйлера, число областей, на которые дороги

делят плоскость, равно $2 + 10 - 5 = 7$; причем каждая из областей ограничена по крайней мере тремя дорогами; поэтому общее число дорог должно быть не меньше $3 \cdot 7/2 = 10{,}5$. Значит, города соединить так, как сказано в задаче, нельзя.

2. Построим *«двойственную карту»*: отметим в каждой стране по точке и соединим точки, лежащие в соседних странах, непересекающимися дугами. Обозначим через m, n и l соответственно число вершин, ребер и стран двойственной карты. Ясно, что двойственная карта связана (то есть каждые две вершины соединены цепочкой дуг) и каждая страна на двойственной карте ограничена по крайней мере тремя дугами. Таким образом, $3l \leqslant 2n$.

Отсюда, в силу теоремы Эйлера, $6m \geqslant 12 + 2n$. Сопоставляя это неравенство с очевидными соотношениями

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots,$$
$$2n = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots,$$

где m_i обозначает число вершин, из которых выходят i ребер, мы получаем

$$5m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4 + m_5 \geqslant 12 + (m_7 + 2m_8 + \ldots). \qquad (1)$$

Нам нужно доказать, что хотя бы одно из чисел m_i больше двух. Но если все числа m_i меньше трех, то

$$5m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4 + m_5 \leqslant 30, \qquad (2)$$
$$m_6 + m_7 + \ldots = m - (m_1 + \ldots + m_5) > 19 - 10 = 9,$$

то есть $m_6 + m_7 + \ldots \geqslant 10$, откуда

$$m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + \ldots \geqslant 8,$$
$$m_8 + m_9 + m_{10} + \ldots \geqslant 6,$$
$$m_9 + m_{10} + \ldots \geqslant 4,$$
$$m_{10} + \ldots \geqslant 2,$$

и, значит,

$$m_7 + 2m_8 + 3m_9 + 4m_{10} + \ldots \geqslant 20. \qquad (3)$$

Остается заметить, что неравенства (2) и (3) противоречат неравенству (1).

3. Как и в задаче 4 *), рассмотрим карту, которая определяется линиями разрезов, и обозначим число вершин, дуг и стран этой карты соответственно через m, n и l. Назовем вершину карты *неправильной*, если она лежит на стороне одного из многоугольников и не является его вершиной; обозначим число неправильных вершин через m'. Через r обозначим число дуг, выходящих из вершин исходного пятиугольника и отличных от его сторон, причем каждую дугу, оба конца которой лежат в вершинах пятиугольника, условимся считать дважды. Предположим, что в каждом из многоугольников все углы меньше 72°. Тогда: а) все страны, кроме неограниченной, являются треугольниками; б) из каждой *правильной* вершины, лежащей внутри исходного пятиугольника, выходят не меньше чем шесть дуг, а из каждой *неправильной* — не меньше чем четыре. Из а) следует, что $2n = 3(l - 1) + m' + 5$, а из б) — что

$$2n \geqslant 6(m - m' - 5) + 4m' + 10 + r.$$

Из этих соотношений получаем, что

$$6m - 6n + 6l \leqslant 16 - r.$$

Так как по теореме Эйлера $m - n + l = 2$, то полученное неравенство означает, что $r \leqslant 4$. С другой стороны, нетрудно показать, что если пятиугольник разрезан больше чем на четыре многоугольника, то $r > 4$. Следовательно, хотя бы в одном из многоугольников будет угол, больший либо равный 72°.

4. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим карту, определяемую линиями разрезов. Обозначим число вершин, дуг и стран получившейся карты соответственно через m, n и l, число *неправильных* вершин через m'. Ясно, что $3l + m' = 2n$, и так как по теореме Эйлера $m - n + l = 2$, то

$$l = 2m - m' - 4. \qquad (*)$$

С другой стороны, если в каждом треугольнике есть угол, больший 120°, то

$$l - 1 \leqslant 2m - m' - 6. \qquad (**)$$

Действительно, из каждой правильной вершины, лежащей внутри исходного треугольника, выходят не более чем два угла, больших 120°, а из каждой неправильной вершины — не более чем один. Противоречие между (*) и (**) показывает, что среди треугольников, получившихся после разрезания, найдется треугольник, все углы которого не больше 120°.

5. Оказывается, что число ходов в этой игре определяется только числом m. Действительно, случай $m = 2$ очевиден. Пусть $m > 2$, тогда в конце игры на плоскости получится карта, на которой каждые две вершины соединены цепочкой дуг и каждая страна ограничена тремя дугами, то есть $2n = 3l$. Из теоремы Эйлера следует, что число дуг такой карты равно $3(m - 2)$. Но число дуг на получающейся карте равно числу ходов в нашей игре. Поэтому получаем: при нечетном m, большем двух, выигрывает игрок, сделавший первый ход, а при четном m, большем двух — его противник.

---

*) См. «Квант», 1974, № 10, с. 19.

Корректор *Е. В. Сидоркина*
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/VIII-74
Подписано в печать 30/IX-74
Бумага $70 \times 100^1/_{16}$. Физ. печ. л. [illegible]
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,62
Тир. 361 130 экз. Т-16650
Цена 30 коп. Заказ 1644

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Уголок коллекционера

На марках — математики и механики — члены Академии Наук

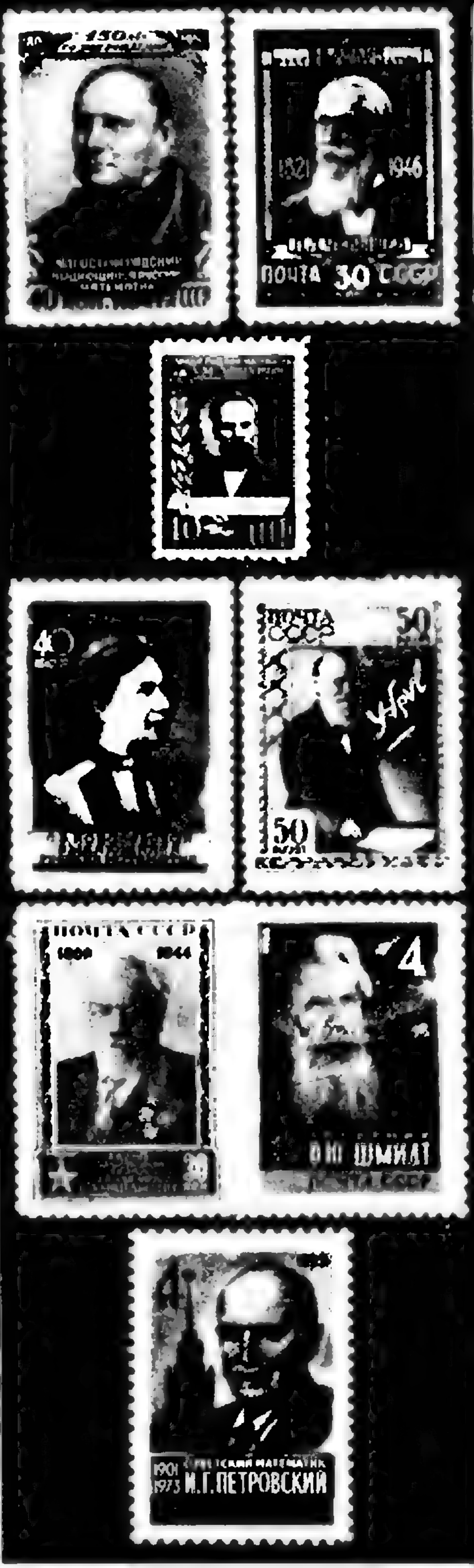
Мы уже писали о юбилее Академии Наук СССР (см. «Квант», 1974, №№ 4, 5). В этом номере мы помещаем репродукции некоторых марок с портретами членов Академии Наук — математиков и механиков, внесших значительный вклад в развитие русской и мировой науки.

К 150-летию со дня рождения выдающегося русского ученого Михаила Васильевича Остроградского в декабре 1951 года вышла почтовая марка с его портретом. М. В. Остроградский внес огромный вклад в развитие математической физики, механики, математического анализа.

В 1946 году к 125-летию со дня рождения была выпущена марка с портретом одного из крупнейших математиков XIX века — Пафнутия Львовича Чебышева. Ему принадлежат основополагающие результаты по теории чисел, теории вероятностей, интегрированию иррациональных функций.

Следующая марка посвящена памяти Александра Михайловича Ляпунова. Она выпущена в 1957 году к 100-летию со дня его рождения. А. М. Ляпунову наука обязана созданием нового важнейшего отдела механики — теории устойчивости равновесия и движения механических систем и исследованиями по теории фигур равновесия вращающейся жидкой массы. Уравнение равновесия вращающейся жидкости приведено на марке.

Первым в мире среди женщин профессором математики стала Софья Васильевна Ковалевская, марка с портретом которой выпущена в серии «Ученые нашей Родины» (1951 год).



С. В. Ковалевская была
фессором Стокгольм
университета — в цар
России она не смогла
чить работу, несмотр
официальное признание
сийской императорской
демией Наук, избравш
своим членом-корре
дентом.

С именами члена-
респондента Академии
Николая Егоровича Ж
ского и его ученика С
Алексеевича Чаплыгина
зан прогресс в области
ро- и аэромеханики.

На фото вы в
марку, выпущенную
1941 году в связи с 20-
ем со дня смерти Н. Е.
ковского. На ней ряд
портретом приведена
мула определения по
ной силы в потоке жид
или газа.

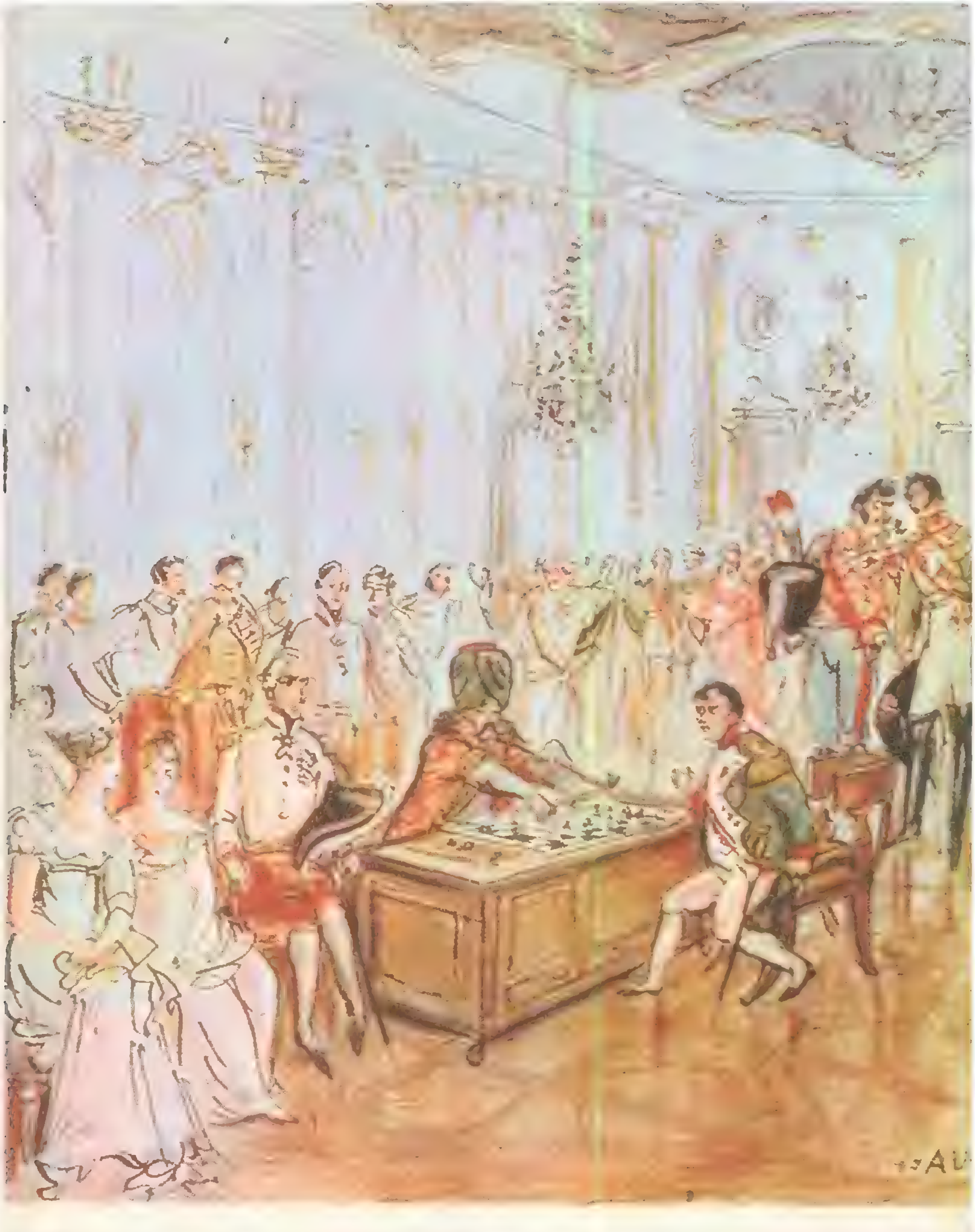
В 1944 году к 75-л
со дня рождения С. А.
лыгина вышли две ма
его портретом (одна и
приведена на фото).

На фото приведены
же две марки с портр
ученых, вся научная дея
ность которых протекал
сле установления Сове
власти.

На первой — Отто
евич Шмидт — специ
в области математики,
рономии и геофизики и
из крупнейших исследо
лей Арктики (марка
щена в 1966 году к 75-л
со дня его рождения).

Вторая марка, выпу
ная в 1973 году, посв
памяти ректора Моско
го государственного ун
ситета им. М. В. Ломон
академика Ивана Георг
ча Петровского, работ
торого внесли значител
вклад в теорию дифф
циальных уравнений с
ными производными,
раическую геометрию,
рию вероятностей и д
области математики.

А. В. А



«Автомат» для игры в шахматы играет с Наполеоном» *(рис. А. Унеховского).*

Этот «автомат», созданный венгерским изобретателем и механиком В. Кемпеленом в 1769 году, был обыкновенной мистификацией, хотя и свидетельствовал о больших конструкторских способностях Кемпелена. В основания шахматных фигур были вмонтированы сильные магниты. Они притягивали железные шарики, расположенные под доской, и таким образом сигнализировали шахматисту, сидящему в «автомате», о ходах соперника. Управление «турком», сидящим за доской, осуществлялось с помощью сложной системы рычагов.

Встреча с Наполеоном проходила в 1809 году, в «автомате» сидел один из лучших венгерских шахматистов того времени Альгайер.

По-настоящему играть в шахматы машину «обучили» лишь в 60-х годах нашего века. О том, как современные электронно-вычислительные машины играют в шахматы, вы можете прочитать в этом номере (см. с. 17).

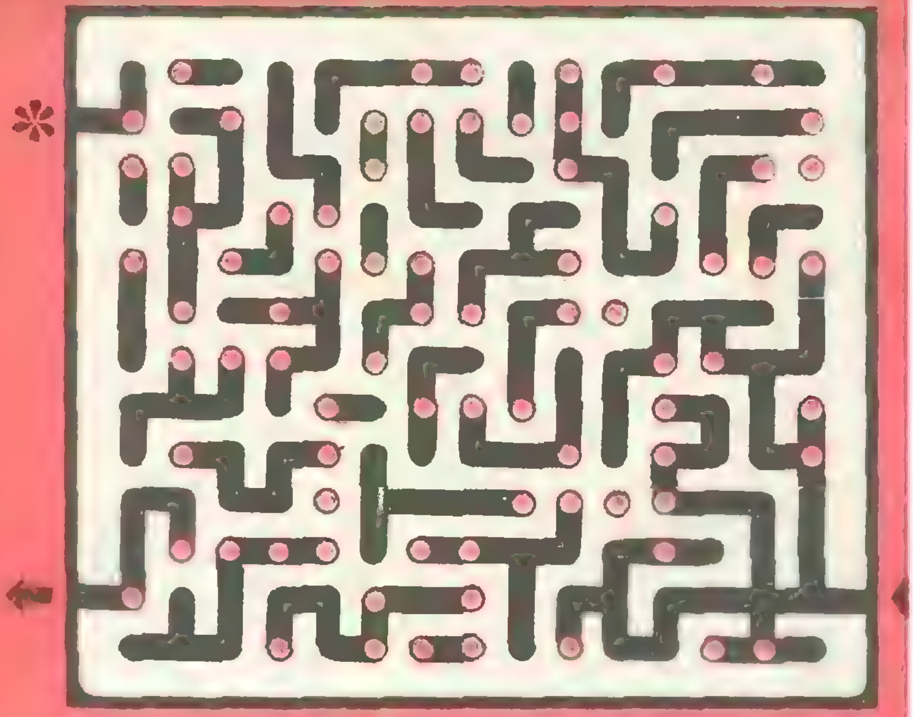
Цена 30 коп.
Индекс 70465

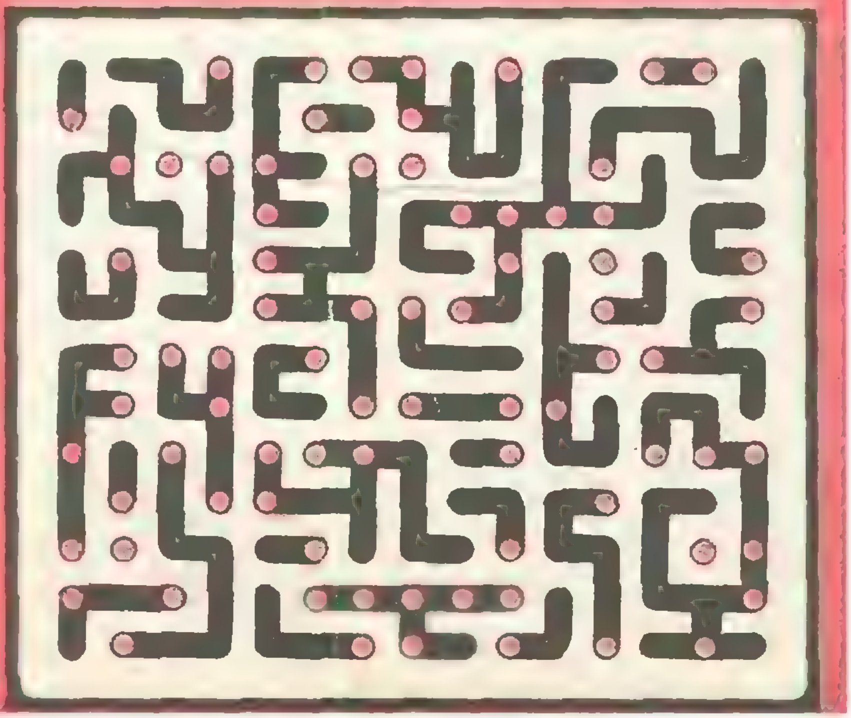
11

ШАРИК В ЛАБИРИНТЕ

Этот лабиринт — двухэтажный. В нем шарик может перемещаться и по первому этажу, и по второму, а с одного этажа на другой он попадает через отверстия, соединяющие этажи.

На приведенной схеме вверху изображен первый этаж, внизу — второй (зеркально отраженный). Черные линии на схемах — пути, по которым перемещается шарик; кружки — отверстия, соединяющие этажи. Лабиринт имеет 1 вход и 2 выхода (все они расположены на первом этаже). Труднее всего достичь выхода, отмеченного звездочкой. Попробуйте найти кратчайшие маршруты от входа до каждого выхода. Если вы захотите сделать этот лабиринт, то вам потребуется лист пенопласта размером 28×32×5 см. На верхней и нижней стороне листа паяльником (или нагретым стальным стержнем) на расстоянии 2 см друг от друга делаются борозды (на схемах они изображены черным цветом), а в местах, отмеченных на схемах кружками, пенопласт просверливается насквозь. На двух боковых гранях делаются 3 отверстия. Затем верх и низ куска заклеиваются прозрачными листами оргстекла или целофана. Теперь можно предложить друзьям запустить в одно отверстие шарик (или несколько шариков) от подшипника, провести его по всему лабиринту и вытряхнуть из другого отверстия. Можно сделать и так: загнать несколько шариков вглубь лабиринта и





НОМЕР
12

Основан в 1970 году.

Квант

1974
12

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,
главный художник
А. И. Климанов,
С. М. Козел,
зам. главного редактора
В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,
зам. главного редактора
М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбурд,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зав. редакцией
Л. В. Чернова.

В НОМЕРЕ:

2 *В. Г. Болтянский.* Бывает ли равномерное движение?
7 *М. И. Каганов, Г. Я. Любарский.* Электрон излучает фотоны
14 *А. Приятель.* Решение логических задач при помощи графов с цветными вершинами
23 *С. Г. Семенчинский.* Линзы, зеркала и Архимед
26 *А. А. Егоров.* Решетки и правильные многоугольники
34 *М. В. Донской.* Чемпионат мира среди шахматных программ

Математический кружок

39 *Н. Б. Васильев.* Вокруг формулы Пика

Задачник «Кванта»

44 Задачи М296—М300; Ф308—Ф312
46 Решения задач М256—М260; Ф269—Ф272

Практикум абитуриента

55 *М. Л. Крайзман.* Шар, касающийся ребер многогранника

Международные олимпиады школьников

60 *В. А. Скворцов, З. И. Моисеева.* XVI Международная математическая олимпиада
63 *Г. С. Тарасюк.* VII Международная физическая олимпиада

«Квант» для младших школьников

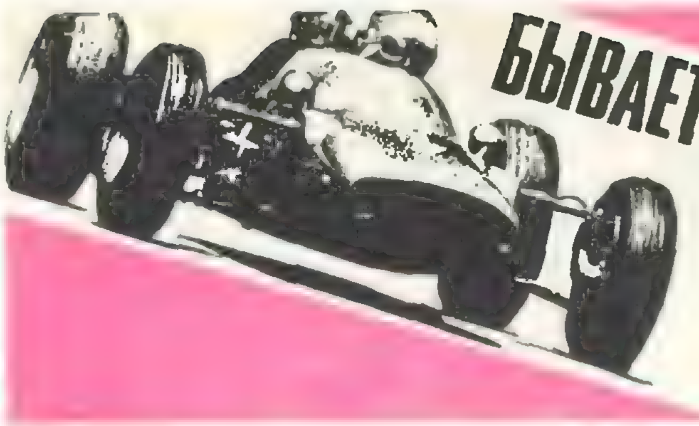
65 Задачи
66 *Х. Лозе.* Числовые последовательности
70 *Т. С. Петрова.* Как движутся молекулы?
72 **Ответы, указания, решения**
77 Напечатано в 1974 году

Уголок коллекционера

В. А. Рудов. Физики—члены Академии наук СССР на марках *(3 с. обл.)*
Смесь *(с. 6, 25, 76)*

На первой странице обложки вы видите рисунок «Относительность» голландского художника М. Эшера (1898—1972). В нем есть определенное математическое содержание. Постарайтесь понять, какое?

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1974 год*



В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

БЫВАЕТ ЛИ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ?

Материальная точка, на которую не действуют никакие силы, движется в инерциальной системе отсчета прямолинейно и равномерно.

Однако, «изолироваться» от воздействия сил не представляется возможным. В наших, земных, условиях на материальную точку действует сила притяжения Земли (сила тяжести), сила трения, сила сопротивления воздуха и другие. Кроме того, на многие устройства, созданные человеком (автомобиль, электропоезд, ракета), всегда действуют силы. Одним словом, от сил никуда не спрячешься.

Да, но почему автомобиль может двигаться равномерно? Читатель, конечно, скажет, что ничего удивительного в этом нет: все силы, действующие на автомобиль, уравновешиваются (то есть их равнодействующая равна нулю), а это эквивалентно тому, что на автомобиль вообще не действуют никакие силы, — вот он и движется равномерно.

И все же нечто удивительное в движении автомобиля есть. Шофер едет со скоростью 60 *км/ч*. Но вот он посмотрел на часы («А ведь я опаздываю!») и, после нескольких секунд разгона, поехал со скоростью 80 *км/ч*. И опять движение равномерное, то есть опять все силы уравновешиваются. Кто же уравновешивает силы? Шофер? И как ему удается их уравновесить и на скорости 60 *км/ч*, и на скорости 80 *км/ч*, и на иной скорости? Разве это не удивительно? Но если вы спросите обо всем этом шофера, он будет удивлен еще больше вас: ему и в голову не приходит, что надо что-то «уравновешивать»!

Попытаемся разобраться в этом вопросе с помощью математики. Заметим, что силу тяжести можно совсем не рассматривать: на горизонтальном участке эта сила уравновешивается силой реакции со стороны дороги. Кроме того, будем считать, что нет ветра, пренебрежем силой притяжения Луны и так далее. Тогда останутся только движущая сила F, связанная с действием двигателя и с трением ведущих колес о дорогу (эту силу будем считать постоянной на рассматриваемом участке движения), и сила сопротивления (рис. 1). Будем считать, что сила сопротивления имеет вид $-S(v)$, где $S(v)$ — возрастающая функция, обращающаяся в нуль при $v=0$ (знак минус показывает, что сила сопротивления направлена противоположно

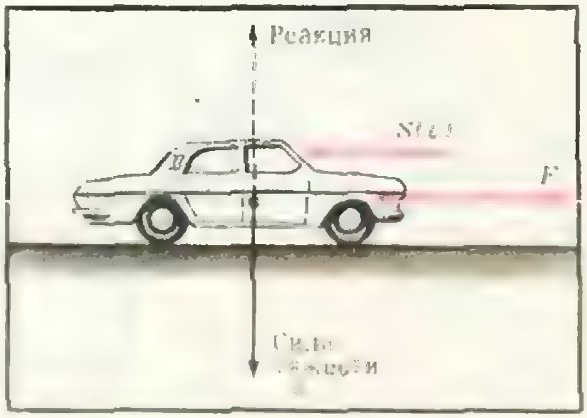


Рис. 1.

скорости). На основании второго закона Ньютона

$$ma = F - S(v). \qquad (*)$$

В силу возрастания функции $S(v)$ существует единственное значение скорости — обозначим его через V, — при котором правая часть соотношения (*) обращается в нуль. Это значение V легко определить по графику функции $S(v)$ (см. рис. 2).

Теорема 1. *Если в некоторый момент t_0 скорость движения v_0 меньше V, то в течение всего дальнейшего движения будет $v < V$. Если же $v_0 > V$, то все время будет $v > V$.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть, например, в некоторый момент $t_1 > t_0$ скорость стала больше, чем V. Тогда в промежуточный между t_0 и t_1 момент времени (может быть, и не один раз) скорость была равна V. Пусть t' — последний момент (между t_0 и t_1), когда $v = V$, так что в промежутке между t' и t_1 оставалось справедливым неравенство $v > V$. Согласно (*) отсюда следует, что при $t' < t < t_1$ ускорение a было *отрицательным* (так как $S(v) > F$ при $v > V$). Но это противоречит тому, что за рассматриваемый промежуток времени скорость изменилась от значения V до *большего* значения *).

Теорема 2. *Если $v_0 < V$, то с течением времени скорость движения увеличивается, все более приближаясь к значению V; если же $v_0 > V$, то скорость все время уменьшается, также приближаясь к V.*

Доказательство. Пусть в момент t_0 имеем $v_0 > V$. Как мы знаем из теоремы 1, в течение всего движения будет $v > V$. Из (*) следует, что ускорение будет отрицательным, и следовательно, скорость будет все время уменьшаться.

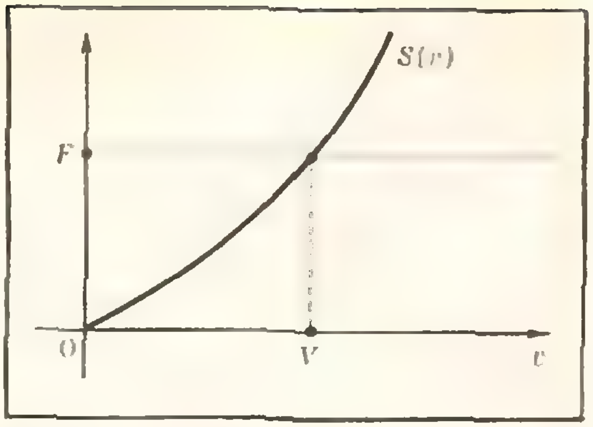


Рис. 2.

Докажем, что с течением времени разность $v - V$ станет меньше любой заранее выбранной как угодно малой величины h. Для этого рассмотрим момент времени

$$t_1 = t_0 + \frac{(v_0 - V)m}{S(V+h) - F}.$$

За время от t_0 до t_1 скорость уменьшилась от значения v_0 до значения, большего чем V, то есть уменьшилась менее чем на величину

$$v_0 - V = \frac{S(V+h) - F}{m}(t_1 - t_0). \qquad (**)$$

Отсюда следует, что в некоторый промежуточный момент времени t^* величина ускорения была меньше чем $\frac{1}{m}[S(V+h) - F]$. (Если бы это было не так, то за рассматриваемый промежуток времени скорость уменьшилась бы не менее чем на величину (**).)

Итак, пусть в момент t^* имеем

$$|a^*| < \frac{S(V+h) - F}{m}.$$

Тогда из (*) получаем

$$\frac{S(v^*) - F}{m} < \frac{S(V+h) - F}{m},$$

то есть $S(v^*) < S(V+h)$, и потому $v^* < V + h$. *Мы видим, что в момент t^* скорость отличается от V меньше чем на h.* Это справедливо и для всех последующих моментов, так как скорость v убывает, оставаясь больше V.

---

*) Мы доказали, что если $v_0 < V$, то скорость ни в какой момент не может принять значения, большего V. То, что она не может принять и значения, равного V, доказывается чуть сложнее; мы ту часть доказательства пропустим.

Теоремы 1 и 2 дают качественные законы изменения скорости, то есть показывают, как она будет меняться с течением времени. Пусть, например, автомобиль некоторое время едет под уклон, после чего выезжает на горизонтальный участок дороги (рис. 3). Двигаясь под уклон, автомобиль с отключенным двигателем разгоняется и выходит на горизонтальный участок с повышенной скоростью (большей V). Что же будет дальше? Согласно теореме 1 в течение всего дальнейшего движения скорость будет большей чем V, причем, в силу теоремы 2, она будет постепенно уменьшаться, все более приближаясь к значению V. Таким образом, движение автомобиля на горизонтальном участке не будет равномерным, и лишь в пределе (при $t \to \infty$) мы получим равномерное движение (со скоростью $v = V$).

Аналогичная картина наблюдается в случае, если водитель (двигаясь, скажем, со скоростью 60 *км/ч*) намеревается увеличить скорость. С этой целью он сильнее нажимает правой ногой на педаль акселератора, увеличивая тем самым приток горючего, а значит, и силу F, развиваемую двигателем. Новому значению силы F соответствует новое значение величины V, скажем, $V = 80$ *км/ч*. В момент нажатия на педаль автомобиль движется еще со скоростью 60 *км/ч*, то есть со скоростью, меньшей V. Согласно теореме 1 в течение всего дальнейшего движения скорость будет меньшей чем V, причем, в силу теоремы 2, она будет увеличиваться, все более приближаясь к значению $V = 80$ *км/ч*. Мы видим, что и в этом случае движение автомобиля не будет равномерным, и лишь в пределе (при $t \to \infty$) получится равномерное движение.

В обоих рассмотренных примерах автомобиль движется с *переменной* скоростью, которая постепенно приближается к предельному значению V. Таким образом, то, что мы обычно считаем «равномерным движением», представляет собой сложный динамический процесс. Силы, действующие на автомобиль, теоретически говоря, не уравновешивают друг друга (движение происходит с переменной скоростью, и потому ускорение не равно нулю). И лишь в пределе (при $t \to \infty$) скорость приближается к постоянному значению $v = V$, ускорение стремится к нулю, а действующие силы все более точно уравновешивают друг друга (то есть равнодействующая стремится к нулю). И это «постепенное уравновешивание» вовсе не связано с действиями шофера (он ведь лишь поддерживает постоянное значение силы F), а вытекает из самой специфики задачи, то есть, математически говоря, является следствием уравнения (*). Практически же скорость автомобиля становится то меньше, то больше V (вследствие порывов ветра, увеличения или уменьшения шероховатости дороги и т. п.). Но она упрямо приближается к предельному значению V, пока

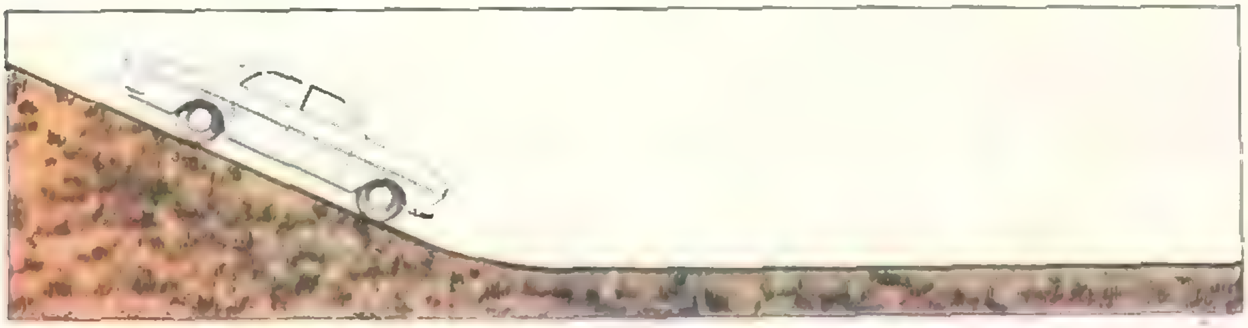


Рис. 3.

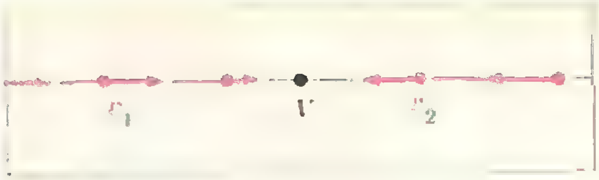


Рис. 4.

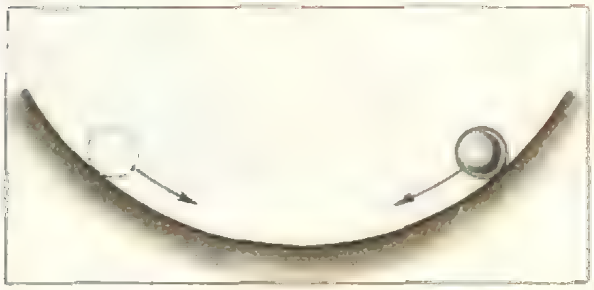


Рис. 5.

следующий толчок не сделает ее несколько меньше или больше; и вновь скорость будет приближаться к значению V; затем опять толчок, опять приближение к V ... Это и есть «равномерное движение». И возможно оно *только* потому, что предельное значение скорости (то есть V) *устойчиво*: в какую бы сторону ни отклонилась скорость от V, она обязательно будет *приближаться* к V.

Устойчивость значения V можно наглядно пояснить построением *фазовой диаграммы* (или, как еще говорят, «фазового портрета») уравнения (*) (см. рис. 4). Отметим точку V на числовой оси. Если в некоторый момент фактическая скорость v оказывается меньшей чем V (точка v_1 на диаграмме), то из (*) видно, что ускорение a будет положительным, то есть скорость будет возрастать. Это отмечено на диаграмме стрелкой, смотрящей вправо. Если же в некоторый момент скорость больше V (точка v_2 на диаграмме), то ускорение a отрицательно, то есть скорость начнет убывать (стрелка направлена влево).

Фазовая диаграмма показывает, что скорости «некуда деваться», кроме как приближаться к значению V. Это напоминает поведение шарика в ямке (рис. 5): где бы он ни находился, его «тянет» в самую нижнюю точку — в устойчивое положение равновесия. По аналогии точку V на рассматриваемой фазовой диаграмме также называют *устойчивым положением равновесия*.

Более сложный пример устойчивого положения равновесия дает подключение батареи постоянного тока к параллельно соединенным катушке и конденсатору (рис. 6). Обозначая э. д. с. батареи, ее внутреннее сопротивление и активное сопротивление катушки через E, r и R соответственно, легко найдем (по закону Ома), что в такой схеме через катушку может протекать постоянный ток $I = \frac{E}{R+r}$, причем, разность потенциалов на обкладках конденсатора будет равна $U = \frac{ER}{R+r}$. Однако в действительности процесс будет более сложным: ток I и напряжение U будут *переменными*, они будут со-

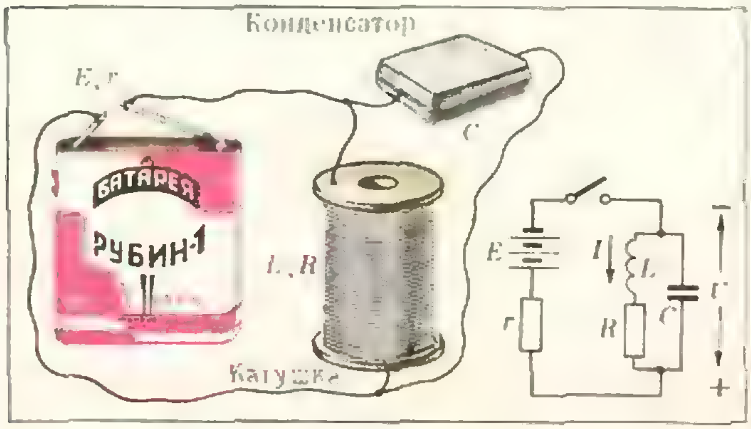


Рис. 6.

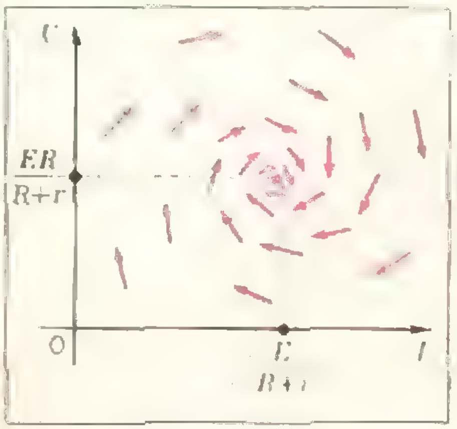


Рис. 7.

вершать «затухающие колебания» и лишь в пределе (при $t \to \infty$) будут приближаться к указанным значениям. Фазовый портрет этой системы надо будет изображать уже на координатной плоскости (поскольку вместо одной «фазовой координаты» и здесь их будет уже две: I, U (см. рис. 7)). Точка, соответствующая указанному выше постоянному току, будет здесь *устойчивым положением равновесия*; стрелки, показывающие тенденции изменения величин I, U, будут здесь таковы, что все линии, идущие вдоль стрелок, будут *приближаться к этой точке*.

Мы видим, что «равномерное» движение автомобиля, «постоянный» ток в электрической схеме и т. п. представляют собой сложные динамические процессы, происходящие вблизи устойчивого положения равновесия. Режимы «устойчивой работы» многих машин и технических устройств описываются математически в виде устойчивых положений равновесия на фазовых диаграммах. Устойчивые положения равновесия изучаются в *теории устойчивости*, являющейся важным разделом современной математики. Основы этой теории были заложены выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым. В дальнейшее ее развитие важный вклад внесли многие советские ученые.

Про кита и актинию

1. Небольшой участок нервной сети актинии можно упрощенно представить себе как прямоугольник из шести параллельных нервных волокон, соединенных пятью поперечными. Нервный импульс может выходить из любого узла по любому волокну, за исключением того, по которому он в этот узел попал. Какова кратчайшая длина пути нервного импульса от одной вершины прямоугольника до противоположной? Сколько различных путей имеют эту минимальную длину?

2. Загарпуненный кит способен в течение нескольких часов тащить за собой судно с двигателем, включенным на «полный назад». Мощность кита можно оценить примерно в 450 л. с. Сколько жира израсходует кит за 3 часа такой работы, если теплотворная способность жира равна 10 *ккал/г* и при этом лишь $^1/_4$ химической энергии обращается в механическую работу?

М. П. Головей

М. И. КАГАНОВ, Г. Я. ЛЮБАРСКИЙ

ЭЛЕКТРОН ИЗЛУЧАЕТ ФОТОНЫ

Классическая теория излучения

Существование в природе электромагнитного поля — давно и хорошо установленный факт. Заряженная частица, помещенная в электромагнитное поле, начинает двигаться ускоренно. Следовательно, она испытывает воздействие со стороны электромагнитного поля. Поле, ускоряя заряд, производит над ним работу, и само теряет некоторое количество энергии — поле слабеет, то есть действует на единичный заряд с меньшей силой. Наоборот, если поле замедляет заряд, оно усиливается. Иными словами, к первоначальному полю добавляется новое, созданное зарядом. Ослабление поля тоже можно рассматривать как добавление нового, созданного зарядом поля, но направление дополнительного поля противоположно направлению первоначального.

Эксперименты показали, что поле, создаваемое зарядом, зависит от величины заряда и от характера его движения. Причина, вызвавшая движение заряда, совершенно несущественна. Для вычисления поля, создаваемого движущимся зарядом, нужно решить систему дифференциальных уравнений (это и есть знаменитые уравнения Максвелла).

Для нас сейчас важен сам факт: движущийся с ускорением заряд может изменять энергию электромагнитного поля. Это явление называется излучением. Отметим, что хорошо известный закон Кулона, в силу которого поле неподвижного заряда может быть раз и навсегда подсчитано в любой точке пространства, показывает, что неподвижный заряд не излучает. В самом деле, поле такого заряда не изменяется с течением времени, то есть не изменяется энергия поля.

Проведем мысленный эксперимент. Возьмем неподвижный заряд. Заставим его описать окружность, вернуться в исходную точку и остановиться. Какой будет картина электромагнитного поля? На первом этапе, когда заряд неподвижен, он создает обычное электростатическое поле. В течение второго этапа создается некоторое дополнительное поле. Исчезнет ли оно после того, как заряд остановится? Нет, не исчезнет! Но позвольте, ведь вокруг неподвижного заряда поле должно быть электростатическим. Неужели это неверно?

Верно, но не совсем. Созданное на втором этапе дополнительное электромагнитное поле начнет деформироваться, так что спустя t секунд после остановки заряда внутри шара радиуса ct (c — скорость света) (рис. 1) установится кулоновское поле. Вне этого шара поле будет существенно отличаться от кулоновского. Итак, поле излучения быстро удаляется от того места, где оно было создано, уступая кулоновскому полю все новые и новые области пространства. Подчеркнем, что это свойство — «убегать» со скоростью света от места зарождения (и уносить с собой всю полученную от движущихся зарядов энергию) — общее свойство излучения.

Отметим одно важное обстоятельство. Так как электромагнитное поле излучения уносит с собой всю полученную от движущегося заряда энергию, то плотность энергии такого поля, то есть энергия, приходящаяся на единицу объема, уменьшается обратно пропорционально объему шарового слоя, в котором оно находится. Этот объем пропорционален квадрату радиуса *). Поэтому плотность энергии поля излучения обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника излучения (например, от антенны).

Плотность энергии электростатического поля пропорциональна квадрату его напряженности **). В свою очередь напряженность электростатического поля обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника. Значит, плотность энергии электростатического поля убывает как четвертая степень расстояния, то есть гораздо быстрее, чем плотность энергии поля излучения. Этим и объясняется, почему для радиосвязи используются поля излучения, а не электростатические поля.

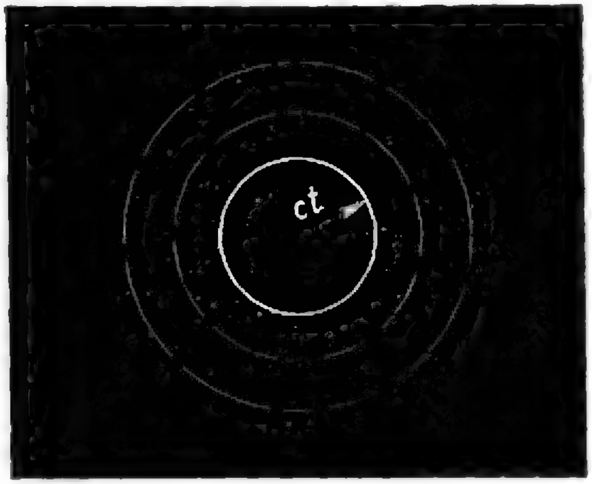


Рис. 1.

Какие же волны излучает заряженная частица, движущаяся с ускорением? Частота излученной волны зависит от характера движения частицы. Если частица совершает гармонические колебания с частотой ν_0, то и частота излученных волн будет равна ν_0.

Классическая электродинамика (уравнения Максвелла) дает возможность вычислить интенсивность излучения, то есть количество энергии, излученной за единицу времени. Так, например, интенсивность излучения движущегося с ускорением a заряда e равна

$$I = \frac{2e^2a^2}{3c^3}. \qquad (1)$$

В системе СГСЭ интенсивность излучения можно вычислить с точностью до коэффициента 2/3, если знать, от чего она зависит. В этой системе все единицы выражаются через три основные: длины, массы и времени. (В системе СИ основных единиц четыре — добавляется еще единица силы тока. Поэтому электрические единицы не выражаются через механические, и такое рассмотрение провести нельзя.)

Величина интенсивности излучения определяется зарядом e, имеющим размерность $(г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot с^{-1})$, его ускорением a $(см \cdot с^{-2})$ и скоростью света c $(см \cdot с^{-1})$. Из этих величин можно построить только одну комбинацию, имеющую размерность мощности $(эрг \cdot с^{-1})$, которая приводит к выражению (1). Попробуйте проверить это.

Формула (1) показывает, что заряд, движущийся с постоянной скоростью ($a = 0$), не излучает. Этот же вывод можно получить и более простым рассуждением. Покоящаяся частица не может излучить электромагнитную волну, так как ей неоткуда взять для этого энергию. Следовательно, и частица, летящая с постоянной скоростью v в пустоте, тоже не может излучать — ведь по принципу относительности Галилея всег-

---

*) Действительно, объем шарового слоя радиуса R и толщины ΔR равен $S\Delta R = 4\pi R^2 \Delta R$ (S — площадь поверхности шара), поскольку ΔR мало по сравнению с R.

**) См. учебное пособие «Физика-9», § 86.

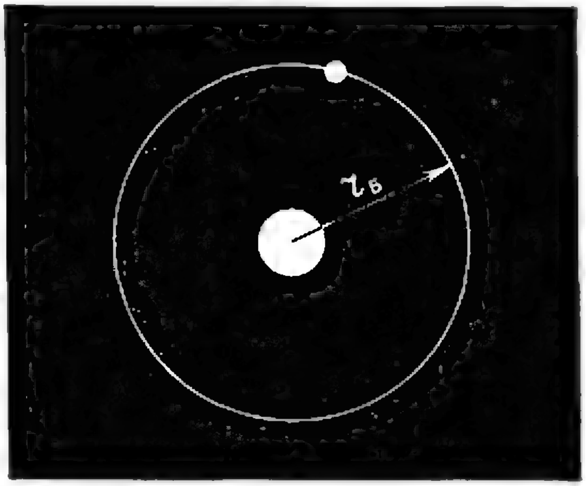


Рис. 2.

да можно выбрать эквивалентную систему отсчета, в которой эта частица покоится.

Есть еще один важный случай, когда движущиеся заряды не излучают. Рассмотрим постоянный ток, текущий по какому-либо криволинейному контуру. Из эксперимента и из теории хорошо известно, что такой ток создает постоянное магнитное поле, но не излучает. Но ведь всякий ток есть движение заряженных частиц. Каждая из этих частиц, как мы знаем, создает поле излучения. Почему же эти заряды, взятые вместе, не излучают? Оказывается, поля излучения, создаваемые разными частицами, компенсируют друг друга с такой точностью, что в результате остается чисто статическое поле. Можно считать, что в этом случае заряженные частицы движутся с одинаковой постоянной средней скоростью, и излучение отсутствует.

С помощью уравнений Максвелла можно установить общий факт: если расположение токов и зарядов в пространстве не зависит от времени, то излучение отсутствует.

Планетарная модель атома и излучение

Временно игнорируя квантовую природу атомных частиц, опишем языком классической физики простейший атом — атом водорода, состоящий из одного протона и одного электрона.

Электрон вращается вокруг протона по окружности радиуса $r_Б$*) (рис. 2), так что сила, вызывающая центростремительное ускорение, $mv^2/r_Б$, равна кулоновской силе притяжения $e^2/r_Б^2$ (m — масса электрона):

$$\frac{mv^2}{r_Б} = \frac{e^2}{r_Б^2}.$$

Отсюда можно выразить скорость вращения электрона

$$v^2 = \frac{e^2}{mr_Б}. \qquad (2)$$

Скорость электрона тем больше, чем меньше расстояние между ним и протоном.

Полная энергия электрона в атоме водорода — это сумма его кинетической энергии $E_{кин} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{2r_Б}$ и потенциальной $E_{пот} = -e^2/r_Б$:

$$E = \frac{e^2}{2r_Б} - \frac{e^2}{r_Б} = -\frac{e^2}{2r_Б}. \qquad (3)$$

Классическая физика не может объяснить тот факт, что все атомы водорода имеют один и тот же размер. Мы пока просто примем, считая это экспериментальным фактом, что у всех атомов водорода $r_Б \approx 10^{-10}$ *м*.

Центростремительное ускорение электрона при движении по окружности равно

$$a = \frac{v^2}{r_Б} = \frac{e^2}{mr_Б^2}.$$

Но ведь если электрон движется с ускорением, он излучает. Какова интенсивность этого излучения, мала она или велика? Оценим ее, подставив в формулу (1) значение ускорения a:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{e^2}{mr_Б^2}\right)^2 = \frac{2e^6}{3c^3m^2r_Б^4}.$$

Хотя все величины, входящие в эту

---

*) $r_Б$ — радиус так называемой боровской орбиты электрона.

формулу, известны, и мы можем вычислить, какое количество энергии в секунду излучает электрон, ответ мало что скажет, ведь в мире атомов теряются обычные представления. Поступим иначе. Вычислим, какую энергию ΔE теряет электрон за время одного оборота вокруг ядра — за один период $T = \frac{2\pi r_Б}{v}$:

$$\Delta E = I\frac{2\pi r_Б}{v} = \frac{4\pi}{3}\frac{e^5}{r_Б^{5/2}m^{3/2}c^3}.$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\Delta E = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{r_Б}\frac{e^2}{mc^2}\right)^{3/2}\frac{e^2}{2r_Б}. \quad (4)$$

В этой формуле член $\frac{e^2}{2r_Б}$ $E_а$ — характерная «атомная» энергия электрона в атоме. Следовательно, все остальные величины, входящие в формулу (4), должны образовывать безразмерную комбинацию. Действительно, величина e^2/mc^2 имеет размерность длины. Ее называют классическим радиусом электрона и обозначают r_e:

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2{,}5\cdot 10^{-15}\ м.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta E}{E_а} \approx 10^{-6}.$$

Итак, при каждом обороте электрон теряет ничтожную часть своей энергии — одну десятимиллионную долю. Посмотрим на эту величину с другой точки зрения.

Попробуем оценить, сколько времени «проживет» атом, если электрон будет излучать электромагнитную энергию даже такими малыми порциями. За один оборот энергия электрона уменьшится на величину $\Delta E \approx 10^{-6}E_а$, и при этом расстояние от электрона до ядра тоже уменьшится. А приблизительно за 10^6 оборотов электрон вовсе свалится на ядро! Но один оборот электрон совершает за

$$\frac{2\pi r_Б}{v} = \frac{2\pi r_Б}{e}(mr_Б)^{1/2} \approx 10^{-16}\ с.$$

Следовательно, если бы законы классической механики и классической электродинамики были справедливы в мире атомов и электронов, атомы могли бы просуществовать не более 10^{-10} с.

Это, пожалуй, одно из наиболее катастрофических расхождений между классической теорией и экспериментом: «вечные» атомы оказались предельно неустойчивыми.

Существует еще одно противоречие между планетарной моделью атома и экспериментом. Эксперимент показывает, что атомы излучают (правда, для этого надо их предварительно возбудить, то есть передать им некоторое количество энергии) электромагнитные волны строго определенных частот. Набор этих частот является своеобразной визитной карточкой атома (на этом основан спектральный анализ).

С точки зрения планетарной модели возбужденный атом отличается от невозбужденного тем, что его электрон имеет несколько бо́льшую энергию и, следовательно, больший радиус орбиты $r_1 > r_Б$. В процессе излучения расстояние от электрона до ядра постепенно уменьшается до величины $r_Б$, при этом непрерывно изменяется (увеличивается) частота обращения. Следовательно, спектр излученных частот должен быть непрерывным от начальной частоты

$$\frac{v_1}{2\pi r_1} = \left(\frac{e^2}{mr_1}\right)^{1/2}\frac{1}{2\pi r_1}$$

до максимальной частоты

$$\frac{v}{2\pi r_Б} = \left(\frac{e^2}{mr_Б}\right)^{1/2}\frac{1}{2\pi r_Б}.$$

Объяснить истинный дискретный спектр излучения атомов классическая планетарная модель не может. Для объяснения всего этого необходима квантовая механика.

Электрон излучает фотоны

Как же квантовая механика объясняет, почему электрон не падает на ядро?

Прежде всего следует подчеркнуть, что для объяснения свойств микромира пришлось создать принципиально новую науку: подправить классическую механику так, чтобы она объясняла свойства атомов и молекул, оказалось невозможно. Основная новизна квантовой механики — учет единства волновых и корпускулярных свойств микрочастиц.

Согласно строгим выводам квантовой механики энергия электрона может принимать не любые, а лишь дискретные значения. Значения энергии в атоме водорода

$$E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2}\frac{1}{n^2},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Среди всех состояний электрона в атоме водорода есть одно особое состояние — основное состояние с наименьшей энергией. Ему соответствует $n = 1$. Электрон не может иметь энергию, меньшую $E_1 = -2\pi^2 me^4/h^2$. Этот запрет связан с волновыми свойствами электрона. Он настолько строг, что обеспечивает бесконечное время жизни атома.

Итак, электрон в основном состоянии не излучает электромагнитных волн (фотонов) *). Если же электрон находится в одном из возбужденных состояний с $n > 1$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, он может перейти в состояние с более низкой энергией, излучив электромагнитную волну. Как и всякий процесс в природе, процесс излучения подчиняется закону сохранения энергии. Его легко записать, если воспользоваться соотношением, связывающим частоту электромагнитной волны ν с энергией фотона

$$E_n - E_n' = h\nu, \qquad (5)$$

где $n, n' = 1, 2, 3, \ldots; \; n > n'$.

Отсюда

$$\nu = \frac{E_n - E_{n'}}{h}.$$

Для водорода

$$\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) определяют спектр (набор) частот, которые может излучить или поглотить атом водорода.

Квантовая механика позволяет определить не только спектр частот излучения и поглощения, но и интенсивность излучения.

Формулы квантовой механики обладают одной интересной особенностью. Они переходят в формулы классической физики, когда «квантовость» пренебрежимо мала, то есть когда движение почти классическое. (Это важное обстоятельство получило даже специальное название — принцип соответствия.) В рассматриваемом нами случае малость квантовых эффектов проявляется в том, что при значениях n, стремящихся к бесконечности, $\Delta E = E_n - E_{n-1}$ стремится к нулю. Ведь в классической физике энергия может иметь любое значение! Мы привели только один пример, но любая формула квантовой механики допускает проверку принципом соответствия. Лучше сказать иначе: любая формула классической физики есть предельное значение квантовой формулы. Квантовая механика не отменила классическую, а указала ей ее место (и весьма почетное место). Классическая механика справедлива тогда, когда малы квантовые эффекты, и справедлива с точностью, которую допускает квантовая механика.

Излучение частицы, движущейся с постоянной скоростью

До сих пор мы говорили, что излучает только частица, движущаяся с ускорением. Но у этого правила есть одно исключение. Электрон, движущийся с постоянной скоростью, но не в пустоте, а в какой-либо среде, излучает свет. Этот эффект называется излучением Вавилова-Черенкова.

---

*) Не только атом водорода, но и любой другой атом не излучает энергии, если он находится в основном состоянии.

Слова «черенковское излучение», «излучение Черенкова», «эффект Черенкова», наверное, известны многим. И многие знают, что такое излучение возникает, когда заряженная частица движется со скоростью v, большей скорости света в среде, окружающей частицу. Сверхсветовое излучение было открыто П. А. Черенковым — учеником С. И. Вавилова, а объяснили его физики-теоретики И. Е. Тамм и И. М. Франк. За эту работу Черенкову, Тамму и Франку была присуждена Нобелевская премия 1958 года по физике.

Скорость света в среде с показателем преломления $\sqrt{\varepsilon}$ (ε — диэлектрическая проницаемость среды) равна $u = c/\sqrt{\varepsilon}$. Поскольку $\varepsilon > 1$, скорость света в среде u меньше скорости света в вакууме c. Это позволяет частице (например, электрону) лететь в среде со «сверхсветовой» скоростью v:

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = u < v < c.$$

Условие возникновения черенковского излучения

$$v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (7)$$

замечательно тем, что не содержит постоянной Планка. Это означает (по принципу соответствия), что оно может быть получено средствами как квантовой, так и классической физики. Интересно отметить, что квантовое и классическое описания эффекта Черенкова приводят практически к одинаковым результатам. Но мы ограничимся только квантовой картиной, так как для полной классической теории явления Черенкова необходим сложный математический аппарат.

При этом нам понадобятся дополнительные сведения о фотонах.

1. Фотон обладает не только определенной энергией E, но и определенным импульсом p. Направление импульса может быть любым, а величина определяется энергией:

$$p = \frac{1}{c}E.$$

2. Электромагнитное поле в среде с диэлектрической постоянной ε также состоит из фотонов. Фотоны в диэлектрике отличаются от фотонов в пустоте тем, что связь между их энергией и импульсом содержит диэлектрическую постоянную ε:

$$p = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}E = \frac{1}{u}E,$$

$$E = p\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Связь между энергией и частотой у фотонов в среде такая же, как и у фотонов в пустоте: $E = h\nu$.

3. Любое взаимодействие фотонов с другими частицами подчиняется закону сохранения энергии и закону сохранения импульса.

Теперь рассмотрим электрон, движущийся в среде с постоянной скоростью v. Пусть в некоторый момент времени он излучает фотон частоты ν с импульсом p. Обозначим импульс электрона до излучения P, а после — P'. Тогда энергия электрона до излучения $E = P^2/2m$, а после излучения — $E' = P'^2/2m$. По закону сохранения импульса $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{p}$, а закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{P^2}{2m} = \frac{P'^2}{2m} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}p.$$

Проверим, всегда ли может выполняться это равенство. Введем угол θ между импульсом частицы до излучения и импульсом фотона. Косинус этого угла найдем из закона сохранения импульса, записанного в скалярной форме:

$$P'^2 = P^2 + p^2 - 2Pp\cos\theta$$

(мы воспользовались теоремой косинусов). Отсюда

$$\cos\theta = \frac{P^2 - P'^2 + p^2}{2Pp} = \frac{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1 + \frac{p}{2mc}\sqrt{\varepsilon}\right)}{v}, \quad (8)$$

где v — скорость излучающей частицы. Вспомним, что $p = \frac{h\nu}{c}\sqrt{\varepsilon}$. Следовательно, $\frac{p\sqrt{\varepsilon}}{2mc} = \frac{h\nu\varepsilon}{2mc^2}$.

Это — единственная безразмерная комбинация параметров в формуле (8), куда входит постоянная Планка. Она дает возможность оценить степень квантовости явления. Для видимого света

$$\nu \approx 10^{14} c^{-1}, \ \varepsilon \geq 1$$

и

$$\frac{\varepsilon h\nu}{2mc^2} \approx 10^{-7}.$$

Отсюда видно, что мы, не делая большой ошибки, можем просто пренебречь вторым слагаемым в числителе формулы (8). Поэтому и классическое рассмотрение приводит к правильному результату.

Так как $\cos\theta$ должен быть меньше единицы, мы можем вывести условие (7): *чтобы частица, летящая с постоянной скоростью, могла излучать световые волны, ее скорость должна превышать скорость света в среде.*

Приведенное рассуждение объясняет, почему электрон со скоростью $v < c/\sqrt{\varepsilon}$ не излучает и почему конус возможных направлений излучения (в случае $v > c\sqrt{\varepsilon}$) определяется формулой (8). Вычисление интенсивности излучения Черенкова значительно сложнее, и мы не будем им заниматься.

Классический смысл условия (7) очень прост: частица «убегает» от созданного ею электромагнитного поля, которое в виде волн распространяется самостоятельно.

Приближенное (с классической точки зрения — точное) равенство

$$\cos\theta = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon}} \quad (9)$$

показывает направление излученных волн.

Подумаем еще раз, на чем основан вывод формулы (9) и условие черенковского излучения (7). Во-первых, на законах сохранения энергии и импульса в процессе излучения; во-вторых, на том, что энергия фотона и величина его импульса связаны линейной зависимостью, и, наконец, в-третьих, на малости квантовой поправки. Если бы речь шла не об электромагнитной волне, а о звуковой, то все эти «во-первых», «во-вторых» и «в-третьих» были бы в точности выполнены. Для звуковой волны квант ее энергии — фонон и величина его импульса связаны линейной зависимостью

$$p = \frac{1}{s}E,$$

где s — скорость звука. Но так как скорость звука значительно меньше скорости света, то условие черенковского излучения $v > s$ может быть выполнено даже при движении макроскопических тел. Один из примеров черенковского излучения звука — щелчок бича, кончик которого в умелых руках движется со сверхзвуковой скоростью.

Черенковское излучение света нашло важное применение в экспериментальной физике. Но это — отдельная большая и интересная тема. Для нас, пожалуй, важнее то, что черенковское излучение — очень общее явление. Всегда, когда частица движется со скоростью, превышающей скорость волн в данной среде, она излучает.

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ С ЦВЕТНЫМИ ВЕРШИНАМИ

А. ПРИЯТЕЛЬ

В этой статье используются некоторые простейшие логические операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация. Многие из вас знают о них из школы — кто из факультативных курсов математики, а кто из самых обычных. Да и в «Кванте» про них рассказывалось — см., например, «Квант» № 4 за 1971 год.

Для тех же, кто не знает определений логических операций и не имеет других номеров «Кванта», мы приведем здесь лишь минимум сведений, который нужен для чтения и понимания статьи А. Приятеля.

Напомним, что *высказывание* — это предложение, про которое имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

Из различных высказываний с помощью *логических операций* можно образовывать новые высказывания. Вопрос об истинности или ложности получающихся высказываний зависит, конечно, от того, каковы (истинны или ложны) были исходные высказывания, ну и, конечно, от самой логической операции. А именно:

1) *Отрицание* истинного высказывания ложно, а отрицание ложного — истинно. Если обозначить исходное высказывание буквой A, а операцию отрицания — знаком «—» ($\overline{A}$ читается «не A»), то наше определение можно задать такой таблицей:

A	$\overline{A}$
и	л
л	и

(и — сокращенное «истина», л — «ложь»).

2) *Конъюнкция* двух истинных высказываний A и B ($A \wedge B$) читается как «A и B») истинна, а если хоть одно из них ложно, то и конъюнкция ложна:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

3) *Дизъюнкция* двух высказываний (обозначение $A \vee B$ читается как «A или B») истинна, если истинно хотя бы одно из них, и ложна, если оба они ложны:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

4) И, наконец, *импликация* высказываний A и B ($A \Rightarrow B$ читается как «A влечет B», «Из A следует B» или «Если A, то B») ложна, если посылка A истинна, а заключение B ложно; во всех же остальных случаях импликация истинна:

A	B	$A \Rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

В «Кванте» № 8 за 1973 год была помещена статья Л. Ю. Березиной «О графах с цветными ребрами», посвященная решению логических задач. Не менее интересен метод решения логических задач с помощью графов с цветными вершинами, позволяющий наглядно решать задачи, которые часто называют «логическими задачами на Джонсона и Смита» *). Этот метод состоит в изображении структуры задачи с помощью некоторого графа. Вершины такого графа будут обозначать *базисные высказывания* задачи; а ребра графа—импликации или конъюнкции между базисными высказываниями. Цвет вершины обозначает истинность или ложность изображаемого ею высказывания. В определении цвета вершин графа и заключается описываемый метод. Всюду в дальнейшем процесс определения цвета вершин мы будем называть *раскрашиванием* графа. Цвет вершины не всегда будет определяться однозначно; возможные варианты будем называть *вариантами раскрашивания*.

Для изображения структуры задачи с помощью графа условимся о символике, позволяющей переходить с языка логики на язык графов:

Таблица 1

Логическое понятие	Элемент графа
Высказывание	Вершина графа
Истинное высказывание	Вершина красного цвета
Ложное высказывание	Вершина черного цвета
Импликация $X \Rightarrow Y$	Ориентированное ребро $\overrightarrow{XY}$ графа

Раскрашивание графов производится по правилам алгебры логики, которые переводятся на язык графов с помощью следующей символики:

Таблица 2

Правило алгебры логики	Правило раскрашивания графа
1. Каждое высказывание имеет одно и только одно из двух значений истинности: «ложно», «истинно».	1. Каждая вершина графа является либо черной, либо красной.
2. Если импликация $X \Rightarrow Y$ истинна и посылка X истинна, то и заключение Y истинно.	2. Если ребро $\overrightarrow{XY}$ ориентированно от вершины X к вершине Y и вершина X—красная, то и вершина Y—красная.
3. Если импликация $X \Rightarrow Y$ истинна, а заключение Y ложно, то и посылка X ложна.	3. Если ребро $\overrightarrow{XY}$ ориентированно от вершины X к вершине Y и Y—черная, то и X—черная.

---

*) Можно, конечно, говорить и о «задачах про Воробьева и Грачева» — пародия на них всем памятна по «Золотому теленку».

Кроме этих правил 1—3 для каждой конкретной задачи можно ввести дополнительные правила (в зависимости от структуры используемого графа).

Продемонстрируем метод на примерах решения конкретных задач.

Задача 1

*Для полярной экспедиции из восьми претендентов A, B, C, D, E, F, G и H *) надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, врача, механика и радиста. Обязанности биолога могут выполнять E и G, гидролога — B и F, синоптика — F и G, врача — A и D, радиста — C и D, механика — C и H. Хотя некоторые из претендентов совмещают две специальности, в экспедиции каждому понадобится выполнять только одну обязанность.*

Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не хочет ехать без B, D — без H и без C, C не хочет ехать вместе с G, а A не хочет ехать вместе с B?

Базисное множество высказываний задачи состоит из восьми высказываний вида «A, B, C, . . . зачислен в состав экспедиции» (будем обозначать их соответственно буквами A, B, C, . . .).

Для облегчения восприятия условия задачи изобразим специализацию претендентов с помощью так называемого двудольного графа, то есть графа, вершины которого распадаются на два класса (две «доли») так, что вершины из одного и того же класса не связаны между собой (не соединены ребрами). Двудольные графы удобно чертить, располагая вершины одной «доли» в строку, а вершины другой — в строку, параллельную первой (рис. 1).

На рисунке 1 мы изобразили претендентов вершинами A, B, . . ., H первой доли, а специальности — вершинами *б*, *в*, . . ., *с* («*б*» — биолог, «*в*» — врач и т. д.) второй доли. Вершину первой доли свяжем с вершинами второй доли, если соответствующий претендент владеет соответствующей специальностью. По такому графу легко определить, какие два претендента владеют одной специальностью.

Из двух претендентов X и Y, владеющих одной специальносотью, над взять хотя бы одного, то есть верна дизъюнкция вида $X \vee Y$, равносильная импликации $\overline{X} \Rightarrow Y$ **). На основании этого можно записать

$$(\overline{E} \Rightarrow G) \wedge (\overline{B} \Rightarrow F) \wedge (\overline{F} \Rightarrow G) \wedge (\overline{A} \Rightarrow D) \wedge (\overline{C} \Rightarrow D) \wedge (\overline{C} \Rightarrow H).$$

Кроме того, если X не хочет ехать без Y, то верна импликация $\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}$, а если X не хочет ехать вместе с Y,— импликация $Y \Rightarrow \overline{X}$. На основании этого имеем

$$(\overline{B} \Rightarrow \overline{F}) \wedge (\overline{H} \Rightarrow \overline{D}) \wedge (\overline{C} \Rightarrow \overline{D}) \wedge (G \Rightarrow \overline{C}) \wedge (B \Rightarrow \overline{A}).$$

Итак, условие задачи можно представить в виде конъюнкции импликаций:

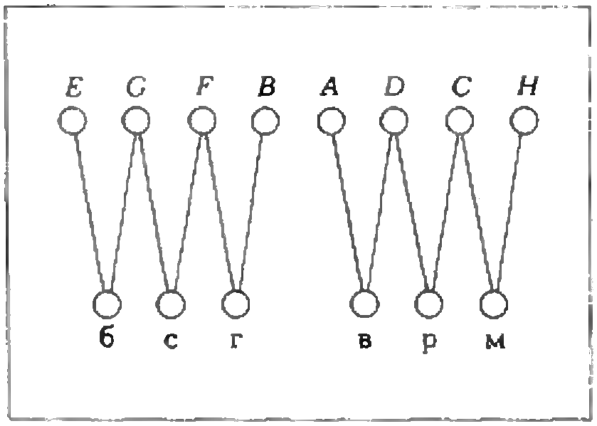


Рис. 1.

---

*) Разумеется, это как раз их фамилии: Джонсон, Смит, Браун, ... (Воробьев, Грачев, Дроздов и т. д.).

**) Или $\overline{Y} \Rightarrow X$ — безразлично.

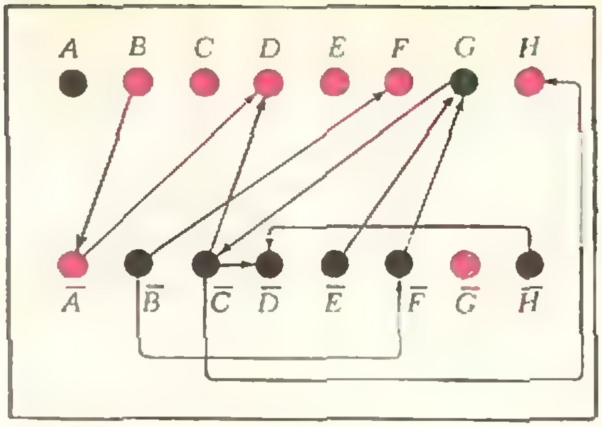


Рис. 2.

$$(\bar{E} \Rightarrow G) \wedge (\bar{B} \Rightarrow F) \wedge (\bar{F} \Rightarrow G) \wedge (\bar{A} \Rightarrow D) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D \wedge (\bar{C} \Rightarrow H) \wedge (\bar{B} \Rightarrow \bar{F}) \wedge \wedge (\bar{H} \Rightarrow \bar{D}) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \bar{D}) \wedge (G \Rightarrow \bar{C}) \wedge \wedge (B \Rightarrow \bar{A}). \qquad (1)$$

Представим структуру задачи в виде графа. При этом вершины, изображающие не отрицаемые высказывания вида X, расположим на одной прямой, а вершины вида $\bar{X}$ — на параллельной ей прямой так, чтобы A и $\bar{A}$, B и $\bar{B}$ и т. д. были расположены в вертикальных столбцах. Содержащиеся в условии 11 импликаций (1) изобразим ориентированными ребрами графа (согласно данным таблицы 1,— см. рис. 2).

Раскрашивание графа мы всегда будем начинать с допущения о цвете одной из вершин X графа. Эту вершину X мы будем выбирать так, чтобы сумма ее связности $r(X)$ со связностью $r(\bar{X})$ вершины $\bar{X}$ была наибольшей, так как в этом случае цвет вершины X дает максимум информации о цвете других вершин. В некоторых случаях одно допущение позволяет полностью и однозначно раскрасить граф или приводит к противоречию, в других необходимо делать новые допущения. Последнее случается тогда, когда исчерпывается информация, предоставляемая первым допущением (прерывается цепочка рассуждений).

Полное раскрашивание графа дает решение задачи, противоречие указывает на неверность допущения. О цвете вершины X можно сделать два допущения: «X — красная», «X — черная». Необходимо испробовать оба допущения; лишь тогда удается исчерпать все варианты раскрашивания.

Введем теперь дополнительные правила раскрашивания 4—6:

Правило 4

Если высказывание истинно, то отрицание ложно, и наоборот.	Если одна из вершин в вертикальном столбце — красная, то другая — черная.

Правило 5

Если шестерых претендентов включили в состав экспедиции, то остальных исключили.	Если в верхней строке шесть вершин красные, то остальные — черные.

Правило 6

Если двух претендентов исключили из состава экспедиции, то остальных включили.	Если в верхней строке 2 вершины черные, то остальные — красные.

Теперь, руководствуясь правилами 1—6, мы можем раскрасить граф, изображенный на рисунке 2:

I. Предположим, что вершина C — красная. Тогда:

1) $\bar{C}$ — черная (4) *); 2) G — черная (3); 3) $\bar{E}$, $\bar{F}$ — черные (3); 4) $\bar{B}$ — черная (3); 5) E, F и B — красные (4); 6) $\bar{G}$ — красная (4); 7) $\bar{A}$ — крас-

---

*) Здесь и в дальнейшем цифры в скобках обозначают номер правила, на основании которого делается вывод о цвете вершины.

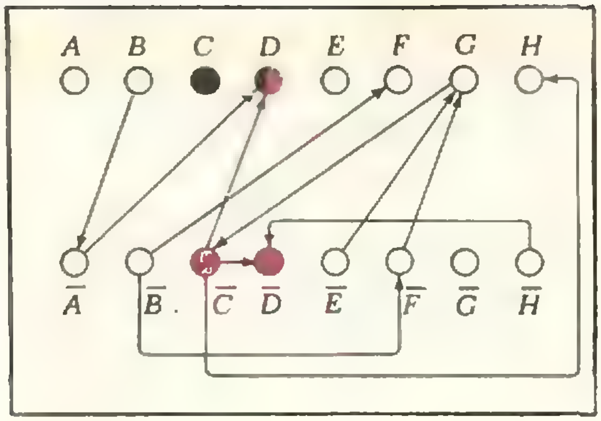


Рис. 3.

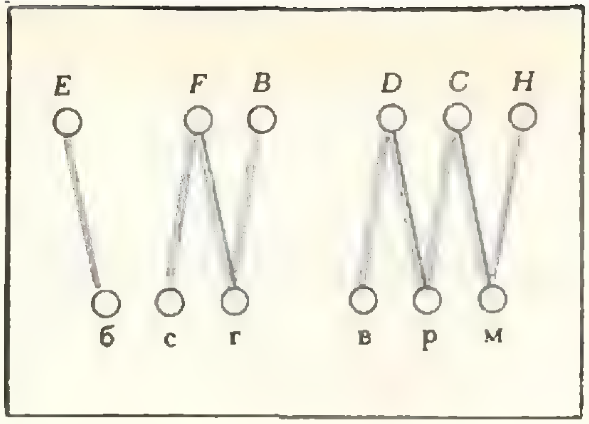


Рис. 4.

ная (2); 8) A — черная (4); 9) D — красная (2); 10) $\overline{D}$ — черная (4); 11) $\overline{H}$ — черная (3); 12) H — красная (4).

Полученный результат согласуется с правилами 5 и 6. Следовательно, если C включен в состав экспедиции, то надо еще включить B, D, E, F и H и исключить A и G.

II. Предположим, что вершина C — черная (рис. 3):

1) $\overline{C}$ — красная (4); 2) $\overline{D}$ — красная (2); 3) D — черная (4); 4) D — красная (2).

Поскольку D не может быть одновременно красной и черной (1), предположение «C — черная» приводит к противоречию; значит, C — красная, и задача имеет единственное решение:

$$B, C, D, E, F, H\ (\overline{A}, \overline{G}).$$

Остается определить, какую должность будет занимать в экспедиции каждый из шестерых, включенных в ее состав. Для этого нам придется воспользоваться графом с цветными ребрами.

Перечертим граф, изображенный на рисунке 1, исключив вершины A и G и связанные с ними ребра (рис. 4). Ребра графа начертим синим цветом, чтобы удобно было потом «наводить» (закрашивать) их другими цветами. Условимся, что ребро, связывающее вершину X первой доли с вершиной a второй доли, будет красным, если X занимает должность a, и черным, если X не занимает этой должности (например, «Fc — красное», если F занимает должность синоптика, а «Dp — черное» означает, что D не занимает должность радиста).

При определении цвета ребер мы будем руководствоваться следующими дополнительными правилами:

Правило 7

Если только один из зачисленных в состав экспедиции может занять должность a, то ему и придется ее занять.

Если вершина a инцидентна только одному синему ребру, то это ребро наводится красным.

Правило 8

Если некоторому X, зачисленному в состав экспедиции, приходится занять ввиду условия 7 должность a, то он не может занимать никакую другую.

Если вершина X инцидентна одному красному ребру, то остальные связанные с ней ребра (если таковые имеются) наводятся черным.

Руководствуясь правилами 7—8, раскрасим граф на рисунке 4:

1) $Eб$ — красное (7); 2) Fc — красное (7); 3) $Fг$ — черное (8); 4) $Bг$ —

красное (7); 5) *Dв* — красное (7); 6) *Dр* — черное (8); 7) *Ср* — красное (7); 8) *См* — черное (8); 9) *Нм* — красное (7).

Красными являются лишь ребра *Еб*, *Fс*, *Вг*, *Dв*, *Ср* и *Нм*. Итак, B следует взять в качестве гидролога, C — радиста, D — врача, E — биолога, F — синоптика, H — механика.

В качестве второго примера возьмем задачу А. С. Сорокина «Несостоявшийся обед» («Квант» № 11, 1972). Напомним ее условие, несколько сократив формулировку.

Задача 2

N хотел пригласить на обед по возможности всех своих соседей: A, B, C, D, E, F, G и H *). *При этом он, однако, столкнулся со следующими препятствиями:*

A никогда не придет, если пригласить B или C, или если одновременно будут приглашены D и E (*1*);

D придет только в том случае, если будет приглашен и E (*2*);

E не примет приглашения, если придет B (*3*);

F наносит визиты только в сопровождении G (*4*);

H не будет возражать против присутствия F только в том случае, если будет приглашен и A (*5*);

Но если не будет приглашен F, то H будет и против приглашения E (*6*);

чтобы пришел G, надо пригласить D или H (*7*);

наконец, G откажется от приглашения, если будет приглашен E без A, а также если будет приглашен B или C (*8*).

Какое максимальное число гостей (*и кого именно*) *мог пригласить N?*

Базисное множество высказываний задачи состоит из восьми высказываний вида «A (B, C, . . .) приглашен на обед» (будем обозначать их соответственно буквами A, B, C, . . .).

Запишем условия (1)—(8) задачи в символах алгебры логики:

(1) $(B \Rightarrow \bar{A}) \wedge (C \Rightarrow \bar{A}) \wedge ((D \wedge E) \Rightarrow \bar{A})$;

(2) $D \Rightarrow E$;

(3) $B \Rightarrow E$;

(4) $F \Rightarrow G$;

(5) $(F \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{H}$;

(6) $(\bar{F} \wedge E) \Rightarrow \bar{H}$;

(7) $G \Rightarrow (D \vee H)$;

(8) $(B \Rightarrow \bar{G}) \wedge (C \Rightarrow \bar{G}) \wedge ((E \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{G})$.

Условие всей задачи будет иметь вид конъюнкции 12 импликаций:

$$(B \Rightarrow \bar{A}) \wedge (C \Rightarrow \bar{A}) \wedge ((D \wedge E) \Rightarrow \bar{A}) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge (B \Rightarrow \bar{E}) \wedge (F \Rightarrow G) \wedge$$
$$\wedge ((F \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{H}) \wedge ((\bar{F} \wedge E) \Rightarrow \bar{H}) \wedge ((\bar{D} \wedge \bar{H}) \Rightarrow \bar{G}) \wedge (B \Rightarrow \bar{G}) \wedge$$
$$\wedge (C \Rightarrow \bar{G}) \wedge ((E \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{G})$$

В пяти из них посылки выражены конъюнкциями базисных высказываний. Упростить такие импликации нельзя, и их посылки, наряду с базисными высказываниями и их отрицаниями, придется изобразить вершинами графа. Сделаем это следующим образом.

Вершины, изображающие базисные высказывания и их отрицания, расположим по схеме, использованной при решении задачи 1. Кроме того,

---

*) То есть (например) Воробьева, Грачева, Дроздова, Воронова, Соколова, Орлова, Соловьева и Щеглова.

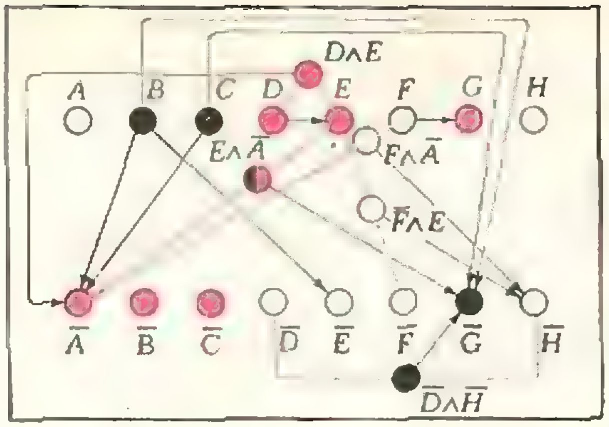

$D \wedge E$
A
B
C
D
E
F
G
H
$E \wedge \bar{A}$
$F \wedge \bar{A}$
$\bar{F} \wedge E$
$\bar{A}$
$\bar{B}$
$\bar{C}$
$\bar{D}$
$\bar{E}$
$\bar{F}$
$\bar{G}$
$\bar{H}$
$\bar{D} \wedge \bar{H}$

Рис. 5.

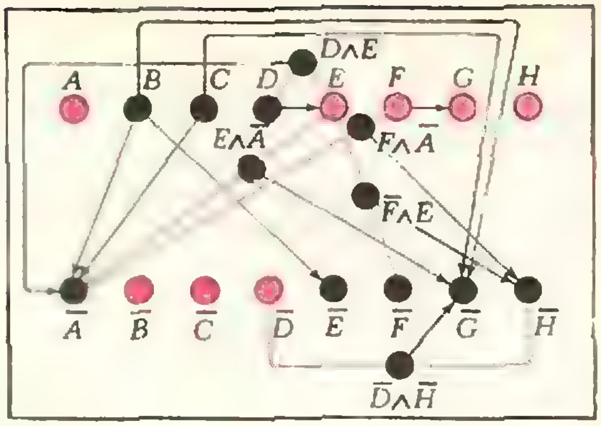

$D \wedge E$
A
B
C
D
E
F
G
H
$E \wedge \bar{A}$
$F \wedge \bar{A}$
$\bar{F} \wedge E$
$\bar{A}$
$\bar{B}$
$\bar{C}$
$\bar{D}$
$\bar{E}$
$\bar{F}$
$\bar{G}$
$\bar{H}$
$\bar{D} \wedge \bar{H}$

Рис. 6.

особо начертим пять вершин, изображающие конъюнкции: $(D \wedge E)$, $(F \wedge \bar{A})$, $(\bar{F} \wedge E)$, $(\bar{D} \wedge \bar{H})$ и $(E \wedge \bar{A})$.

Вершины, изображающие конъюнкции вида $X \wedge Y$, будем называть результирующими вершинами, а вершины X и Y их составляющими (скажем, вершина $F \wedge \bar{A}$ является результирующей составляющих F и $\bar{A}$). Каждую результирующую свяжем с двумя ее составляющими неориентированными ребрами красного цвета. Импликации, содержащиеся в условии задачи, изобразим как в задаче 1 (рис. 5).

Правила раскрашивания 1—4 будем использовать и при раскрашивании графа на рисунке 5. Кроме того, мы введем дополнительные правила 9—13:

Правило 9

Если X — истинно и Y — истинно, то и $X \wedge Y$ — истинно.

Если обе составляющие — красные, то и результирующая — красная.

Правило 10

Если $X \wedge Y$ — истинно, то X и Y — истинны.

Если результирующая — красная, то и обе составляющие — красные.

Правило 11

Если X или Y ложно, то и $X \wedge Y$ ложно.

Если одна из составляющих — черная, то и результирующая — черная.

Правило 12

Если $X \wedge Y$ ложно, а X истинно, то Y ложно.

Если результирующая — черная, а одна из составляющих — красная, то другая — черная.

Правило 13

Если некоторое допущение исключает возможность пригласить несколько гостей, а всех остальных можно пригласить, не получая противоречий, то так и следует поступить (для максимализации приглашенных).

Если допущение о цвете одной из вершин приводит к тому, что часть вершин вида X — черные, а остальные можно сделать красными, не получая противоречий, то так и следует поступить (для максимализации числа красных вершин).

Пользуясь правилами 1—4 и 9—13, раскрасим граф на рисунке 5:

I. Допустим, что G — красная:

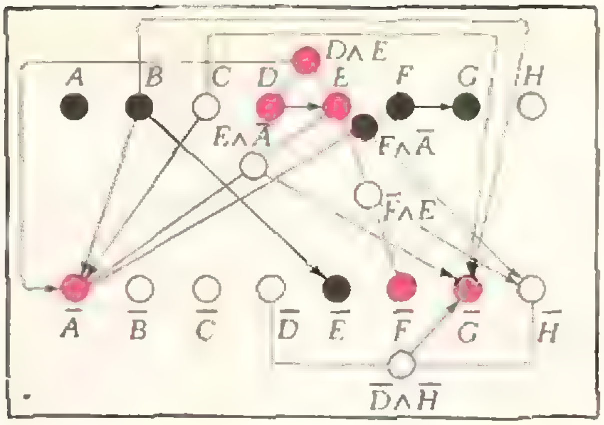

A
B
C
D
E
F
G
H
$D\wedge E$
$E\wedge\bar{A}$
$F\wedge\bar{A}$
$\bar{F}\wedge E$
$\bar{A}$
$\bar{B}$
$\bar{C}$
$\bar{D}$
$\bar{E}$
$\bar{F}$
$\bar{G}$
$\bar{H}$
$\bar{D}\wedge\bar{H}$

Рис. 7.

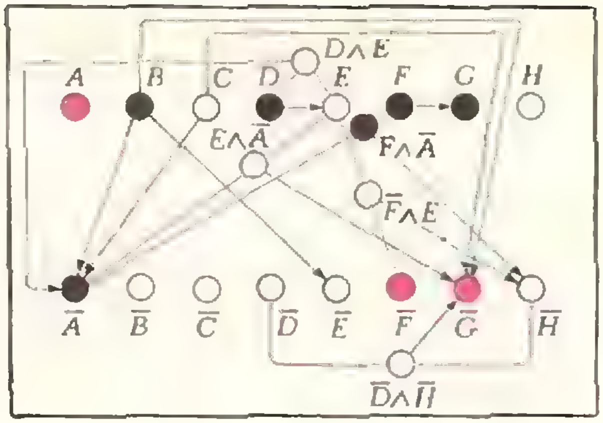

A
B
C
D
E
F
G
H
$D\wedge E$
$E\wedge\bar{A}$
$F\wedge\bar{A}$
$\bar{F}\wedge E$
$\bar{A}$
$\bar{B}$
$\bar{C}$
$\bar{D}$
$\bar{E}$
$\bar{F}$
$\bar{G}$
$\bar{H}$
$\bar{D}\wedge\bar{H}$

Рис. 8.

1) $\bar{G}$ — черная (4); 2) B — черная (3); 3) C — черная (3); 4) $E \wedge \bar{A}$ — черная (3); 5) $\bar{D} \wedge \bar{H}$ — черная (3); 6) $\bar{B}$ и $\bar{C}$ — красные (4).

Допустим теперь (руководствуясь правилом 13), что D красная:

7) E — красная (2); 8) $D \wedge E$ — красная (9); 9) $\bar{A}$ — красная (2); 10) $E \wedge \bar{A}$ — красная (9).

Но по правилу 1 $E \wedge \bar{A}$ не может быть одновременно черной (шаг 4) и красной (шаг 10), значит, если G — красная, то D — черная.

Построим новый граф (рис. 6) и восстановим на нем результаты первых шести шагов. Раскрасим граф на рисунке 6, считая, что D — черная:

11) $\bar{D}$ — красная (4); 12) $D \wedge E$ — черная (11); 13) $\bar{H}$ — черная (12); 14) H — красная (4); 15) $F \wedge \bar{A}$ — черная (3); 16) $\bar{F} \wedge E$ — черная (3).

Допустим, что E — красная (13):

17) $\bar{E}$ — черная (4); 18) $\bar{F}$ — черная (12); 19) F — красная (4); 20) $\bar{A}$ — черная (12); 21) A — красная (4).

Следуя правилу 13, мы сделали красными все три оставшиеся вершины: E, F и A. Тогда из графа рисунка 6 следует, что если пригласить G, то, кроме того, можно пригласить A, E, F и H (всего 5 гостей).

В рассмотренном варианте (при допущении «G — красная») черными оказались три вершины B, C и D. Проверим, можно ли в случае «G — черная» получить не менее пяти красных вершин, то есть не более трех черных.

II. Допустим, что G — черная (рис. 7). Тогда:

1) $\bar{G}$ — красная (4); 2) F — черная (3); 3) $\bar{F}$ — красная (4); 4) $F \wedge \bar{A}$ — черная (11).

Пусть теперь D — красная (13):

5) E — красная (12); 6) $\bar{E}$ — черная (4); 7) B — черная (3); 8) $D \wedge E$ — красная (9); 9) $\bar{A}$ — красная (2); 10) A — черная (4).

Таким образом, уже четыре вершины оказались черными (A, B, F, G).

Перечертим граф рисунка 7 (рис. 8) — восстановим результаты первых четырех шагов и допустим, что D — черная. Тогда уже три вершины — черные (D, F и G), и значит, чтобы получилось не менее пяти красных вершин, необходимо сделать красными все остальные вершины вида X. Но это невозможно, так как если A — красная, то

11) $\bar{A}$ — черная (4); 12) B — черная (3).

Таким образом, допущение «G — черная» не дает более четырех красных вершин вида X. Наибольшее число таких вершин (пять) дает допущение «G — красная».

Ответ следует из графа рисунка 6:

N мог пригласить максимум пять гостей: A, E, F, G и H.

Замечание. При рассмотрении всех четырех вариантов раскрашивания (рис. 5—8) можно было ограничиться лишь одним графом. Для этого его вершины нужно было выполнить в виде кружочков достаточно большого диаметра, разделенных на четыре квадранта, и при рассмотрении каждого варианта закрашивать по одному квадранту.

* * *

В заключение отметим, что задачи 1 (о наличии треугольника с одноцветными сторонами в графе с шестью вершинами и ребрами двух цветов) и 5 (о наличии такого треугольника в графе с семнадцатью вершинами и ребрами трех цветов) из статьи Л. Ю. Березиной «О графах с цветными ребрами» допускают следующее интересное обобщение (предложенное на XIII Украинской республиканской олимпиаде юных математиков):

Задача 3

Последовательность $\{a_n\}$ *задана с помощью рекуррентной формулы:* $a_1 = 2$; $a_n = na_{n-1} + 1$. *Доказать, что в графе с* $a_n + 1$ *вершиной, ребра которого окрашены в* n *цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.*

Воспользуемся методом математической индукции.

1. При $n = 1$ $a_1 = 2$. Число вершин $a_1 + 1 = 3$.

Граф является треугольником с ребрами одного цвета (то есть искомым треугольником).

2. Пусть при $n = k$ утверждение верно, то есть в графе с числом цветов k и числом вершин $a_k + 1$ существует треугольник с одноцветными сторонами. Пусть теперь $n = k + 1$. Тогда число вершин равно

$$a_{k+1} + 1 = [(k + 1)\cdot a_k + 1] + 1.$$

Выберем одну из вершин; назовем ее A. Она соединяется ребрами $k + 1$ цвета с вершинами, число которых $(k + 1)\cdot a_k + 1$. Среди этих ребер по крайней мере $a_k + 1$ — одного цвета (по «принципу Дирихле»*)) для определенности — синего. Если одна из $a_k + 1$ вершин B связана с другой C синим ребром, то треугольник ΔABC — искомый. Если же нет, синий цвет вовсе не использован в графе, состоящем из $a_k + 1$ вершины, и тогда там использованы только k цветов. В этом графе (являющемся частью исходного) по предположению имеется искомый треугольник, а значит, он имеется и в исходном.

Утверждение доказано.

В частности, при $n = 2$ (два цвета) $a_2 = 2\cdot 2 + 1 = 5$, $a_2 + 1 = 6$ (шесть вершин); при $n = 3$ (три цвета) $a_3 = 3\cdot 5 + 1 = 16$, $a_3 + 1 = 17$ (семнадцать вершин).

(Во всех этих задачах имеются в виду *полные* графы, у которых любая пара вершин соединена ребром.)

---

*) См. «Квант, 1971, № 7.

ЛИНЗЫ, ЗЕРКАЛА И АРХИМЕД

С.Г. СЕМЕНЧИНСКИЙ

Широко распространена легенда о том, что Архимед с помощью зеркал сжег вражеский флот, стоящий на якорях в Сиракузах.

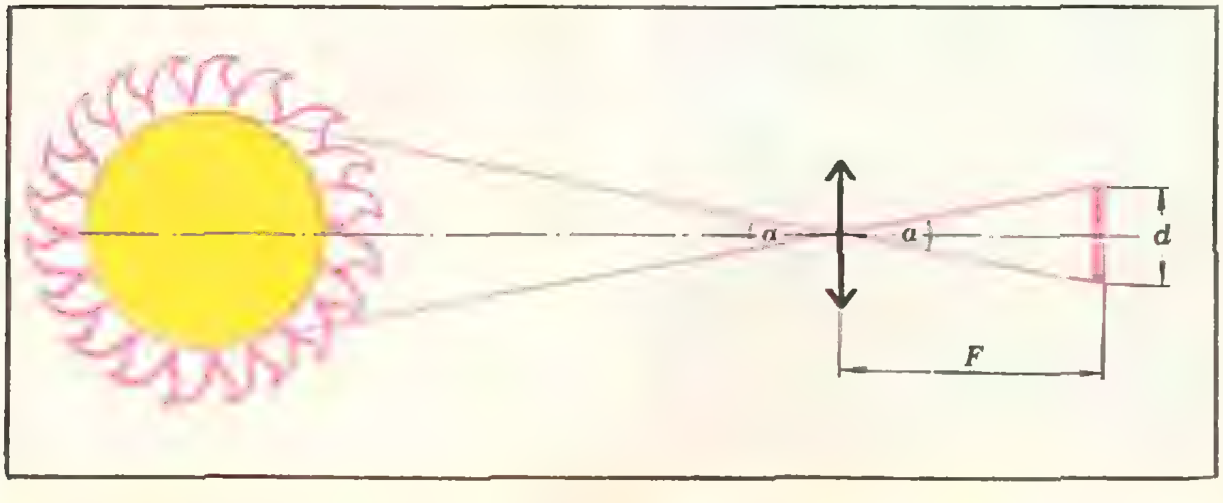
Давайте попробуем взглянуть на эту легенду с точки зрения современной физики и определим условия, при которых можно зажечь что-либо при помощи зеркала или линзы.

Наши расчеты будут опираться на тот факт, что энергия, излучаемая с единицы поверхности нагретого тела за единицу времени, пропорциональна четвертой степени температуры тела (это утверждение называется законом Стефана — Больцмана). Если энергия, подводимая к телу, больше энергии, излучаемой телом, то тело нагревается. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока излучаемая за единицу времени энергия не сравняется с подводимой *). Отсюда следует, что для нагревания тела до температуры T на единицу его поверхности должен падать поток энергии, пропорциональный T^4.

Возьмем линзу, площадь поверхности которой S, а фокусное расстояние F, и с ее помощью получим изображение Солнца на какой-нибудь поверхности. Весь поток солнечной энергии, падающий на поверхность линзы, соберется в фокальной плоскости линзы в пятнышко, диаметр которого $d = 2F \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

---

*) Мы пренебрегаем теплоотводом от тела из-за теплопроводности воздуха. Опыт показывает, что при температуре воспламенения дерева этот теплоотвод мал по сравнению с излучением.



а площадь $s = \frac{4\pi F^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{4}$, где α — угловой размер Солнца (см. рисунок). Взяв угол $\alpha = 30'$, получим

$$s = \frac{\pi F^2}{4 \cdot (110)^2}$$

(так как $2 \operatorname{tg} 15' \approx \frac{1}{110}$). Поток энергии, падающий на единицу поверхности изображения Солнца в линзе, в $\frac{S}{s}$ раз больше, чем без линзы. Из закона Стефана—Больцмана следует, что установившаяся температура T в фокусе будет в $\left(\frac{S}{s}\right)^{1/4}$ раз больше, чем температура T_0, до которой Солнце может нагреть предметы без линзы. Тогда связь между площадью линзы (или зеркала) и температурой в ее фокусе можно записать следующим образом:

$$S = \frac{\pi F^2}{4 \cdot (110)^2} \frac{T^4}{T_0^4}. \qquad (1)$$

Из литературы *) известно, что для того чтобы зажечь, например, бумагу, требуется температура около 250° С, то есть около 520° К, а для сухого дерева необходимо увеличить эту температуру до 500—700° С, то есть примерно до 800—1000° К.

Эксперимент, проведенный французским натуралистом Бюффоном, показал, что действительно можно зажечь кусок сухого, пропитанного смолой дерева на расстоянии 158 футов (около 47 метров). Прибор Бюффона представлял собой сооружение из 168 зеркал, площадью 48 квадратных дюймов (примерно 310 $см^2$) каждое, укрепленных на общей раме. Очевидно, что дерево, пропитанное смолой, зажечь легче, чем не пропитанное. Поэтому будем считать, что пропитанное смолой дерево загорается при меньшей из приведенных температур, то есть при 800° К. Тогда по формуле (1), положив $T_0 \approx 60°$ С ≈ 330 К, получим $S \approx 4{,}9$ $м^2$, а общая площадь зеркал в эксперименте Бюффона была равна 5,2 $м^2$. Таким образом, опыты Бюффона не противоречат нашей теории.

Теперь попробуем рассчитать площадь зеркала, которое могло понадобиться Архимеду. Будем считать, что корабли были сделаны из того же материала, что и дощечка Бюффона. Расстояние от зеркала до кораблей, если верить легенде, было равно расстоянию арбалетного выстрела, то есть около 400 метров *). В этом случае $S \approx 350$ $м^2$. Но Архимеду надо было не просто зажечь корабли, ему надо было зажечь их быстро, так как корабли могли двигаться и, не в пример бюффоновой дощечке, они не стали бы ждать, пока их подожгут. Расчет времени, за которое дерево нагревается до температуры возгорания, весьма громоздок и сложен, так как необходимо учитывать, например, теплоемкость и теплопроводность дерева. Поэтому воспользуемся экспериментальными данными, приведенными в книге Лоусона «Атомная бомба и пожары»**). По этим данным для того чтобы за 20 секунд зажечь дубовые доски, необходима освещенность в 70 раз большая, чем освещенность предметов прямым солнечным светом в летнее время. Для создания такой освещенности площадь зеркала надо увеличить до 700 $м^2$. Сами по себе размеры зеркала не слишком велики — древние греки строили и более грандиозные сооружения. Однако отраженные от различных частей зеркала солнечные лучи должны собираться в одной точке, что требует весьма тщательного изготовления такого громадного зеркала. Но и это еще не все.

---

*) Смотри, например, книгу Р. Бредбери «451 по Фаренгейту».

*) Дальность полета стрелы из арбалета взята из романа А. Конан Дойля «Белый отряд».

**) Д. Лоусон «Атомная бомба и пожары».

Положением «зайчика» от такого зеркала нельзя было бы управлять. Чтобы сделать зеркало управляемым оружием, нужно предусмотреть возможность изменения его фокусного расстояния, причем время такой перестройки должно быть очень коротким. Можно ли было в то время построить столь сложный прибор? По-видимому, нет. Однако у Архимеда была другая возможность: выстроить на крепостной стене несколько тысяч человек с зеркалами (достаточно поставить 1400 человек с зеркалами по 0,5 $м^2$ каждое), которые направили бы «зайчики» от своих зеркал в заранее условленное место одного из кораблей. Если конструкция стен Сиракуз позволяла это сделать (что вполне возможно, так как Архимед сам принимал участие в их постройке) и если зеркала были приготовлены заранее, то все это можно было сделать достаточно быстро. Конечно, если бы римляне знали, зачем на стены Сиракуз выходят тысячи людей с зеркалами и чем им это грозит, то они, стреляя с галер, могли бы разогнать безоружных горожан. Но они не знали! После того, как вспыхнул первый корабль, остальные могли бы уйти, но очень вероятно, что возникла паника — ведь люди видели чудо. Так жители Сиракуз могли сжечь несколько кораблей и удалиться под защиту крепостных стен. Конечно, это только гипотеза, но ничего физически невозможного в ней нет.

Поджег или не поджег?

В польском журнале «Вокруг света» (№ 12, 1974 год) было напечатано сообщение еще об одной проверке предания, согласно которому Архимед сжег флот римлян, входивший в гавань Сиракузы.

Это предание подвергалось сомнению, так как техника того времени не позволяла построить собирающее зеркало таких размеров, чтобы направленный им световой поток мог поджечь корабли на достаточно большом расстоянии. Считалось, что это—легенда, сочиненная греческими сказителями.

Но если нельзя построить одно большое зеркало, то можно взять несколько малых зеркал. В декабре 1973 года греческий физик Ионас Саккос проверил эту гипотезу на опыте, но не в Сиракузах, а в Афинском порту. В его распоряжение были предоставлены 70 солдат и копия римского деревянного корабля. Каждому из солдат был вручен отполированный лист меди размером 150×90 *см*, прикрепленный к держателю. Солдаты должны были направить отраженный солнечный свет в одно место на борту корабля, расположенного на расстоянии 200 *м* от берега.

После нескольких попыток удалось собрать все зайчики в одном месте на борту корабля. Через две секунды корабль задымил, а через три секунды вспыхнул. Прошла минута, и остатки корабля скрылись под водой.

Так декабрьский день 1973 года принес новую победу Архимеду.

В. Л. Булат

А. А. ЕГОРОВ

РЕШЕТКИ И ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

В этой статье разбираются три тесно связанные между собой вопроса.
1) Можно ли расположить правильный n-угольник на листе линованной бумаги — в прямую или косую клетку — так, чтобы его вершины попали в точки пересечения линий?
2) При каких углах α, соизмеримых с полным — то есть содержащих целое или рациональное число градусов, значения синуса, косинуса или тангенса α рациональны?
3) В какие положения может попасть центр правильного n-угольника, который разрешается перекатывать по плоскости (последний вопрос составлял содержание задачи М252 из «Задачника «Кванта»).

§ 1. Точечные решетки на плоскости

Рассмотрим на плоскости сетку, образованную двумя семействами параллельных прямых, разрезающих плоскость на одинаковые параллелограммы (рис. 1).

Множество всех вершин этих параллелограммов назовем *точечной решеткой*, сами вершины — узлами решетки, а любой из параллелограммов разбиения — *основным параллелограммом* разбиения, или параллелограммом, *порождающим* решетку.

Заметим, что одна и та же решетка может получиться из разных сеток прямых: на рисунке 2 изображена так называемая *целочисленная* решетка, то есть множество точек, имеющих в декартовой системе координат целочисленные координаты. Целочисленную решетку вместе с сеткой прямых, параллельных осям координат, можно представлять себе как бесконечный лист клетчатой бумаги (тогда основным параллелограммом будет квадрат со стороной 1). Ту же самую целочисленную решетку можно получить, проводя красные прямые (тогда основным параллелограммом служит параллелограмм $ABCD$).

Таким образом, понятие основного параллелограмма решетки связано

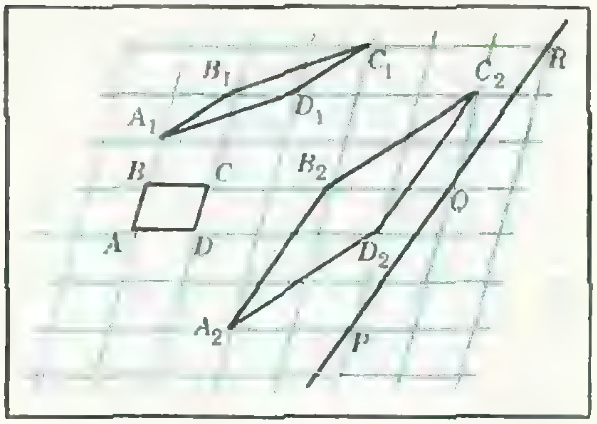


Рис. 1.

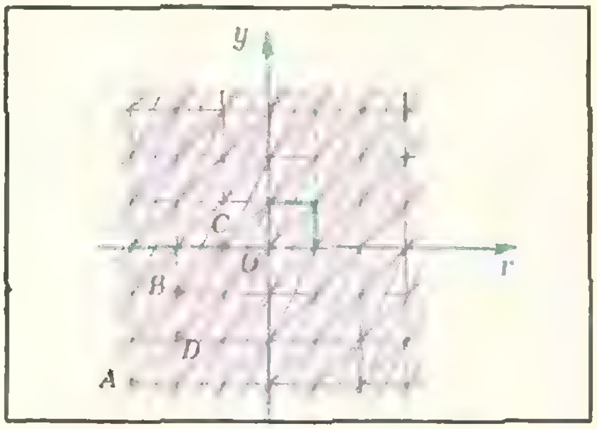


Рис. 2.

не только с самой решеткой, но и с сеткой прямых, эту решетку порождающих.

Из простейших свойств решеток пока отметим следующие.

1°. Всякий параллельный перенос, переводящий некоторый узел решетки в другой узел, переводит решетку в себя.

2°. (*Лемма о четвертой вершине параллелограмма*). Если три вершины параллелограмма являются узлами некоторой решетки, то и четвертая вершина — тоже узел этой решетки.

3°. Если через произвольные два узла Q и R решетки провести прямую, то эта прямая пройдет через бесконечное количество узлов. При этом все расстояния между соседними узлами, лежащими на прямой, будут равны (см. рис. 1).

4°. Если параллелограмм с вершинами в узлах некоторой решетки не содержит других узлов на сторонах и внутри себя, то он эту решетку порождает.

Упражнения

1. Докажите свойства 1°—4°.

2. Пусть a и b — любые действительные числа. Докажите, что множество всех точек с координатами (ka, lb), где k и l — целые числа, является решеткой.

Важное свойство решеток отражает следующая задача — шутка:

В некотором узле A решетки находится охотник, а в остальных узлах сидят одинаковые и одинаково расположенные зайцы (см. рис. 3, *а*). *Охотник наугад стреляет* (*траектория пули — луч, выходящий из точки A*). *Вернется ли он домой с добычей?* (*Зайцы считаются «толстыми»*.)

Понятно, что если траектория пули проходит через узел (отличный от точки A), то заяц, сидящий в этом узле, будет убит. Поэтому интересен только тот случай, когда узел A — единственный на траектории пули; оказывается, что и в этом случае какой-нибудь заяц будет убит. Доказательство содержится в следующей лемме.

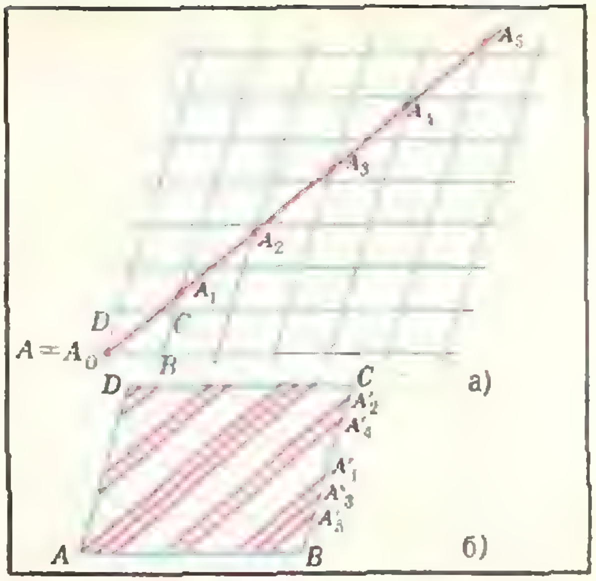


Рис. 3.

5°. (*Лемма об охотнике и зайцах*). Пусть луч l проходит через узел A некоторой решетки. Тогда найдется такой узел, расстояние от которого до луча l будет меньше любого наперед заданного числа ε.

Доказательство. Обозначим точки пересечения луча l с наклонными прямыми сетки через $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ (см. рис. 3). Совместим все параллелограммы, на правых сторонах которых лежат эти точки, с параллелограммом $ABCD$, тогда каждая точка A_n перейдет в некоторую точку A'_n на стороне AB.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки A'_m и A'_{m+k}, что расстояние между ними будет меньше ε.

Докажите теперь, что расстояние от точки A_k до одного из узлов решетки меньше ε (в частности, если A'_m совпадает с A'_{m+k}, то A_k будет узлом решетки).

Следствие. Для любого иррационального числа $\alpha > 0$ и любого положительного ε найдутся такие натуральные m и n, что $|m\alpha - n| < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем на плоскости декартову систему координат и проведем прямую $y = \alpha x$. В силу иррациональности α, единственной точкой с целочисленными координатами на этой прямой будет начало координат. Прямая $y = \alpha x$ пересекает каждую вертикальную прямую $x = m$ в точке $(m, m\alpha)$. По лемме 5° найдется такой узел (m, n) целочисленной решетки, что расстояние (по вертикали) от него до точки $(m, m\alpha)$ будет меньше ε, что и требовалось доказать.

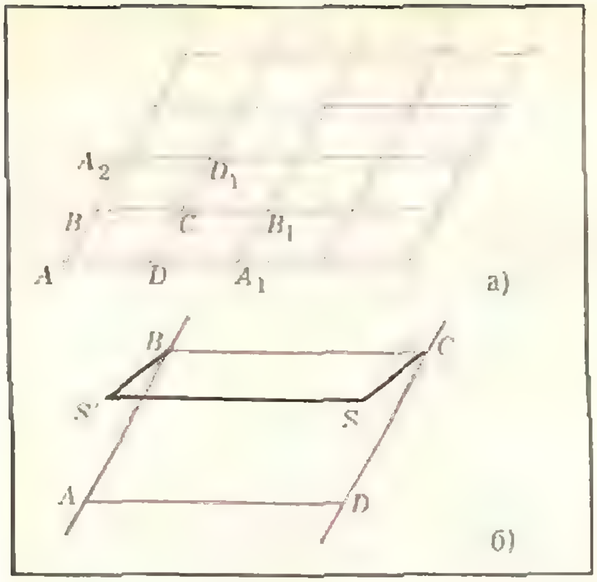


Рис. 4.

Легко видеть, что среди всевозможных попарных расстояний между узлами любой решетки есть наименьшее (докажите!).

Это свойство вместе со свойством 2 решетки можно принять за определение решеток.

Теорема. *Пусть множество M на плоскости обладает следующими свойствами:*

а) *расстояние между любыми двумя его точками не меньше некоторого положительного числа d;*

б) *если три точки A, B, C множества M являются вершинами некоторого параллелограмма $ABCD$, то и четвертая вершина D этого параллелограмма принадлежит множеству M.*

Тогда M — решетка.

Доказательство. Возьмем произвольную точку B, принадлежащую множеству M.

Пусть A — ближайшая к B точка из M (рис. 4, *а*; такая точка существует, так как все попарные расстояния между точками множества M больше d).

Через точки A и B проведем прямую. Среди точек множества M, не лежащих на этой прямой, выберем ближайшую к точке B — точку C — и построим параллелограмм $ABCD$. В силу свойства б) точка D также принадлежит множеству M.

Построим решетку, порождаемую параллелограммом $ABCD$. Докажем, что множество M совпадает с построенной решеткой.

Из свойства б) множества M следует, что все узлы этой решетки ему принадлежат

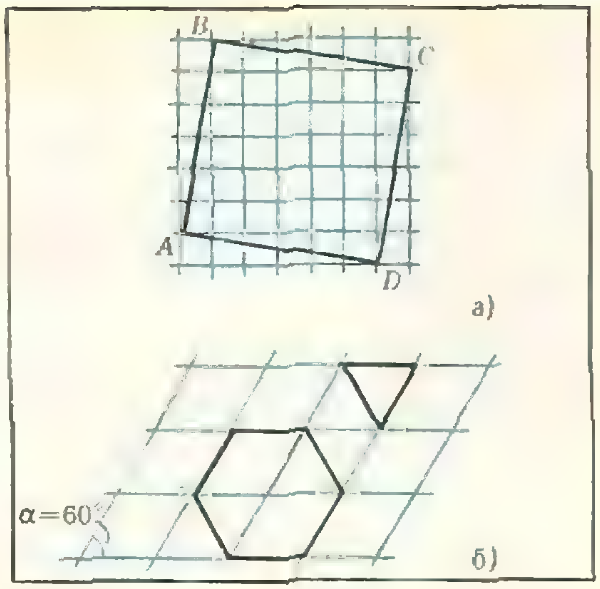


Рис. 5.

Упражнение 3. Докажите это.

Поэтому нужно только проверить, что ни на границе, ни внутри параллелограмма $ABCD$ нет точек множества M, отличных от его вершин.

Это почти очевидно: если точка S лежит внутри параллелограмма (рис. 4, *б*), то хотя бы один из углов $\widehat{ASB}$, $\widehat{BSC}$, $\widehat{CSD}$ и $\widehat{ASD}$ будет тупым или прямым, и поэтому расстояние от S до одной из его вершин окажется меньше какой-нибудь его стороны (если S лежит на границе — то же самое); пусть, например, это расстояние SC. Построим параллелограмм $BCSS'$ (S' принадлежит M). Тогда BS' меньше либо BC, либо BA, но это противоречит выбору либо точки C, либо точки A.

Остальные случаи разберите самостоятельно.

Теорема доказана.

Упражнения

4. Пусть α — произвольное иррациональное число. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого действительного числа β найдутся такие целые числа m и n, что

$$|m\alpha + n - \beta| < \varepsilon.$$

5*. Докажите, что десятичная запись числа 2^n может начинаться с любой, наперед заданной комбинации цифр.

§ 2. Правильные многоугольники

Возьмем лист клетчатой бумаги. Понятно, что квадрат с вершинами в узлах такой решетки можно нарисовать многими способами (рис. 5, *а*). А можно ли на клетчатой бумаге нарисовать правильный треугольник? Правильный шестиугольник?

Оказывается, нельзя.

Упражнение 6. Докажите это.

В то же время легко построить решетку, на которую правильный треугольник уже можно «поместить» (рис. 5, *б*).

Спрашивается, а как обстоят дела с остальными правильными многоугольниками? Существует ли, например, решетка, на которую можно было бы «поместить» правильный пятиугольник так, чтобы все его вершины оказались узлами этой решетки?

Оказывается, такой решетки нет. Действительно, предположим, что нам удалось построить решетку так, что вершины правильного пятиугольника оказались в ее узлах (см. рис. 6). Проведем диагонали этого пятиугольника. По лемме 2 § 1 точки пересечения диагоналей являются узлами решетки: каждая из них служит четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого — узлы решетки (точка A_1, например,— вершина параллелограмма A_1CDE). Эти точки образуют правильный пятиугольник со стороной в $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ раз большей стороны исходного пятиугольника. Проведя диагонали нового пятиугольника, получим еще меньший пятиугольник с вершинами в узлах нашей решетки и так далее. В конце концов сторона пятиугольника станет меньше минимального расстояния между узлами решетки, а это находится в противоречии с тем, что вершины получающихся пятиугольников — узлы решетки.

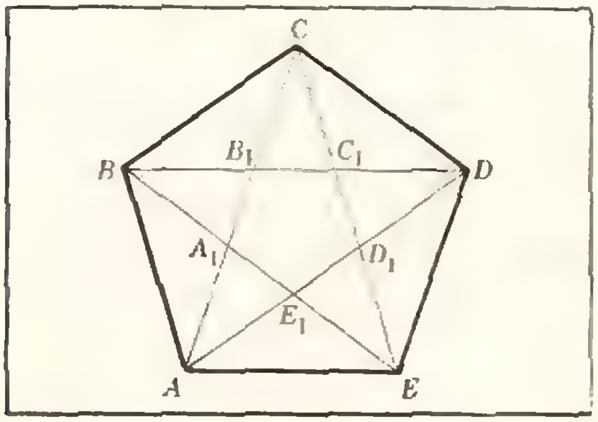


Рис. 6.

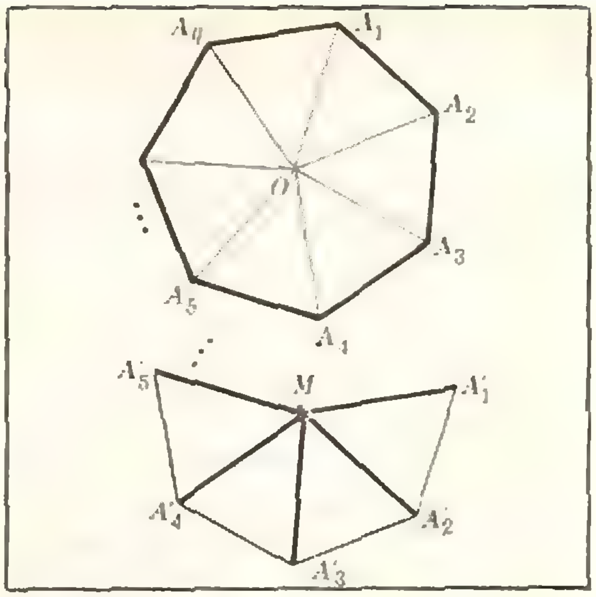


Рис. 7.

Упражнение 7. Найдите *k*.

Итак, правильный пятиугольник не может быть «нарисован» ни на одной решетке.

Докажем, что точно так же обстоит дело и с остальными правильными q-угольниками при $q \geqslant 7$.

Доказательство основывается на той же идее; предполагается, что правильный q-угольник с вершинами в узлах решетки существует, и строится меньший q-угольник с вершинами в узлах. Затем процесс построения повторяется. В конце концов получается правильный q-угольник со стороной, меньшей минимального расстояния между узлами. Поэтому нам нужно только указать, как по данному правильному q-угольнику с вершинами в узлах решетки построить меньший правильный q-угольник, вершины которого будут также находиться в узлах нашей решетки.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_q$ — узлы некоторой решетки, являющиеся вершинами правильного q-угольника, и пусть M — произвольный узел решетки (рис. 7). Отложим от точки M отрезки $MA'_1, MA'_2, MA'_3, \ldots, MA'_q$, равные, параллельные и так же направленные, как сторона A_qA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{q-1}A_q$ нашего многоугольника. Точки A_1', A_2', A_3', ...A_q'—узлы решетки, так как каждая из них является четвертой вершиной параллелограмма, три другие вершины которого — узлы.

Легко видеть, что многоугольник $A_1'A_2' \dots A_q'$ — правильный, причем длина его стороны в $k_q = \frac{|A_1A_2|}{|OA_1|}$ раз больше длины стороны исходного q-угольника.

Тем самым вопрос о правильных многоугольниках, «помещающихся» на точечных решетках, полностью решен: *такими многоугольниками являются только квадраты, правильные треугольники и правильные шестиугольники.*

Упражнения

8. Найдите k_q.

9. Существуют ли решетки, кроме целочисленной, на которые можно поместить квадрат?

10. Приведите пример решетки, отличной от изображенной на рисунке 5, *б*, на которую можно поместить правильный треугольник.

11. Существует ли решетка, на которую помещаются и квадрат, и правильный треугольник?

12. (*Н. Б. Васильев*). На плоскости проведены параллельные прямые на одинаковом расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Какие правильные n-угольники можно нарисовать на плоскости так, чтобы все их вершины лежали на проведенных прямых?

§ 3. Иррациональность значений тригонометрических функций.

Сможете ли вы ответить на такой вопрос: рациональны или иррациональны числа $\sin 1°$, $\cos\frac{\pi}{19}$, $\operatorname{tg}\frac{7}{55}\pi$? Или на такой: соизмеримы *) ли числа π и $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$?

И вообще: для каких углов $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ (p и q целые) будут рациональными числа: а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$?

Ясно, что $\cos\alpha$ рационален при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{3}(3k\pm1)$;

$\sin\alpha$ — при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}(6k\pm1)$;

$\operatorname{tg}\alpha$ — при $\alpha = k\pi$ и $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

(k — целое).

Мы увидим, что при остальных $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ значения всех трех функций иррациональны.

Для доказательства нам понадобятся следующие простые факты из тригонометрии:

1. *Для всякого натурального n функция $\cos nx$ является многочленом n-й степени от $\cos x$ с целыми коэффициентами, то есть*

$$\cos nx = P_n(\cos x),$$

где $P_n(y)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n.

2. *Функция $\sin nx$ является произведением функции $\sin x$ на некоторый многочлен степени $n-1$, относительно $\cos x$, с целыми коэффициентами, то есть*

$$\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x),$$

где $Q_{n-1}(y)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени $n-1$.

Упражнение 13. Докажите эти утверждения.

Отметим простые следствия этих утверждений;

а) *если $\cos x$ — рациональное число, то $\cos nx$ — тоже рациональное число, а числа $\sin x$ и $\sin nx$ соизмеримы (при $\sin nx \neq 0$);*

б) *если p и q взаимно простые числа и $\cos\frac{p}{q}\pi$ рациональное число, то число $\cos\frac{\pi}{q}$ также рационально.*

Докажем б) (свойство а) очевидно). Заметим, что если p и $q > 1$ взаимно просты, то существует такое натуральное

---

*) Напомним, что два числа α и β называются соизмеримыми, если их отношение — рационально, то есть если $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ где p и q — целые числа и $q > 0$.

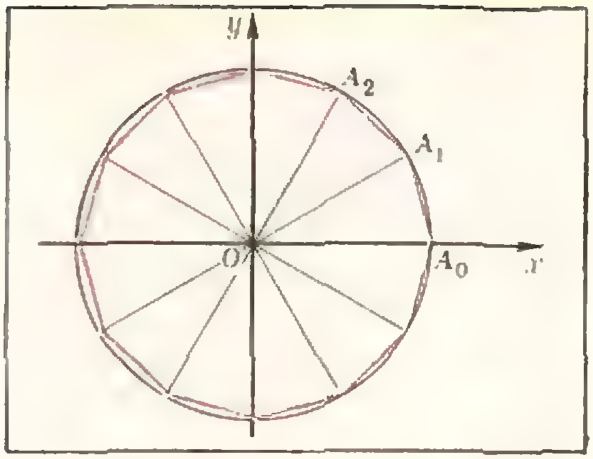


Рис. 8.

число k, что число kp при делении на q дает в остатке 1, то есть $kp = lq + 1$.

Упражнение 14. Докажите это. Поэтому если число $\cos\frac{p}{q}\pi$ рационально, то рационально и число

$$\cos k\left(\frac{p}{q}\pi\right) = \cos\left(\frac{lq+1}{q}\pi\right) = = (-1)^l \cos\frac{\pi}{q}.$$

Если же рационально число $\cos\frac{\pi}{q}$, то рационально и $\cos\frac{p}{q}\pi$ при любом целом p (см. утверждение 1).

Итак, *число* $\cos\frac{p}{q}\pi$ *при взаимно простых p и $q > 1$ рационально тогда и только тогда, когда рационален* $\cos\frac{\pi}{q}$.

Теперь докажем, что $\cos\frac{\pi}{q}$ *иррационален при всех натуральных* $q > 3$.

Предположим, что $\cos\frac{\pi}{q} = \frac{m_1}{n_1}$ — рациональное число (m_1 и n_1 — натуральные).

Введем на плоскости декартову систему координат и проведем лучи, образующие с положительным направлением оси x углы $0, \frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}, \ldots, \frac{2q-1}{q}\pi$.

Пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2q-1}$ — точки пересечения этих лучей с единичной окружностью (рис. 8).

Многоугольник $A_0, A_1 A_2 \ldots A_{2q-1}$ правильный; точка A_k имеет следующие координаты:

$$\left(\cos\frac{k}{q}\pi, \sin\frac{k}{q}\pi\right).$$

Так как $\cos\frac{\pi}{q}$ рационален, то абсцисса точки A_k — число рациональное:

$$\cos\frac{k}{q}\pi = p_k\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) = \frac{m_k}{n_k};$$

ордината же ее равна произведению рационального числа $Q_k\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) = \frac{r_k}{s_k}$ на число $\sin\frac{\pi}{q}$ (см. упражнения 13 и 14; $k = 1, 2, \ldots, 2q-1$; координаты точки $A_0 = (1, 0)$).

Итак,

$$A_k = \left(\frac{m_k}{n_k}, \frac{r_k}{s_k}\cdot\sin\frac{\pi}{q}\right).$$

Приведем все дроби $\frac{m_k}{n_k}$, $\frac{r_k}{s_k}$ к общему знаменателю; обозначим его через D. Тогда

$$A_k = \left(\frac{M_k}{D}, \frac{N_k}{D}\cdot\sin\frac{\pi}{q}\right),$$

M_k и N_k — целые, $k = 1, 2, \ldots, 2q-1$.

Рассмотрим теперь все точки с координатами

$$\left(\frac{i}{D}, \frac{j}{D}\cdot\sin\frac{\pi}{q}\right)$$

(i и j — целые) — эти точки образуют решетку (см. упражнение 2), причем вершины нашего правильного $2q$-угольника $A_0 A_1 \ldots A_{2q-1}$ являются ее узлами. Но этого не может быть (см. § 2), так как $2q \geqslant 8$. Поэтому наше предположение о том, что при $q > 3$ число $\cos\frac{\pi}{q}$ рационально, было неверным, и, следовательно, все числа $\cos\frac{p}{q}\pi$ ($q > 3$, p и q взаимно просты) иррациональны!

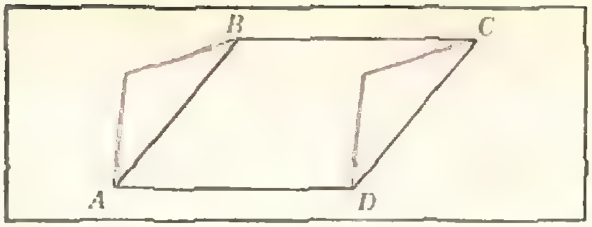


Рис. 9.

Упражнение 15. Пусть $q \geqslant 3$, p и q взаимно просты. Докажите, что

а) числа $\sin\frac{p}{q}\pi$ для $q \neq 5$ иррациональны;

б) то же для чисел $\operatorname{tg}\frac{p}{q}\pi$, если $q \neq 4$.

Полученные результаты можно сформулировать еще и так: числа $\arcsin\frac{p}{q}$, $\arccos\frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$, а также числа $\operatorname{arctg}\frac{p}{q}$ при $\frac{p}{q} \neq 0, \pm 1$ (и взаимно простых p и q) несоизмеримы с числом π.

§ 4. Решение задачи М252

Итак задача М 252: а) *На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной a. Его разрешается «перекатывать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки A плоскости и любого $\varepsilon > 0$ можно перекатить восьмиугольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки A на расстоянии меньше ε.*

б) *Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.*

в) *Для каких правильных q-угольников верно аналогичное утверждение?*

Мы приведем два решения этой задачи. Первое решение опирается на иррациональность чисел $\cos\frac{2\pi}{q}$ при $q > 4$, $q \neq 6$. Второе основывается на теореме, доказанной в § 1.

Прежде всего заметим, что утверждение задачи *не справедливо* для правильных треугольника и шестиугольника, а также и для квадрата: в этих случаях точки, в которые попадает центр соответствующего многоугольника в результате «перекатываний», образуют решетку (докажите это!). Оказывается, что для всех остальных правильных q-угольников утверждение задачи верно — мы докажем, что каковы бы ни были точка A и $\varepsilon > 0$, центр любого правильного q-угольника при $q \neq 3$, $q \neq 4$, $q \neq 6$ после некоторого количества «перекатываний» попадает в круг радиуса ε с центром в точке A.

Прежде чем приступать к доказательству, выясним некоторые свойства множества M тех точек плоскости, в которые переходит центр правильного q-угольника P после четного числа «перекатываний». Заметим, что q-угольник P', получающийся из P после четного числа «перекатываний», расположен таким образом, что его стороны параллельны сторонам исходного. Поэтому мы можем считать, что P' получен из P параллельным переносом.

Лемма 1. *Если три вершины параллелограмма A, B и C принадлежат M, то и четвертая его вершина D также принадлежит M.*

Доказательство. Пусть точки A, B и C принадлежат M (см. рис. 9) и D — четвертая вершина параллелограмма. Ясно, что мы можем пройти из точки C в точку D, осуществляя те же параллельные переносы что и при переходе из точки B в точку A.

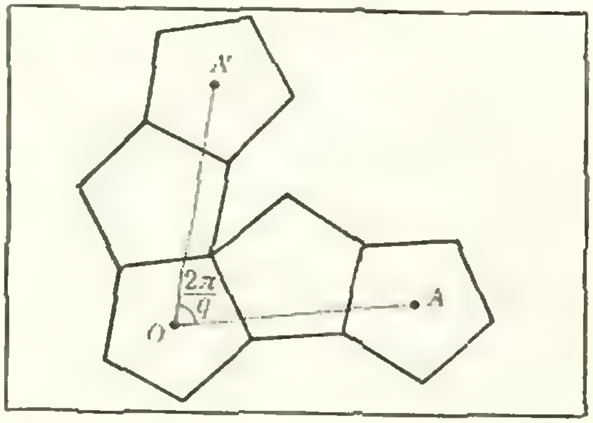


Рис. 10.

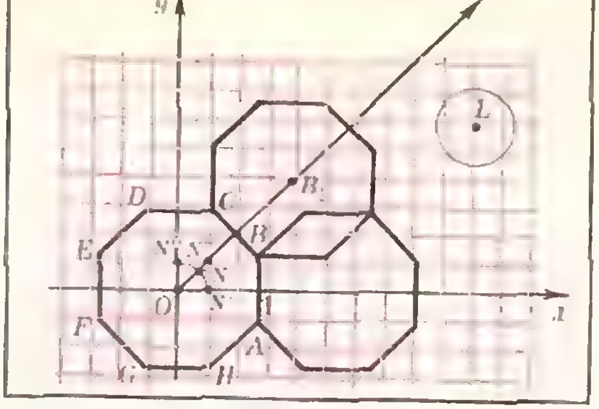


Рис. 11.

Лемма 2. *Множество M переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг любой из его точек.*

Доказательство. Построим цепочку q-угольников, примыкающих друг к другу по стороне и «соединяющих» наш q-угольник с центром в заданной точке O с q-угольником с центром в любой другой точке A множества M (рис. 10). При повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ вокруг точки O эта цепочка многоугольников переходит в другую цепочку, соединяющую исходный многоугольник с многоугольником, центром которого является точка A', полученная из A поворотом. Следовательно, точка A' также принадлежит множеству M.

Перейдем к доказательству сделанного утверждения.

Первое доказательство. Разберем сначала случай правильного восьмиугольника. (Будем считать, что апофема многоугольника равна 1.)

Введем на плоскости систему координат так, как показано на рисунке 11, и посмотрим, что происходит с координатами центров при «перекатывании» через стороны многоугольника P.

При «перекатывании» вдоль оси Ox ординаты центров не меняются, а абсциссы увеличиваются или уменьшаются на 2. При перекатывании вдоль биссектрисы первого координатного угла координаты точек либо увеличиваются, либо уменьшаются на $\sqrt{2}$.

Если сделать n шагов вдоль этой биссектрисы вправо — вверх, затем m шагов вдоль оси Ox влево и m шагов вдоль оси Oy вниз, то мы попадем в точку N с координатами $(n\sqrt{2}-2m,\ n\sqrt{2}-2m)$ (см. рис. 11); так как $\sqrt{2}$ — число иррациональное, то (см. § 1) найдутся такие натуральные m и n, что

$$0 < n\sqrt{2}-2m < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad (*)$$

где ε — любое положительное число.

Отметим, что мы можем также придти в точку N', получающуюся из N поворотом на угол 45° по часовой стрелке, и в точку N'', получающуюся из N поворотом на угол 45° против часовой стрелки.

Достроим треугольник $ON'N''$ до квадрата $ON'N''N'''$ и рассмотрим решетку, им порождаемую.

Так как стороны и диагонали квадрата $ON'N''N'''$ меньше ε (см. (*) и рисунок 11), то во всяком круге L радиуса ε окажется хотя бы один узел решетки. Но по лемме 1 все узлы этой решетки можно получить «перекатываниями» из центра восьмиугольника.

Тем самым про восьмиугольник все доказано.

Для остальных многоугольников (конечно правильных) доказательство проводится по той же схеме.

Второе решение. Это решение несколько короче первого и, пожалуй, нагляднее, но оно использует трудную теорему из § 1.

Как мы видели, достаточно доказать, что во множестве M найдутся сколь угодно близкие точки.

Предположим, что это не так, то есть предположим, что между точками множества M больше некоторого положительного числа d.

В силу теоремы из § 1 и лемм 1, и 2 множество M является решеткой, которая, к тому же, переходит в себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$. Из этого немедленно следует, что существует правильный q-угольник с вершинами в ее узлах, а это возможно лишь при $q=3$, $q=4$ или $q=6$.

Решение закончено.

М. В. ДОНСКОЙ

ЧЕМПИОНАТ МИРА СРЕДИ ШАХМАТНЫХ ПРОГРАММ

В «Кванте» № 11 в статье «Машина играет в шахматы» было рассказано о том, как программа выбирает ход в шахматной позиции, и как организуется «полная игра» машины. В августе 1974 года состоялся чемпионат мира среди шахматных программ. О нем и рассказано в настоящей статье.

История турниров шахматных программ

В 1950 году английский математик Клод Шеннон предложил способ научить машину играть в шахматы — идею составления шахматной программы. У Шеннона не было своей программы, но его идея использована во всех существующих программах.

Первая действующая шахматная программа была создана в конце 50-х годов в Массачусетском технологическом институте Бернштейном. Она играла в силу начинающего игрока.

В 1957 году состоялся первый в истории шахматный матч вычислительных машин — матч между советской программой Института теоретической и экспериментальной физики и американской программой Стэнфордского университета. Матч из четырех партий закончился со счетом 3 : 1 (2 ничьих и 2 победы) в пользу советской программы.

В 1968 году на конгрессе ИФИП (Международной федерации по обработке информации) ученые всерьез обсуждали возможность игры шахматных программ на уровне мастера. Все участники конгресса имели возможность на собственном опыте убедиться в прогрессе шахматного программирования — сыграть партию с лучшей американской шахматной программой — программой Гринблатта. Машина чуть чаще проигрывала, но Гринблатт объяснил это тем, что математики всегда хорошие шахматисты.

На этом же конгрессе произошло забавное событие. Математики заключили пари с шахматным мастером Д. Леви, что через 10 лет будет создана программа, которая у Леви выиграет. По всей вероятности, математики это пари проиграют, но в лице Леви они получили самоотверженного организатора турниров шахматных программ.

Начиная с 1970 года ежегодно в Америке проводится чемпионат американских шахматных программ. Чемпионом уже четыре раза становилась программа «Чесс-4,0». На ее турнирном счету (до чемпионата мира) 13 побед, 1 ничья и ни одного поражения.

Последний американский чемпионат служил одновременно отборочным турниром на чемпионат мира. Лучшие четыре американские программы — «Чесс-4,0», «Теч-2», «Хаос» и «Острич» получили право играть на турнире.

На сегодняшний день в Америке существует около 50 шахматных программ, а в Европе только около 20. Однако чемпионат мира показал, что главное не количество, а качество — чемпионом стала советская программа «Каисса».

Чемпионат мира — это всегда соревнование. Но чемпионат мира среди шахматных программ — не шахматное соревнование. Это — соревнование ученых. Ученых, а не программистов, потому что составить какую-нибудь шахматную программу при сегодняшнем уровне программирования, хотя и сложный, но все же — вопрос техники.

Основной центр тяжести падает на алгоритм — правила, по которым программа должна выбирать ход.

Ученые интересуются этими алгоритмами, потому что считают их существенным шагом на пути к обучению машины мышлению.

Один из аспектов мышления — выбор решения в сложной ситуации. Способы обучения ЭВМ такому выбору и оттачиваются на шахматных программах. Ученые считают, что не позднее чем через 3 года после того, как машина обыграет чемпиона мира по шахматам, будет создана думающая машина.

Как «Каисса» готовилась к чемпионату

Игра шахматной программы в турнире отличается от обычного выбора ходя в спокойной обстановке. В чем же состояла подготовка к турниру?

Прежде всего время на обдумывание ходов у программы было жестко ограничено — 2 часа на 40 ходов. Если 2 часа истекали, когда программа еще не сделала 40 ходов, ей засчитывалось поражение (и таких поражений на турнире было немало). Значит, программа должна не только выбирать ход в позиции, но и следить за временем обдумывания.

Сначала мы поделили эти 2 часа на 40 ходов поровну, но такое решение оказалось неудачным по двум причинам.

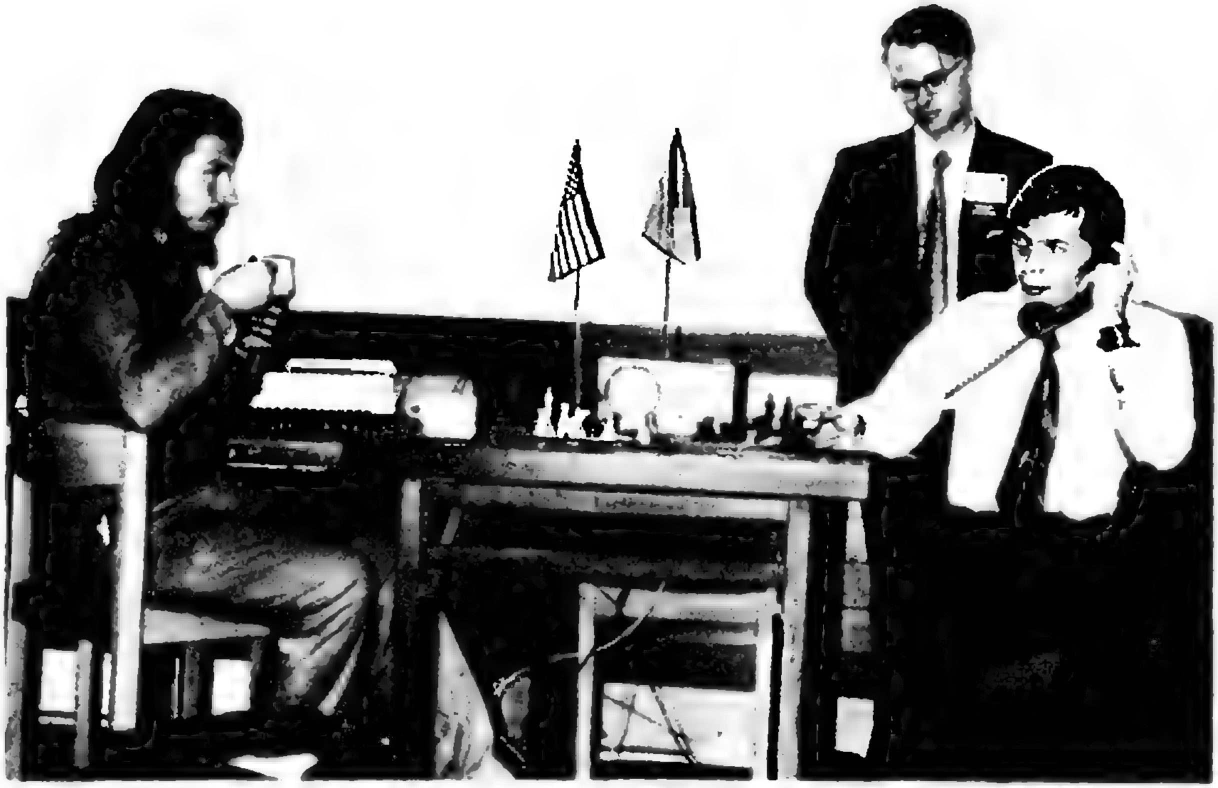
Первая — неизвестно что делать с неиспользованным остатком времени. В конце концов время стало перераспределяться перед каждым ходом.

Вторая причина более тонкая: в середине партии у программы больше пищи для размышления, чем в конце — больше фигур, велика их подвижность, напряженнее позиция. Поэтому мы решили первые 25 ходов давать программе возможность подумать побольше за счет остальных 15-ти, и это себя вполне оправдало.

Каким образом программа (во время перебора) понимает, сколько времени она думает? Мы не стали пользоваться обычными часами, которые есть в вычислительной машине и доступны программе, потому что «взгляд на часы» занимает у машины слишком много времени. Мы ввели в программу собственное измерение времени — число рассмотренных позиций за время выбора хода. Поскольку в секунду программа изучает около 200 позиций, то время в секундах, которое можно затратить на обдумывание, умножается на 200, и, когда число рассмотренных позиций превысит это произведение, программа прекращает рассмотрение и выдает в качестве ответа лучший из уже рассмотренных ходов.

Естественно, что чем больше времени на обдумывание имеет программа, тем больше возможностей она успеет рассмотреть до истечения контроля одного хода. Нам удалось использовать довольно большой резерв времени на обдумывание — то время, когда думает противник. Программа прогнозирует ход противника и начинает выбирать на него ответ так, как будто этот ход уже сделан. Когда противник отвечает, сначала проверяется, сделан ли ход, который ожидался. Если да, то время, пока противник думал, проведено с пользой. Если же нет, то во всяком случае мы ничего не потеряли.

Однако для того, чтобы вложить это в программу, потребовалось создание диспетчера — программы, которая ждет сообщения, разби-



На фотографии приведено начало партии с «Теч-2». Справа сидит один из авторов «Каиссы»—М. Донской, слева—автор «Теч-2» А. Бислей.

рается в нем, когда оно придет, и указывает шахматной программе, что делать дальше — продолжать выбирать ответ на спрогнозированный ход или вернуться и выбирать ответ на другой ход. Сложность этой программы можно оценить хотя бы по тому, что «Каисса» была единственной участницей чемпионата, думавшей за счет времени противника.

Специфически шахматная подготовка к турниру состояла во введении в машину справочной дебютов. Эта справочная к началу турнира содержала 10 000 позиций и, видимо, была самой объемистой на турнире. Во всяком случае только однажды — в партии с программой «Чесс-4,0» — противник сумел переиграть нас в дебюте (по-моему, специально к этому подготовившись).

Однако у этой справочной был любопытный недостаток. Она содержала новейшие дебютные идеи, которые, естественно, были вне понимания программы выбора хода. Когда справочная кончалась и надо было выбирать ход, игровая часть программы не развивала позицию в духе этих идей, а пыталась проводить свои, более простые идеи, которые противоречили позиции. Это сразу же приводило к резкому ухудшению позиции и даже материальным потерям. Но потом благодаря тому, что какие-то идеи все-таки у программы были, она добивалась преимущества во всех партиях. Только в последней, товарищеской это преимущество было получено слишком поздно — на доске остались король, ладья и конь против короля и ладьи, что является теоретической ничьей. Судья остановил часы.

Самым удивительным на турнире оказалась способность программ относительно хорошо играть эндшпиль. Практически все программы, в том числе и наша, содержали специальные знания про эндшпиль. В нашей программе это была оценочная функция, которая существенно отличалась от оценочной функции, применявшейся в середине игры. Это отличие становится понятным, если, например, вспомнить, что в середине игры король должен быть как можно дальше от центра событий, а в конце, наоборот, в их гуще.

Заканчивая рассказ о специальной турнирной подготовке программы, я хочу напомнить, что основную роль в уровне игры все-таки играет перебор вариантов — его организация, что допускается в перебор, какими методами он сокращается. Отличие нашей программы от остальных в этой части было существенным благодаря некоторым новым идеям перебора, которые использует программа, но мне кажется, что это — предмет для более подробного разговора.

Чемпионат мира

Во время конгресса ИФИП в Стокгольме состоялся I чемпионат мира среди шахматных программ.

Советский Союз представляла программа «Каисса», созданная в Институте проблем управления Г. М. Адельсон-Вельским, В. Л. Арлазаровым, автором статьи и другими.

Партии проходили пять вечеров подряд в концертном зале отеля «Биргер ярл». Одновременно велись шесть партий, и внимание многочисленной публики (200—300 человек) переходило от одного поединка к другому. Для того чтобы публика не скучала, директор турнира международный мастер Д. Леви все время комментировал партии, и этот комментарий сразу же переводился на шведский язык.

На сцене стояли две малогабаритные вычислительные машины, шесть терминалов и одиннадцать телефонов, соединявших зал с разными городами Европы. Один такой телефон соединял зал с Институтом проблем управления в Москве, где работала «Каисса».

Турнир был полон неожиданностей и курьезов.

В первой партии против австрийской программы «Франц» «Каисса» после 30 хода вдруг стала подолгу думать, и если бы не поставила мат на 34-м ходу, то наверняка просрочила бы время. Это объясняется тем, что на 30-м ходу «Каиссы» в Москве наступила полночь, а «Каисса», не разобравшись с часами, решила, что ей остается на обдумывание больше 24 часов. Может быть, именно такая неторопливость и позволила ей найти матующую комбинацию.

Неожиданности продолжались и во втором туре в партии против «Теч-2». По правилам турнира в случае технических неполадок можно было взять получасовой перерыв на их исправление. Автор «Теча», утомившись затяжной партией 1-го тура (она продолжалась до 3-х часов ночи), попросту проспал начало тура и опоздал ровно на полчаса. Это ему было засчитано как перерыв на технические неполадки, и потом в течение партии он не имел право останавливать часы.

Неаккуратность автора «Теча» сказалась и в партии — он сделал не тот ход, который сообщила ему машина, и слишком поздно заметил это. Ход был возвращен назад, но это сбило с толку «Каиссу» и привело ее к ошибке. В конце концов пришлось ввести эту позицию в машину заново и переиграть партию.

Технические ошибки наших противников стали недоброй традицией. В третьем туре уже после того, как в партии «Каиссы» с «Хаосом» была объявлена победа «Каиссы», авторы «Хаоса» заявили, что они ошиблись при вводе в свою машину предпоследнего хода «Каиссы». Они попросили разрешения переиграть партию с этого хода, но никто всерьез не рассчитывал, что мы примем это предложение, особенно после того, как Леви сказал, что если при переигровке у «Каиссы» сломается машина, то никакого прощения ей не будет. Тем не менее после консультации с Арлазаровым мы решили продолжать эту партию, что было очень высоко оценено американскими программистами.

Несмотря на то, что «Каисса» довольно быстро поставила мат, это было существенно для наших противников, потому что в случае равенства очков предпочтение оказывалось той программе, которая быстрее выигрывала и дольше проигрывала.

Внимание местных газет к турниру ослабевало по мере того, как становилось понятнее, что «Каисса» будет чемпионом. Поздравления начались уже в третьем туре, но в четвертом мы имели много неприятностей от «Остричa». Столик, за которым игралась наша партия, был вынесен на авансцену. Автор «Остричa» — М. Ньюборн (зная, что «Каисса» хорошо разбирается в индийской защите) в последнюю минуту внес коррективы в свою дебютную справочную, заменив первый ход d4 на Kf3. Когда он увидел, что «Каисса» знает и этот дебют, он в буквальном смысле схватился за голову, поскольку «Острич» не имел в своей библиотеке ни одного продолжения.

Тем не менее в этой партии, как и в других, сказался основной недостаток нашей программы — несовместимость идей, заложенных в дебютную справочную, и идей, заложенных в игровую часть программы. В итоге «Каисса» начала с проигрыша качества. Когда, поддавшись панике, я посчитал, что для переигровки за первое место нам надо продержаться 48 ходов, из Москвы твердый голос Арлазарова заявил: «Все равно мы эту партию выиграем», хотя для победы в турнире хватило бы ничьей. И действительно, к двенадцати часам ночи дело приблизилось к развязке. «Каисса», отыграв две пешки, повела свои пешки в ферзи и закончила партию, как всегда, элегантным матом.

«Каиссе» была вручена золотая медаль чемпиона мира среди шахматных программ. Медаль вручали президент ИФИП австралийский ученый Земанек и английский издатель Максвелл, на чьи деньги была сделана из чистого золота 110-граммовая медаль. Вручая медаль, Максвелл назвал нас первыми обладателями этой медали, из-за чего все корреспонденты сочли этот трофей переходящим. Однако потом Земанек официально объявил, что медаль вручена советским ученым навечно.

Организаторы турнира остались недовольны только тем, что лучшие программы турнира — «Каисса» и «Чесс-4,0» не сыграли друг с другом.

Поэтому мы решили сыграть товарищескую партию. На этот раз соперник вышел из дебюта не только с преимуществом, а просто в выигранной позиции — эндшпиль с двумя лишними проходными пешками. Уже поступило предложение в случае быстрого проигрыша «Каиссы» сыграть еще одну партию, поменявшись цветом фигур, но «Каисса» снова всех удивила — она сумела не только отыграть пешки, но и выиграть фигуру. Однако для победы этого преимущества не хватило.

После каждого тура участники собирались в «мирном» уголке зала и спокойно обсуждали научные результаты турнира и перспективы развития шахматного программирования. Эти обсуждения были очень полезны для участников.

Расставаясь, мы договорились встретиться на следующем конгрессе ИФИП в 1977 году в Канадском городе Торонто.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

ВОКРУГ ФОРМУЛЫ ПИКА

Н. Б. ВАСИЛЬЕВ

Чтобы оценить площадь многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, достаточно подсчитать, сколько клеток покрывает этот многоугольник (площадь клетки мы принимаем за единицу). Точнее, если S — площадь многоугольника, N_1 — число клеток, которые целиком лежат внутри многоугольника, и N_2 — число клеток, которые имеют с внутренностью многоугольника хоть одну общую точку, то $N_1 \leqslant S \leqslant N_2$. (Этот факт можно использовать для того, чтобы дать точное определение площади многоугольника и других фигур.)

Мы будем рассматривать ниже только такие многоугольники, все вершины которых лежат в *узлах* клетчатой бумаги — в точках, где пересекаются линии сетки. Оказывается, что для таких многоугольников можно указать простую формулу:

$$S = \frac{r}{2} + i - 1,$$

где S — площадь, r — число узлов, которые лежат на границе многоугольника (то есть на сторонах и в вершинах), i — число узлов, которые лежат строго внутри многоугольника.

Эту формулу называют иногда *«формулой Пика»* — по имени математика, открывшего ее в 1899 году. (Впрочем, нельзя быть уверенным в том, что эту естественную формулу, допускающую целый ряд различных доказательств, не придумал никто раньше.)

В нашей заметке и доказательство, и применения формулы Пика отчасти будут связаны с некоторыми задачами из «Задачника «Кванта».

Простые треугольники

Напомним, что мы рассматриваем только многоугольники,— в частности, треугольники — с вершинами в узлах клетчатой бумаги; каждый раз это специально не оговаривается. Лист клетчатой бумаги мы считаем бесконечным во всех направлениях, клетки — квадратами со стороной 1.

Площадь любого треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, легко посчитать, представив ее как сумму или разность площадей прямоугольных треугольников и прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, проходящим через вершины нарисованного треугольника. Проделав это, например, для треугольников, изображенных на рисун-

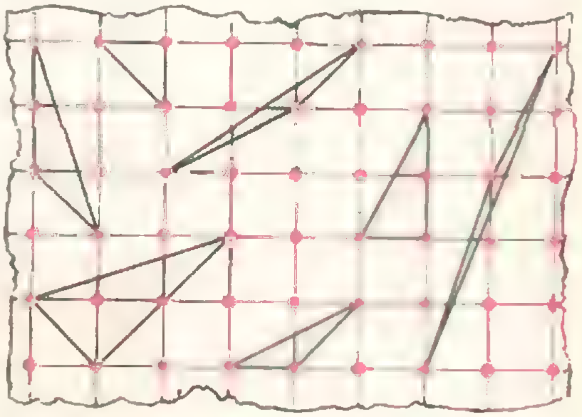


Рис. 1.

ке 1, вы убедитесь, что площадь получается всегда равной «полуцелому» числу — числу вида $m/2$, где m — целое.

Назовем треугольник *простым*, если ни внутри него, ни на его сторонах нет узлов сетки, за исключением вершин. (Такое название выбрано потому, что любой другой треугольник можно составить из простых; это одно из тех утверждений, которые понадобятся нам ниже.) Обратите внимание, что все простые треугольники на рисунке 1 имеют площадь $1/2$. Мы увидим, что это не случайно.

В решении задачи М226, опубликованной в «Кванте», 1974, № 6, читателям предлагалось подумать над такой задачей. *Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке* (*рис. 2; ясно, что после любого числа таких прыжков кузнечики будут попадать в узлы клетчатой бумаги*). *В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?*

Назовем треугольник *достижимым*, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые вначале были в трех вершинах одной клетки; *прыжком* будем называть преобразование треугольника, заключающееся в том, что одна из вершин переходит в точку, симметричную относительно любой из двух других вершин (эти две вершины остаются на месте).

Теорема 1. *Следующие три свойства треугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги эквивалентны друг другу:*

1) *треугольник имеет площадь $1/2$;*
2) *треугольник прост;*
3) *треугольник достижим.*

В справедливости этой теоремы вы можете убедиться, доказав следующие 12 утверждений. Звездочкой отмечены те, к доказательству которых имеются указания в конце журнала. Остальные — почти очевидны, если доказывать их в таком порядке:

$$\begin{tikzcd}
3 \arrow[r, Rightarrow] & 4 \arrow[d, Rightarrow] & & 1 \arrow[r, Rightarrow] & 2 \arrow[d, Rightarrow] & 10 \arrow[d, Rightarrow] & \\
5 \arrow[r, Rightarrow] & 6 \arrow[r, Rightarrow] & 7 \arrow[r, Rightarrow] & 8 \arrow[r, Rightarrow] & 9 \arrow[r, Rightarrow] & 11 \arrow[r, Rightarrow] & 12
\end{tikzcd}$$

1. Площадь треугольника при прыжке не меняется.

2. Любой достижимый треугольник имеет площадь $1/2$.

3*. Если достроить простой треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, то ни внутри, ни на сторонах этого параллелограмма не будет узлов (не считая вершин).

4*. Из простого треугольника при прыжке получается простой.

5*. У простого треугольника один из углов — тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольника, у которого три вершины принадлежат одной клетке; такой простой треугольник — со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$ мы будем называть *минимальным*).

6. Из любого простого не минимального треугольника можно одним прыжком получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

7*. Любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный.

8. Любой простой треугольник достижим.

9. Любой простой треугольник имеет площадь $1/2$.

10*. Любой треугольник можно разрезать на простые.

11. Площадь любого треугольника равна $m/2$, причем при любом разрезании его на простые их количество равно m.

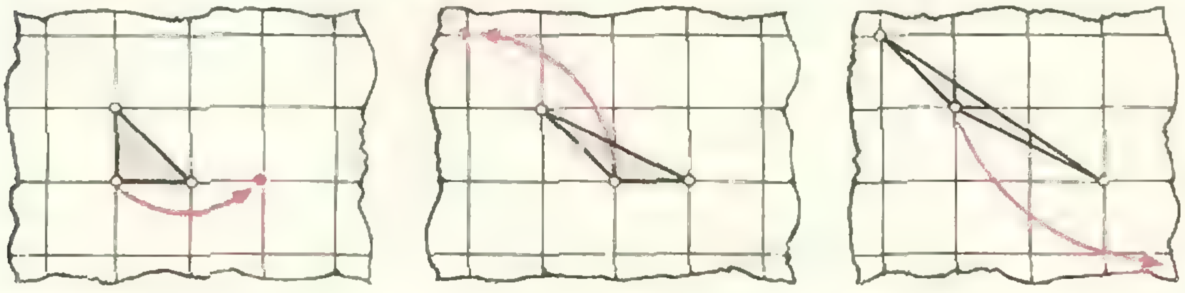


Рис. 2.

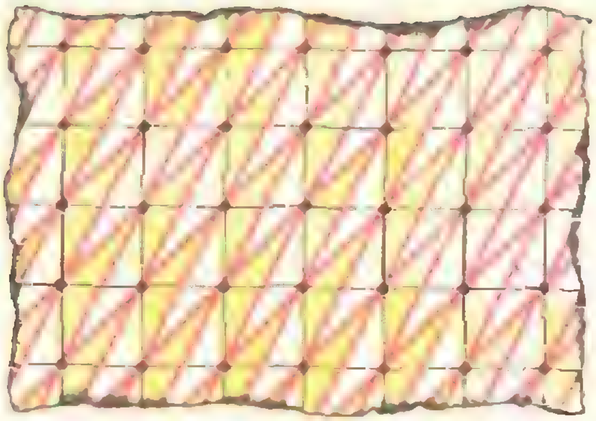


Рис. 3.

12. Любой треугольник площади 1/2 — простой.

Ясно, что из утверждений 2, 8 и 12 вытекает теорема 1.

Докажите еще несколько свойств *простых треугольников.*

13. Для любых двух узлов A и B решетки, на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC — простой.

14. Узел C в предыдущей задаче можно всегда выбрать так, что угол ACB будет тупым или прямым.

15. Параллелограмм тогда и только тогда *порождает решетку,* состоящую из всех узлов клетчатой бумаги (см. статью А. А. Егорова, с. 26), когда каждый из треугольников, на которые его делит диагональ, — простой.

То же самое свойство можно сформулировать так.

16. Треугольник ABC — простой тогда и только тогда, когда *всевозможные треугольники,* полученные из ABC параллельными переносами, переводящими узел A в различные узлы решетки, не накладываются друг на друга (рис. 3).

Вернемся теперь к задаче про трех кузнечиков. Пусть кузнечики в начальном положении занимают какой-то определенный (а не произвольный) минимальный треугольник — в первоначальной формулировке задачи именно это и предполагалось. Поскольку каждый кузнечик смещается при прыжке обязательно на четное число клеток по горизонтали и вертикали, то он обязательно попадает в узел «своей» решетки с размером клеток 2×2. На рисунке 4 три из четырех «подрешеток», составляющих всю решетку, *раскрашены в разные цвета* (каждый кузнечик прыгает в узлы своего цвета), а четвертая — того же цвета, что и линии сетки.

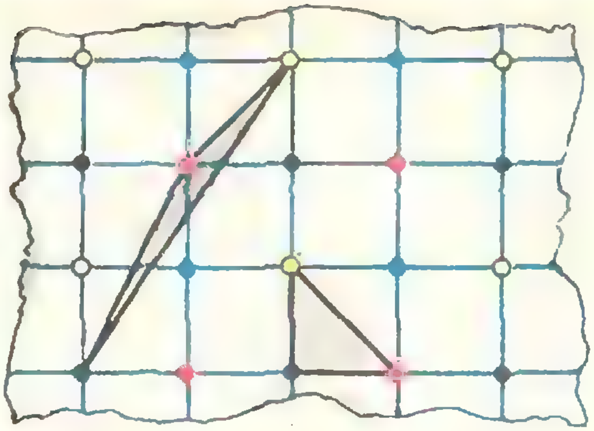


Рис. 4.

Согласно теореме 1 кузнечики могут одновременно попасть в вершины *простого треугольника.*

Отсюда вытекает еще одно интересное свойство этих треугольников.

17. Если решетку — узлы клетчатой бумаги — разбить на четыре подрешетки с клетками 2×2 (рис. 4), то вершины простого треугольника обязательно попадут в три *разные подрешетки (все три имеют разный цвет).*

Теперь уже нетрудно доказать следующие два утверждения, дающие ответ к задаче о трех кузнечиках (в том случае, когда начальный треугольник фиксирован; рис. 4).

18. Три кузнечика могут одновременно попасть в те и только те тройки точек, которые служат вершинами простого треугольника и имеют тот же цвет, что и соответствующие вершины начального треугольника.

19. Два кузнечика могут одновременно попасть в те и только те пары узлов соответствующих цветов, на отрезке между которыми нет других узлов.

Триангуляция многоугольника

Мы подробно изучили частный вид многоугольников на клетчатой бумаге, которому в формуле Пика соответствуют значения $i = 0$, $r = 3$, $S = {}^1/_2$. Но от этого частного случая можно перейти сразу к самому общему, воспользовавшись теоремой о разрезании на треугольники *произвольного* многоугольника (клетчатая бумага больше не нужна).

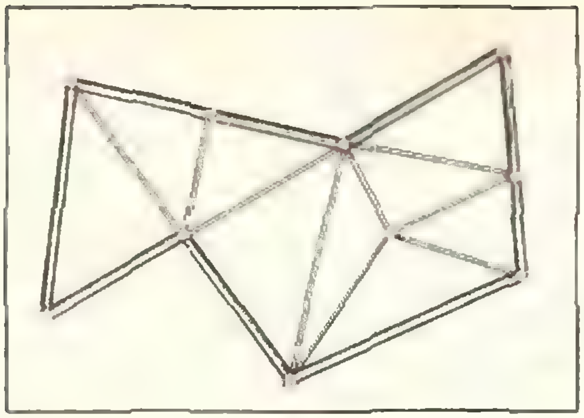


Рис. 5.

Пусть на плоскости задан некоторый (не обязательно выпуклый) многоугольник и некоторое конечное множество K точек, лежащих внутри многоугольника и на его границе (причем все вершины многоугольника принадлежат множеству K). *Триангуляцией с вершинами* K называется разбиение данного многоугольника на треугольники с вершинами в множестве K такое, что каждая точка из K служит вершиной каждому из тех треугольников триангуляции, которым эта точка принадлежит (то есть точки из K не попадают внутрь или на стороны треугольников, см. рис. 5).

Теорема 2. а) *Любой n-угольник можно разрезать диагоналями на треугольники, причем количество треугольников будет равно $n-2$.* (Это разбиение—триангуляция с вершинами в вершинах n-угольника.)

б) *Пусть на границе многоугольника отмечено r точек (включая все вершины), внутри — еще i точек. Тогда существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках, причем количество треугольников такой триангуляции будет равно $r+2i-2$.*

Разумеется, а) — частный случай, б), когда $r=n$, $i=0$. Доказательство этой теоремы мы снова разобьем на ряд простых утверждений.

20*. Из вершины наибольшего угла n-угольника ($n>3$) всегда можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

21. Если n-угольник разрезан диагональю на p-угольник и q-угольник, то $n=p+q-2$.

22. Любой n-угольник можно разрезать диагоналями на $n-2$ треугольника.

23. Сумма углов n-угольника равна $180°\cdot(n-2)$.

24. Для любого треугольника, внутри и на границе которого отмечено несколько точек (в том числе — все три его вершины), существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках.

25. То же самое верно и для любого n-угольника.

26. Число треугольников триангуляции равно $r+2i-2$, где i и r — количество отмеченных точек соответственно внутри и на границе многоугольника.

Отсюда вытекает теорема 2.

27. Выведите из теорем 1 и 2 формулу Пика: $S=r/2+i-1$.

Прием, который удобно использовать в доказательстве утверждения 26 — подсчет суммы углов, — помогает и при решении других комбинаторных задач по геометрии, в частности, задач про разбиение многоугольника. Приведем еще два примера.

Назовем разбиение n-угольника на несколько многоугольников *правильным*, если каждая вершина одного из многоугольников разбиения служит вершиной всех других многоугольников разбиения, которым она принадлежит.

28. Если из вершин k-угольников, на которые разбит правильным образом n-уголь-

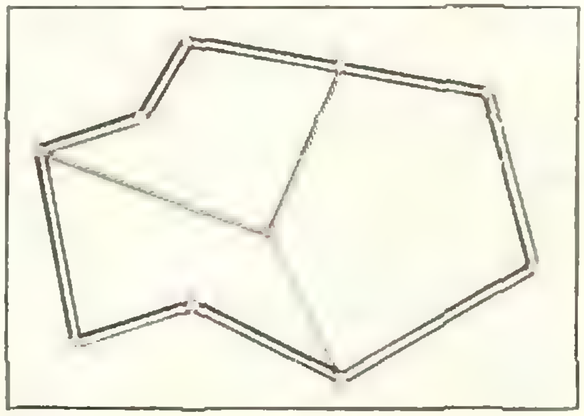


Рис. 6.

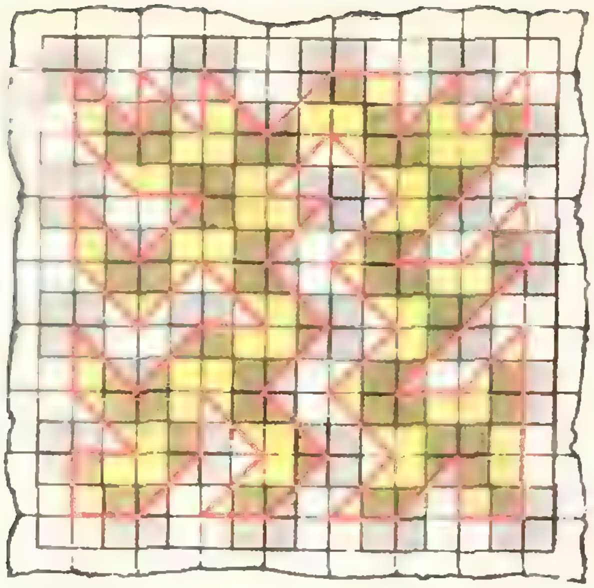


Рис. 7

ник, i вершин лежат внутри и r — на границе n-угольника, то количество k-угольников равно

$$m=\frac{r+2i-2}{k-2}.$$

29 (Вариант «теоремы Эйлера»). Если N_0 точек плоскости и N_1 отрезков с концами в этих точках образуют многоугольник, правильно разбитый на N_2 многоугольников, то (рис. 6) $N_2-N_1+N_0=1$.

Несколько задач

Применения формулы Пика в основном связаны не с подсчетом площадей конкретных многоугольников, а с различными задачами и теоремами о ломаных на клетчатой бумаге.

30. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так обстоит дело, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

31. Пусть A и B — два узла клетчатой бумаги, из которых второй на p клеток правее и на q — выше первого (то есть расстояние между узлами равно $\sqrt{p^2+q^2}$). Чему равно расстояние до прямой AB от ближайшего к ней узла, не лежащего на этой прямой?

32. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

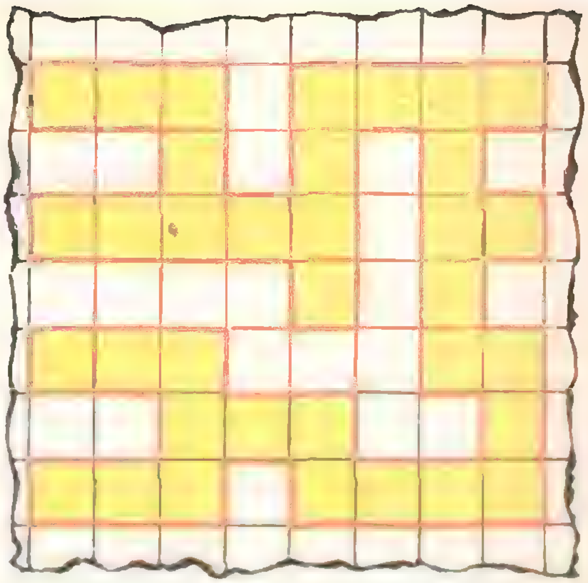


Рис. 8.

а) Какую наибольшую длину она может иметь?

б) Какую площадь может ограничивать эта ломаная? (Сторона клетки равна 1.)

Задача а) уже разбиралась в «Кванте» № 5 за этот год (с. 52) — она имеет номер М220 в «Задачнике «Кванта». Здесь мы приведем другое решение. Но начнем с задачи б). Из формулы Пика сразу следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2-1=31$ (узлами клетчатой бумаги служат центры 64 полей; по условию все они лежат на границе многоугольника). Перейдем к задаче а). На рисунке 7 приведен пример пути короля, в котором 36 из 64 ходов имеют длину $\sqrt{2}$ (направлены по диагонали). Докажем, что больше 36 таких ходов быть не может.

На каждом отрезке длины $\sqrt{2}$, входящем в путь короля, построим, как на диагонали, квадрат 1×1. Одна половинка этого квадрата лежит вне многоугольника, который ограничивает путь короля. Но общая площадь, занятая такими половинками, не превышает $49-31=18$, поскольку все они не выходят за пределы квадрата 7×7 клетчатой бумаги. Значит, количество диагональных ходов не превышает 36.

Итак, ответы к задаче 32:

а) $28+36\sqrt{2}$; б) 31.

33. Нужно провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p\times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать? (рис. 8).

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 февраля 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант» После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», M296, M297» или «... Ф308».

Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно называем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

M296—M300; Ф308—Ф312

M296. В таблицу $n\times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма n чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

А. Туланов

M297. На плоскости заданы 12 точек, являющихся вершинами четырех квадратов $A_1B_1A_2C_1$, $A_2C_2A_3B_2$, $A_3B_3A_4C_3$ и $A_4C_4A_1B_4$ (вершины каждого квадрата перечислены по часовой стрелке). Докажите, что $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — конгруэнтные параллелограммы, один из которых получается из другого поворотом на 90° (эти параллелограммы могут быть вырожденными: четыре вершины каждого из них в этом случае лежат на одной прямой).

Л. П. Купцов

M298. Запишем все несократимые дроби $\frac{p}{q}$, где $0 < p < q \leqslant m$, в порядке возрастания (m — данное натуральное число). Например, при $m=5$ получится последовательность

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}.$$

Докажите, что для любых двух соседних дробей $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ в такой последовательности выполняется равенство $qr - ps = 1$.

M299. При каких n правильный n-угольник можно разместить на листе бумаги в линейку так, чтобы все вершины лежали на линиях? (Линии — параллельные прямые, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга.)

Н. Б. Васильев

М300*. Алфавит состоит из трех букв: *a*, *b*, *c*. Назовем *словом* последовательность любой длины, состоящую из этих букв. При образовании слов некоторые буквосочетания (из двух и более букв) считаются запрещенными. Известно, что в списке запрещенных буквосочетаний все слова имеют разную длину.

Докажите, что существуют слова любой длины, не содержащие запрещенных буквосочетаний.

А. М. Степин

Ф308. Фотометр представляет собой лист бумаги с жирным пятном. Этот лист устанавливают между двумя точечными источниками света. Сила света одного источника 20 *св*, силу света другого источника требуется определить. Для этого вначале подбирают расстояния l_1 и l_2 источников от листа так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть на нее со стороны первого источника. Оказалось, что $l_2 = 2l_1$. Затем подбирают расстояния l_1' и l_2' так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть со стороны второго источника. Оказалось, что $l_1' = l_2'$. Определить силу света второго источника.

Лист ставится перпендикулярно к линии, соединяющей источники.

Подсказка. Каждый участок бумаги можно охарактеризовать коэффициентом пропускания и коэффициентом отражения света.

Ф309. Змея заползла наполовину в неподвижную узкую трубу, лежащую на плоскости. Вторая половина змеи извивается произвольно по плоскости. Считая змею тонким однородным шнуром длины l, найти, в какой области может оказаться центр тяжести всей змеи.

В. Д. Горбунова

Ф310. Концы пружины закреплены. Как, не освобождая концов пружины, деформировать ее так, чтобы пружина после такой обработки стремилась а) сократиться? б) удлиниться?

Ф311. Однородное магнитное поле меняется по абсолютной величине с постоянной скоростью k $(B = kt)$. Имеется кусок меди, плотность которой d и удельное сопротивление ρ. Масса куска m. Из этого куска можно вытянуть однородную проволоку, из которой в свою очередь сделать замкнутый контур. Какой можно получить максимально возможный ток в этом контуре?

В. Д. Керженцев

Ф312. Обруч радиуса R, катящийся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает абсолютно неупруго на ступеньку высоты h $(h < R)$. Какую скорость будет иметь обруч, когда он «взберется» на ступеньку? При какой минимальной скорости обруч сможет «взобраться» на ступеньку?

Проскальзывания нет.

М. Геркс, Д. Сахаров, А. Цесис
(ученики Винницкой с. ш. № 17)

Решения задач

М256—М260; Ф269—Ф272

М256. *Около окружности описан многоугольник. Точки касания его сторон с окружностью служат вершинами второго, вписанного в эту окружность многоугольника. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки M окружности до сторон одного многоугольника равно произведению расстояний от этой точки до сторон второго.*

(Под расстоянием от точки M до стороны понимается расстояние до прямой, на которой лежит эта сторона.)

Докажем сначала такую лемму. Если M, P и Q — три произвольные точки данной окружности, то расстояние $|MK|$ от точки M до прямой PQ равно среднему геометрическому расстояний $|ML|$ и $|MN|$ от M до касательных, проведенных в точках P и Q:

$$|MK|^2 = |ML|\;|MN|. \qquad (1)$$

Представим себе, что точки P и Q зафиксированы, а M передвигается по окружности. При любом ее положении*) углы $\angle MPL$ и $\angle MQK$ (не превосходящие, разумеется, 90°) равны по величине — каждый из них измеряется половиной дуги PM (не превосходящей полуокружности), поэтому прямоугольные треугольники MPL и MQK подобны и

$$\frac{|ML|}{|MK|} = \frac{|MP|}{|MQ|}. \qquad (2)$$

(Это равенство, очевидно, сохраняется и в том случае, когда прямоугольные треугольники вырождаются в отрезки — в этот момент точка M диаметрально противоположна P.) Точно так же доказывается, что $\triangle MQN \sim \triangle MPK$:

$$\frac{|MN|}{|MK|} = \frac{|MQ|}{|MP|}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует (1).

Докажем теперь утверждение задачи. Для этого применим лемму к точке M окружности и к каждой стороне PQ вписанного многоугольника, а затем перемножим все равенства вида (1).

Недочеты в решениях, присланных читателями, были связаны в основном с тем, что при доказательстве леммы не учитывались все возможные случаи расположения точек P, Q и M на окружности (некоторые из них показаны на рис. 1, *а*, *б*, *в*). В нашем решении применяется *рассуждение, которое охватывает сразу все случаи.*

М257. *При каких натуральных $n \geqslant 2$ неравенство*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant p\,(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$$

выполняется для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если а) $p = 1$; б) $p = {}^4/_3$; в) $p = {}^6/_5$?

Ответ. а) при всех n; б) при $n \leqslant 3$; в) при $n \leqslant 4$.

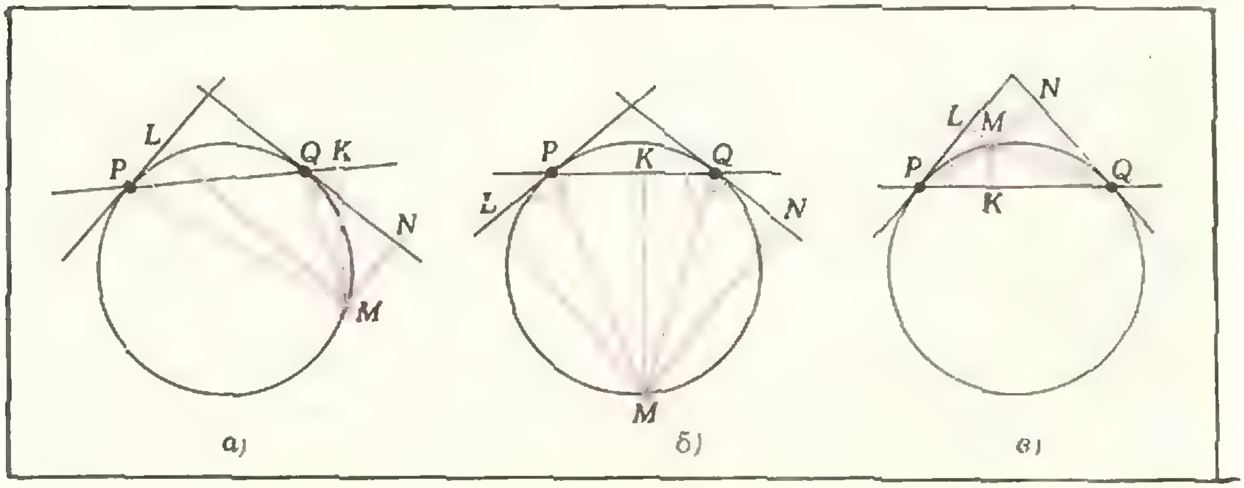


Рис. 1.

---

*) Ниже мы считаем, что M не совпадает с P или Q (в вырожденном случае равенство (1) очевидно — обе его части равны 0).

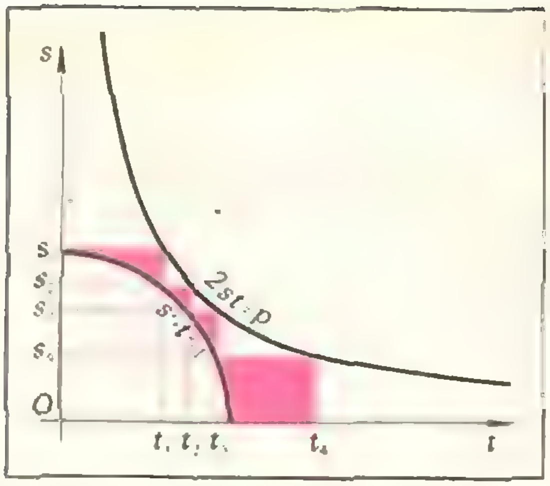


Рис. 2. Чем ближе p к единице, тем ближе расположена гипербола к окружности и тем больше ступеней имеет лестница.

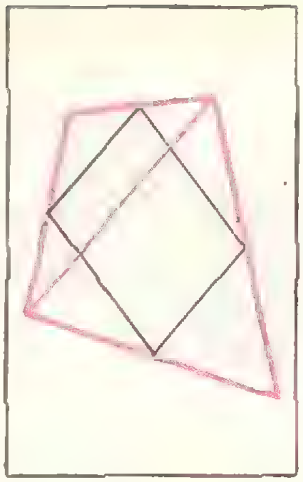


Рис. 3.

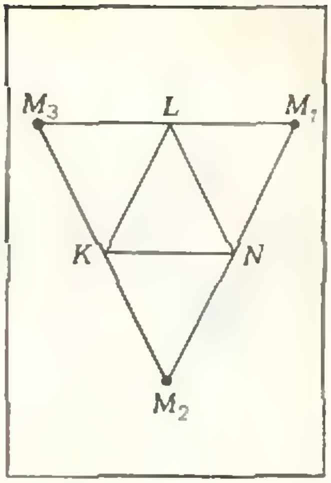


Рис. 4.

Заметим, что если положить в неравенстве

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 - px_1x_2 - \\ - px_2x_3 - \ldots - px_{n-1}x_n \geqslant 0 \quad (*)$$

несколько последних переменных $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ равными нулю, то получится аналогичное неравенство, соответствующее меньшему n. Отсюда следует, что если $(*)$ выполняется (для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$) при некотором n, то оно выполняется и при меньших n. Таким образом, для каждого фиксированного p существует такое целое $N(p) \geqslant 2$, что $(*)$ выполнено при $n < N(p)$ и не выполнено (для некоторых $x_1, x_2, \ldots, x_n$) при $n \geqslant N(p)$; возможно также, что $(*)$ выполнено при всех n (в этом случае можно считать, что $N(p) = \infty$).

Последний случай имеет место при $p = 1$. Действительно, в этом случае $(*)$ эквивалентно очевидному неравенству

$$x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \\ + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 \geqslant 0.$$

Пусть $p = {}^4/_3$. Тогда при $n = 3$ $(*)$ эквивалентно неравенству

$$(3x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (2x_2 - 3x_3)^2 \geqslant 0,$$

а при $n = 4$ неравенство $(*)$ нарушается, например, когда $x_1 = x_4 = 2$, $x_2 = x_3 = 3$ (при $n = 4$ неравенство $(*)$ эквивалентно такому:

$$(3x_1 - 2x_2)^2 - x_2^2 + 6(x_2 - x_3)^2 - \\ - x_3^2 + (2x_3 - 3x_4)^2 \geqslant 0;$$

отсюда и возник наш пример).

Пусть $p = {}^6/_5$. Тогда при $n = 4$ $(*)$ эквивалентно неравенству

$$(5x_1 - 3x_2)^2 + x_2^2 + 15(x_2 - x_3)^2 + \\ + x_3^2 + (3x_3 - 5x_4)^2 \geqslant 0,$$

а при $n = 5$ оно нарушается, например, когда $x_1 = x_5 = 9$, $x_2 = x_4 = 15$, $x_3 = 16$ (этот пример возникает естественным образом, если преобразовать $(*)$ к виду

$$16(5x_1 - 3x_2)^2 + (16x_2 - 15x_3)^2 - 50x_3^2 + \\ + (15x_3 - 16x_4)^2 + 16(3x_4 - 5x_5)^2 \geqslant 0).$$

Обсудим теперь, как ответить на вопрос задачи при произвольном $p > 0$. Легко показать, что $N(p) = \infty$ при любом $p \in [0, 1]$ и $N(p)$ конечно при каждом $p > 1$, причем $N(p) = 2$ при $p > 2$. В принципе при каждом $p > 1$ можно найти $N(p)$, преобразовав левую часть $(*)$ к сумме квадратов (причем заботиться о симметричности формул и о том, чтобы коэффициенты получались целыми или рациональными, вовсе не обязательно; выше мы сделали это для того, чтобы записать решение покороче). Например, можно привести $(*)$ к виду

$$(s_1x_1 - t_1x_2)^2 + (s_2x_2 - t_2x_3)^2 + \ldots + \\ + (s_{n-1}x_{n-1} - t_{n-1}x_n)^2 + r_nx_n^2,$$

последовательно полагая

$$t_k = p/2s_k, \quad s_{k+1} = \sqrt{1 - t_k^2}$$

($s_1 = 1$, $k = 1, 2, \ldots$). Тогда $r_n = s_n^2 \geqslant 0$ при $n < N(p)$ и $r_n < 0$ при $n = N(p)$. Таким образом, $N(p) - 1$ (наибольшее n, при котором $(*)$ еще выполняется) равно числу ступеней «лестницы», заключенной между графиками $s^2 + t^2 = 1$, $st = p/2$ и начинающейся в точке $s = 1$, $t = 0$, (рис. 2). Пусть p_k — значение p, при котором лестница симметрична относительно биссектрисы $s = t$ (заканчивается в точке $s = 0$, $t = 1$) и содержит k ступеней; *ясно, что последовательность* $p_1 = 2 > p_2 > p_3 > \ldots$ стремится к 1 и $N(p) = k + 1$ при $p_{k-1} \geqslant p > p_k$. Нетрудно доказать, что $p_2 = \sqrt{2}$, но следующие p_k находятся уже из громоздких уравнений, сводящихся к алгебраическим уравнениям высокой степени.

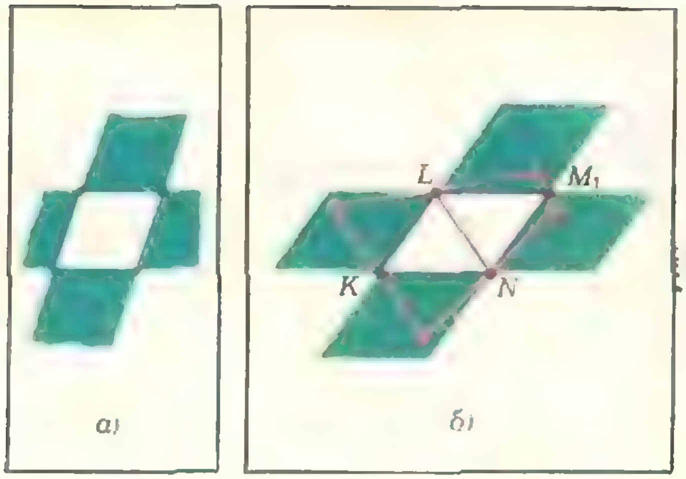


Рис. 5.

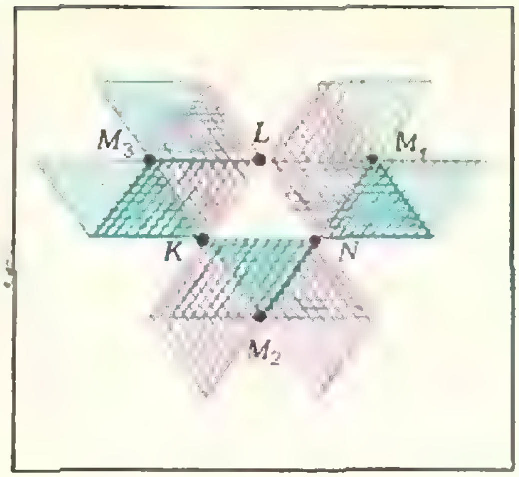


Рис. 6.

Решиз задачу М257, мы оценили p_2, p_3 и p_4: поскольку $N\left(\frac{4}{3}\right) = 4$, $N\left(\frac{6}{5}\right) = 5$, то $p_2 > \frac{4}{3} > p_3 > \frac{6}{5} > p_4$.

Н. Б. Васильев

М258. *На плоскости даны три точки K, L, N. Про четырехугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трех его сторон лежат в данных точках K, L, N. Найдите множества точек, в которые может попасть:*

а) середина четвертой стороны;

б) вершина этого четырехугольника.

а) Заметим, что если в четырехугольнике соединить последовательно середины сторон, то образуется параллелограмм. Для доказательства этого широко известного факта достаточно провести одну из диагоналей данного четырехугольника (рис. 3): в образовавшихся треугольниках два отрезка, соединяющих середины сторон, являются средними линиями, а, следовательно, они параллельны проведенной диагонали и равны ее половине.

Из сделанного замечания следует, что середина четвертой стороны — точка M — является четвертой вершиной параллелограмма, тремя другими вершинами которого служат K, L и N. Легко видеть, что множество точек, в которые может попасть точка M, состоит из трех точек $\{M_1, M_2, M_3\}$ — вершин треугольника, средними линиями которого являются стороны треугольника KLN (рис. 4).

б) Рассмотрим один из параллелограммов, например, KLM_1N. Где могут находиться вершины выпуклого четырехугольника, если середины сторон находятся в точках K, L, M_1 и N? Напомним, что многоугольник — выпуклый, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, являющейся продолжением его стороны. Поэтому вершины четырехугольника могут лежать лишь в полуполосах между продолжениями противоположных сторон параллелограмма (рис. 5, *а*). Пользуясь тем, что две соседние вершины четырехугольника симметричны относительно вершины параллелограмма, находим множество точек, в которых могут оказаться вершины четырехугольника — оно состоит из четырех параллелограммов, получающихся из KLM_1N параллельным переносом и имеющих с ним общую сторону (рис. 5, *б*); нужно еще убедиться, что любая из точек этого «креста» может служить вершиной четырехугольника.

Если рассмотреть теперь еще две точки M_2 и M_3, в которых может оказаться середина четвертой стороны многоугольника, и взять объединение трех «крестов», соответствующих M_1, M_2 и M_3, то окончательно получится множество, выделенное штриховкой на рисунке 6; оно состоит из 15 треугольников, конгруэнтных ΔKLN.

А. П. Савин

М259. *Назовем* ***квартетом*** *четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. (Например, на рисунке 7 нарисовано три квартета.)*

Какое наибольшее число квартетов, не имеющих общих клеток, можно разместить:

а) в квадрате 5×5?

б) в прямоугольнике m×n клеток?

а) В квадрате 5×5 можно расположить пять квартетов (см. рис. 8). Больше пяти квартетов в нем расположить нельзя, поскольку из 5×5 = 25 клеток по крайней мере пять клеток — по одной в каждой строке — в квартеты не войдут.

б) Если m и n — четные, то очевидно, что в прямоугольнике $m \times n$ можно разместить $mn/4$ квартетов.

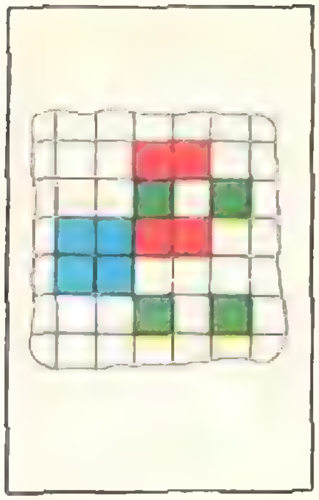


Рис. 7.

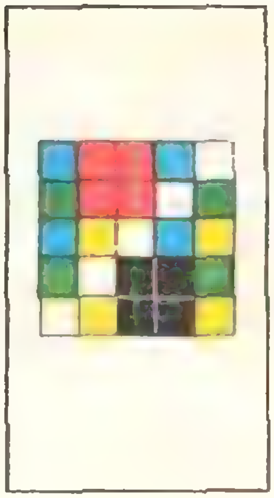


Рис. 8.

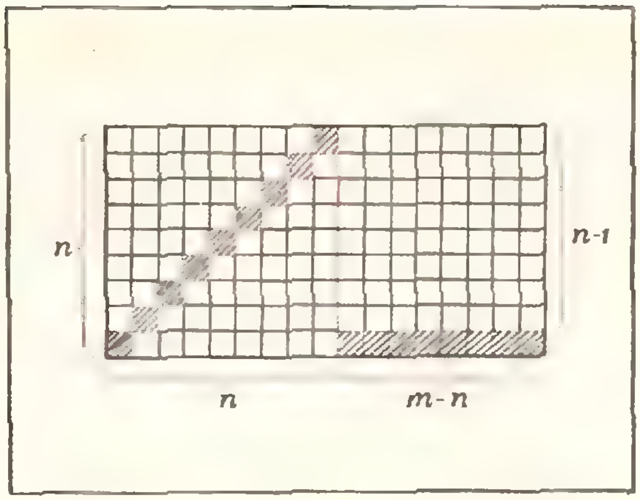


Рис. 9.

Если m четно, а n нечетно, то можно разместить $m(n-1)/4$ квартетов (аналогичная формула верна для нечетного m и четного n).

Если же и m и n — нечетные, то надо рассматривать два случая. (Будем считать, что $m \geqslant n$.)

1) $n = 4k + 1$. Ясно, что в этом случае можно покрыть квартетами не более $mn - (m - n) - n = m(n - 1)$ клеток; на рисунке 9 показано, как это сделать: из квадрата $n \times n$ выкинута диагональ (напомним, что n — нечетное), и квартеты размещены аналогично тому, как это сделано на рисунке 8 в квадрате 5×5; из прямоугольника $(m - n) \times n$ ($m - n$ — уже четное) выкинута нижняя строка — тогда уже в прямоугольнике $k \times l = (m - n) \times (n - 1)$ и k и l — четные, и как размещать квартеты — очевидно. Всего — снова $m(n - 1)/4$ квартета.

2) $n = 4k + 3$. В этом случае $m(n - 1)$ клеток покрыть квартетами не удастся, поскольку число $m(n - 1)$ не делится на 4. Зато $m(n - 1) - 2$ клетки покрыть уже можно — как именно, показано на рисунке 10 — выкинуты $m + 2$ заштрихованные клетки: $n - 2$ — на диагонали квадрата $(n - 2) \times (n - 2)$, $(m - n + 2)$ — в правой части нижней строки исходного прямоугольника, и две клетки — в левом верхнем углу (тогда $n - 3$ делится на 4, $m - n + 2$ и $n - 1$ — оба четные).

А. А. Григорян

М260. *Окружность разбита точками A_1, A_2, …, A_n на n равных частей, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Две дуги (с концами в точках разбиения) называются одинаково окрашенными, если при некотором повороте окружности одна из них полностью, включая цвет каждой части, совпадает с другой. (Например, на рисунке 11 дуги A_2A_6 и A_6A_{10} одинаково окрашены.)*

Докажите, что если для каждой точки разбиения A_i можно указать две непересекающиеся одинаково окрашенные дуги с общим концом A_i, то всю окружность можно разбить на несколько одинаково окрашенных дуг, то есть окраска «периодическая». Рассмотрите сначала случай, когда красок всего две; скажем, красная и черная.

Мы ограничимся тем, что приведем схему доказательства, оставив читателям детали промежуточных рассуждений.

Сначала условимся о терминологии и обозначениях. Большими латинскими буквами будем обозначать точки разбиения, малыми греческими — окрашенные дуги с концами в точках разбиения. Запись $\alpha = \beta$ будет оз-

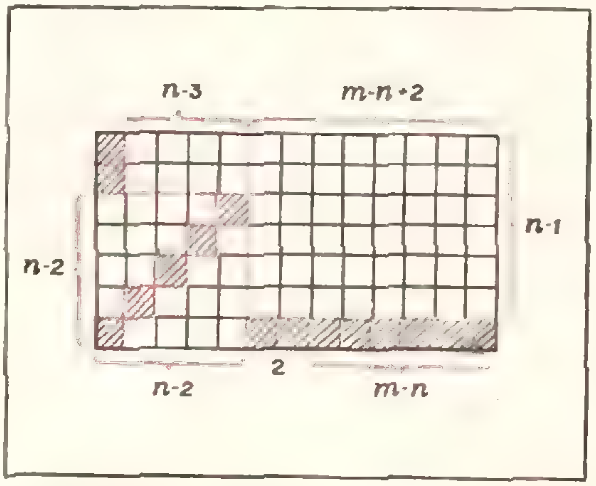


Рис. 10.

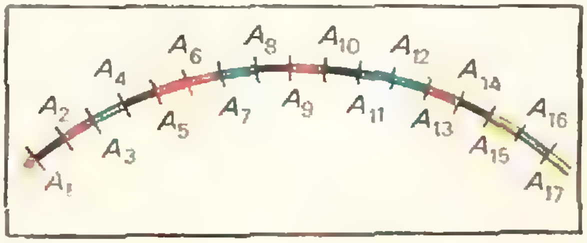


Рис. 11

начать, что дуги α и β одинаково окрашены. В дальнейшем одинаково окрашенные дуги будем называть *равными*. Через $|\alpha|$ обозначим длину дуги α. Направление обхода окружности по часовой стрелке примем за положительное (это позволит нам естественным образом различать начала и концы дуг). Через $\beta\gamma$ обозначим дугу, получающуюся, *если к концу дуги β приклеить начало дуги γ* (рис. 12).

Симметричной дугой назовем такую дугу, на которой лежат равные меньшие дуги в начале и конце, то есть α — симметричная дуга, если существуют дуги β, γ и δ такие, что $\alpha = \beta\gamma = \delta\beta$ (рис. 13).

По условию для каждой точки разбиения можно указать пару непересекающихся равных дуг с общим концом в этой точке. Вообще говоря, таких пар дуг для каждой точки может оказаться и несколько — попробуйте привести пример. Поэтому уточним, *какую именно пару мы будем рассматривать*: сопоставим каждой точке разбиения ту пару непересекающихся равных дуг (с общим концом), дуги которой имеют минимальную длину; в дальнейшем только такие пары и будем рассматривать.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Если дуга α является минимальной дугой, то она несимметрична* (докажите эту лемму самостоятельно).

Пусть среди всех минимальных пар дуг, соответствующих различным точкам разбиения, пара, соответствующая точке A, имеет максимальную длину, и пусть отличные от A концы дуг этой пары — точки B и C (см. рис. 14, *а*) — не совпадают.

Центральным местом доказательства является

Основная лемма. Если из окружности вырезать дугу BA и «склеить» точку A с точкой B, то *новая окружность* будет снова обладать тем свойством, что для любой точки разбиения можно указать пару непересекающихся равных дуг с общим концом в этой точке.

С помощью этой леммы «периодичность» окраски доказывается индукцией по числу точек разбиения. Индукцию мы проведем позднее, а сейчас наметим доказательство основной леммы.

Обозначим дуги BA и AC буквой α. Рассмотрим часть новой окружности, получающейся из старой после вырезания дуги *BA и «склеивания» точки A с точкой B* (см. рис. 14, *б*); обозначим точки разбиения новой окружности буквами со штрихами.

Пусть M' — некоторая точка разбиения новой окружности, не лежащая на дуге $A'C'$, и пусть M — соответствующая ей точка старой окружности. Точке M отвечает минимальная пара равных (например, дуге ν — см. рис. 14, *а*) дуг LM и MK. По условию леммы $|\alpha| \geqslant |\nu|$, следовательно, дуга MK целиком лежит на дуге MA.

Но дуга MA равна дуге $M'C'$; значит, дуга ν лежит в начале дуги $M'C'$, то есть точка M' *служит ее началом*. Рассуждая аналогично, построим по дуге LM дугу на новой окружности, равную ν, с концом в точке M'.

Однако могло бы получиться так, что построенные две дуги (одна — с началом в точке M', другая — концом в этой точке) пересекаются (рис. 15). Покажем, что *этого на самом деле быть не может*.

Обозначим дуги $M'L'$, $L'K'$ и $K'M'$ (в направлении по часовой стрелке) через β, η и δ соответственно; тогда $\nu = \beta\eta = \eta\delta$, то есть ν — симметричная дуга; но это противоречит лемме 1, и значит, дуги $L'M'$ и $M'K'$ — не пересекаются.

Тем самым для точек M', не лежащих на дуге $A'C'$, все доказано.

Пусть теперь точка M' лежит на дуге $A'C'$, и пусть для определенности $|A'M'| \leqslant |M'C'|$ (см. рис. 16, *б*). Тогда на старой окружности *точке M' соответствуют* две точки — обозначим их через M и M_1; точка M лежит на дуге BA, точка M_1 — на дуге AC (рис. 16, *а*). Случай, когда дуга MK (минимальная дуга ν с началом в точке M)

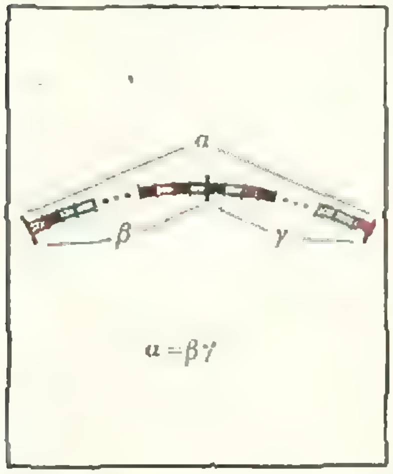


Рис. 12.

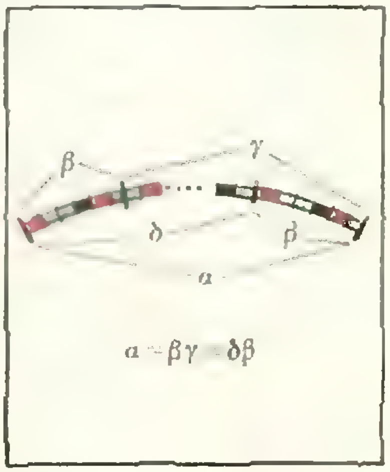


Рис. 13.

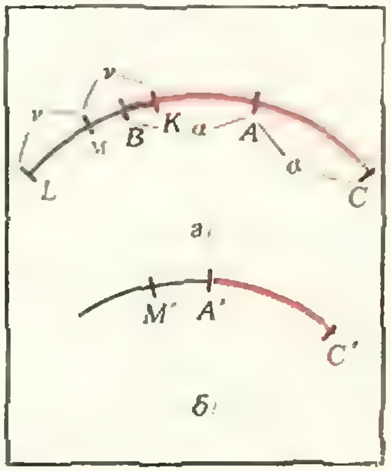


Рис. 14.

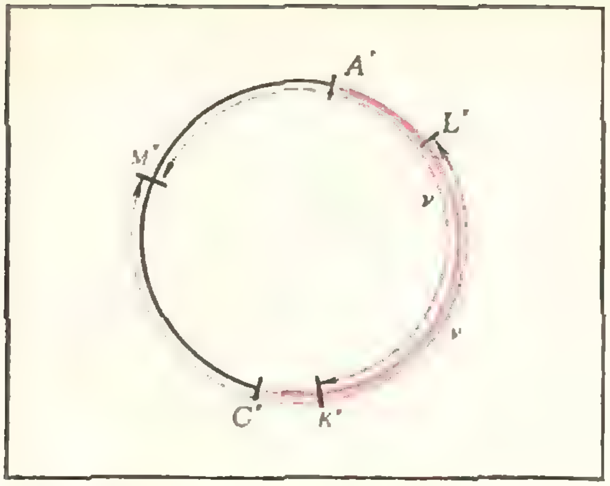


Рис. 15.

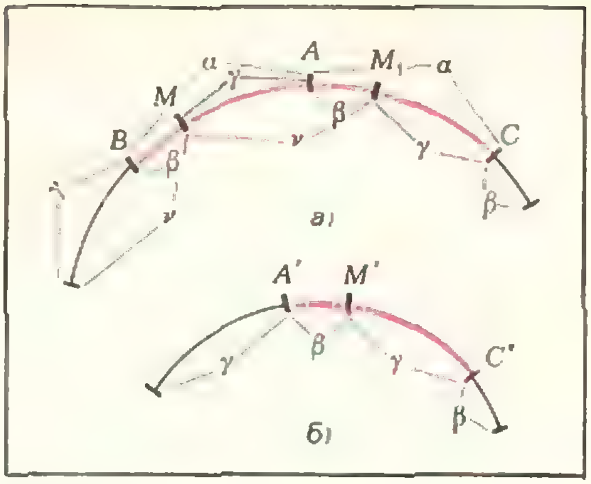


Рис. 17.

не пересекается с дугой AC, разбирается также, как и первый (когда точка M' не лежит на $A'C'$). На рисунке 16, *а*, изображен наиболее сложный случай, когда дуги MK и AC пересекаются. В этом случае (см. обозначения рисунка 16, *а*) выполняются следующие соотношения:

1) $\delta\alpha\alpha = \nu\nu\gamma$;

2) $|\delta| < |\nu|$, $|\gamma| < |\alpha|$.

Лемма 2. *Если выполнены соотношения* 1) *и* 2) *и если дуги* ν *и* α *несимметричны, то найдется дуга* β *такая, что* $\alpha = \beta\gamma$, $\nu = \gamma\beta$.

Из этой леммы вытекает, что точка K совпадает с точкой M_1 и $\delta = \gamma$ (см. рис. 17, *а*.)

Используя лемму 2 и то, что $|A'M'| \leqslant |M'C'|$, легко показать, что точке M_1 соответствует пара дуг, равных дуге $\nu = \gamma\beta$, откуда следует, что C — начало дуги, равной β (рис. 17, *а*); поэтому точке M' соответствует пара дуг, равных $\gamma\beta$ (рис. 17, *б*).

Этим доказательство Основной леммы заканчивается. Из него, в частности, вытекает, что длина максимальной пары дуг на новой окружности не превосходит длины максимальной пары дуг на старой окружности.

Перейдем к доказательству периодичности окраски. Проведем индукцию по числу n точек разбиения. Для $n = 2$ это очевидно. Предположим, что мы доказали периодичность для $n \leqslant k$, и докажем его для $n = k + 1$. Пусть для определенности точке A соответствует максимальная по длине пара дуг. Если вся окружность является объединением этой пары дуг, то индукционное предположение верно. Если нет, то вырежем одну из этих дуг, а концы склеим. В силу Основной леммы новая окружность удовлетворяет условиям задачи, причем точек разбиения на ней меньше, чем на старой; поэтому по предположению индукции окраска новой окружности периодическая; причем длина периода не превосходит длины вырезанной дуги — обозначим ее через α.

Лемма 3. *Если* $|x| \geqslant 0$, α — *несимметричная дуга и* $\alpha x \ldots \alpha\beta = \nu \ \ldots \ \nu$, *то* $|\alpha| = |\nu|$.

Из этой леммы следует, что длина периода равна α, и значит, новая окружность имеет

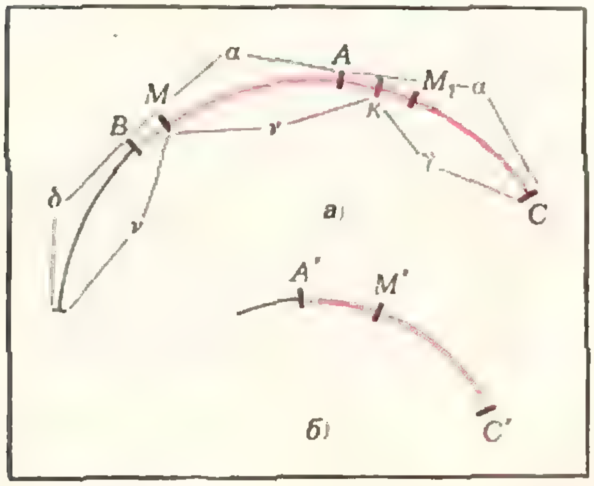


Рис. 16.

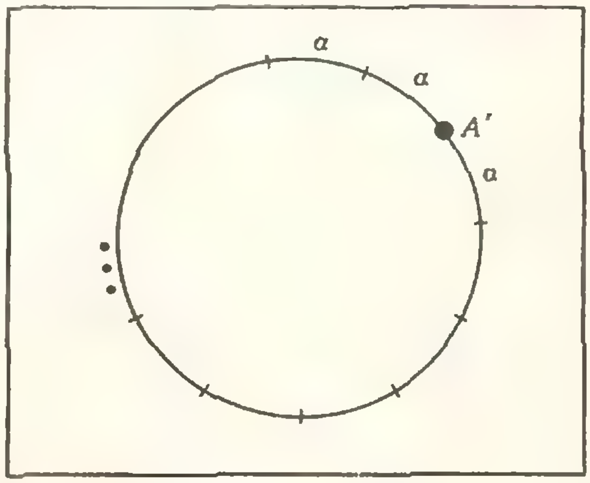


Рис. 18.

вид, изображенный на рисунке 18. Старая окружность получится, если мы разрежем новую в точке A' и вставим дугу α; понятно, что эта операция периодичности окраски не нарушит. Доказательство закончено.

Г. А. Гуревич

Ф269. *Математический маятник, который состоит из тяжелого металлического шара массы m и тонкой проводящей нити длины l, совершает малые колебания в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией* **B**, *направленной перпендикулярно к плоскости колебаний маятника. Максимальный угол, на который отклоняется маятник от вертикали, равен α_0. Как изменится этот угол, если в тот момент, когда маятник проходит положение равновесия, к нему присоединить с помощью гибких тонких проводов конденсатор емкостью C (рис. 19), причем за время контакта, которое очень мало, конденсатор успевает полностью зарядиться.*

Так как проводящая нить маятника движется в магнитном поле, на концах нити возникает некоторая разность потенциалов. Благодаря этому при подключении к маятнику конденсатора по цепи пойдет ток, и конденсатор зарядится. При этом часть энергии маятника $W_м$ перейдет в энергию конденсатора $W_к$ и часть выделится в виде тепла в проводах. Энергия колебаний маятника связана с максимальным углом отклонения маятника от вертикали. Поэтому сначала найдем новую энергию маятника $W'_м$, а затем и максимальный угол α_1.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$W_м = W'_м + W_к + Q.$$

Пусть напряжение на концах нити маятника при прохождении положения равновесия равно U. Так как время контакта с конденсатором очень мало, можно считать, что напряжение за это время не меняется. Тогда напряжение на конденсаторе после его зарядки равно U, и по цепи при зарядке конденсатора прошел заряд $q = CU$.

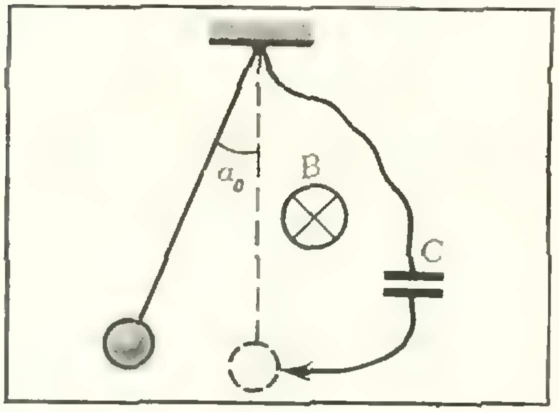


Рис. 19.

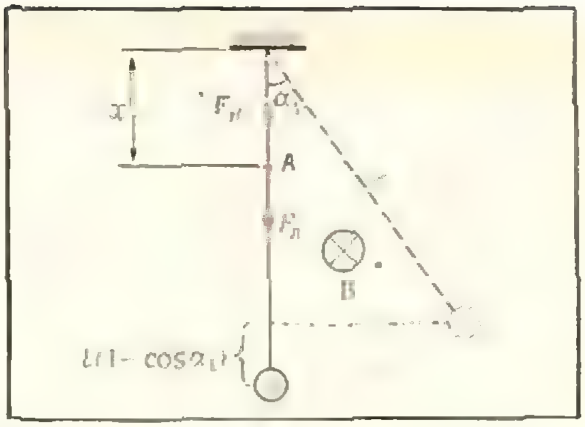


Рис. 20.

Очевидно, что сумма энергии конденсатора и количества тепла, выделившегося в проводах, равна работе «источника» с разностью потенциалов U при прохождении по цепи заряда q:

$$W_к + Q = Uq = CU^2.$$

Следовательно, энергия маятника после зарядки конденсатора будет равна

$$W'_м = W_м - CU^2.$$

Теперь свяжем энергию маятника с максимальным углом отклонения маятника от вертикали. Так как в тот момент, когда маятник максимально отклонен от вертикали, он обладает только потенциальной энергией и находится на высоте $h = l(1 - \cos\alpha)$ от самой нижней точки, которую естественно выбрать за нулевой уровень потенциальной энергии, то

$$W_м = mgl(1 - \cos\alpha_0)$$

и

$$W'_м = mgl(1 - \cos\alpha_1).$$

Поэтому

$$mgl(1 - \cos\alpha_1) = mgl(1 - \cos\alpha_0) - CU^2. \quad (1)$$

Для того чтобы найти α_1, нам необходимо вычислить U. Сделаем это. На электрон, который находится в точке A на расстоянии x от точки подвеса маятника (рис. 20), действует сила Лоренца

$$F_л = evB = e\omega xB,$$

где v — линейная и ω — угловая скорость точки A при прохождении маятником положения равновесия. Под воздействием силы Лоренца свободные электроны будут смещаться вниз (мы считаем, что вектор индукции **B** магнитного поля направлен за чертеж) до тех пор, пока возникшее электрическое поле не воспрепятствует этому. Таким образом,

$$F_л = F_{эл},$$

или

$$e\omega xB = eE,$$

откуда $E = \omega Bx$. То есть напряженность поля линейно зависит от x (рис. 21).

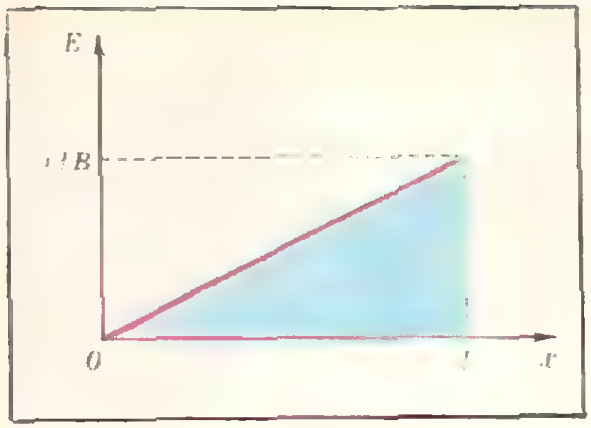


Рис. 21.

Как мы знаем, работа, совершенная силой, всегда численно равна площади фигуры под графиком зависимости силы от координаты. Разность потенциалов на концах нити — это работа по перенесению единичного положительного заряда вдоль нити, а E — сила, действующая на этот заряд. Поэтому, воспользовавшись графиком, приведенным на рисунке 21, найдем

$$U = \frac{1}{2} l\omega l B = \frac{1}{2}\omega l^2 B.$$

Поскольку $\omega = v/l$ и согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha_0),$$

то

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)}$$

и

$$U = \frac{1}{2} lB\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в равенство (1), получим

$$mgl(1 - \cos\alpha_1) =$$

$$= mgl(1 - \cos\alpha_0) - \frac{1}{2} Cl^3B^2g(1 - \cos\alpha_0).$$

Отсюда

$$1 - \cos\alpha_1 = (1 - \cos\alpha_0)\left(1 - \frac{Cl^2B^2}{2m}\right). \quad (3)$$

Так как $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, и углы α_0 и α_1 малы, так что $\sin\alpha \approx \alpha$, то

$$1 - \cos\alpha_1 \approx \frac{\alpha_1^2}{2} \text{ и } 1 - \cos\alpha_0 \approx \frac{\alpha_0^2}{2}.$$

Поэтому равенство (3) перепишем в виде

$$\alpha_1^2 = \alpha_0^2\left(1 - \frac{Cl^2B^2}{2m}\right),$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_0\sqrt{1 - \frac{Cl^2B^2}{2m}}.$$

Ф270. *В длинной пробирке на расстоянии l_1 от запаянного конца имеется короткий столбик ртути (рис. 22). Масса ртути m. С какой угловой скоростью ω нужно вращать пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы ртуть достигла конца пробирки? Длина пробирки l, температура воздуха в пробирке не меняется. Атмосферное давление равно p_0.*

В неподвижной системе отсчета на столбик ртути в горизонтальном направлении действуют две силы: сила атмосферного давления $F_1 = p_0S$ (S — площадь сечения пробирки) и сила давления воздуха в пробирке $F_2 = pS$ (см. рис. 22). Разность этих сил сообщает столбику ртути центростремительное ускорение, равное $a = \omega^2 l$ (так как ртуть находится на краю пробирки). Таким образом,

$$m\omega^2 l = p_0S - pS.$$

Так как температура воздуха в пробирке не меняется, то по закону Бойля — Мариотта

$$p_0Sl_1 = pSl,$$

откуда

$$p = p_0\frac{l_1}{l}.$$

Тогда

$$m\omega^2 l = p_0S\left(1 - \frac{l_1}{l}\right)$$

и

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0S(l - l_1)}{ml^2}}.$$

Ф271. *Подсчитать среднюю плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна 100 в·м$^{-1}$, а на высоте $h = 1{,}5$ км эта напряженность падает до 25 в·м$^{-1}$.*

Как известно, напряженность электрического поля внутри заряженного тонкого сфе-

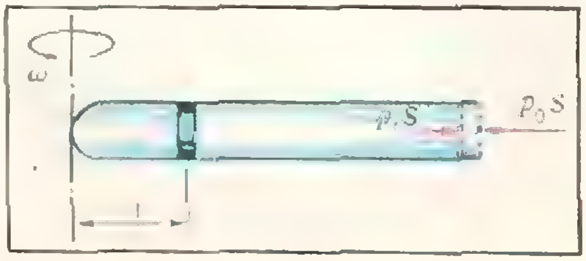


Рис. 22.

рического слоя равна нулю, а вне этого слоя напряженность такая, какой она была бы, если бы весь заряд слоя был сосредоточен в его центре. (Это можно показать, исходя из закона Кулона и принципа суперпозиции.)

Разобьем Землю и атмосферу Земли на тонкие сферические слои. Тогда ясно, что на поверхности Земли напряженность электрического поля равна

$$E_0 = \frac{Q_З}{4\pi\varepsilon_0 R_З^2}, \qquad (1)$$

где $Q_З$ — суммарный заряд Земли, $R_З$ — радиус Земли.

На высоте h напряженность электрического поля складывается из напряженности поля, созданного зарядом $Q_З$ Земли, и из напряженности поля, созданного зарядом $Q_а$ слоев атмосферы с радиусами, меньшими $R_з + h$. То есть

$$E_h = \frac{Q_З + Q_а}{4\pi\varepsilon_0 (R_З + h)^2}.$$

Так как

$$Q_а V_а \rho =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\pi (R_З + h)^3 - \frac{4}{3}\pi R_З^3\right]\rho,$$

то

$$E_h = \frac{Q_З}{4\pi\varepsilon_0 (R_З + h)^2} +$$

$$+ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R_З + h - \frac{R_З^3}{(R_З + h)^2}\right]. \qquad (2)$$

Радиус Земли $R_З$ много больше высоты h, поэтому в знаменателе формулы (2) можно сумму $R_З + h$ заменить на $R_З$. Тогда

$$E_h = \frac{Q_З}{4\pi\varepsilon_0 R_З^2} + \frac{h}{3\varepsilon_0}\rho = E_0 + \frac{h}{3\varepsilon_0}\rho.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{3\varepsilon_0 (E_h - E_0)}{h} =$$

$$= -\frac{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} к^2 \cdot н^{-1} \cdot м^{-2} \cdot 75\, в \cdot м^{-1}}{1500\ м} \approx$$

$$\approx -1{,}3 \cdot 10^{-12}\ к \cdot м^{-3}.$$

Ф272. *К стенке, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длины l (рис. 23). Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной к стенке, на небольшой угол β от вертикального положения и отпустили. Найти период колебаний маятника, если*

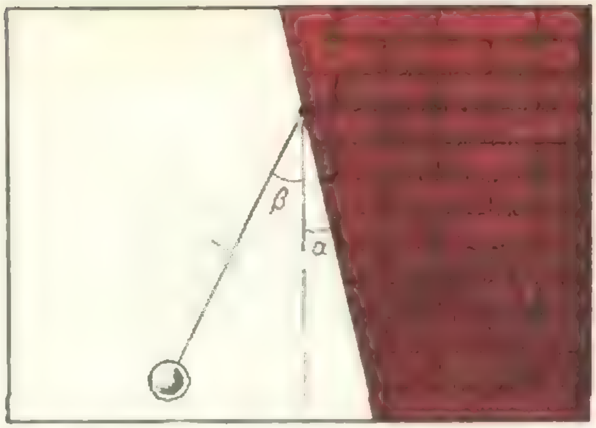


Рис. 23.

β > α и удар шарика о стенку абсолютно упругий.

Если бы стенки не было, маятник совершал бы гармонические колебания с угловой амплитудой (максимальным углом отклонения от вертикали) β и с периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При упругом столкновении со стенкой абсолютная величина скорости маятника не изменяется, а направление движения меняется на противоположное. Это означает, что период колебаний маятника T в присутствии стенки не равен T_0, а меньше этой величины на время τ. За это время τ маятник, совершая свободные колебания, отклонился бы вправо от вертикали от угла α до угла β и вернулся обратно.

Запишем уравнение гармонических колебаний для углового перемещения φ:

$$\varphi = \beta\cos\omega t,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$. В момент времени $t = 0$ $\varphi = \beta$, то есть маятник находится в крайнем правом положении. Через некоторое время t_1 угол отклонения маятника от вертикали станет равным α. Из уравнения колебаний

$$\alpha = \beta\cos\omega t_1,$$

откуда

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\arccos\frac{\alpha}{\beta}.$$

Из симметрии очевидно, что

$$\tau = 2t_1 = \frac{2}{\omega}\arccos\frac{\alpha}{\beta} = \frac{T_0}{\pi}\arccos\frac{\alpha}{\beta}.$$

Тогда окончательно

$$T = T_0 - \tau = T_0\left(1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{\alpha}{\beta}\right) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi - \arccos\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

М.Л.КРАЙЗМАН

ШАР, КАСАЮЩИЙСЯ РЕБЕР МНОГОГРАННИКА

В последние годы на вступительных экзаменах в вузы часто предлагаются задачи, в которых фигурирует шар, касающийся всех ребер многогранника. Этой теме и посвящена настоящая статья.

Пусть шар касается всех ребер некоторого многогранника. Тогда справедливы следующие утверждения (докажите их самостоятельно):

(1) *каждая грань многогранника пересекает поверхность шара по окружности, касающейся ребер многогранника, то есть по окружности, вписанной в грань; тем самым гранями многогранника будут такие многоугольники, в которые можно вписать окружность;*

(2) *основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на любую грань многогранника, является центром окружности, вписанной в эту грань;*

(3) *перпендикуляры, восставленные к плоскостям граней в центрах вписанных окружностей, пересекаются в одной точке, равноудаленной от всех ребер многогранника — в центре шара;*

(4) *отрезок перпендикуляра, опущенного из центра шара на ребро многогранника, равен радиусу шара.*

Теперь рассмотрим некоторые типы многогранников, для которых существует указанный шар.

Шар, касающийся ребер призмы

Теорема 1. *Шар, касающийся всех ребер призмы, существует тогда и только тогда, когда эта призма правильная и все ее ребра равны между собой.*

Доказательство. Пусть искомый шар существует. Сначала докажем, что тогда призма — прямая. Проведем через центр K шара, высоту OO_1 призмы: $KO \perp$ пл. ABC, $KO_1 \perp$ пл. $A_1B_1C_1$ (рис. 1). По свойству (2) точки O и O_1 являются центрами окружностей, вписанных в равные основания призмы, следовательно, $O_1M_1 = OM$ ($OM \perp AB$, $O_1M_1 \perp A_1B_1$) как радиусы равных окружностей. Точки O, O_1, M и M_1 лежат в одной плоскости (проходящей через прямую OO_1 и перпендикулярной к AB — докажите!), поэтому OO_1M_1M — прямоугольник и $M_1M \perp$ пл. ABC ($M_1M \parallel O_1O$). Далее, $\Delta O_1M_1B_1 = \Delta OMB$ (докажите!), поэтому $M_1B_1 = MB$, то есть MM_1B_1B — прямоугольник, $B_1B \parallel M_1M \perp$ пл. ABC.

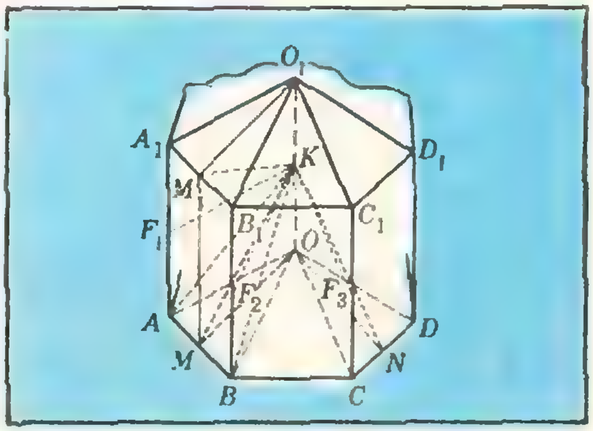


Рис. 1.

Таким образом, боковые грани призмы являются прямоугольниками. Но по свойству (1) в эти грани можно вписать окружность, а если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат; следовательно, боковые грани призмы — квадраты. Отсюда $AB = BB_1 = BC = \ldots$, то есть в основании призмы лежит многоугольник с равными сторонами. Спроектируем призму с шаром на плоскость ABC; призма спроектируется в многоугольник $ABC\ldots$, а шар — в окружность, описанную вокруг этого многоугольника. Но многоугольник с равными сторонами, вписанный в окружность, — правильный, поэтому и призма — правильная.

Теперь докажем, что для правильной призмы с равными ребрами указанный шар существует. Для этого нужно показать, что существует точка, равноудаленная от всех ребер этой призмы. Такой точкой является середина K отрезка OO_1, соединяющего центры оснований (рис. 1).

В самом деле, заметим, что отрезки KM, KM_1, KN (и т. п.) равны, как гипотенузы прямоугольных треугольников, один катет которых равен KO, а другой — апофеме правильного многоугольника $ABC\ldots$, и равны перпендикулярам, опущенным из точки K на боковые ребра призмы: $KF_1 = OA$, а ΔOAM имеем $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}OO_1 = KO$. OM — апофема (аналогично рассматриваются остальные боковые ребра).

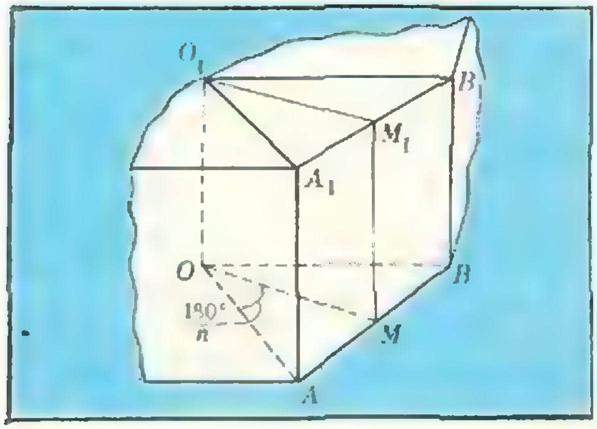


Рис. 2.

Таким образом, теорема доказана. Причем доказано даже, что радиус шара, касающегося ребер такой призмы, равен радиусу окружности, описанной вокруг основания призмы. На этом утверждении базируется решение задач на шар, касающийся ребер призмы.

Задача 1. *В n-угольную призму вписаны два шара: один касается всех ее граней, а другой — всех ее ребер. Какая это призма?*

По теореме 1, эта призма — правильная. Далее, с одной стороны, $MM_1 = OM + O_1M_1$ (рис. 2), поскольку в данную призму можно вписать шар; с другой стороны, $MM_1 = AB$, поскольку существует шар, касающийся всех ребер призмы. Отсюда $OM + O_1M_1 = AB$, $2OM = AB$. Но $OM = \frac{AB}{2}\operatorname{ctg}\frac{180}{n}$, поэтому $\operatorname{ctg}\frac{180}{n} = 1$, $n = 4$. Следовательно, призма представляет собой куб.

Шар, касающийся ребер пирамиды

Задача 2. *Шар касается всех ребер тетраэдра. Доказать, что суммы противоположных ребер этого тетраэдра равны.*

Пусть шар касается ребер тетраэдра $SABC$ (рис. 3) в точках M, N, K, F, P, E. Касательные, проведен-

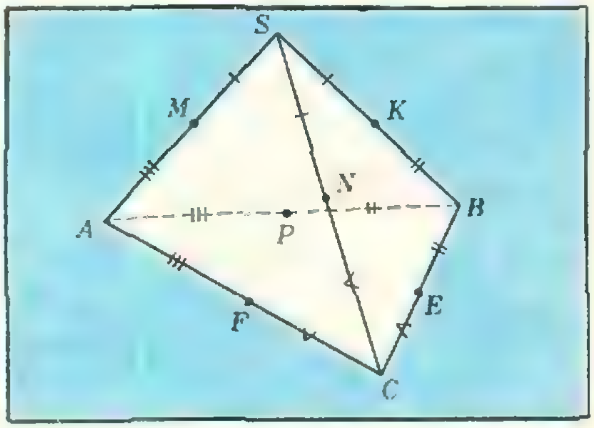


Рис. 3.

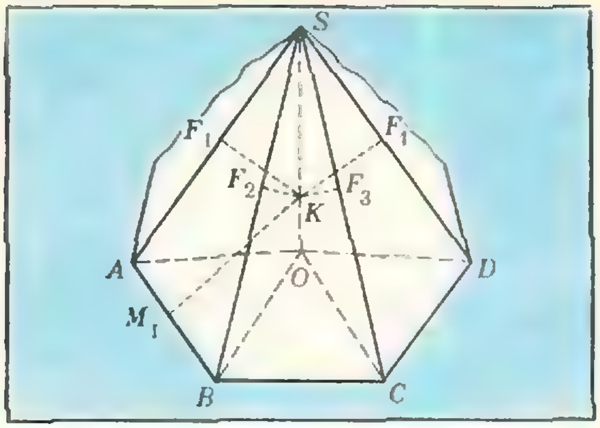


Рис. 4.

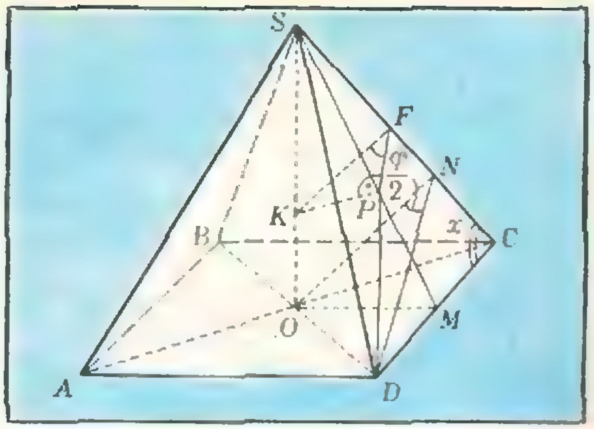


Рис. 5.

ные из одной точки к данному шару, равны, поэтому

$$SM = SN = SK, \qquad (1)$$
$$AM = AP = AF, \qquad (2)$$
$$BP = BK = BE, \qquad (3)$$
$$CN = CF = CE. \qquad (4)$$

В каждую из сумм $AS + BC$, $AC + BS$, $AB + CS$ входит ровно по одному отрезку из групп (1) — (4), следовательно, эти суммы равны.

Теорема 2. *Если центр шара, касающегося всех ребер пирамиды, лежит на ее высоте, то такая пирамида — правильная.*

Доказательство. Пусть центр K шара лежит на высоте SO (рис. 4). Прямоугольные треугольники SKF_1, SKF_2 (и т. д.) имеют общую гипотенузу SK и равные катеты: $KF_1 = KF_2$ (радиусы шара), поэтому они равны. Отсюда $\angle F_1SK = \angle F_2SK$.

Прямоугольные треугольники ASO, BSO (и т. д.) имеют общий катет SO и равные острые углы при вершине S, поэтому они равны и $OA = OB (= OC = \ldots)$. Следовательно, O — центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

По свойству (2) точка O является также центром окружности, вписанной в основание пирамиды. А если описанная вокруг многоугольника и вписанная в многоугольник окружности являются концентрическими, то этот многоугольник — правильный (докажите!). Следовательно, исходная пирамида — правильная, теорема доказана.

При решении задач на шар, касающийся ребер правильной пирамиды, полезно использовать подобие прямоугольных треугольников KSF_1 и ASO ($\angle ASK$ общий, $\angle SKF_1 = \angle SAO$).

Задача 3. *Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при боковом ребре равен φ. Определить радиус шара, касающегося всех ребер этой пирамиды.*

Легко доказать, что искомый шар существует; обозначим его центр через K. Пусть $\angle SDC = \angle SCD = x$ (рис. 5). Проведем $KF \perp SC$ и $KP \perp$ $\perp$ пл. SCD. Соединим точки F и P. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что $FP \perp SC$, и поскольку пирамида правильная, $\angle KFP$ равен половине линейного угла двугранного угла при боковом ребре пирамиды, то есть $\frac{\varphi}{2}$. Заметим, что KF — радиус шара, касающегося ребер пирамиды, а P — центр окружности, вписанной в боковую грань SDC, поэтому PD — биссектриса $\angle SDC$, $\angle PDM = \frac{x}{2}$, $PM = PF$. Из $\triangle PDM$ и $\triangle KPF$ находим: $PM = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

$$KF = \frac{PF}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

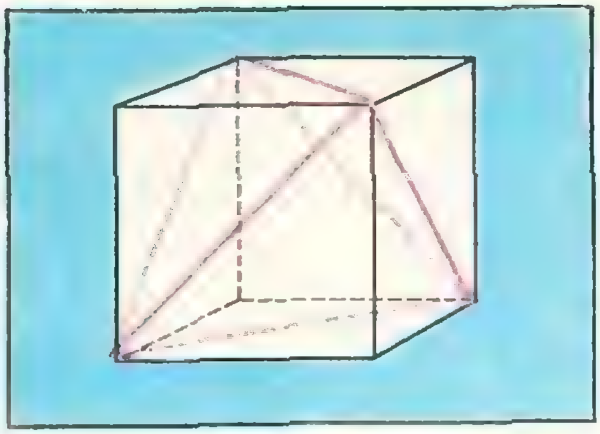


Рис. 6.

Теперь найдем связь между углами φ и x. Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники OND и DNC: $DN=\dfrac{OD}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, $DN=DC\sin x$.

Отсюда $OD=DC\cdot\sin x\sin\frac{\varphi}{2}$, $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$. Находя теперь $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (с учетом неравенства $0<x<\pi/2$), получаем ответ

$$KF=\frac{a}{\sqrt{2}\sin\varphi+2\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}}.$$

Задача 4 (НГУ). *Найти объем части правильного тетраэдра с ребром длины a, заключенной между двумя сферами: одна сфера касается всех граней тетраэдра, другая — всех ребер.*

Обозначим искомый объем через v, тогда $v=v_1-4v_2-v_3$, где v_1 — объем шара радиуса R, касающегося всех ребер тетраэдра, v_2 — объем шарового сегмента, отсекаемого одной гранью тетраэдра от этого шара, v_3 — объем шара радиуса r, вписанного в тетраэдр.

Заметим, что если шар вписан в куб, то он касается всех ребер правильного тетраэдра, образованного диагоналями граней куба (рис. 6). Если диагональ грани куба равна a, то его ребро равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$, а радиус шара, вписанного в куб, равен половине этого ребра, $R=\frac{a}{2\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

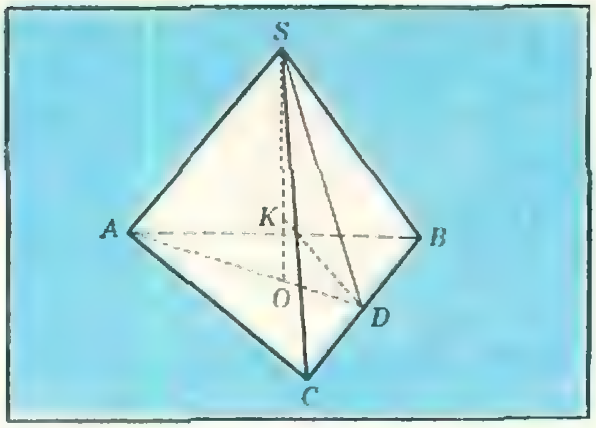


Рис. 7.

Теперь из $\triangle OKD$ (рис. 7) находим радиус r шара, вписанного в тетраэдр: $OK=r=\sqrt{KD^2-OD^2}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$, и высоту сегмента: $h=R-r=\frac{a\sqrt{2}}{4}-\frac{a\sqrt{6}}{12}=\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{12}$.

Подставив найденные значения R, r и h в выражение

$$v=\frac{4}{3}\pi R^3-4\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)-\frac{4}{3}\pi r^3$$

и упрощая, получаем:

$$v=\frac{1}{216}\pi a^3(7\sqrt{6}-9\sqrt{2}).$$

Шар, касающийся ребер правильной усеченной пирамиды

Если шар касается всех ребер правильной усеченной пирамиды, то, как следует из утверждений (1) — (4) (см. с. 55), центр этого шара лежит на высоте пирамиды, соединяющей центры O, O_1 оснований, и шар касается ребер оснований пирамиды в их серединах M, M_1, ... (рис. 8), причем OO_1M_1M — трапеция, $OO_1\perp OM$, и перпендикуляр, опущенный из центра K шара на боковую грань, попадает в точку P — середину апофемы MM_1. Это построение и теорема 2 (применимая и к усеченной пирамиде) лежат в основе решения задач на шар, касающийся всех ребер усеченной пирамиды.

Задача 5. *В правильную n-угольную усеченную пирамиду впи-*

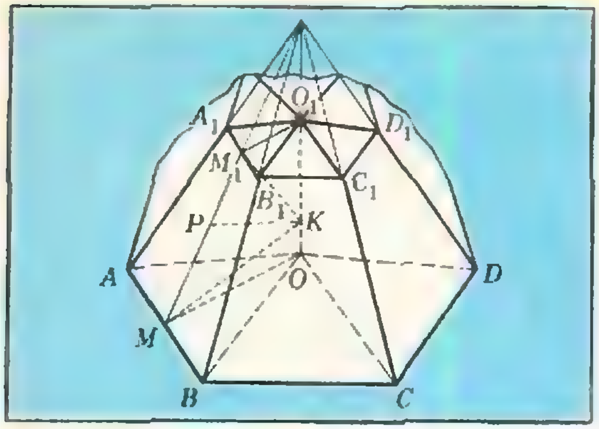


Рис. 8.

сан шар; известно также, что существует шар, касающийся всех ребер этой пирамиды. Найти n.

Рассматривая трапецию OO_1M_1M (см. рис. 8) и треугольники MOB и $M_1O_1B_1$, находим: $MM_1 = MO + M_1O_1$ (как отрезки двух касательных к шару, вписанному в пирамиду), $BB_1 = BM + B_1M_1$ (как отрезки двух касательных к шару, касающемуся ребер пирамиды), $MO = BM \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $M_1O_1 = B_1M_1 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. Но $MM_1 < BB_1$ (почему?), отсюда $\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} < 1$, $\frac{180^\circ}{n} > \frac{180^\circ}{4}$, $n < 4$. Следовательно, $n = 3$.

Задача 6. *На каком расстоянии от боковой грани находится центр шара, касающегося всех ребер правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны оснований соответственно равны 4 см и 2 см?*

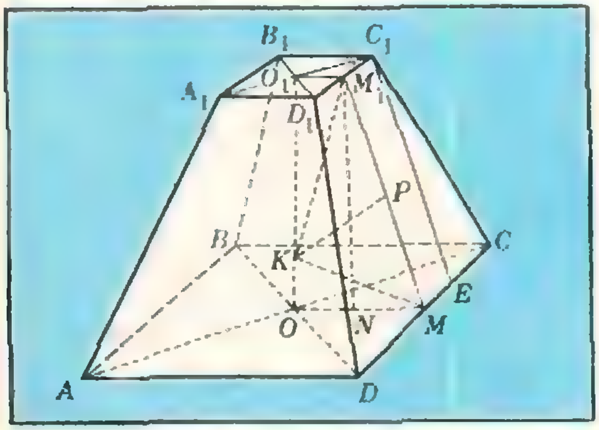


Рис. 9.

Рассмотрим трапецию OO_1M_1M (рис. 9), в ней $OM = 2$ (*см*), $O_1M_1 = 1$ (*см*), $KM = KM_1$ как радиусы шара, касающегося ребер усеченной пирамиды. Как и в предыдущей задаче, $CC_1 = CM + C_1M_1 = \frac{CD + C_1D_1}{2} = 3$ (*см*). Теперь находим высоту трапеции CC_1D_1D: $M_1M = C_1E = \sqrt{CC_1^2 - (CM - C_1M_1)^2} = \sqrt{8}$ (*см*), и высоту трапеции OO_1M_1M: $OO_1 = M_1N = \sqrt{M_1M^2 - (MO - M_1O_1)^2} = \sqrt{7}$ (*см*).

Обозначим OK через x, тогда $O_1K = \sqrt{7} - x$, $KM_1 = \sqrt{O_1K^2 + O_1M_1^2} = \sqrt{(\sqrt{7} - x)^2 + 1^2}$, $KM = \sqrt{x^2 + 2^2}$. Но $KM_1 = KM$, получается уравнение относительно x; решая его, находим: $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Осталось найти $KM =$

$$= \sqrt{\frac{4}{7} + 4} = \sqrt{\frac{32}{7}} \quad \text{и} \quad KP =$$

$$= \sqrt{KM^2 - PM^2} = \frac{3\sqrt{14}}{7} \text{ (см)}.$$

Упражнения

1. (НГУ). Шар касается всех ребер куба. Найти площадь поверхности шара, лежащей внутри куба, если ребро куба равно 1 *см*.

2. (НГУ). Шар касается всех ребер куба. Найти объем общей части шара и куба, если ребро куба имеет длину a.

3. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Где находится центр шара, касающегося всех ребер?

4. (НГУ). Шар радиуса R касается каждого ребра правильного тетраэдра. Найти объем их общей части.

5. (МГУ, мехмат, 1966). Шар радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр шара лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии $r\sqrt{3}$ от вершины. Доказать, что пирамида правильная. Найти высоту пирамиды.

6. (МФТИ, 1963). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро пирамиды равно b. Найти радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

7. Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды образует с плоскостью основания угол α. На каком расстоянии от плоскости основания находится центр шара, касающегося всех ребер пирамиды, если сторона ее основания равна a?

Международные олимпиады школьников

XVI Международная математическая олимпиада

В. А. Скворцов, З. И. Моисеева

Начиная с 1959 года регулярно проводятся международные олимпиады школьников по математике (ММО). Эти олимпиады довольно быстро завоевали большой международный авторитет.

Если в I олимпиаде принимали участие команды 7 стран (Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии), то в XVI олимпиаде участвовали уже команды 18 стран (Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, ДРВ, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, Чехословакии, Швеции и Югославии).

Начиная с XI ММО наш журнал регулярно помещает подробную информацию о ходе олимпиад и разбор предлагавшихся на них задач.

С каждым годом растет число стран, участвующих в Международной математической олимпиаде школьников. В XVI олимпиаде, проходившей в июле 1974 года в городе Эрфурте (ГДР), участвовало уже 18 стран. К участникам прошлых олимпиад в этом году присоединились довольно сильные команды Демократической Республики Вьетнам и Соединенных Штатов Америки, что сделало борьбу за призовые места еще более острой и интересной.

Как и в прошлые годы, команда каждой страны состояла из 8 учащихся, исключение в этом году составляли команды Кубы (из 7 человек) и ДРВ (из 5 человек).

Советский Союз на XVI олимпиаде представляли:

Ананьевский Игорь, выпускник школы-интерната № 45 при ЛГУ; он получил на Ленинградской городской олимпиаде в 1972 году III премию, в 1973 году — II премию, а на Всесоюзной математической олимпиаде в 1973 году — II премию и в 1974 году — I премию;

Бранлов Андрей, выпускник школы № 2 г. Москвы, получал премии на Московских городских олимпиадах в 1971—1974 годах, а на Всесоюзной олимпиаде в 1972, 1973 и 1974 годах получил соответственно I, III и II премии;

Григорян Александр, выпускник школы № 211 г. Баку, получил на республиканской олимпиаде в 1972 и в 1973 годах I премию, а на Всесоюзной олимпиаде в 1974 году — II премию;

Гусаров Михаил, выпускник школы № 30 г. Ленинграда, получал на Ленинградской городской олимпиаде в 1970—1974 годах I премии, а на Всесоюзной олимпиаде в 1971 году — II премию, в 1972 и 1973 годах — I премию и в 1974 году — II премию;

Команда СССР на XVI Международной математической олимпиаде. Слева направо: А. Григорян, Д. Тюкавкин, А. Браилов, М. Гусаров, З. И. Моисеева (зам. руководителя команды), С. Фомин, В. А. Скворцов (руководитель команды), И. Ананьевский, Н. Чернов, И. Сивицкий. (*Фото И. Лемана, ГДР*)

Сивицкий Игорь, выпускник школы-интерната № 45 при ЛГУ, получал на Ленинградской городской олимпиаде в 1972—1974 годах II премии, на Всесоюзной олимпиаде в 1972 году — II премию, в 1973 году — III премию и в 1974 году — I премию;

Тюкавкин Дмитрий, выпускник школы № 11 г. Иркутска, получил на областной олимпиаде в 1972 и 1973 годах I премию, в 1974 году — II премию, а на Всесоюзной олимпиаде в 1972 и 1973 годах — II премию, в 1974 году — I премию;

Фомин Сергей, выпускник школы-интерната № 45 при ЛГУ, получил на Ленинградской городской олимпиаде в 1970 году I премию, в 1971 году — III премию, в 1972 году — II премию, в 1973 и 1974 годах I премию, а на Всесоюзной олимпиаде в 1972 году — I премию, в 1973 и 1974 годах — II премию;

Чернов Николай, выпускник школы № 95 г. Кривого Рога УССР, получил на республиканской олимпиаде в 1972 году III премию, в 1973 и 1974 годах — I премию и на Всесоюзной олимпиаде в 1973 году — III премию, а в 1974 году — I премию.

Участникам олимпиады в каждый из двух дней соревнований было предложено за 4 часа решить по 3 задачи. Эти задачи были отобраны международным жюри из числа задач, предварительно предложенных странами-участницами.

Задачи первого дня соревнований

1. Имеется три карточки, на каждой из которых написано одно из целых чисел. Эти числа p, q, r удовлетворяют условию $0 < p < q < r$.

Три игрока A, B и C играют в игру, один круг которой состоит в следующем: карточки перемешиваются и раздаются игрокам по одной; затем каждый игрок получает количество шариков, равное числу, написанному на полученной им карточке; потом карточки собираются, а шарики остаются у игроков. Игра продолжается N кругов, $N \geqslant 2$. В конце игры у игрока A накопилось 20 шариков, у B — 10 шариков, у C — 9 шариков. Известно, что в последнем круге игрок B получил r шариков. Требуется установить, кто из игроков получил q шариков в первом круге (США; за полное решение этой задачи давалось 5 очков).

2. В треугольнике ABC величины углов при вершинах A, B и C равны соответственно α, β и γ. Доказать, что неравенство

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\leqslant\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы на отрезке AB нашлась точка D такая, что величина CD является средним геометрическим величин AD и BD (Финляндия; 6 очков).

3. Доказать, что для любого натурального числа n число

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$$

не делится на 5 (Румыния; 8 очков).

Задачи второго дня соревнований

4. Рассмотрим разбиения шахматной доски 8×8 на p взаимно непересекающихся прямоугольников, удовлетворяющие следующим условиям:

1) каждый прямоугольник состоит из некоторого числа клеток и содержит белых клеток столько же, сколько и черных;

2) если a_i — число белых клеток в i-м прямоугольнике, то $a_1<a_2<\ldots<a_p$.

Найти наибольшее значение p, при котором такое разбиение возможно, и определить для этого значения p все последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_p$, для которых можно реализовать такое разбиение (Болгария; 6 очков).

5. Найти множество значений суммы

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d},$$

где a, b, c, d — произвольные положительные действительные числа (Нидерланды; 7 очков).

6. Пусть P — многочлен с целочисленными коэффициентами, не являющийся константой, и пусть $n(P)$ — число всех различных целых чисел k, для которых $[P(k)]^2=1$. Доказать, что

$$n(P)-\deg(P)\leqslant 2,$$

где $\deg(P)$ означает степень многочлена P (Швеция; 8 очков).

Подведя итоги олимпиады, международное жюри, образованное руководителями команд-участниц, присудило призы победителям.

Диплом I степени

получили 10 из 140 участников олимпиады: *Александр Григорян* (СССР), *Жан-Кристоф Ёкоз* (Франция), *Янош Коллар* (Венгрия), *Андриан Окняну* (Румыния), *Герберт Синвель* (Австрия), *Микаэль Стайнер* (Швеция), набравшие по 40 очков; *Йожеф Б. Варга* (Югославия) и *Дмитрий Тюкавкин* (СССР), набравшие по 39 очков; *Миодраг Живкович* (Югославия) и *Хоанг Ле Минь* (ДРВ), набравшие по 38 очков.

Диплом II степени

был присужден 24 участникам, набравшим от 37 до 30 очков. Среди них члены советской команды *Сергей Фомин* (36 очков), *Андрей Браилов* (34 очка) и *Михаил Гусаров* (32 очка).

Диплом III степени

присуждался участникам, набравшим от 29 до 23 очков. Его получили 37 человек, в том числе члены советской команды *Игорь Сивицкий* (29 очков) и *Николай Чернов* (27 очков).

В целом команда Советского Союза выступила весьма успешно, набрав наибольшее число очков — 256. Далее следуют команды США (243), Венгрии (237), ГДР (236), Югославии (216), Австрии (212), Румынии (199), Франции (194), Великобритании (188), Швеции (187), Болгарии (171), Чехословакии (158), ДРВ (146 при 5 участниках), Польши (138), Нидерландов (112), Финляндии (111), Кубы (65 при 7 участниках), Монголии (60).

Поправка

В «Кванте» № 9 за 1974 год на с. 62 формула (2) должна выглядеть так:

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-\frac{1}{4}T_{n-1}(x);$$

$$T_2(x)=x^2-\frac{1}{2}.$$

VII Международная физическая олимпиада

Г С. Тарасюк

В июле 1974 года в Варшаве состоялась VII Международная олимпиада по физике среди школьников. В олимпиаде участвовали команды Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Чехословакии, ФРГ. Команда ФРГ участвовала в олимпиаде впервые.

В состав команды СССР вошли призеры Всесоюзной олимпиады по физике, показавшие наилучшие результаты на тренировочном сборе. Это:

Курчанов Анатолий — ученик 10 класса средней школы № 21 г. Житомира, УССР;

Масич Сергей — ученик 10 класса физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска;

Наний Олег — ученик 10 класса средней школы № 37 г. Кишинева, МолдССР;

Руднев Алексей — ученик 10 класса средней школы № 762 г. Москвы;

Фалькин Евгений — ученик 10 класса физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска.

9 июля проводился теоретический тур, на котором участникам нужно было решить 3 задачи. Максимальное число баллов в I туре получили: Ежи Тарасюк, Ярослав Деминет (Польша) и Геза Мешена (Венгрия). 11 июля на экспериментальном туре всем участникам была предложена одна задача. Лучше всех экспериментальную задачу выполнил Ежи Тарасюк, получивший максимально возможное число баллов. Среди участников Советской команды в теоретическом туре лучший результат у Анатолия Курчанова, а в экспериментальном — у Евгения Фалькина.

13 июля состоялось торжественное закрытие олимпиады, на котором были подведены итоги. Из 40 участников олимпиады 18 оказались в числе победителей. Наша команда была единственной на олимпиаде, все члены которой были награжены дипломами и ценными подарками.

I премию
получили: *Ежи Тарасюк, Ярослав Деминет* (Польша), *Геза Мешена* (Венгрия).

II премий
на олимпиаде не было.

III премию
получили: *Анатолий Курчанов, Алексей Руднев* (СССР), *Зденек Свобода, Юрий Грушка* (Чехословакия), *Георгий Палфалви, Владар Кароли* (Венгрия), *Йорг Бергман, Феликс Керстан* (ГДР).

Похвальные дипломы
получили: *Сергей Масич, Олег Наний, Евгений Фалькин* (СССР), *Мария Цицейка, Михай Ганцю-Петцю* (Румыния), *Ульф Брюстель, Ханс-Георг Мартин* (ГДР).

Для участников олимпиады были организованы различные экскурсии. Знакомство с историческими и культурными памятниками Польши началось с посещения Музея солнечных часов в Енджеюве, затем была интересная прогулка на плотах по живописной реке Дунаец, осмотр соляных копей в Величке. В Кракове учащиеся из СССР посетили музей В. И. Ленина, были на экскурсии в Королевском замке Вавель, в Институте ядерных исследований. 18 июля все участники олимпиады посетили бывший концлагерь в Освенциме. Члены команды СССР возложили цветы на братские могилы советских воинов в Варшаве, в Кракове, у стены смерти в Освенциме. На олимпиаде среди участников установились хорошие дружеские отношения.

Ниже приводятся задачи теоретического и экспериментального туров.

Задача 1 (механика, атомная физика)

С неподвижным атомом водорода, находящимся в основном энергетическом состоянии, сталкивается такой же атом водорода, движущийся со скоростью v. Пользуясь моделью Бора и зная, что энергия ионизации атома водорода составляет $E_н$, а масса атома равна m_H, определить предельную скорость v_0, ниже которой столкновения атомов являются упругими.

После достижения скорости v_0 столкновения между атомами могут стать неупругими, что вызывает излучение. Определить процентное отношение разности частот излучений, наблюдаемых в направлении, совпадающем с начальной скоростью налетающего атома, и в противоположном направлении, к среднему арифметическому этих частот.

$E_н = 13{,}6$ *эв* $= 2{,}18 \cdot 10^{-18}$ *дж*;

$m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

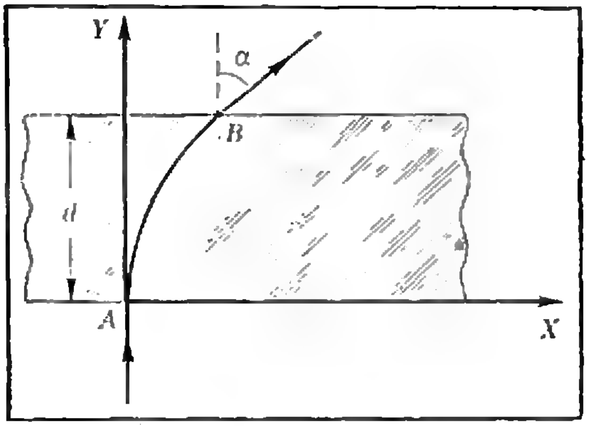
Задача 2 (оптика)

На плоскопараллельную пластинку (см. рисунок) в точке A (с координатой $x = 0$) перпендикулярно к пластинке падает узкий пучок света. Коэффициент преломления пластинки меняется по формуле $n_x = \dfrac{n_A}{1 - \dfrac{x}{R}}$,

где n_A и R — постоянные величины.

Пучок покидает пластинку в точке B под углом α к начальному направлению. 1) Определить коэффициент преломления n_B в точке B, в которой пучок покидает пластинку. 2) Определить координату x_B точки B. 3) Определить толщину пластинки d.

$n_A = 1{,}2$; $R = 13$ *см*; $\alpha = 30°$.



Задача 3 (термодинамика)

Научная экспедиция, находящаяся на необитаемом острове, исчерпала все свои источники энергии. На этом острове нет никаких ветров, не текут ручьи, небо покрыто толстым слоем туч, атмосферное давление постоянное, а температура атмосферы и воды в омывающем остров необыкновенно спокойном океане днем и ночью одинакова. Однако, на острове был обнаружен источник химически нейтрального газа, выделяющегося с постоянной скоростью из одной пещеры. Газ выделялся под атмосферным давлением и с температурой окружающей среды. Члены экспедиции располагают двумя полупроницаемыми пленками, из которых одна свободно пропускает обнаруженный газ, являясь одновременно полностью непроницаемой для воздуха, вторая пленка, наоборот, пропускает воздух, но не пропускает газ. Кроме того, экспедиция имеет возможность конструировать простые механические устройства, например, в виде цилиндров с поршнем и клапанами; и члены экспедиции решили построить двигатель.

Доказать, что можно построить такой идеальный двигатель, работающий на этом газе, что теоретически не будет ограничения по мощности.

Экспериментальная задача

В закрытой коробке находятся два одинаковых идеальных полупроводниковых диода и резистор, соединенные в неизвестную электрическую цепь. Определить сопротивление резистора, имея в своем распоряжении следующий набор приборов и принадлежностей: два универсальных измерителя тока и напряжения, батарею аккумуляторов, реостат, электропровода, миллиметровую бумагу.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В примере КИС+КСИ=ИСК каждой букве соответствует своя цифра. Определите, чему равен «иск».

2. Если внимательно следить за уровнем жидкости в банке с консервированными томатами, то можно заметить, что при открывании банки уровень жидкости понижается. Как это объяснить?

3. Из 36 спичек построили треугольники, квадраты и домики (как на рисунке) — всего 10 фигур. Найдите число фигур каждого вида.

4. В сосуд налито две жидкости — вода и машинное масло. В нижнюю жидкость с помощью веревочки погружают кубик. Как определить величину выталкивающей силы, действующей на кубик?

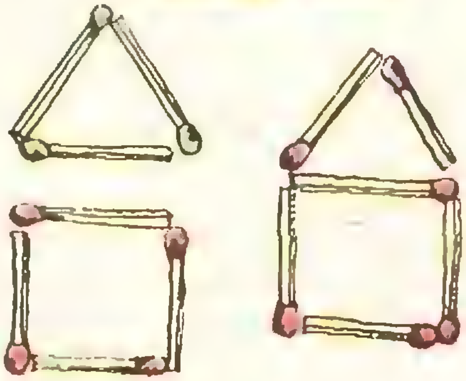
5. В одном из рассказов Джека Лондона есть такие строки:

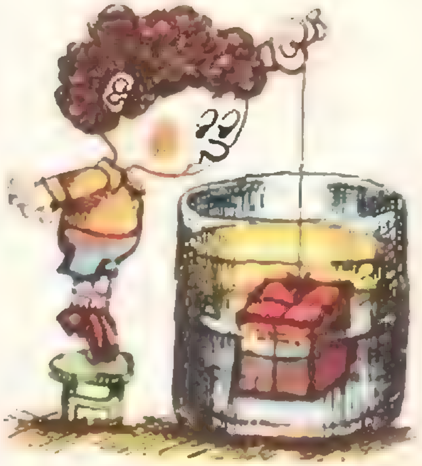
«Честное слово, в такой холод нельзя разъезжать, — сказал Джон Месснер. — Если сейчас не все 80 ниже нуля, то уж 79 верных». (Температура указана по Фаренгейту.)

Известный полярный путешественник В. Стефанссон в книге «Гостеприимная Арктика» пишет:

«Если при 45° ниже нуля снять перчатку и держать руку перед глазами, то можно видеть, что с каждого пальца поднимается струйка пара...» (Здесь температура указана по Цельсию).

Какая из упомянутых температур действительно ниже, если известно, что в термометре Фаренгейта за 0° (0° F) принята температура смеси снега и нашатыря, равная приблизительно −18°C, а температура кипения воды равна 212° F.





Рисунки Э. Назарови

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Х. ЛОЗЕ

Числовые последовательности встречаются очень часто. Вспомните, например, ряды чисел, которые второклассники твердили при повторении таблицы умножения на 2:

$$П_1 = (2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots);$$

на 5:

$$П_2 = (5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \ldots);$$

на 6:

$$П_3 = (6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ \ldots)$$

и многие другие.

Вспомните надписи на объективе фотоаппарата; и там вы найдете последовательность чисел, а именно:

$$П_4 = (2;\ 2{,}8;\ 4;\ 5{,}6;\ 8;\ 11;\ 16;\ 22).$$

Вот еще несколько примеров числовых последовательностей:

$$П_5 = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\right);$$

$$П_6 = (1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots);$$

$$П_7 = (7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ -8);$$

$$П_8 = (-2,\ +4,\ -8,\ +16,\ -32,\ +64,\ -128,\ +256,\ -512,\ \ldots).$$

Отдельные числа, входящие в числовую последовательность, называются *членами последовательности*. Если последовательность состоит из конечного числа членов, то ее называют *конечной*, в противном случае — *бесконечной* **).

Ряд чисел, появляющийся в школьной таблице умножения на 2 (иначе, в *последовательности четных чисел*), рассматривается в начальных классах лишь до 20, а именно:

$$П_9 = (2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20).$$

Здесь число 20 — последний из десяти членов последовательности. Если последовательность продолжить неограниченно, то есть так, чтобы она не имела последнего (конечного) члена, то получится бесконечная последовательность чисел.

$$П_{10} = (2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ \ldots).$$

Здесь многоточие означает, что последовательность бесконечна — не имеет «конца» (последнего члена).

Задание последовательности указанием нескольких первых членов таит в себе возможность ошибки. Предполагается, например, что последовательность $П_5$ следует продолжить так:

$$П_5 = \left(\ldots,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{10},\ \ldots\right),$$

но этого никто и ничто не гарантирует. После члена $^1/_5$ могут, например, идти члены

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{1},\ \ldots$$

---

*) Dozent Dr. H. Lohse «Elementare Zahlenfolgen», «Альфа» (ГДР), 1968, №№ 3—6. Перевод и обработка А. Я. Халамайзера.

**) В нашей литературе *числовой последовательностью* обычно называют бесконечную последовательность. (Прим. перев.)

или, скажем, $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$;

можно продолжить последовательность $П_5$ и другими способами. Мы видим, что *бесконечную последовательность нельзя однозначно задать конечным числом первых членов*. Значит, нужно искать лучшие способы задания числовой последовательности.

Особенно простой является последовательность

$$П_{11} = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots),$$

называемая *последовательностью натуральных чисел*, в ней каждый последующий член на 1 больше предыдущего.

Этой последовательности можно сопоставить любую другую бесконечную последовательность — каждому члену последовательности поставить в соответствие его порядковый номер: первому члену — число 1, второму члену — число 2, ... k-му члену, который часто называют *общим членом*, — число k. Сами же эти члены обычно обозначают так:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots).$$

Так, например, в последовательности $П_1$ второй член $a_2 = 4$; третий член $a_3 = 6$, k-й член $a_k = 2k$. Таким образом, числовая последовательность представляет собой множество упорядоченных пар чисел $[k, a_k]$, в которых первое число (номер) — натуральное, а второе (сам член) — действительное. Кроме того, существует однозначное отображение множества $\{k\}$ на множество $\{a_k\}$, то есть каждому числу k соответствует ровно одно число a_k.

Но однозначное отображение есть не что иное, как *функция*. Поэтому *числовые последовательности — это особый класс функций*. Областью определения таких функций является множество $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, \ldots\}$ натуральных чисел для бесконечных последовательностей и множество $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ — для конечных (здесь n — номер последнего члена конечной последовательности). Например, последовательность $П_7$ состоит из шести членов, для нее $n = 6$.

Теперь нам нетрудно дать четкое определение понятия «числовая последовательность».

Числовые последовательности — это функции, областью определения которых является множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, k, \ldots\}$ *или подмножество первых его* n *элементов* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, *а областью изменения — множество действительных чисел.*

Выражение k-го члена через его номер k: $a_k = f(k)$ позволяет задать всю последовательность.

Такой способ задания последовательности называется *аналитическим*.

В качестве примера заметим, что общий член последовательности $П_6 = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$ имеет вид $a_k = k^2$.

Аналитический способ задания последовательности очень похож на аналитический способ задания функции — лишь при записи функции независимую переменную обычно обозначают через x, а зависимую — через y. Скажем, формула $y = 2x$ — это аналитическая запись линейной функции. Если областью ее определения считать множество всех действительных чисел, то графиком функции $y = 2x$ будет прямая (рис. 1). Равенство же $a_k = 2k$ является аналитическим заданием последовательности четных чисел (независимая переменная k принимает лишь натуральные значения).

Графическим изображением последовательности $a_k = 2k$ будет не вся прямая, а лишь отдельные ее точки (рис. 2). Математик сказал бы о них: дискретная последовательность точек. Такие точки для любой последовательности могут располагаться лишь в I и IV квадрантах

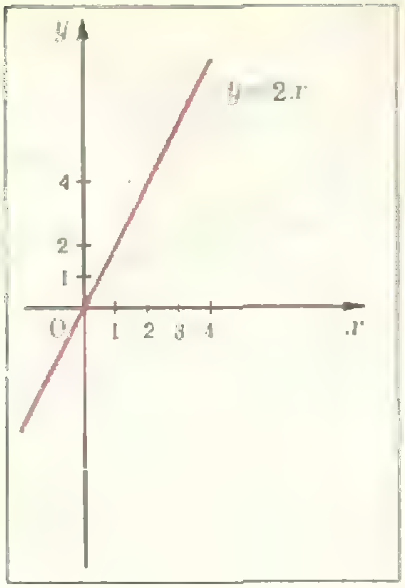


Рис. 1.

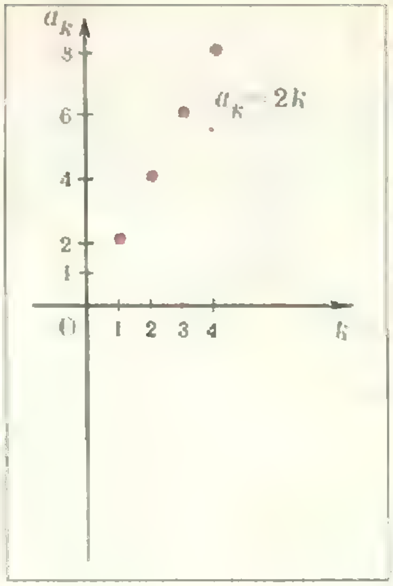


Рис. 2.

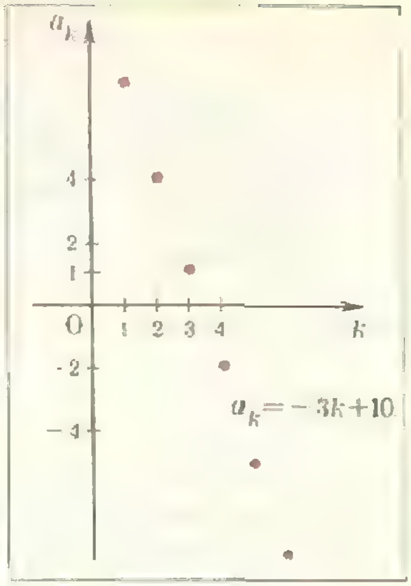


Рис. 3.

(так как $k > 0$). Вот вам еще один способ задания последовательности — *графический*. Скажем, последовательность $П_7 = (7, 4, 1, -2, -5, -8)$ можно задать аналитически формулой $a_k = -3k + 10$ $(k \leqslant 6)$, или графически точками на прямой (рис. 3).

Связь между номером члена k (натуральным числом) и самим членом (действительным числом) можно изобразить и в виде таблицы (см. табл. 1, 2). Этот способ задания последовательности называется *табличным*, но им можно однозначно задать лишь конечную последовательность.

Многие последовательности можно задать так называемым *«рекуррентным соотношением»* (*рекуррентной формулой*). При *рекуррентном* (*индуктивном*) *способе задания* k-й член последовательности выражается через предыдущий или несколько предыдущих. Рекуррентное соотношение обязательно должно быть дополнено начальным условием. Так, например, последовательность $П_8$ можно задать рекуррентной формулой $a_k = -2a_{k-1}$ при $k > 1$ и начальным условием $a_1 = -2$, то есть начальный (первый) член последовательности указывается непосредственно, а каждый следующий член получается путем умножения предыдущего члена на -2.

Общий случай

№ члена последовательности	Член последовательности
1	a_1
2	a_2
3	a_3
. . . .	. . . .
k	a_k

Табл. 1

Частный случай — последовательность $П_9$

№ члена последовательности	Член последовательности
1	2
2	4
3	6
. . . .	. . . .
10	20

Табл. 2.

Последовательность чисел Фибоначчи *)

$$\Pi_{12} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$

также задается рекуррентным соотношением $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ при $k>2$ и начальными условиями $a_1=a_2=1$.

Мы рассмотрели четыре способа задания числовой последовательности: *аналитический*, *табличный*, *графический* и *рекуррентный*. Есть еще один способ — *логический* (словесное описание). Так например, слова «последовательность квадратов» (или, точнее, «последовательность квадратов натуральных чисел») — это словесное описание последовательности

$$\Pi_6 = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots, k^2, \ldots).$$

Аналитический способ является важнейшим, этим способом наиболее лаконично и четко можно указать закон построения последовательности. Однако существуют и такие последовательности, для которых аналитическое задание вообще невозможно (например, последовательность простых чисел) или очень громоздко.

Итак, мы знаем теперь все основные способы задания последовательностей. Как уже было сказано, числовые последовательности играют важную роль не только в математике, но и в естествознании и технике. Особенно частое применение находят два вида последовательностей: арифметические и геометрические прогрессии. Их вы будете изучать в 8 классе.

Упражнения

1. Определите, какие из следующих высказываний неверны, а какие верны.

а) Каждая последовательность есть множество упорядоченных пар.

б) Каждая функция есть однозначное отображение.

в) Каждая последовательность есть однозначное отображение.

г) Каждая функция есть последовательность.

д) Каждая последовательность есть функция.

2. Запишите числовую последовательность $\Pi_{13} = (-3, +6, -12, +24, -48, +96, -192, +384, -768)$ в виде множества упорядоченных пар.

3. Запишите всеми известными вам способами задания последовательность Π_8.

4. Задайте рекуррентным соотношением последовательность $\Pi_7 = (7, 4, 1, -2, -5, -8)$.

5. Последовательность задана рекуррентным соотношением

$$a_k = \frac{2}{3}(a_{k-1})^2 \cdot a_{k-2} \text{ при } k > 2$$

и начальным условием

$$a_1 = 2;\ a_2 = -\frac{3}{2}.$$

Найдите третий, четвертый и пятый члены этой последовательности.

6. Найдите аналитическую форму задания последовательности

$$\Pi_{11} = \left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right),$$

в которой $a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k$.

---

*) Леонардо Фибоначчи — итальянский математик XIII века. Впервые числа Фибоначчи встретились при решении старинной задачи о размножении кроликов. Впоследствии числа Фибоначчи встретились в ряде практических и теоретических задач. Подробнее об этом рассказано в брошюре Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 1969), рассчитанной на школьников старших классов. (Прим. перев.)

Как движутся молекулы?

Т. С. Петрова

В 1827 году английский ботаник Броун обнаружил при наблюдении в микроскоп беспорядочное движение мелких взвешенных частиц в жидкости. Это движение не прекращалось, сколько бы времени ни велись наблюдения. Причина, вызывающая это движение, которое в дальнейшем стали называть броуновским движением, долгое время оставалась загадочной. Пытались объяснить его тем, что сосуд с жидкостью сотрясается; предполагали, что это движение является следствием происходящих в сосуде химических реакций; связывали это явление с неравномерным нагреванием жидкости под действием света и пр. Однако все попытки такого рода объяснений оказались несостоятельными.

В конце XIX века физики высказывали мысль о том, что броуновское движение, которое можно наблюдать не только в жидкости, но и в газе, вызывается беспорядочным тепловым движением молекул жидкости или газа. Прошло почти 80 лет с тех пор, как было обнаружено это движение, прежде чем вопрос о его причине был решён окончательно: движение броуновских частиц вызвано ударами молекул вещества, в котором эти частицы взвешены. Установление этого факта сыграло огромную роль в подтверждении и развитии положения молекулярно-кинетической теории о том, что молекулы вещества беспрестанно хаотически движутся. Многочисленные опыты, связанные с наблюдением броуновского движения, сделали эту теорию «наглядной» и неоспоримой.

Что можно сказать о характере движения молекул?

Согласно кинетической теории молекулы газа в своем хаотическом тепловом движении описывают зигзагообразные траектории, которые представляют собой совокупность громадного числа прямолинейных отрезков. На каждом таком отрезке движение молекулы происходит по инерции, и кончается такой отрезок там, где молекула соударяется с другой молекулой или со стенкой сосуда.

Непосредственное подтверждение такой картины движения молекул было получено в опыте французского физика Дюнуайе, поставленном в 1911 году. Схема этого опыта приведена на рисунке 1. Стеклянная трубка разделена на три отделения перегородками с маленькими отверстиями, которые расположены на одной прямой. Воздух из трубки откачан. В отделении A находится кусочек металлического натрия. Эту часть трубки подогревают, при этом легкоплавкий натрий начинает испаряться. Пары натрия заполняют отделение A. Через некоторое время на стенках в отделениях B и C образуется натриевый налет. В отделении B он покрывает стенки трубки и перегородку cc', а в отделении C налет образуется только вблизи точки O'. Объяснение такой картины очевидно.

Молекулы пара проникают из отделения A в отделение B через отверстие O_1. К отверстию O_1 моле-

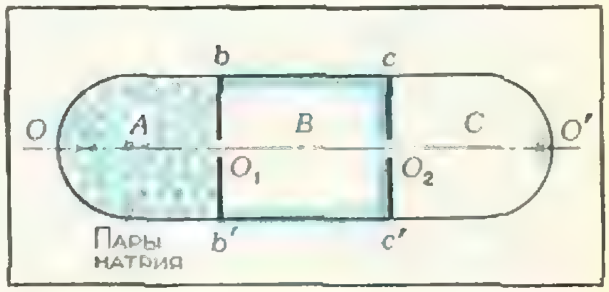


Рис. 1.

кулы подлетают из A по всевозможным направлениям, и, попав в отделение B, они сохраняют эти направления, так как воздух из трубки выкачан, плотность паров, попадающих в отделение B, очень невелика и молекулы практически не испытывают соударений друг с другом. В результате на стенках трубки в отделении B и на перегородке cc' оседают пары натрия, а перегородка bb' справа остается «чистой».

Что происходит в отделении C? Сюда попадают лишь те молекулы, направление движения которых совпадает с направлением оси отверстий O_1 и O_2. Поэтому следы натрия можно обнаружить только в окрестности точки O'. Форма пятна натриевого налета вблизи точки O' повторяет форму отверстия O_2. Если отверстие круглое, то пятно в O' круглое, если отверстие квадратное, то и пятно квадратное. Когда на пути пучка молекул в отделении C помещали «преграду», например, натянутую проволочку, то на пятне осевшего металла вблизи O' получалась «тень» этой проволочки. При увеличении плотности воздуха в трубке пятно налета вблизи O' размывается: молекулы паров сталкиваются с молекулами воздуха и отскакивают в разные стороны, при этом площадь пятна увеличивается.

Опыт Дюнуайе наглядно показывает, что молекулы газа движутся по всевозможным направлениям и что в отсутствие соударений их движение прямолинейно.

Как же можно связать броуновское движение с хаотическим движением молекул? Конечно, траектории движения молекул газа нельзя отождествлять с траекториями движения броуновских частиц. Ведь масса такой частицы во много раз больше массы отдельной молекулы, скорость частицы очень мала по сравнению со скоростью молекул, и ее движение есть результат соударения с ней громадного числа молекул.

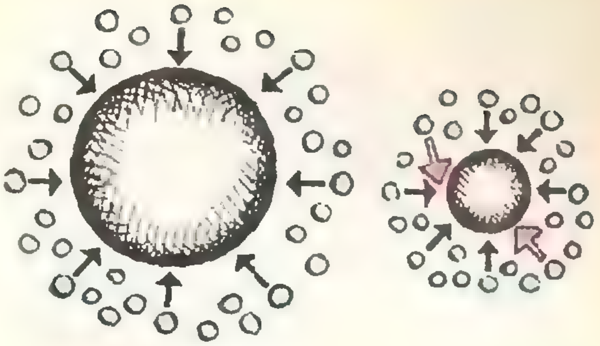


Рис. 2.

Сказанные выше слова «хаотическое движение» кажутся привычными. А ведь они наталкивают в данном случае на вопрос. Действительно, хаотично — значит беспорядочно. Но в беспорядочном движении ни одно из направлений нельзя считать преимущественным, все направления равноправны. Почему же броуновские частицы все-таки движутся? Дело в том, что их размеры очень малы (хотя и громадны по сравнению с размерами молекул), они порядка 10^{-4}—10^{-5} *см*. В каждый момент частица получает множество ударов от окружающих ее молекул жидкости или газа. Чем крупнее частица, тем больше молекул в каждый момент с ней сталкиваются, тем более вероятно, что удары противоположных направлений уравновесят, скомпенсируют друг друга, и частица останется неподвижной (рис. 2). Чем мельче частица, тем меньше общее число соударений с молекулами, тем вероятнее, что в своем беспорядочном «наскакивании» на частицу какие-то молекулы «промахнутся», и в результате равновесие частицы будет нарушено — она начнет двигаться. Таким образом, броуновское движение, действительно, подтверждает существование беспорядочного движения молекул.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Решетки и правильные многоугольники»

1. Докажем свойство 1°.

При параллельном переносе сетка прямых, порождающих решетку, переходит в некоторую сетку (так как параллельный перенос сохраняет расстояния и переводит прямые в параллельные им прямые); но поскольку рассматриваемый параллельный перенос переводит один из узлов решетки в другой, то при таком переносе сетка перейдет в себя.

Свойство 2° почти очевидно следует из 1°: если A, B и C — три вершины параллелограмма, являющиеся узлами решетки (см. рис. 1 в тексте статьи), то и D — узел, поскольку D получается из A параллельным переносом, переводящим узел B в узел C.

Свойство 3° также следует из 1°: нужно взять узел Q на прямой l и ближайший к нему узел P на прямой l (см. рис. 1 в тексте статьи), тогда все узлы, лежащие на l, получатся из Q параллельными переносами вдоль l на расстояние PQ.

Для доказательства свойства 4° рассмотрим решетку, порожденную параллелограммом $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 1 в тексте). Из свойств 2° и 3° следует, что полученная решетка содержится в исходной. Поэтому нужно только доказать, что всякий узел исходной решетки является узлом построенной. В самом деле, если найдется узел исходной решетки, лежащий внутри или на границе одного из параллелограммов, на которые разбивает плоскость построенная сетка, то найдется узел (свойство 3°), содержащийся внутри или на границе основного параллелограмма ($ABCD$) исходной решетки и не являющийся его вершиной. Противоречие.

2. Это — решетка, порождаемая прямоугольником с вершинами в точках $O\ (0,\ 0)$ $A\ (a,\ 0)$, $B\ (a,\ b)$, $C\ (0,\ b)$.

3. Так как вершины параллелограмма $ABCD$ принадлежат множеству M, то точки A_1, B_1, A_2, D_1 (см. рис. 4, *а* в тексте статьи) ему также принадлежат (точка B_1, например,— вершина параллелограмма ACB_1D). «Пристраивая» так параллелограммы к уже построенным, получим любую вершину решетки.

4. Рассмотрим интервал $(\beta-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon)$. В силу следствия леммы 5° (см. с. 27) существуют такие натуральные m и n, что $0 < h = m\alpha - n < \varepsilon$. Рассмотрим на числовой оси точки

$$\ldots,\ -rh,\ \ldots,\ -2h,\ -h,\ 0,\ h,\ 2h,\ \ldots,\ rh,\ \ldots$$

Расстояния между соседними точками меньше ε; поэтому в любом интервале числовой оси, длина которого больше ε, найдется хотя бы одна из таких точек. Отсюда уже все следует.

5. Пусть M — произвольное натуральное число. Мы должны доказать существование степени двойки, первые цифры десятичной записи которой совпадают с числом M, то есть что существуют такие натуральные m и n, для которых

$$M\cdot 10^n < 2^m < (M+1)\,10^n,$$

или

$$\lg M + n < m \lg 2 < \lg (M+1) + n,$$
$$\lg M < m \lg 2 - n < \lg (M+1),$$

то есть, что найдутся натуральные m и n, для которых число $m \lg 2 - n$ попадет в интервал $(\lg M,\ \lg (M+1))$.

Но число $\lg 2$ — иррациональное: в самом деле, предположив, что $\lg 2 = \frac{p}{q}$ (где p и q — натуральные числа), получим равенство $2^q = 10^p$; но этого не может быть, так как правая часть последнего равенства делится на 5, а левая — не делится.

Значит, утверждение упражнения 5 следует из результата упражнения 4.

6. Для доказательства заметим, что $\operatorname{tg} \angle ABC$ (где A, B и C — произвольные узлы целочисленной решетки) — рациональное число (см. рис. 1, *а*, *б*): в случае *а*)

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta};$$

в случае *б*)

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Но $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ — число иррациональное; поэтому правильный треугольник на целочисленной решетке поместить нельзя.

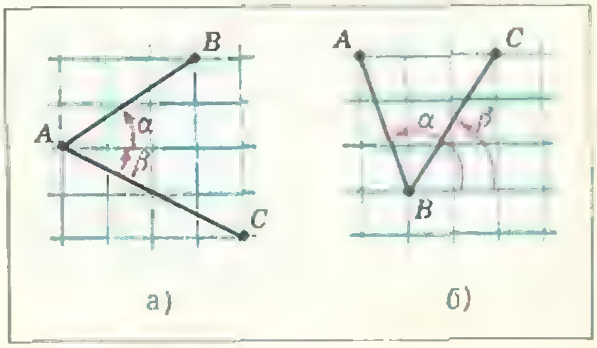


Рис. 1.

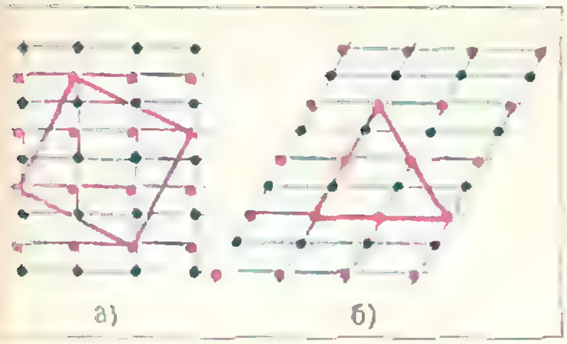


Рис. 2.

Правильный шестиугольник на целочисленной решетке «поместить» также невозможно, его вершины через одну образуют правильный треугольник.

7. (См. рис. 6 в тексте). Положим $AB=1$; тогда $A_1B_1=k$, $BB_1=1-k$, $BE=2-k$. Из подобия ΔA_1BB_1 и ΔDBE получим

$$\frac{k}{1}=\frac{1-k}{2-k}.$$

Ответ. $k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

8. Ответ. $k_q=2\sin\dfrac{\pi}{q}$.

9. 10. См. рис. 2, *а*, *б*.

11. Ответ. Такой решетки нет.

Доказательство. Предположим, что на некоторую решетку «поместились» квадрат $ADEF$ и правильный треугольник ABC (можно считать, что они имеют общую вершину — см. рис. 3). Рассмотрим решетку, порожденную квадратом $ADEF$. Поскольку угла в 60° с вершиной в узлах построенной решетки и сторонами, проходящими через другие узлы, не существует (см. упражнение 6), то по крайней мере на одном из лучей, полученных при продолжении сторон AB и AC правильного треугольника, нет узлов новой решетки, кроме A. В силу свойства 2° § 1 на этом луче лежит бесконечно много узлов исходной решетки.

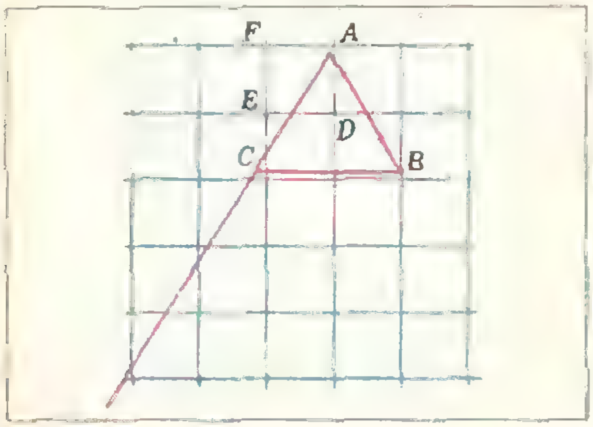


Рис. 3.

Совместим теперь все квадраты, которые пересекает наш луч, с квадратом $ADEF$. Тогда узлы, лежащие на луче, перейдут в различные узлы (почему?), принадлежащие квадрату $ADEF$, а это противоречит тому, что квадрат $ADEF$ содержит лишь конечное число узлов.

12. Мы не приводим решения этой задачи, потому что она предложена вам и в «Задачнике «Кванта» (см. задачу М299).

13. Для $n=1$ оба утверждения справедливы. Предположим, что они справедливы для $n=k$, и докажем их справедливость для $n=k+1$.

Имеем

$$\sin(k+1)x=\sin kx\cdot\cos x+\cos kx\cdot\sin x=$$
$$=\sin x\,[Q_{k-1}(\cos x)\cdot\cos x+P_k\times$$
$$\times(\cos x)]=\sin x\cdot Q_k(\cos x);$$
$$\cos(k+1)x=\cos kx\cdot\cos x-\sin kx\cdot\sin x=$$
$$=\cos x\cdot P_k(\cos x)-(1-\cos^2 x)\cdot Q_{k-1}(\cos x)=$$
$$=P_{k+1}(\cos x).$$

14. Рассмотрим числа $p, 2p, \ldots, (q-1)p$. Эти числа при делении на q дают *различные* остатки (если остатки чисел lp и kp совпадут, то разность $(l-k)p$ этих чисел делится на q. Так как числа p и q взаимно просты, то на q делится $l-k$; но это невозможно, поскольку $|l-k|<q$).

Раз все остатки различны, то один из них обязательно будет равен 1.

15. $\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $1-\operatorname{tg}^2\alpha=$
$$=\cos 2\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha).$$

К статье «Вокруг формулы Пика»

3. Пусть M — середина отрезка с концами в узлах. Тогда точка, симметричная узлу относительно точки M, — тоже узел.

4. Пусть при прыжке вершина A треугольника ABC переходит в узел A', B — середина $[AA']$. Параллелограмм $ABCD$ получается из параллелограмма $BA'EC$ параллельным переносом, который все узлы переводит в узлы так, что внутри и на сторонах $BA'EC$ не может быть узлов.

5. Проведем через все вершины треугольника линии сетки и рассмотрим прямоугольник, образуемый четырьмя из этих линий, заключающий данный треугольник ABC. Можно считать, что A — вершина этого прямоугольника (все точки A, B, C не могут лежать не в вершинах прямоугольника). Если вершины B и C не лежат в вершине E прямоугольника $ADEF$ — скажем, $B\in[DE]$, $C\in[EF]$, — то перпендикуляры, восстановленные в B и C к прямым DE и EF, пересекаются в узле решетки, лежащем внутри или на границе треугольника ABC. Если же одна из вершин B или C — скажем, B — совпадает с E, то угол ACB тупой или прямой.

7. Длины отрезков, соединяющих узлы, могут принимать лишь такие значения, квадрат которых — натуральное число.

Поэтому убывающая последовательность таких длин обязательно конечна.

10. Проделайте в любом порядке такие операции: один из узлов, лежащих внутри или на границе треугольника (одного из уже полученных треугольников разбиения), соединяется с вершинами этого треугольника.

20. Для выпуклого многоугольника это очевидно. В невыпуклом наибольший угол больше 180°. Проведите его биссектрису «до упора» и затем сдвигайте полученную точку по стороне, пока отрезок, соединяющий ее с вершиной угла, не встретит какую-то вершину многоугольника.

К статье «Шар, касающийся ребер многогранника»

1. $\pi(3\sqrt{2}-4)$ см².

2. $\dfrac{\pi a^3}{12}(15-8\sqrt{2})$.

3. Центр шара находится в центре основания пирамиды.

4. $\dfrac{4}{27}\pi R^3(8\sqrt{3}-9)$.

5. $\dfrac{4}{3}r\sqrt{3}$.

6. $\dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

7. $\dfrac{a\left(\sin\dfrac{\pi}{n}-\cos\alpha\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\alpha}$.

К статье «XVI Международная математическая олимпиада»

Приведем краткие решения задач.

1. Заметив, что $N(p+q+r)=39$, нетрудно понять, что $N=3$, а $p+q+r=13$. Мы предоставляем читателю провести дальнейшие несложные рассуждения, которые позволят полностью восстановить ход игры. В частности, окажется, что q шариков в первом круге получил игрок C. Заметим, что эту задачу решило подавляющее большинство участников олимпиады.

2. Опишем около треугольника ABC окружность и, взяв на AB произвольную точку D, продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью в точке E (см. рис. 4). Получим

$$CD\cdot DE = AD\cdot DB.$$

Отсюда заключаем, что величина CD будет средним геометрическим величин AD и DB тогда и только тогда, когда точка D делит отрезок CE пополам. Значит, нахождение точки D с искомыми свойствами эквивалентно нахождению на окружности точки E такой, что $CD = DE$, что возможно тогда и только тогда, когда $CF \leqslant HG$, где CF — высота треугольника ABC, HG — высота сегмента AHB. Легко подсчитать, что если r — радиус описанной окружности, то

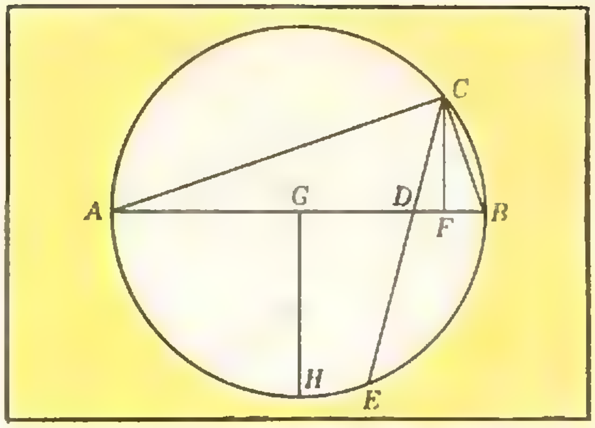


Рис. 4.

$$CF = 2r\sin\alpha\cdot\sin\beta, \text{ и } HG = r - r\cos\gamma = 2r\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение задачи.

3. Введем обозначения

$$A_m = \sum_{\substack{k\\ 0\leqslant 2k+1\leqslant m}} C_m^{2k+1}\cdot 2^{3k},\quad B_m = \sum_{\substack{k\\ 0\leqslant 2k\leqslant m}} C_m^{2k}\cdot 2^{3k}$$

При m нечетном, большем 1, A_m дает сумму, фигурирующую в условии задачи. Легко проверить, что при $m \geqslant 1$ $A_m + B_m = A_{m+1}$ и $8A_m + B_m = B_{m+1}$, причем $A_1 = B_1 = 1$.

Покажем теперь по индукции, что A_m при m нечетном, а B_m при m четном не делится на 5. Для всех $m \leqslant 3$ это верно, так как $A_1 = 1$, $A_3 = 11$, $B_2 = 9$. Пусть для некоторого $i > 3$ это верно при всех $m \leqslant i$. Проверим, что тогда это верно и при всех $m \leqslant i+1$. В самом деле, написанные выше рекуррентные соотношения дают

$$A_{m+3} = 5(5A_m + 2B_m) + B_m,$$
$$B_{m+3} = 5(17A_m + 5B_m) + 3A_m.$$

Отсюда получаем доказываемое.

4. Из условия задачи вытекает, что $a_i \geqslant i$, и поэтому

$$32 = a_1 + a_2 + \ldots + a_p \geqslant \frac{p(p+1)}{2}.$$

Отсюда следует, что $p \leqslant$

Выпишем все возможные разложения числа 32 на сумму семи попарно различных натуральных слагаемых: $32 = 1+2+3+4+5+6+11 = 1+2+3+4+5+7+10 = 1+2+3+4+5+8+9 = 1+2+3+4+6+7+9 = 1+2+3+5+6+7+8$.

Первый случай не реализуется, так как на шахматной доске не существует прямоугольника из 22 клеток; остальные случаи реализуются, в чем легко убедится, построив соответствующие примеры.

5. Очевидны неравенства

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$$

и

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1.$$

Итак, $1 < S < 2$. То, что сумма S принимает все значения из интервала $(1, 2)$, большинство участников доказывали, используя идею непрерывности функции $S(a, b, c, d)$. Читателям, незнакомым с общими свойствами непрерывных функций, рекомендуем найти другое решение, где все сводится к изучению множества значений элементарных функций.

6. Предположим сначала, что каждый из многочленов $P(x)-1$ и $P(x)+1$ имеет не менее трех различных целых корней (причем они, очевидно, отличны от корней другого). Из этих целых чисел возьмем наименьшее и обозначим его через a. Не ограничивая общности, можем считать, что a — корень многочлена $P(x)+1$. Тогда справедливо представление $P(x)+1 = (x-a)\,Q(x)$, где $Q(x)$ — также многочлен с целыми коэффициентами. Пусть p, q, r — три различных целых корня многочлена $P(x)-1$, причем все они больше a. Но $P(x)-1 = (x-a)\times Q(x)-2$. Отсюда $2 = (p-a)\cdot Q(p) = (q-a)\cdot Q(q) = (r-a)\cdot Q(r)$, где $p-a$, $q-a$, $r-a$ — различные положительные целые числа. Но тогда хотя бы одно из них больше 2, что, очевидно, приводит к противоречию.

Таким образом, наше предположение неверно, и значит, хотя бы у одного из уравнений $P(x) = 1$ и $P(x) = -1$ число целых корней меньше или равно 2. Отсюда и из того, что число корней каждого из этих уравнений не превосходит $\deg(P)$, следует доказываемое неравенство.

К статье «VII Международная физическая олимпиада»

Задача 1

$$v_0 = \sqrt{\frac{3E_{\text{н}}}{m_{\text{H}}}} = 6{,}25\cdot 10^4\ \text{м/с};$$

$$\frac{\Delta v}{v_{\text{ср}}} = \frac{v_0}{c}\cdot 100\% \approx 2\cdot 10^{-2}\ \%.$$

Задача 2

$$n_B = \sqrt{n_A^2 + \sin^2\alpha} = 1{,}3;$$

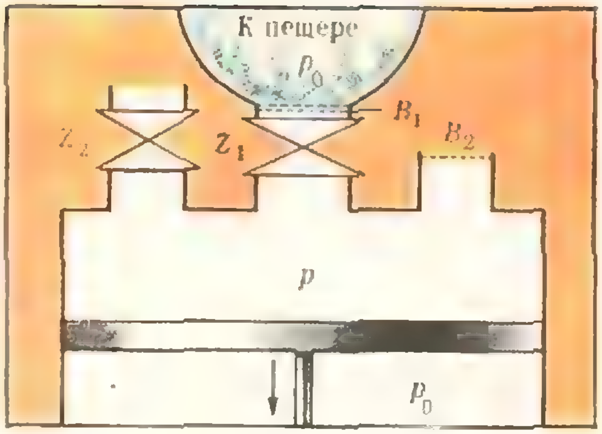


Рис. 5.

$$x_B = R\left(1 - \frac{n_A}{n_B}\right) = 1\ \text{см};$$

$$d = \sqrt{R^2 - (R - x_B)^2} = 5\ \text{см}.$$

Задача 3

Схема двигателя может быть, например, такой, как показано на рисунке 5.

Экспериментальная задача

Электрическая цепь представлена на рисунке 6.

К статье «Числовые последовательности»

1. Высказывание г) неверно. Последовательностью является лишь та функция, областью определения которой служит множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, k, \ldots\}$ или часть его $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

2. $\{(1, -3);\ (2, 6);\ (3, -12);\ (4, 24);\ (5, -48);\ (6, 96);\ (7, -192);\ (8, 384);\ (9, -768)$.

3. Мы укажем лишь аналитическое задание: $a_k = (-2)^k$.

4. $a_k = a_{k-1} - 3$.

5. $a_3 = 3$, $a_4 = -9$, $a_5 = 162$.

6. $a_k = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

К задаче «Лабиринт-алфавит»

(*см. «Квант», 1974, № 11, с. 16*)

См. рис. 7. Указание. Если какая-то буква встречается в лабиринте лишь один раз, то через нее необходимо провести ломаную.

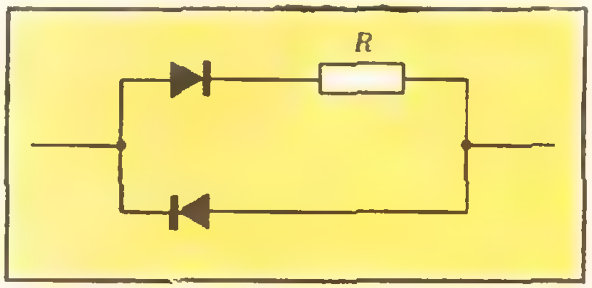


Рис. 6.

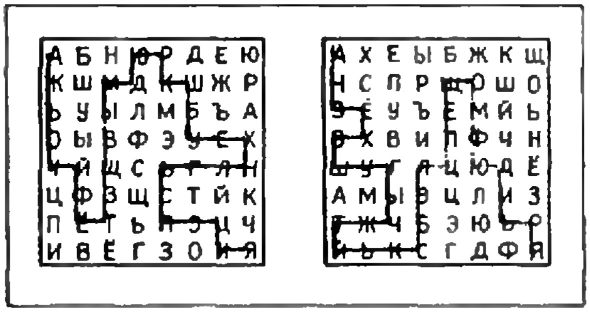


Рис. 7.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. с. 65)

1. И С К = 954.

2. При изготовлении консервов перед тем, как закрыть банку, ее и содержимое нагревают. Когда закрытая банка остынет, воздух в ней окажется разреженным, объем томатов увеличится. Если теперь снять крышку с банки, давление воздуха станет равным атмосферному, томаты сожмутся, и уровень жидкости в банке понизится.

3. 1 домик, 3 квадрата, 6 треугольников.

4. Выталкивающая сила равна весу вытесненной кубиком воды.

5. Температура в первом случае ниже, так как изменению температуры на 1° по шкале Фаренгейта соответствует изменение температуры на 0,55° по шкале Цельсия.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 11)

1. Наибольшее значение суммы равно 45. При изменении знака на противоположный у любого слагаемого результат изменяется на удвоенное слагаемое, а поэтому результат всегда будет нечетным, и не может быть равен 20. Саша наверняка допустил ошибку, а Володя мог написать $1+2-3+4+5+6+7+8-9=21$.

2. Бо́льшая часть поверхности гвоздя не попадает в пламя свечи, тепло с этой поверхности излучается в окружающее пространство, и температура гвоздя остается ниже температуры плавления железа.

3. 123×546 = 67 158.

4. В пустоте сегнерово колесо будет вращаться даже быстрее, чем в воздухе (из-за отсутствия сопротивления).

5. —2, 2, 3, 5, 9.

6. Надо начать обход из одного треугольника и кончить в другом, потому что у треугольника нечетное число сторон.

Читатели предлагают задачи

1. Даны точки касания трех попарно касающихся окружностей. Найти центры этих окружностей.

Л. Черепанова

2. При каком соотношении между сторонами прямоугольного треугольника треугольник, составленный из его медиан, также будет прямоугольным?

В. В. Малинин

3. Решить уравнение

$$n^{n!}-n!^{n}=513$$

А. Гулиев

3. В трапецию вписана окружность. Доказать, что боковые стороны трапеции видны из центра окружности под углами 90°

А. Тимофеев

5. Дан произвольный выпуклый пятиугольник площади 1. Середины его соседних сторон соединены. Доказать, что площадь полученного пятиугольника не превосходит $^3/_4$.

В. Смолко

6. На ворсистом материале имеется дыра треугольной формы. У портного нашлась заплатка из того же материала, но она совпадает с дырой с изнанки. Как портной должен разрезать заплатку, чтобы заделать дыру?

Э. Л. Гузовский

7. Как раскроить (прямыми разрезами выпуклый *n*-угольник, чтобы из полученных частей можно было составить его зеркальное отражение?

Определить наименьшее требующееся в общем случае число разрезов (в зависимости от числа *n*).

Г. А. Юрина

BeatriceGloria_personal library

Напечатано в 1974 году

Академии наук СССР 250 лет	4	2
250 лет Академии наук СССР	5	2

Статьи по математике

Абрамович В. С. Числа Бернулли	6	10
Александров П. С. Павел Самуилович Урысон (к пятидесятилетию со дня смерти)	8	3
Белага Э. Г. Арифметика на географической карте	4	23
Бельский А. А., Садовский Л. Е. Кольца	2	2
Березин В. Н. Первый учебник математики в России	6	14
Болтянский В. Г. Бывает ли равномерное движение?	12	2
Брудно А. Л. Вокруг циркуля	10	2
Вагутен В. Н. Задачи о графах и сказка «Иван-царевич и серый волк»	11	23
Гервер М. Л. Сюрпризы	1	13
Гервер М. Л. От перемены мест слагаемых . . .	9	14
Гик Е. Я. Проективные шахматы	3	15
Гнеденко Б. В. Академия наук и прогресс математики	4	3
Гнеденко Б. В. Академия наук и прогресс математики (*продолжение*)	5	18
Гутер Р. С., Донской М. В. Машина играет в шахматы	11	17
Делоне Б. Н. Леонард Эйлер	5	26
Демидович Н. Б. Как начертить *n*-мерный куб?	8	22
Донской М. В. Чемпионат мира среди шахматных программ	12	31
Егоров А. А. Решетки и правильные многоугольники	12	26
Людмилов Д. С., Людмилова С. Д. Правдоподобные рассуждения и математика	5	43
Мордкович А. Г. Экстремумы многочленов третьей степени	11	8
Приятель А. Решение логических задач при помощи графов с цветными вершинами	12	14
Рейтман М. И. Транспортная задача	7	13
Рубина Н. С. О языках иностранных	7	24
Савин А. П. Проективная плоскость	3	9
Садовский Л. Е. Математика для спорта и спорт для математики	1	2
Саннинский В. Я. Об одной интересной книге	3	24
Торонджадзе М. С., Бендукидзе А. Д. Кривые Пеано	8	13
Яглом И. М. Заплаты на кафтане	2	13

Статьи по физике

Академику П. Л. Капице	7	3
Арцимович Л. А. Плазма — четвертое состояние вещества	3	2
Бронштэн В. А. Противостояния Марса	11	12
Бялко А. В. Электролиз и закон сохранения энергии	1	22
Вавилов С. И. Очерк развития физики в Академии наук	4	12
Воробьев И. И. Необычное путешествие	2	22
Гегузин Я. Е. Капля	9	20
Герштейн Г. М. Сигналы. Спектры	6	2
Гиндикин С. Г. Из истории маятниковых часов	9	2
Гинцбург М. А. Планеты, о которых мы мало знаем	7	4
Грабовский М. А. Как физики определяют кривизну параболы	7	21
Каганов М. И., Любарский Г. Я. Электрон излучает фотоны	12	7
Кикоин А. К. Свободное падение тел на вращающуюся Землю	4	18
Кикоин А. К. Физики, математики, спорт . . .	8	36
Кикоин И. К. Он прожил счастливую жизнь	5	36
Кресин В. З. Вблизи абсолютного нуля	1	9
Лешковцев В. А. Физика в Академии наук СССР (1917—1974 гг.)	5	6

Малов Н. Н. Как сфотографировали свет	10	10
Минц Н. А. Гейзеры	10	13
Мороз И. И. Электрохимическая обработка металлов	1	27
Мякишев Г. Я. Вынужденные механические колебания	11	2
Понтекорво Б. Юность Энрико Ферми	8	17
Семенчинский С. Г. Линзы, зеркала и Архимед	12	23
Смородинский Я. А. Сколько времени идет свет от Меркурия?	3	20
Смородинский Я. А. О силах инерции	8	28
Шварцбург А. Б. Магнитное поле Земли	2	8

Лаборатория «Кванта»

Головей М. П., Добржанский Г. Ф. Игрушки из кристаллов	1	31
Драчев В., Мазур А. Фотокамера «Рыбий глаз»	11	30
Покровский Г. И. Гидродинамический механизм в падающей пробирке	3	26

Математический кружок

Бекламов Б. В. Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам	10	17
Белага Э. Г. Вычисление многочленов — от Ньютона до наших дней	7	29
Васильев Н. Б. Семейство параллельных n-угольников	11	32
Васильев Н. Б. Вокруг формулы Пика	12	39
Гервер М. Л. 20 задач на пределы	3	27
Гик Е. Я. О силе шахматных фигур	6	15
Гуревич Г. А., Раббот Ж. М. О вероятностях и «хороших» числах	1	35
Долгов О. Т. Игра в 15	2	26
Клумова И. Н. Игра «Жизнь»	9	26
Тоом А. Л. Вступительная контрольная работа в ВЗМШ в 1974 году. Решения задач	8	40
Тоом А. Л. Из жизни единиц	9	31

Задачник «Кванта»

Задачи

М241 — М245; Ф253 — Ф257	1	42
М246 — М250; Ф258 — Ф262	2	34
М251 — М255; Ф263 — Ф267	3	34
М256 — М260; Ф268 — Ф272	4	30
М261 — М265; Ф273 — Ф277	5	48
М266 — М270; Ф278 — Ф282	6	18
М271 — М275; Ф283 — Ф287	7	36
М276 — М280; Ф288 — Ф292	8	44
М281 — М285; Ф293 — Ф297	9	42
М286 — М290; Ф298 — Ф302	10	20
М291 — М295; Ф303 — Ф307	11	40
М296 — М300; Ф308 — Ф312	12	44
Победители конкурса «Кванта»	3	32
Победители конкурса «Кванта»	9	40

Решения задач

М200—М204; Ф211, Ф212	1	44
М205 — М207; Ф213 — Ф217	2	36
М200, М208 — М210; Ф218 — Ф222	3	36
М211 — М218; Ф223 — Ф227	4	32
М219 — М221; Ф228 — Ф232	5	50
М222 — М230; Ф233 — Ф237	6	20
М231 — М235; Ф238 — Ф242	7	38
М236 — М240; Ф243 — Ф247	8	46
М241 — М245; Ф248 — Ф252	9	44
М246 — М250; Ф253 — Ф259	10	21
М251 — М255; Ф260 — Ф266	11	42
М256 — М260; Ф267 — Ф272	12	46

Практикум абитуриента

I

Асламазов Л. Г. Свойства паров, испарение и кипение жидкостей	1	60
Болтянский В. Г. Четырехугольники	9	53
Дорофеев Г. В. Переформулировка задачи	1	53
Дорофеев Г. В. Пределы последовательностей	11	54
Зайцев И. А. Электрические машины постоянного тока	5	64
Крайзман М. Л. Шар, касающийся ребер многогранника	12	55
Кузнецов Е. П. «Космические» задачи на вступительных экзаменах	11	60
Кушнир И. А. Метод вспомогательного элемента	2	46
Мякишев Г. Я. О законе сохранения энергии в механике	3	52
Розов Н. Х. Читатели советуют	3	48
Садовский Л. Е. «Прикладная математика» — новая специальность в технических вузах	6	38
Сидоров Ю. В. Аргумент комплексного числа	4	41
Тихомирова В. А. Механические колебания	6	31
Шарыгин И. Ф. Задачи о пересечении тел	5	58
Шарыгин И. Ф. Чертеж в стереометрических задачах	10	32

II

Белявский С. С. Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина	7	49
Борзяк А. Н., Давыдов В. И., Дьяконов Н. А., Дыбов П. Т. Телевидение готовит в вуз	3	62
Борзяк А. Н., Давыдов В. Н., Дыбов П. Т., Дьяконов Н. А., Иванов А. С. Телевидение готовит в вуз	4	50
Воронин Л. Н., Ионов В. Н.,		

Ляховский А. В. Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева	10	38
Голубов Э. А. Уральский государственный университет им. А. М. Горького	7	50
Гулькаров Н. Р., Закриллаев Ф. З., Пак Е. В., Умирбеков А. У. Ташкентский автомобильно-дорожный институт	7	58
Забеев А. И., Николаев И. Н., Шолохов Н. В. Московский инженерно-физический институт	1	67
Каменецкий С. Е., Крупич В. И., Парфентьева Н. Е., Постникова Л. П., Чернецов М. М., Шадрин Г. А. Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	7	52
Колпаков В. С., Сахарова Р. Н. Ярославский политехнический институт	7	57
Коновальцев И. В., Новиков В. И. Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского	7	56
Коровин В. И., Лужнов Ю. М. Московский институт инженеров железнодорожного транспорта	6	42
Ленинградский государственный университет	6	47
Луканкин Г. Л., Колягин Ю. М. Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской	7	54
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова	3	60
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова	4	47
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова	5	70
Московский авиационный институт	6	44
Московское высшее техническое училище	6	46
Новосибирский государственный университет	2	52
Тонян В. А. Московский институт электронного машиностроения	6	43

Рецензии, библиография

Дорофеев Г. В. Методическое пособие по разделу «Неравенства»?	4	52
Зорич И. Беседы старого учителя	2	56
Зорич И. Энрико Ферми — физик	8	54
Кедров Ф. Брошюры по физике	3	64
Левитан Е. П. Приглашение в дальний космический рейс	11	66
Лишевский В. П. Новые книги	5	72
Лишевский В. П. Рассказ о капле	9	57
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	3	66
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	7	60
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	9	60
Петрова Т. С., Смолянский М. Л. Новые книги	11	64
Садовский Л. Е. Новый учебник по геометрии	10	58
Хрусталев А. Ф. Старые ошибки... вторым изданием	1	74
Яглом И. М. Удачная серия	3	64
Яглом И. М. Слишком маленькая серия	9	58

Информация

Асланян В. К., Кирьянов А. П., Чугунова Т. А. Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте	1	69
Борзяк А. Н., Диденко А. Я., Дыбов П. Т., Дьяконов И. А., Рощупкин В. В. Телевидение готовит в вуз	6	50
Виленкин А. Н., Тихомирова В. А. Научная конференция учащихся специализированных школ-интернатов	9	62
Вниманию семиклассников! Всесоюзная заочная математическая школа объявляет прием учащихся	1	72
Волков В. А., Лихтарников А. Л., Рубанов И. С. Конференция по работе со школьниками	8	59
Дьяконов И. А., Качанов А. В., Наслузов И. И. Телевидение готовит в вуз	9	67
Иванов С., Вараксин А. День юного физика	11	73
Кабалевский Ю. Д. «Прикладная математика» в техникумах	6	49
Каплун В. И. Физико-математической школе при МИИТе — 5 лет	8	56
Кованцова Л. В. XIV математическая олимпиада школьников Украины	9	66
Лешковцев В. А. XXIV Международный астронавтический конгресс	3	69
Лешковцев В. А. Ленинские премии 1974 года	11	71
Лиманов Л. Г. Пятый праздник юных математиков Закавказья	7	62
Заочная олимпиада школьников Азиатской части СССР	11	67
Орлов А. И., Розенталь А. Л. Встречи с тремя неизвестными	3	68

Всесоюзные и Международные олимпиады школьников

Лиманов Л. Г., Смолянский М. Л. Олимпиада по математике	**10**	40
Петрова Т. С., Чернова Л. В. Олимпиада по физике	**10**	49
Скворцов В. А., Моисеева З. И. XVI Международная математическая олимпиада	**12**	60
Тарасюк Г. С. VII Международная физическая олимпиада	**12**	63

«Квант» для младших школьников

Бал у принцессы Арифметики	7	66
Бендукидзе А. Д. Фигурные числа	**6**	53
Булавко И. Г. Делимость чисел	9	70
Головей М. П., Куликова Л. С. Ветка — барометр	**9**	74
Задачи	**1—12**	
Колмогоров А. Н. Решето Эратосфена	**1**	77
Кордемский Б. А. Топологические опыты своими руками	**2**	58
Кордемский Б. А. Топологические опыты своими руками (*продолжение*)	**3**	73
Кордемский Б. А. Турист в незнакомом городе	**4**	55
Крупский В. Н., Орлов А. И. Коза на привязи	5	74
Лоэ Х. Числовые последовательности	**12**	66
Мостовой А. И. Нет ли другого доказательства	**11**	75
Петрова Т. С. Как движутся молекулы?	**12**	70
Попова И. Об одной задаче	9	69
Родина Н. А. Как измерить молекулу?	**6**	57
Родина Н. А. Можно ли взвесить молекулу?	**7**	69
Смышляев В. К., Савин А. П. Нет ли другого доказательства	**8**	62
Ушаков В. В. Метод бесконечного спуска	**10**	60

Уголок коллекционера

Алтыкис А. В. На марках — Макс Планк	**1**	3-я с. обл.
Алтыкис А. В. Марки, посвященные Бенджамину Франклину	**3**	3-я с. обл.
Алтыкис А. В., Лешковцев В. А. На марках — Академия наук СССР	**5**	3-я с. обл.
Лешковцев В. А. Первый полет к Венере	**2**	3-я с. обл.
Лешковцев В. А. В. И. Ленин — величайший ученый XX века	**4**	3-я с. обл.
Рудов В. А. Физики — члены Академии наук СССР на марках	**12**	3-я с. обл.

Корректор *Н. Л. Дорохова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/IX—74 г
Подписано в печать 29/X—74 г
Бумага 70×100 $^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. 6,5
Уч.-изд. л. 7,06 Тираж 361 185 экз. Т-18325
Цена 30 коп. Заказ 1889

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Физики — члены Академии наук СССР на марках

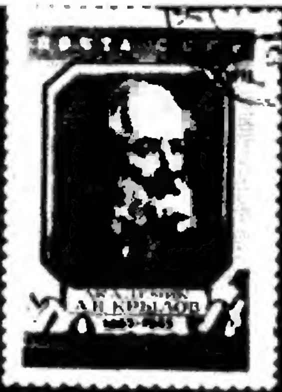
Среди почти 4500 марок, выпущенных в нашей стране после Великой Октябрьской революции, шесть марок посвящены физикам — членам Академии наук СССР. Изображенные на них ученые были выдающимися физиками и крупными организаторами советской науки.

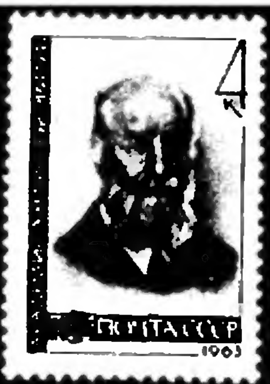
Первая из этих марок была выпущена в 1956 году. На ней изображен портрет академика Алексея Николаевича Крылова. Академик Крылов был выдающимся математиком, механиком и специалистом по математической физике. Он был также инициатором создания Физико-математического института Академии наук и первым его директором. Этот институт впоследствии преобразовался в Физический институт имени П. Н. Лебедева и математический институт имени В. А. Стеклова. В 1963 году, к столетию со дня рождения А. Н. Крылова, была выпущена вторая марка с его портретом.

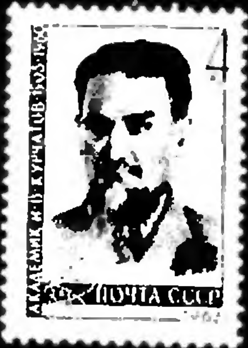
В этом же году вышла марка с портретом академика Игоря Васильевича Курчатова. Она была выпущена в связи с шестидесятилетием со дня его рождения. Академик И. В. Курчатов создал и возглавил большой коллектив советских ученых, успешно решивших проблему использования атомной энергии. По его инициативе была построена первая в мире атомная электростанция и создан Институт атомной энергии, который носит теперь имя этого замечательного ученого.

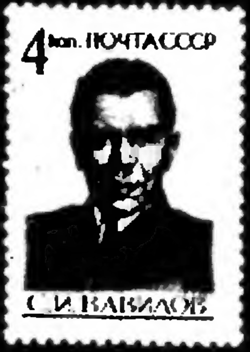
В 1961 году, к семидесятилетию со дня рождения академика Сергея Ивановича Вавилова, была выпущена в свет марка с его портретом. С. И. Вавилов был выдающимся специалистом по физической оптике. Наряду с исследовательской деятельностью он вел огромную научно-организационную работу. Многие годы С. И. Вавилов был директором Физического института имени П. Н. Лебедева АН СССР и главным редактором Большой Советской Энциклопедии. С 1945 по 1951 год он был Президентом Академии наук СССР. Он был также одним из создателей Всесоюзного общества «Знание» и его первым председателем.

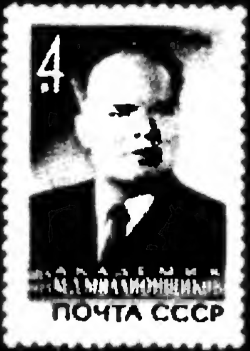
В 1974 году вышли в свет еще две почтовые марки с портретами физиков — членов Академии наук СССР. На одной из них изображен вице-президент Академии наук СССР академик Михаил Дмитриевич Миллионщиков, на другой — академик Лев Андреевич Арцимович. Оба они были членами редакционной коллегии журнала «Квант».

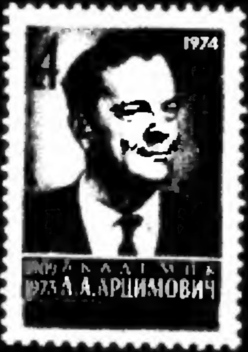












Ученик академика А. Н. Колмогорова академик М. Д. Миллионщиков был одним из ближайших сотрудников И. В. Курчатова. Он внес крупный вклад в ряд областей современной гидродинамики и, в частности, в исследование гидродинамических свойств горячей плазмы. Деятельность М. Д. Миллионщикова на посту вице-президента Академии наук СССР оставила глубокий след в развитии советской науки.

Академик Л. А. Арцимович также был одним из ближайших сотрудников И. В. Курчатова. Основными областями его научных интересов были атомная физика и физическая электроника. После смерти И. В. Курчатова Л. А. Арцимович возглавлял отечественные исследования в области физики горячей плазмы и управляемых термоядерных реакций. В течение многих лет он руководил работой крупнейшего отряда ученых Академии наук, объединенных в Отделение физико-математических наук, а позднее — в Отделение общей физики и астрономии, будучи академиком-секретарем этих отделений.

В. А. Рудов

Индекс 70465

12

ЗОЛОТАЯ МЕДАЛЬ «КАИССЫ»

С 5 по 8 августа 1974 г. в Стокгольме проходил первый чемпионат мира по шахматам среди вычислительных машин. В нем приняли участие 13 программ из 8 стран. Первое место заняла советская программа «Каисса», созданная в Институте проблем управления.

Спортивный характер этого соревнования не должен затенять его научный смысл. Различные алгоритмы для игры в шахматы создаются потому, что эти алгоритмы могут применяться в других задачах, где приходится выбирать решение в сложной ситуации. Ученые избрали в качестве модели для таких задач — очень важных в управлении, экономике и других практических областях — шахматы потому, что, с одной стороны, шахматы имеют простые правила и сложную стратегию, а, с другой стороны, на шахматах хорошо видны достоинства и недостатки алгоритмов.

В прошлом номере журнала писалось о том, как вообще можно научить машину играть в шахматы. В этом номере рассказано о специальной подготовке «Каиссы» к чемпионату.

International Federation for Information Processing
ROBERT MAXWELL MEDAL
World Computer Chess Championship